

**Izabela Pieńkowska**

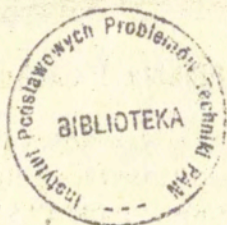
O WŁASNOŚCIACH  
NIESTACJONARNYCH STOKESOWSKICH  
ODDZIAŁYWAŃ HYDRODYNAMICZNYCH

22/1987

WARSZAWA 1987

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 czerwca 1987 r.



56834



N a p r a w a c h   r ę k o p i s u

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 4,23 Ark.druk. 6

Oddano do drukarni w lipcu 1987 r.

Nr zamówienia 417/87

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul. Śniadeckich 8

## O WŁASNOŚCIACH NIESTACJONARNYCH STOKESOWSKICH ODDZIAŁYWAŃ HYDRODYNAMICZNYCH POMIĘDZY SKOŃCZONĄ LICZBĄ SZTYWNYCH KUL

W niniejszej pracy badano niestacjonarne oddziaływania hydrodynamiczne pomiędzy skończoną liczbą sztywnych kul, umieszczonych w cieczy nieściśliwej, nieograniczonej. Przepływ cieczy opisują niestacjonarne równania Stokesa. Niestacjonarne oddziaływania hydrodynamiczne między kulami rozpatrywano w dwóch przypadkach: /a/ w przypadku zanedbywalnie małych przemieszczeń kul, w rozpatrywanym czasie oddziaływania, /b/ przy uwzględnieniu wpływu małych przemieszczeń kul. W szczególności, praca dotyczy niestacjonarnych relacji tarcia w przypadkach /a/ i /b/, oraz niestacjonarnych relacji ruchliwości w przypadku /a/. Otrzymano, w rozpatrywanym przybliżeniu, współczynniki tarcia, oraz współczynniki ruchliwości. Analizowano wpływ efektów niestacjonarności przepływu cieczy, oraz ruchu kul, na relacje tarcia oraz ruchliwości.

### 1. Wprowadzenie

#### 1.1. Uwagi wstępne

Oddziaływania hydrodynamiczne pomiędzy cząstkami, umieszczonymi w płynie, są wynikiem zaburzeń pola prędkości i ciśnienia płynu, wywołanych obecnością cząstek. Wzajemne oddziaływania na siebie tych zaburzeń prowadzą do sprzężenia ruchów cząstek, oraz przepływu płynu. Pierwsze prace, poświęcone tym efektom, dotyczyły ruchu dwóch sztywnych kul w cieczy, w warunkach bezwładowego przepływu cieczy [1]. Celem opisu oddziaływań hydrodynamicznych między tymi kulami poszukiwano się



potencjałem pola prędkości cieczy. Warunki brzegowe na powierzchniach kul spełniono za pomocą metody obrazów. Dalsze prace dotyczyły analizy oddziaływań hydrodynamicznych między sztywnymi kulami, umieszczonymi w cieczy lepkiej [1]. Rozpatrywano mianowicie kule, umieszczone w quasi-stacjonarnym przepływie Stokesa cieczy nieściśliwej. Stosując tzw. metodę odbić, obliczone opór hydrodynamiczny dwóch kul, przy zadanych prędkościach tych kul.

Własności sprzężenia hydrodynamicznego między ruchem cząstek, a przepływem płynu badano następnie w różnych układach cząstki-płyn, oraz w różnych warunkach hydrodynamicznych [36]. Sprzężenia te analizowano zarówno ze względu na podstawowy charakter towarzyszących im zjawisk hydrodynamicznych, jak i ze względu na ich wpływ na własności zawieszin [3], kryształów koloidalnych [7], itd.

## 1.2. Oddziaływania hydrodynamiczne pomiędzy sztywnymi kulami przy przepływach powolnych

Rozpatrzmy oddziaływania hydrodynamiczne między skończoną liczbą sztywnych kul, umieszczonych w cieczy nieściśliwej, w warunkach przepływów powolnych. Na przepływy te składają się quasi-stacjonarne przepływy Stokesa, oraz przepływy, w których przejawiają się słabe efekty inercyjne /zarówno nie-stacjonarne, jak i konwekcyjne/. Przyjmujemy, że ciecz wypełnia ośrodek nieograniczony.

### (i) quasi-stacjonarne przepływy Stokesa

Rozpatrzmy oddziaływania hydrodynamiczne pomiędzy skończoną liczbą  $N$  sztywnych kul, przy przepływach opisywanych quasi-stacjonarnym równaniem Stokesa:



$$(1.2.1) \quad \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

gdzie  $p, \mathbf{v}$  oznaczają ciśnienie i pole prędkości cieczy,  $\mu$  oznacza współczynnik lepkości cieczy.

Przyjmujemy, że siły zewnętrzne  $\mathbf{F}_j^{\text{ext}}$ , oraz momenty sił zewnętrznych  $\mathbf{T}_j^{\text{ext}}$ , przyłożone do kul, równoważą siły oporu hydrodynamicznego  $\mathbf{F}_j$ , oraz momenty sił oporu hydrodynamicznego  $\mathbf{T}_j$ , wywierane przez ciecz na kule:

$$(1.2.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}_j + \mathbf{F}_j^{\text{ext}} &= 0, & m \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} &\approx 0, & \frac{I d\boldsymbol{\omega}_j}{dt} &= 0 \\ \mathbf{T}_j + \mathbf{T}_j^{\text{ext}} &= 0, & j &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Rozpatrywane oddziaływania hydrodynamiczne charakteryzują się więc tym, że przy ich opisie wpływ zarówno inercji cieczy, jak i inercji kul jest możliwy do pominięcia. Były one rozważane, w ciągu ostatniego ćwierćwiecza, w wielu pracach [2]. Do równań ruchu cieczy i kul dołącza się odpowiednie warunki brzegowe, które sprzęgają ruch kul, oraz przepływ cieczy. Na powierzchniach kul, przyjmuje się najczęściej warunek braku poślizgu prędkości. W tych warunkach formułuje się następujące zagadnienie: mając zadane siły zewnętrzne, działające na ciecz, oraz siły zewnętrzne, działające na kule, poszukuje się pola ciśnienia, pola prędkości cieczy /zaburzonego na skutek obecności kul/, oraz prędkości kul. Wiele prac poświęcono również wybranym problemom szczególnym, np. obliczaniu oporu hydrodynamicznego, wywieranego przez ciecz na kule, analizie trajektorii kul, itp.

W przypadku, gdy na umieszczone w cieczy dwie kule nie działają siły, ani momenty sił zewnętrznych, odpowiednie oddziaływania hydrodynamiczne poddano analizie w pracy Batchelor'a i Greena [4]. Natomiast oddziaływania hydrodynamiczne między dwoma kulami

w przypadku, gdy są one pod wpływem zewnętrznych sił, oraz momentów sił, badali, np. w serii prac Schmitz i Felderhof [5,6].

W przypadku umieszczenia w cieczy większej, choć skończonej, liczby kul, opis odpowiednich oddziaływań hydrodynamicznych staje się bardziej złożony. Oddziaływania te, mianowicie, nie posiadają własności addytywności parami, na skutek czego konieczne jest rozpatrywanie grup trzech, czterech, itd., kul. Oddziaływania hydrodynamiczne w takich grupach zależą od przestrzennej konfiguracji kul. Celem opisu tych oddziaływań zastosowano ostatnio rozwinięcie wielokrotnego rozpraszania /multiple-scattering expansion/. Stosowano je przy tym w rozmaitych sformułowaniach, np. sformułowanie Yoshizaki i Yamakawy [9], sformułowanie Mazura i jego współautorów [10].

/ii/ Przepływy, w których występują słabe efekty inercyjne

Oddziaływania hydrodynamiczne między sztywnymi kulami rozpatrywano również w przypadku przepływów, w których występują słabe efekty inercyjne, powstające albo na skutek inercji cieczy, albo na skutek inercji kul. Wpływ efektów inercyjnych na oddziaływania hydrodynamiczne między cząstkami był omawiany ostatnio, np. w pracy przeglądowej Leal'a [11]. Prezentowane przez niego wyniki wskazują, że nawet małe odejście od przepływów quasi-stacjonarnych Stokesa może prowadzić do znaczących zmian ruchu kul.

W tym kontekście, interesujące wyniki zawierają dwie następujące prace:

/i/ Praca Ockendon'a [12] zawiera porównanie wpływu efektów niestacjonarnych, oraz konwekcyjnych, jednakże tylko dla przypadku pojedynczej kuli, umieszczonej w przepływie. Ockendon pokazał, że opór hydrodynamiczny kuli zależy silnie od względnych wielkości tych czynników,

/ii/ W pracy Davis'a [13] rozpatrywano wpływ inercji kul na ich trajektorie. Wpływ ten analizowano w związku z badaniem szybkości koagulacji kul, opadających w polu siły ciężkości. Wykazano, że wpływ inercji kul staje się znaczący, gdy gęstość kul jest znacznie większa od gęstości cieczy.

substancji



## 1.3 Quasi-stacjonarne relacje tarcia i ruchliwości

W licznych pracach, podejmujących temat oddziaływań hydrodynamicznych, rozpatrywano tzw. relacje tarcia i ruchliwości, będące związkami między oporem hydrodynamicznym kul, a ich prędkościami. Pierwsze prace na temat tych związków dotyczyły warunków quasi-stacjonarnych ([2] – linowość tych relacji).

Relacje tarcia opisują siłę oporu hydrodynamicznego  $F_i$ , oraz moment siły oporu  $T_i$ , wywierane przez ciecz na kule, w przypadku zadanych prędkości kul  $\dot{R}_i^0, \omega_i$ :

$$(1.3.1) \quad \begin{aligned} F_i &= - \sum_j \zeta_{ij}^{TT} \cdot \dot{R}_j^0 - \sum_j \zeta_{ij}^{TR} \cdot \omega_j, \\ T_i &= - \sum_j \zeta_{ij}^{RT} \cdot \dot{R}_j^0 - \sum_j \zeta_{ij}^{RR} \cdot \omega_j, \end{aligned} \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Relacje ruchliwości natomiast opisują translacyjne i rotacyjne prędkości kul, w przypadku zadanego oporu hydrodynamicznego kul:

$$(1.3.2) \quad \begin{aligned} \dot{R}_i^0 &= - \sum_j \mu_{ij}^{TT} \cdot F_j - \sum_j \mu_{ij}^{TR} \cdot T_j, \\ \omega_i &= - \sum_j \mu_{ij}^{RT} \cdot F_j - \sum_j \mu_{ij}^{RR} \cdot T_j, \end{aligned}$$

gdzie współczynniki tarcia  $\zeta_{ij}^{(\dots)}$ , oraz współczynniki ruchliwości  $\mu_{ij}^{(\dots)}$  są tensorami drugiego rzędu.

Współczynniki tarcia spełniają następujące relacje symetrii:

$$(1.3.3) \quad \zeta_{ij}^{TT} = (\zeta_{ji}^{TT})^\dagger, \quad \zeta_{ij}^{RT} = (\zeta_{ji}^{TR})^\dagger, \quad \zeta_{ij}^{RR} = (\zeta_{ji}^{RR})^\dagger,$$

gdzie  $\dagger$  oznacza transpozycję tensora. Relacje te wynikają z twierdzenia o wzajemności dla przepływów quasi-stacjonarnych:



$$(1.3.4) \int dS P' \cdot v'' = \int dS P'' \cdot v',$$

gdzie  $(v', P')$ , oraz  $(v'', P'')$  oznaczają pola prędkości i tensory naprężeń, opisujące dwa różne przepływy Stokesa cieczy nieściśliwej [2]. W monografii tej dyskutowano również związki między współczynnikami tarcia, a współczynnikami ruchliwości:

$$(1.3.5) \begin{pmatrix} \mu_{ij}^{TT} & \mu_{ij}^{TR} \\ \mu_{ij}^{RT} & \mu_{ij}^{RR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{ij}^{TT} & \zeta_{ij}^{TR} \\ \zeta_{ij}^{RT} & \zeta_{ij}^{RR} \end{pmatrix}^{-1},$$

przy czym współczynniki ruchliwości spełniają następujące relacje:

$$(1.3.6) \mu_{ij}^{TT} = (\mu_{ji}^{TT})^\dagger, \quad \mu_{ij}^{TR} = (\mu_{ji}^{RT})^\dagger, \quad \mu_{ij}^{RR} = (\mu_{ji}^{RR})^\dagger$$

Tensory  $\zeta_{ij}^{(\dots)}$ , oraz  $\mu_{ij}^{(\dots)}$  zależą od rozkładu przestrzennego kul. Wyrażenia, opisujące te zależności, przedstawia się zwykle w postaci rozwinięcia na szereg potęgowy względem odwrotności modułów odległości między środkami kul. Rozpatrywane współczynniki tarcia i ruchliwości zależą od chwilowej konfiguracji kul /w przypadku quasi-stacjonarym nie pojawiają się efekty pamięci/. Opisywane relacje tarcia, oraz ruchliwości dotyczą cieczy, spoczywającej w nieobecności kul. W następnych pracach rozpatrywano relacje tarcia i ruchliwości dla przypadku kul umieszczonych w cieczy płynącej, oraz dyskutowano nie tylko siłę i moment siły oporu hydrodynamicznego, lecz również wyższe momenty tensora naprężeń [5].

Omawiane relacje tarcia, oraz ruchliwości:

- (i) umożliwiają obliczenie oporu hydrodynamicznego kul, bez konieczności posługiwania się wyrażeniami, opisującymi pola prędkości i ciśnienia cieczy,
- (ii) są stosowane przy rozwiązywaniu równań ruchu kul, oraz przy badaniu trajektorii kul,
- (iii) występują w statystycznej analizie własności zawieszin.

#### 1.4 Niestacjonarne oddziaływanie hydrodynamiczne pomiędzy sztywnymi kulami przy przepływach Stokesa.

Jakościowo biorąc, niestacjonarne równania Stokesa opisują przepływy, w których istotne są lokalne efekty inercyjne, (natomiast efekty konwekcyjne — można zaniedbać). Z punktu widzenia analizy oddziaływań hydrodynamicznych między kulami, istotne są następujące różnice między przepływami quasi-stacjonarnymi, a niestacjonarnymi [27]:

- (i) różnice we własnościach asymptotycznych rozwiązań fundamentalnych,
- (ii) różnice we własnościach przepływów przy zmianie kierunku czasu.

Prowadzą one do różnic we własnościach oporu hydrodynamicznego oraz ruchliwości kul, rozpatrywanych w warunkach quasi-stacjonarnych, oraz niestacjonarnych. W przypadku sztywnej kuli o promieniu  $a$ , poruszającej się z prędkością translacyjną  $\dot{R}^0$  w cieczy, spoczywającej w nieskończoności, quasi-stacjonarny opór hydrodynamiczny jest równy  $F = -6\pi a \mu \dot{R}^0$ . Natomiast w warunkach niestacjonarnych, przy zerowych warunkach początkowych, opór ten wynosi:

$$(1.4.1) F(t) = -6\pi a \mu \dot{R}^0(t) - \frac{2}{3} \pi a^3 g \frac{d\dot{R}^0(t)}{dt} - 6\pi a \mu \int_0^t \frac{a}{\sqrt{\pi \nu}} \frac{d\tau}{|t-\tau|} \frac{d\dot{R}^0(\tau)}{d\tau},$$

gdzie  $\nu = \mu/g$ ,  $g$  oznacza gęstość cieczy. Pierwszy całon opi-



suje opór quasi-stacjonarny. Następny człon przedstawia wkład od wirtualnej masy cieczy, przy czym objętość tej masy jest równa połowie objętości kuli. Ostatni człon opisuje tzw. siłę Basseta. Siła ta zależy od przyspieszenia kuli w rozpatrywanym czasie oddziaływania, z wagą  $(\dot{t} - \tau)^{-1/2}$ . Opór hydrodynamiczny kuli zależy więc od historii ruchu kuli /efekt pamięci/. W przypadku umieszczenia kuli w cieczy płynącej, opór hydrodynamiczny tej kuli jest równy:

$$(1.4.2) \quad F(\tilde{\omega}) = -6\pi\mu a \left[ (1 + \tilde{\mathcal{L}}a + \frac{1}{9} \tilde{\mathcal{L}}^2 a^2) \dot{R}^0(\tilde{\omega}) + \right. \\ \left. - (1 + \tilde{\mathcal{L}}a) \overline{v}_0^s(\tilde{\omega}) - \frac{1}{3} \tilde{\mathcal{L}}^2 a^2 \overline{v}_0^v(\tilde{\omega}) \right],$$

gdzie  $\tilde{\mathcal{L}} = [-i\tilde{\omega}/\nu]^{1/2}$ ,  $\text{Re} \tilde{\mathcal{L}} \gg 0$ ,  $\tilde{\omega}$  oznacza częstość,  $v_0(r, \tilde{\omega})$  - prędkość cieczy, wywołaną działaniem sił zewnętrznych,

$$\overline{v}_0^s = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|r|=a} v_0(r, \tilde{\omega}) dS, \quad \overline{v}_0^v = \frac{3}{4\pi a^3} \int_{|r| \leq a} v_0(r, \tilde{\omega}) d\tau.$$

Powyższe wyrażenie, opisujące niestacjonarny opór hydrodynamiczny kuli, otrzymali Mazur i Bedeaux [18].

W porównaniu z wyrażeniem (1.4.1), różni się ono dwoma ostatnimi członami opisującymi wpływ niestacjonarności pola prędkości cieczy  $v_0(r, t)$ . W rezultacie, opór hydrodynamiczny zależy nie tylko od historii ruchu kuli, ale również od historii przepływu cieczy  $v_0(r, t)$ . Analogiczne wyrażenie, opisujące niestacjonarny moment siły oporu hydrodynamicznego pojedynczej kuli, otrzymali autorzy prac [19]. Przy wyprowadzeniu powyższych zależności założono, że wpływ przemieszczenia kuli, w rozpatrywanym czasie oddziaływania, na jej opór hydrodynamiczny jest do pominięcia.

Wpływ niestacjonarności na ruch kul badano również w przypadku umieszczenia w przepływie skończonej liczby sztywnych kul [20]. W pracy Searloos'a i Mazura, analizowano wpływ niestacjonarności na relacje ruchliwości, natomiast w pracy [21] Leichtberg'a, Weinbaum'a, Pfeffer'a i Gluckman'a - wpływ



niestacjonarności na trajektorie kul. Pierwsza praca dotyczyła relacji ruchliwości w przypadku umieszczenia kul w cieczy spoczywającej w nieskończoności. Współczynniki ruchliwości kul obliczono z dokładnością do członów trzeciego rzędu względem dwóch zmiennych bezwymiarowych:  $a/R_{uj}$ , oraz  $a\sqrt{2\bar{\omega}/v}$ . Pierwsza z tych zmiennych pozwala opisać zależność współczynników ruchliwości od rozkładu przestrzennego kul  $/R_{uj}$  oznacza odległość między środkami  $j$ -tej i  $u$ -tej kuli/, druga - zależność od niestacjonarnego charakteru ruchu cieczy. Autorzy zwrócili uwagę na różnice we własnościach współczynników ruchliwości w dwóch szczególnych przypadkach oddziaływań hydrodynamicznych, scharakteryzowanych nierównościami: (i)  $R_{uj}\sqrt{2\bar{\omega}/v} \ll 1$ , oraz (ii)  $R_{uj}\sqrt{2\bar{\omega}/v} \gg 1$ .

Druga z wymienionych prac dotyczy wpływu niestacjonarności na trajektorie kul, opadających w cieczy, pod działaniem siły ciężkości. Wpływ niestacjonarności ruchu został opisany w sposób przybliżony. Uzyskane wyniki wskazują, że działanie siły Basset'a może prowadzić do znacznych różnic w odległościach między kulami, występujących w warunkach quasi-stacjonarnych, w porównaniu z odległościami, występującymi w warunkach niestacjonarnych.

Wpływ niestacjonarności oddziaływań hydrodynamicznych obserwuje się także w przypadku zawieszin. W pracy [22] analizowano z tego punktu widzenia własności zawiesziny o losowym rozkładzie kul. Autorzy pokazali, że w rozpatrywanym przybliżeniu lepkość zawiesziny jest wielkością zależną od częstości, oraz od wektora falowego. W rozwinięciu wyrażenia, opisującego lepkość, na szereg potęgowy względem koncentracji objętościowej kul, wpływ niestacjonarności przejawia się już w członach liniowych względem koncentracji.

W pracy [7] analizowano efekty niestacjonarne, występujące w nieskończonej siatce kul, wykonujących małe drgania. Analiza ta stanowiła część wstępną opisu własności kryształków koloidalnych. Uzyskane wyniki wskazują, że wpływ oddziaływań hydrodynamicznych między kulami jest silniejszy w przypadku regularnych siatek, w porównaniu z losowym rozkładem kul.

Wymieniona praca jest jednym z przykładów tego, że tema-

tyka oddziaływań hydrodynamicznych między cząstkami ingeruje w szerszym zakresie zagadnień, niż zagadnienie klasycznej hydrodynamiki.

### 1.5 Cel pracy

W niniejszej pracy badane są niestacjonarne oddziaływania hydrodynamiczne pomiędzy skończoną liczbą sztywnych kul. Praca ta dotyczy oddziaływań hydrodynamicznych przy przepływach Stokesa, tj. takich, w których można pominąć konwekcyjne efekty inercyjne. W szczególności, analizowany jest w niej wpływ efektów niestacjonarnych na relacje tarcia, opisujące opór hydrodynamiczny, oraz <sup>na</sup> ruchliwość kul. Przyjęto, że kule umieszczone są w cieczy nieściśliwej, nieograniczonej. Obecność kul w przepływie opisano za pomocą tzw. sił indukowanych, rozłożonych na powierzchniach kul [9, 18, 26].

Aby opisać niestacjonarne oddziaływania hydrodynamiczne między kulami, zastosowano podejście całkowe. Podejścia te, w zastosowaniu do rozwiązywania zagadnień brzegowych dla niestacjonarnego równania Stokesa, omawiane są np. w artykule przeglądowym Berkera [17], oraz monografiach - *Лыриженская* [23], *Белонасов, Терноус* [33]. W niniejszej pracy oparto się na relacjach całkowych w sformułowaniu *Солонникова* [24]. Aby przejść do rozpatrywanego zagadnienia szczególnego, wykorzystano warunki brzegowe na powierzchniach kul. Podejście całkowe prowadzi do otrzymania relacji między siłami indukowanymi na powierzchniach kul, a prędkościami kul względem cieczy. W otrzymanym układzie równań całkowych występują niestacjonarne tensory Greena, zależące, w ogólnym przypadku, nieliniowo od trajektorii kul.

W niniejszej pracy rozpatrywane są dwa przypadki szczególne niestacjonarnych oddziaływań hydrodynamicznych. Są to oddziaływania hydrodynamiczne pomiędzy kulami przemieszczającymi się na tyle powoli, że zależność tensorów Greena od trajektorii kul ulega istotnemu uproszczeniu. Pierwsza część pracy (§2.2, §3) dotyczy takich niestacjonarnych oddziaływań hydrodynamicznych, w przypadku których można pominąć zależ-



ność tensorów Greena od przemieszczeń kul. Ta niezależność tensorów Greena jest cechą wspólną rozpatrywanych oddziaływań niestacjonarnych, oraz oddziaływań quasi-stacjonarnych. W drugiej części pracy natomiast uwzględniono wpływ małych przemieszczeń kul. Jest on dyskutowany w §2.3, oraz w §4.

Oddziaływania hydrodynamiczne w obu przypadkach przedstawiono w postaci wielokrotnego rozpraszania zaburzeń pola prędkości cieczy /multiple scattering approach/. Są one opisane za pomocą tzw. tensorów niestacjonarnych oddziaływań hydrodynamicznych. Tensory takie, celem opisu oddziaływań quasi-stacjonarnych, wprowadzili po raz pierwszy Yoshizaki i Yamakawa [9].

Znajomość własności tensorów niestacjonarnych oddziaływań hydrodynamicznych posłużyła do otrzymania niestacjonarnych relacji tarcia, oraz ruchliwości.



2. Podstawowe związki między siłami indukowanymi, a prędkościami kul względem cieczy

2.1. Relacje całkowe między siłami indukowanymi, a prędkościami kul względem cieczy

Rozważmy niestacjonarne oddziaływania hydrodynamiczne pomiędzy skończoną liczbą  $N$  sżywnych kul o promieniu  $a$ , umieszczonych w cieczy nieściśliwej, nieograniczonej. Na kule działają zależne od czasu siły zewnętrzne  $\mathbf{F}_j^{\text{ext}}$ , oraz momenty sił zewnętrznych  $\mathbf{T}_j^{\text{ext}}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , natomiast na ciecz działają również zależne od czasu siły zewnętrzne  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$ . Położenia kul, będące także funkcjami czasu, określa się w ustalonym układzie współrzędnych  $\mathbf{r}(x, y, z)$ . Wektor  $\mathbf{R}_j$  wskazuje dowolny punkt, położony na powierzchni  $j$ -tej kuli, natomiast wektor  $\mathbf{R}_j^0$  - środek tej kuli. Z każdą kulą związany jest również lokalny układ współrzędnych  $\mathbf{r}_j = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_j^0$ . W tych lokalnych układach współrzędnych  $\Omega_j$  oznacza współrzędne kątowe wektora  $\mathbf{r}_j$ , z dowolnie ustalonym położeniem osi polarnej ( $\Omega_j = (\theta_j, \phi_j)$ ).

Prędkość  $j$ -tej kuli wynosi

$$(2.1.1) \quad \dot{\mathbf{R}}_j(\Omega_j, t) = \dot{\mathbf{R}}_j^0(t) + \omega_j(t) \times \mathbf{r}_j, \quad |\mathbf{r}_j| = a,$$

składając się z prędkości translacyjnej  $\dot{\mathbf{R}}_j^0(t)$  oraz prędkości kątowej  $\omega_j(t)$ .

Obecność kul w przepływie jest opisana za pomocą tzw. sił indukowanych  $\mathbf{f}_j(\Omega_j, t)$ , rozłożonych na powierzchniach kul [35]. Powierzchnie te są opisane poprzez odpowiednie  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j(\Omega_j, t))$ . Siły indukowane stanowią następujący człon źródłowy w równaniu ruchu cieczy:

$$(2.1.2) \quad \sum_{j=1}^N \int d\Omega_j \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_j(\Omega_j, t)] \mathbf{f}_j(\Omega_j, t).$$

Tak więc niestacjonarne równania ruchu rozpatrywanej cieczy nieściśliwej są postaci

$$(2.1.3) \quad \left( S \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \right) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \nabla p(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + \sum_{j=1}^N \int d\Omega_j \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_j(d_j, t)] \mathbf{f}_j(d_j, t),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

gdzie  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , oraz  $p(\mathbf{r}, t)$  oznaczają zależne od czasu pole prędkości i ciśnienia cieczy;  $\mathbf{f}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \neq 0$  w obszarze poza kulami. Przyjęto następujący warunek początkowy [24]:

$$(2.1.4) \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{y}(\mathbf{r}).$$

W objętości kul zachodzi natomiast [18]:

$$S \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad |\mathbf{r}| < a,$$

gdzie  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  oznacza tensor naprężeń dla całego układu.

Opis obecności kul w przepływie za pośrednictwem sił indukowanych umożliwia rozpatrywanie równań ruchu *cieczy* oraz warunku początkowego (2.1.4) w całej przestrzeni [8].

W tym celu jednakże konieczne jest określenie dywergencji tensora naprężeń w obszarach zajętych przez kule. Zależności (2.1.3) są mianowicie spełnione w całej przestrzeni, jeżeli tę dywergencję określimy następująco:

$$(2.1.5) \quad \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}_j, t) = -S \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\dot{\mathbf{R}}_j^0(t) + \omega_j(t) \times \mathbf{r}_j], \quad |\mathbf{r}_j| < a,$$

W obszarze zajętym przez kulę tensor naprężeń zależy od pochodnych względem czasu prędkości kul. Na powierzchniach kul występują dodatkowe członki - siły indukowane  $\mathbf{f}_j(d_j, t)$ .



Korzystając z powyższych równań ruchu, otrzymuje się bezpośrednią zależność sił oporu hydrodynamicznego  $F_j(t)$ , oraz momentów sił  $T_j(t)$ , wywieranych na kule przez ciecz, od sił indukowanych  $f_j(\Omega_j, t)$ :

$$(2.1.6) \quad F_j(t) = - \int_A \nabla \cdot P(\tau_j, t) d\tau_j = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \frac{d}{dt} \dot{R}_j^0(t) - \int f_j(\Omega_j, t) d\Omega_j,$$

$$T_j(t) = - \int_A \tau_j \times (\nabla \cdot P(\tau_j, t)) d\tau_j = \frac{8}{15} \pi a^5 \rho \frac{d}{dt} \omega_j(t) - \int \tau_j \times f_j(\Omega_j, t) d\Omega_j.$$

Aby otrzymać związek między siłami  $f_j(\Omega_j, t)$ , a prędkościami kul, pole prędkości cieczy wyraża się poprzez siły wywierane na ciecz, stosując podejście całkowe. A mianowicie pole prędkości cieczy można przedstawić w postaci następujących splotów:

$$(2.1.7) \quad v(\tau, t) = v^0(\tau, t) + \int_0^t dt' \int_{E_3} d\tau' G(\tau - \tau', t - t') \cdot \sum_{j=1}^N \int d\Omega_j \delta[\tau' - R_j(\Omega_j, t')] f_j(\Omega_j, t'),$$

gdzie na  $v^0(\tau, t)$  składają się dwa pola:

$$v^{01}(\tau, t) = \int_0^t dt' \int_{E_3} G(\tau - \tau', t - t') \cdot f^{ext}(\tau', t') d\tau',$$

wynikające z działania na ciecz sił zewnętrznych  $f^{ext}(\tau, t)$ , oraz

$$v^{02}(\tau, t) = \int_{E_3} d\tau' \Gamma(\tau - \tau', t) \cdot \gamma(\tau'),$$

wynikające z występowania różnego od zera początkowego pola prędkości cieczy. Ostatni człon w wyrażeniu (2.1.7) opisuje pole prędkości cieczy, wynikające z działania sił indukowanych  $f_j(\Omega_j, t)$ . W powyższych całkach, całkowanie względem zmiennej  $\tau$  rozciąga się na całą przestrzeń  $E_3$  (por. §3.4, §3.5). Funkcje Greena, występujące w tych całkach, można przedstawić w następującej postaci [24]:

$$G(\tau, t) = \int \frac{d\tilde{\omega}}{2\pi} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{\exp[ik \cdot \tau + i\tilde{\omega} t]}{i\tilde{\omega} g + \mu |k|^2} \left[ 1 - \frac{k \cdot \tau}{|k|^2} \right], t > 0,$$



$$(2.1.8) \quad \Gamma(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\tilde{\omega}}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\tilde{\omega}t]}{i\tilde{\omega}\zeta + \mu|\mathbf{k}|^2} 1, \quad t > 0,$$

gdzie  $(\mathbf{k}, \tilde{\omega})$  są zmiennymi sprzężonymi z  $(\mathbf{r}, t)$  poprzez transformacje Fouriera.

Na powierzchniach kul przyjęto warunki brzegowe braku poślizgu pola prędkości:

$$(2.1.9) \quad \dot{R}_j(\mathcal{A}_j, t) = \mathbf{v}(R_j, t), \quad j = 1, \dots, N.$$

Korzystając z wyrażen (2.1.7), oraz (2.1.9), otrzymuje się  $N$  sprzężonych równań całkowych:

$$(2.1.10) \quad \begin{aligned} V_j(\mathcal{A}_j, t) &= \int_0^t dt' \int d\mathcal{A}_j G[R_j(\mathcal{A}_j, t) - R_j'(\mathcal{A}_j', t'), t-t'] \cdot \mathcal{A}_j'(\mathcal{A}_j', t') + \\ &+ \sum_{k \neq j} \int_0^t dt' \int d\mathcal{A}_k G[R_j(\mathcal{A}_j, t) - R_k'(\mathcal{A}_k', t'), t-t'] \cdot \mathcal{A}_k'(\mathcal{A}_k', t'), \\ V_j(\mathcal{A}_j, t) &= \dot{R}_j(\mathcal{A}_j, t) - \mathbf{v}^{01}(\mathcal{A}_j, t) - \mathbf{v}^{02}(\mathcal{A}_j, t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

gdzie  $V_j(\mathcal{A}_j, t)$  oznacza prędkość względną  $j$ -tej kuli w stosunku do prędkości cieczy. W wyrażeniu tym, pierwszy człon po prawej stronie opisuje oddziaływanie pojedynczej kuli z cieczą, natomiast człon drugi - oddziaływania hydrodynamiczne między kulami. Funkcje Greena, występujące w tych członach, zależą od trajektorii kul. Zależą więc one od położen początkowych, oraz od przemieszczeń kul w rozpatrywanym czasie oddziaływania.

W niniejszej pracy analizowane są dwa szczególne przypadki niestacjonarnych oddziaływań hydrodynamicznych, scharakteryzowane odpowiednimi własnościami przemieszczeń kul (por. §2.2, oraz §2.3).

Podejście całkowe prowadzi więc do otrzymania bezpośredniej relacji między siłami indukowanymi, a względnymi prędkościami-

mi kul. W związku z tym jest ono użyteczne m.in. przy otrzymaniu relacji tarcia, oraz ruchliwości, rozpatrywanych w tej pracy.

## 2.2. Oddziaływanie hydrodynamiczne w przypadku zaniedbywalnie małych przemieszczeń kul

W tej części pracy rozpatrujemy takie niestacjonarne oddziaływania hydrodynamiczne, w przypadku których konfiguracja przestrzenna kul pozostaje "niemal" niezmienna w rozpatrywanym czasie oddziaływania. Jest to cecha wspólna rozpatrywanych oddziaływań <sup>lub oddziaływań</sup> quasi-stacjonarnych.

W tym przypadku, zależność funkcji Greena, występujących w (2.1.10), od trajektorii kul, ulega znacznemu uproszczeniu. Aby opisać tę zależność, korzystamy z przedstawienia tensora Greena za pomocą transformaty Fouriera względem zmiennych przestrzennych:

$$\begin{aligned}
 (2.2.1) \quad & G[R_j(\alpha_j, t) - R'_k(\alpha'_k, t'), t - t'] = \quad (t > 0) \\
 & = \frac{1}{8} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \exp[ik \cdot (R_j(\alpha_j, t) - R'_k(\alpha'_k, t')) - \nu |k|^2 (t - t')] \left(1 - \frac{k \cdot k}{|k|^2}\right) = \\
 & = \frac{1}{8} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \exp[ik \cdot (R_j(0) - R'_k(0)) - \nu |k|^2 (t - t')] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ ik \cdot \left( \int_0^t R_j(\tau) d\tau - \int_0^{t'} R'_k(\tau) d\tau \right) \right]^n \left(1 - \frac{k \cdot k}{|k|^2}\right).
 \end{aligned}$$

Pominięcie przemieszczeń kul, w rozpatrywanym czasie oddziaływania, oznacza zaniedbanie członów rzędu wyższego niż zerowy w rozwinięciu na szereg potęgowy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ ik \cdot \left( \int_0^t R_j(\tau) d\tau - \int_0^{t'} R'_k(\tau) d\tau \right) \right]^n$$

W rozpatrywanym przypadku oddziaływań hydrodynamicznych, ten-



tensor Greena przyjmuje postać:

(i) gdy opisujemy samo-oddziaływania (tj. oddziaływania z uwagą pojedynczych kul)

$$(2.2.2.) \quad G[R_j(\mathcal{d}_j, t) - R_j'(\mathcal{d}_j', t'), t - t'] \approx t > 0, \\ \approx \frac{1}{S} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \exp[ik \cdot (\tau_j(0) - \tau_j'(0)) - v|k|^2(t-t')] \left(1 - \frac{kk}{|k|^2}\right),$$

(ii) gdy opisujemy oddziaływania wzajemne

$$G[R_j(\mathcal{d}_j, t) - R_k'(\mathcal{d}_k', t'), t - t'] \approx t > 0, \\ \approx \frac{1}{S} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \exp[ik \cdot (R_{kj} + \tau_j(0) - \tau_k'(0)) - v|k|^2(t-t')] \left(1 - \frac{kk}{|k|^2}\right),$$

gdzie  $R_{kj} = R_j^0(0) - R_k^0(0)$  oznacza odległość między środkami j-tej, oraz k-tej kuli, w chwili  $t = 0$ . Zależność tensorów Greena od trajektorii kul redukuje się więc do ich zależności od ustalonych /początkowych/ położeń kul.

Przyjęcie tej przybliżonej postaci tensorów Greena prowadzi do następującego przekształcenia równań całkowych (2.1.10):

$$(2.2.3) \quad V_j(\mathcal{d}_j(0), t) = \int_0^t dt' \int d\mathcal{d}_j' \frac{1}{S} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \exp[ik \cdot (\tau_j(0) - \tau_j'(0)) - v|k|^2(t-t')] \left(1 - \frac{kk}{|k|^2}\right) \cdot \mathcal{A}_j(\mathcal{d}_j(0), t') + \sum_{k \neq j} \int_0^t dt' \int d\mathcal{d}_k' \frac{1}{S} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \exp[ik \cdot (R_{kj} + \tau_j(0) - \tau_k'(0)) - v|k|^2(t-t')] \cdot \left(1 - \frac{kk}{|k|^2}\right) \cdot \mathcal{A}_k(\mathcal{d}_k(0), t').$$

Rozwiązanie funkcji  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j(0))$ ,  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j'(0))$ ,  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_k'(0))$ , prędkości względnych  $V_j(\mathcal{d}_j(0), t)$ , oraz sił indukowanych  $\mathcal{A}_j(\mathcal{d}_j(0), t)$  w bazie unormowanych powierzchniowych harmonik sferycznych  $Y_l^m$  [25]

$$(2.2.4) \quad V_j(\mathcal{d}_j(0), t) = \sqrt{4\pi} \sum_{lm} V_{j,lm}(t) Y_l^m(\theta_j(0), \phi_j(0)), \\ \mathcal{A}_j(\mathcal{d}_j(0), t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{lm} \mathcal{A}_{j,lm}(t) Y_l^m(\theta_j(0), \phi_j(0)), \\ \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j(0)] = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(\tau_j k) Y_l^m(\theta_j(0), \phi_j(0)) Y_l^{-m}(\chi, \xi),$$

gdzie  $j_1(r_{j,k})$  oznacza sferyczną funkcję Bessela pierwszego rzędu,  $\mathbf{k} = (k, \chi, \zeta)$  we współrzędnych sferycznych,

$$0 \leq l < \infty, \quad |m| \leq l,$$

pozwala wykonać całkowania po powierzchniach kul, występujące w (2.2.3). W ten sposób otrzymujemy układ równań całkowych względem czasu, w którym występują współczynniki rozwinięcia prędkości względnych  $\mathbf{V}_{j,l,m}(t)$ , sił indukowanych  $\mathbf{f}_{j,l,m}(t)$ , oraz tzw. tensory oddziaływań hydrodynamicznych  $\mathbf{T}_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}$ :

$$(2.2.5) \quad \mathbf{V}_{j,l_1 m_1}(t) = \int dt' \sum_{l_2 m_2} \mathbf{T}_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(\mathbf{O}_{j_1}, t-t') \cdot \mathbf{f}_{j,l_2 m_2}(t') + \\ + \sum_{k \neq j} \int dt' \sum_{l_2 m_2} \mathbf{T}_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(\mathbf{R}_{kj}, t-t') \cdot \mathbf{f}_{k,l_2 m_2}(t').$$

Tensory oddziaływań hydrodynamicznych są równe:

(i) dla przypadku samo-oddziaływań

$$(2.2.6) \quad \mathbf{T}_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(\mathbf{O}_{j_1}, t) = (4\pi)^2 i^{l_1 - l_2} \frac{1}{S} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \exp[-v|k|^2 t] j_{l_1}(ak) j_{l_2}(ak) \times \\ \times Y_{l_1}^{-m_1}(\chi, \zeta) Y_{l_2}^{m_2}(\chi, \zeta) \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}{|k|^2}\right), \quad t > 0,$$

$$(ii) \text{ dla przypadku oddziaływań wzajemnych } \mathbf{T}_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(\mathbf{R}_{kj}, t) = \\ = 4\pi i^{l_1 - l_2} \frac{1}{S} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{kj} - v|k|^2 t] j_{l_1}(ak) j_{l_2}(ak) Y_{l_1}^{-m_1} Y_{l_2}^{m_2} \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}{|k|^2}\right).$$

Działają one na współczynniki rozwinięcia sił indukowanych  $\mathbf{f}_{j,l,m}(t)$ . W rozpatrywanym tutaj przypadku oddziaływań hydrodynamicznych, tensory oddziaływań wzajemnych zależą od ustalonych odległości między kulami /równych odległości w chwili  $t = 0/$ .

Tensory samo-oddziaływań, oraz oddziaływań wzajemnych wprowadzili po raz pierwszy do opisu oddziaływań hydrodynamicznych Yoshizaki, oraz Yamakawa. Praca ich dotyczyła warunków quasi-stacjonarnych. Podejście Yoshizaki, oraz Yamaka-



wa'y zostało w niniejszej pracy zmodyfikowane tak, aby objęło ono oddziaływania niestacjonarne.

Aby otrzymanemu powyżej układowi równań całkowych nadać prostszą postać korzystamy z faktu, że występujące w nim całki są jednostronnymi splotami. Zastosowanie więc transformacji Laplace'a względem czasu prowadzi do układu równań algebraicznych:

$$(2.2.7) \quad V_{j, l_1 m_1}^i(p) = \sum_{l_2 m_2} T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(O_j, p) \cdot \psi_{j, l_2 m_2}^i(p) + \\ + \sum_{k \neq j} \sum_{l_2 m_2} T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, p) \cdot \psi_{k, l_2 m_2}^i(p),$$

gdzie  $p$  jest zmienną sprzężoną z  $t$ , oraz  $\text{Re } \sqrt{p} > 0$ .

Budowa tego układu równań jest analogiczna do budowy układu, opisującego oddziaływanie quasi-stacjonarne. Jest to skutkiem ograniczeń, nałożonych na rozpatrywane tutaj oddziaływania niestacjonarne.

Korzystając z układu równań (2.2.7), współczynniki rozwinięcia sił indukowanych  $\psi_{j, l m}^i(p)$  można przedstawić w postaci:

$$(2.2.8) \quad \psi_{j, l_1 m_1}^i(p) = \sum_{l_2 m_2} \tilde{T}_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(O_j, p) \cdot [V_{j, l_2 m_2}^i(p) + \\ - \sum_{k \neq j} \sum_{l_3 m_3} T_{l_2 m_2}^{l_3 m_3}(R_{kj}, p) \cdot \psi_{k, l_3 m_3}^i(p)].$$

Występujący powyżej odwrotny tensor samo-oddziaływania jest zdefiniowany następująco [26]:

$$(2.2.9) \quad \sum_{l_3 m_3} \tilde{T}_{l_1 m_1}^{l_3 m_3}(O_j, p) \cdot T_{l_3 m_3}^{l_2 m_2}(O_j, p) = 1 \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}.$$

Zależności (2.2.8) pozwalają otrzymać wyrażenie iteracyjne dla współczynników rozwinięcia  $\psi_{j, l m}^i(p)$ :

$$(2.2.10) \quad \phi_{j, l_1 m_1}^i(p) = \sum_{l_2 m_2} \tilde{T}_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(0_{j, p}) \cdot [V_{j, l_2 m_2}^i(p) - \sum_{k \neq j} \sum_{\substack{l_3 m_3 \\ l_4 m_4}} T_{l_2 m_2}^{l_3 m_3}(R_{k, j, p}) \cdot \tilde{T}_{l_3 m_3}^{l_4 m_4}(0_{k, p}) \cdot V_{k, l_4 m_4}^i(p) + \sum_{k \neq j} \sum_{k_1 \neq k} \sum_{l_5 m_5} T_{l_4 m_4}^{l_5 m_5}(R_{k, j, p}) \cdot \tilde{T}_{l_5 m_5}^{l_6 m_6}(0_{k_1, p}) \cdot T_{l_5 m_5}^{l_6 m_6}(R_{k_1, k, p}) \cdot \tilde{T}_{l_6 m_6}^{l_7 m_7} \dots]$$

$$\tilde{T}_{l_5 m_5}^{l_6 m_6}(0_{k_1, p}) \cdot V_{k_1, l_6 m_6}^i(p) + \dots$$

(i=3,4,5,6)

W wyrażeniach tych obowiązuje reguła wykluczania /the exclusion principle/  $k_1 \neq k \neq j$ . Opisują one oddziaływania hydrodynamiczne między kulami jako wyniki wielokrotnego rozpraszania. Pierwszy człon po prawej stronie dotyczy oddziaływania z cieczą pojedynczej kuli /oddziaływanie jednokrotne/. Następne człony, kolejno, dotyczą przypadków oddziaływań dwukrotnych, trzykrotnych, itd. Posiadają one następującą budowę: odwrotne tensory samo-oddziaływania, działając na względne prędkości kul, opisują powstające siły tarcia. Następnie, tensory oddziaływań wzajemnych, działając na te siły tarcia, opisują zaburzenia pola prędkości w całej objętości cieczy. Wreszcie, odwrotne tensory samo-oddziaływania, działając na zaburzenia pola prędkości na powierzchniach kul, opisują powstające siły tarcia, etc. W rezultacie, współczynniki rozwinięcia sił indukowanych  $\phi_{j, l m}^i(p)$  zależą od różnych sekwencji oddziaływań hydrodynamicznych między kulami, generowanych przez odpowiednie współczynniki rozwinięcia prędkości względnych  $V_{j, l m}^i(p)$ . Własności rozpatrywanych sekwencji opisuje się za pośrednictwem własności odpowiednich tensorów oddziaływań hydrodynamicznych. Znajomość tych własności prowadzi, korzystając z zależności (2.2.10), oraz (2.2.7), do otrzymania relacji tarcia i ruchliwości.

### 2.3. Oddziaływania hydrodynamiczne przy uwzględnieniu małych przemieszczeń kul

Rozdział ten dotyczy takich niestacjonarnych oddziaływań hydrodynamicznych, w przypadku których występuje wpływ przemieszczeń kul, w rozpatrywanym czasie oddziaływania. <sup>małych</sup> Analizowany przypadek precyzują następujące założenia:



(i) kule poruszają się z prędkościami translacyjnymi  $\dot{R}_j^o(t)$ ; prędkości rotacyjne kul są równe zeru,

(ii) prędkości kul charakteryzuje prędkość  $\lambda$ .

Przy tych założeniach, zależność funkcji Greena od przestrzennej konfiguracji kul przybliży się w taki sposób, aby uwzględnić wpływ małych przemieszczeń kul. Funkcję Greena, opisującą samo-oddziaływanie\*, przyjmujemy w postaci:

$$(2.3.1) \quad G[R_j(d_j, t) - R_j'(d_j, t'), t - t'] \approx t > 0, \\ \approx \frac{1}{8} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \exp[ik \cdot (r_j(0) - r_j'(0)) - v|k|^2(t-t')] [1 + ik \cdot \lambda(t-t')] \left(1 - \frac{kk}{|k|^2}\right).$$

Natomiast dla funkcji Greena, opisującej oddziaływanie wzajemne, mamy analogicznie:

$$(2.3.2) \quad G[R_j(d_j, t) - R_k(d_k, t'), t - t'] \approx t > 0, \\ \approx \frac{1}{8} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \exp[ik \cdot (R_{kj} + r_j(0) - r_k'(0)) - v|k|^2(t-t')] [1 + ik \cdot \lambda(t-t')] \left(1 - \frac{kk}{|k|^2}\right).$$

W wyrażeniach (2.3.1), oraz (2.3.2) zastosowano następujące przybliżenie (przy dodatkowych zastrzeżeniach):

$$\exp\left[ik \cdot \left(\int_0^t \dot{R}_j(t) dt - \int_0^{t'} \dot{R}_k(t) dt\right)\right] \approx 1 + ik \cdot \lambda(t-t') + \dots$$

Uwzględniamy więc zerowy, oraz pierwszy człon w rozwinięciach funkcji wykładniczych, opisujących zależność oddziaływań hydrodynamicznych od przemieszczeń kul. Człon pierwszy przy tym jest wyrażony w sposób przybliżony, za pomocą modułu prędkości charakterystycznej kul  $\lambda$ . Zakładamy przy tym, że

$\lambda t/a < 1$  - w przypadku tensorów samo-oddziaływania, oraz

$\lambda t/R_{kj} < 1$  - w przypadku tensorów oddziaływań wzajemnych.

W rezultacie, tensory oddziaływań hydrodynamicznych zależą od początkowych położeń kul, oraz od ich przemieszczeń.

\* tj. oddziaływanie z ciętą pojedynczych kul,

Przykładem odmiennego rozwinięcia niestacjonarnego tensora Greena jest rozwinięcie zaproponowane przez Szu i Hermansa [32]. Analizowali oni wpływ zależnej od czasu, poruszającej się siły punktowej na pole prędkości cieczy, w związku z badaniem oddziaływań hydrodynamicznych między segmentami polimerów. W rozwinięciu rozpatrywanym przez tych autorów, pierwszy człon opisuje wpływ siły  $F(t)$ , działającej w punkcie  $h(t)$ , przy założeniu bardzo powolnych zmian w czasie zarówno siły, jak i punktu jej przyłożenia. Ma on postać podobną do postaci charakterystycznej dla oddziaływań quasi-stacjonarnych.

Korzystając ze związków (2.1.10) otrzymujemy, analogicznie jak w § 2.2, następujący układ równań całkowych:

$$(2.3.3) \quad \begin{aligned} V_{j, l_1 m_1}(\lambda, t) = & \int_0^t dt' \sum_{L_2 m_2} T_{L_1 m_1}^{L_2 m_2}(O_j, \lambda, t-t') \cdot \psi_{j, L_2 m_2}(\lambda, t') + \\ & + \sum_{k \neq j} \int_0^t dt' \sum_{L_2 m_2} T_{L_1 m_1}^{L_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, t-t') \cdot \psi_{k, L_2 m_2}(\lambda, t'). \end{aligned}$$

Zastosowano tu rozwinięcia sił indukowanych, oraz względnych prędkości kul w następującej postaci:

$$(2.3.3') \quad V_j(\mathcal{O}_j(0), \lambda, t) = \sqrt{4\pi} \sum_{l_m} V_{j, l_m}(\lambda, t) Y_l^m(\theta_j(0), \phi_j(0)),$$

$$\psi_j(\mathcal{O}_j(0), \lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{l_m} \psi_{j, l_m}(\lambda, t) Y_l^m(\theta_j(0), \phi_j(0)), \quad \lambda = |\lambda|.$$

Tensorzy oddziaływań hydrodynamicznych, występujące w (2.3.3), są odpowiednio równe:



(i) dla przypadku samo-oddziaływania

$$T_{l_1 m_1}^{l_1 m_2}(O_j, \lambda, t) = T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(O_j, t) + S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(O_j, \lambda, t), \quad t > 0,$$

gdzie tensor  $T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(O_j, t)$  jest zdefiniowany w §2.2, a

$$(2.3.4) \quad S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(O_j, \lambda, t) = \frac{4}{\sqrt{3\pi}} i^{l_1 - l_2 + 1} \frac{\lambda t}{g} \int k dk \exp[-v|k|^2 t] j_{l_1}(ak) \times \\ \times j_{l_2}(ak) Y_{l_1}^{-m_1}(\chi, \zeta) Y_{l_2}^{m_2}(\chi, \zeta) Y_1^0(\chi, \zeta) \left(1 - \frac{kk}{|k|^2}\right), \quad t > 0,$$

(ii) dla oddziaływań wzajemnych

$$T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, t) = T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, t) + S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, t), \quad t > 0,$$

gdzie tensor  $T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, t)$  jest zdefiniowany w §2.2, a

$$(2.3.5) \quad S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, t) = \frac{4}{\sqrt{3\pi}} i^{l_1 - l_2 + 1} \frac{\lambda t}{g} \int k dk \exp[ik \cdot R_{kj} - v|k|^2 t] j_{l_1}(ak) j_{l_2}(ak) Y_{l_1}^{-m_1}(\chi, \zeta) Y_{l_2}^{m_2}(\chi, \zeta) Y_1^0(\chi, \zeta) \left(1 - \frac{kk}{|k|^2}\right), \quad t > 0.$$

Transformata Laplace'a względem czasu układu (2.3.3), ze względu na jego własności splotowe, jest postaci:

$$(2.3.6) \quad V_{j, l_1 m_1}(\lambda, p) = \sum_{l_2 m_2} T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(O_j, \lambda, p) \cdot \psi_{j, l_2 m_2}(\lambda, p) + \\ + \sum_{k \neq j} \sum_{l_2 m_2} T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, p) \cdot \psi_{k, l_2 m_2}(\lambda, p), \quad \text{Re } \Gamma p \geq 0.$$

Następnie, stosując procedurę iteracyjną, otrzymujemy iteracyjne wyrażenia na współczynniki rozwinięcia sił indukowanych  $\psi_{j, lm}(\lambda, p)$ :

$$\psi_{j, l_1 m_1}(\lambda, p) = \sum_{l_2 m_2} \tilde{T}_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(O_j, \lambda, p) \cdot [V_{j, l_2 m_2}(O_j, \lambda, p) - \sum_{k \neq j} \sum_{l_3 m_3} T_{l_2 m_2}^{l_3 m_3}(R_{kj}, \lambda, p) \cdot \tilde{T}_{l_3 m_3}^{l_4 m_4}(O_k, \lambda, p) \cdot V_{k, l_4 m_4}(O_k, \lambda, p) + \sum_{k \neq j} \sum_{k \neq k} \sum_{l_3 m_3} T_{l_2 m_2}^{l_3 m_3}(R_{kj}, \lambda, p) \cdot \tilde{T}_{l_3 m_3}^{l_4 m_4}(O_k, \lambda, p) \cdot \tilde{T}_{l_4 m_4}^{l_5 m_5}(R_{kk}, \lambda, p) \dots], \\ (i=3, 4, 5, 6),$$

gdzie, podobnie jak w §2.2, obowiązuje reguła wykluczania, oraz spełniona jest zależność:

$$(2.3.7) \quad \sum_{l_3 m_3} \tilde{T}_{l_1 m_1}^{l_3 m_3}(0_j, \lambda, p) \cdot T_{l_3 m_3}^{l_2 m_2}(0_j, \lambda, p) = 1 \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2}$$

Budowa otrzymanego wyrażenia jest podobna do budowy wyrażenia, opisującego oddziaływanie quasi-stacjonarne. Własności odpowiednich tensorów oddziaływań hydrodynamicznych są omawiane w Dodatku B. Relacje tarcia dla tego przypadku przedstawiono w §4.



### 3. Niestacjonarne relacje tarcia i ruchliwości, opisujące oddziaływania hydrodynamiczne w przypadku zaniedbywalnie małych przemieszczeń kul

#### 3.1. Niestacjonarne relacje tarcia

##### (1) Uwagi wstępne

Niestacjonarne relacje tarcia opisują zależność niestacjonarnych sił oraz momentów sił oporu hydrodynamicznego od zadanych prędkości kul /translacyjnych  $\dot{R}_j^0(p)$ , oraz rotacyjnych  $\omega_j(p)$ /, oraz od prędkości cieczy  $v^0(x, p)$ . Pierwszym krokiem na drodze do otrzymania tych relacji jest wyrażenie sił, oraz momentów sił oporu hydrodynamicznego poprzez siły indukowane. W tym celu stosujemy rozwinięcie (2.2.4) sił indukowanych w bazie znormalizowanych powierzchniowych harmonik sferycznych.

Z (2.1.6) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 F_j(p) &= \frac{4}{3} \pi a^3 g [p \dot{R}_j^0(p) - \dot{R}_j^0(0)] - \psi_{j,00}(p) = I_j^T(p) - \psi_{j,00}(p), \\
 (3.1.1) \quad T_j(p) &= \frac{8}{15} \pi a^5 g [p \omega_j(p) - \omega_j(0)] + \frac{a}{\sqrt{3}} \varepsilon : \left( \sum_{m=-1}^1 \mathcal{L}_{-m} \psi_{j,1m}(p) \right) = \\
 &= I_j^R(p) + \frac{a}{\sqrt{3}} \varepsilon : G_j(p),
 \end{aligned}$$

gdzie  $\varepsilon$  oznacza tensor Levi-Civita. Momenty dipolowe sił indukowanych  $G_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , oraz wektory  $\mathcal{L}_m$ ,  $m = -1, 0, 1$ , są określone w pracy [27]. Człony  $I_j^T(p)$ , oraz  $I_j^R(p)$  opisują wpływ inercji cieczy, wypartej przez kule.

Zależność (3.1.1) można przekształcić następująco:

$$\begin{aligned}
 (3.1.1') \quad \psi_{j,00}(p) &= I_j^T(p) - F_j(p), \\
 \psi_{j,1m}(p) &= \mathcal{L}_m \cdot \left[ -\frac{\sqrt{3}}{a} F_j^S(p) - \frac{\sqrt{3}}{2a} \varepsilon \cdot (T_j(p) - I_j^R(p)) \right],
 \end{aligned}$$

gdzie  $F_j^S(p)$  oznacza symetryczny moment dipolowy siły, wywierany przez ciecz na  $j$ -tą kulę. O sile, oraz momencie siły oporu hydrodynamicznego decydują więc dwa współczynniki rozwinięcia sił indukowanych:  $\psi_{j,00}^*$  oraz  $\psi_{j,1m}^*$ .

Jak wynika z iteracyjnego wyrażenia (2.2.10), współczynniki te zależą od współczynników rozwinięcia prędkości względnych kul  $V_{j,1m}(p)$ . Dwa pierwsze spośród tych współczynników,  $V_{j,00}(p)$ , oraz  $V_{j,1m}(p)$  zależą zarówno od prędkości kul, jak i od pola prędkości cieczy  $v^0(\mathbf{r}, p)$ . Natomiast współczynniki  $V_{j,1m}(p)$ ,  $l \geq 2$ , zależą tylko od prędkości cieczy  $v^0(\mathbf{r}, p)$ . Własności te opisują następujące relacje:

$$(3.1.2) \quad \begin{aligned} V_{j,00}^* &= \dot{R}_j^0 - v_{j,00}^0, \\ V_{j,1m}^* &= \frac{a}{\sqrt{3}} \mathcal{L}_m \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\omega}_j - v_{j,1m}^0, \\ V_{j,lm}^* &= -v_{j,lm}^0, \quad l \geq 2. \end{aligned}$$

Współczynniki  $V_{j,1m}(p)$  można wyrazić poprzez momenty dipolowe prędkości względnych kul  $W_j(p)$  /por. (6.4) w pracy [27]/, oraz poprzez momenty dipolowe pola prędkości cieczy  $W_j^0(p)$  :

$$(3.1.2') \quad V_{j,1m}^* = \mathcal{L}_m \cdot W_j = \mathcal{L}_m \cdot \left[ \frac{a}{\sqrt{3}} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\omega}_j - W_j^0 \right].$$

Ze związków (3.1.2') wynika, że prędkości rotacyjne kul są dane wyrażeniem:

$$(3.1.3) \quad \boldsymbol{\omega}_j = -\frac{\sqrt{3}}{2a} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (W_j + W_j^0).$$



Zgodnie z (2.2.10), wpływ współczynników  $V_{j,lm}(p)$  zależy od różnych sekwencji oddziaływań, opisanych przy pomocy tensorów oddziaływań hydrodynamicznych. Wybrane własności tych tensorów rozpatrywano w pracy [27]. Poniżej przytoczymy własności, istotne z punktu widzenia otrzymania relacji tarcia.

Tensor samoodziaływania  $T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(0_j, p)$  można scharakteryzować następująco:

- /a/ są one różne od zera tylko przy pewnych wartościach wskaźników  $l_1, l_2$ , a mianowicie gdy  $l_1 = l_2$ , oraz  $|l_1 - l_2| = 2$ ,
- /b/ ich zależność od zmiennej  $p$ , będącej zmienną sprzężoną z czasem poprzez transformację Laplace'a, można opisać za pomocą zmiennej bezwymiarowej  $a\sqrt{p/V}$ , utworzonej jako stosunek  $p$  do odwrotności czasu dyfuzji molekularnej  $a^2/V$ ,
- /c/ tensorzy te dążą do zera w granicy  $a\sqrt{p/V} \rightarrow 0$ , jeżeli  $|l_1 - l_2| = 2$ ,
- /d/ tensorzy te stają się równe odpowiednim tensorom oddziaływań quasi-stacjonarnych w granicy  $a\sqrt{p/V} \rightarrow 0$ , jeżeli  $l_1 = l_2$

Dwie ostatnie własności można przedstawić następująco:

$$(3.1.4) \quad T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(0_j, p) \xrightarrow{a\sqrt{p/V} \rightarrow 0} T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(0_j),$$

gdzie tensorzy oddziaływań quasi-stacjonarnych są dane wyrażeniem (37) w pracy Yashizaki i Yamakawa'y, natomiast tensorzy oddziaływań niestacjonarnych są dane wzorem (4.2) w pracy [27].

Tensorzy oddziaływań wzajemnych  $T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, p)$  wykazują następujące własności:

- /a/ zależność ich od odległości między kulami można opisać za pomocą zmiennej bezwymiarowej  $a/R_{kj}$ , przy czym

$$0 < \frac{a}{R_{kj}} < \frac{1}{2},$$

/b/ zależność ich od zmiennej  $p$  wyraża się za pomocą zmiennej bezwymiarowej  $R_{kj} \sqrt{p/v}$ ; mamy tu do czynienia z inną, niż w przypadku samo-oddziaływania, długością charakterystyczną, a mianowicie z odległością  $R_{kj}$ ,

/c/ w granicy  $R_{kj} \sqrt{p/v} \rightarrow 0$ , tensory oddziaływań niestacjonarnych dążą do odpowiednich tensorów oddziaływań quasi-stacjonarnych:

$$(3.1.5) \quad T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, p) \xrightarrow{R_{kj} \sqrt{p/v} \rightarrow 0} T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}),$$

gdzie tensory oddziaływań quasi-stacjonarnych  $T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj})$  dane są wzorami (15) - (18), oraz (23) w pracy Yoshizaki i Yamakawa'y, natomiast tensory oddziaływań niestacjonarnych dane są wzorami (4.9), (4.11), (4.12) w pracy [27].

Ograniczenie zmiennej bezwymiarowej  $a/R_{kj}$  od góry oznacza, że niniejsze podejście nie obejmuje przypadku stykających się kul. Natomiast ograniczenie tej zmiennej od dołu oznacza, że rozpatrujemy kule położone w skończonych odległościach od siebie.

W niniejszym podejściu wprowadzamy również tzw. zmodyfikowane tensory oddziaływań hydrodynamicznych [27]. Są one tensorami trzeciego, lub czwartego rzędu, utworzonymi z tensorów oddziaływań hydrodynamicznych, oraz wektorów  $\mathcal{L}_m$ , e.g.

$$(3.1.6) \quad \sum_{m_1} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(0_j, p) = \tilde{T}_S^{1m_2}(0_j, p) + \tilde{T}_A^{1m_2}(0_j, p),$$

$$\sum_{m_2} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(0_j, p) \mathcal{L}_{m_2} = \tilde{T}_{1m_1}^S(0_j, p) + \tilde{T}_{1m_1}^A(0_j, p),$$



gdzie tensory  $\tilde{T}_S^{1m_2}(0_j)$ ,  $\tilde{T}_A^{1m_2}(0_j)$  są, odpowiednio, symetryczne, oraz antysymetryczne względem dwóch pierwszych wskaźników, natomiast tensory  $T_{1m_1}^S(0_j)$ ,  $T_{1m_1}^A(0_j)$ , są, odpowiednio, symetryczne, oraz antysymetryczne względem dwóch ostatnich wskaźników.

Z własności tensorów oddziaływań hydrodynamicznych wynika, że rozpatrując zadane przybliżenie względem  $a\sqrt{p/\nu}$ , oraz  $a/R_{kj}$ , wystarczy uwzględnić skończoną liczbę członów w rozwinięciu (2.2.10) współczynników  $\chi_{j,00}(p)$ , oraz  $\chi_{j,1m}(p)$ . Otrzymane w danym przybliżeniu człony można podzielić na dwie grupy:

- /a/ wyrażenia, dążące w warunkach quasi-stacjonarnych do odpowiednich wyrażeń, opisujących oddziaływanie quasi-stacjonarne,
- /b/ wyrażenia, dążące do zera w warunkach quasi-stacjonarnych. Odpowiednie człony są zebrane w tablicach 1, 2, 3 i 4 z pracy [27], uwzględniając przyczynki do rzędu  $O((a/R_{kj})^3)$ , oraz  $O((a\sqrt{p/\nu})^2)$ .

### (ii) Relacje tarcia

W niniejszej pracy niestacjonarne relacje tarcia otrzymano na drodze przekształceń wyrażeń opisujących współczynniki rozwinięcia sił indukowanych  $\chi_{j,00}(p)$ , oraz  $\chi_{j,1m}(p)$ . Zastosowano następujące przekształcenia:

- /a/ wprowadzenie prędkości rotacyjnych kul  $\omega_j(p)$ , oraz momentów dipolowych prędkości cieczy  $W_j^0(p)$  na miejsce współczynników  $V_{j,1m}$  /za pomocą zależności (3.1.2) /.
- /b/ wprowadzenie momentów sił  $T_j(p)$ , oraz symetrycznych momentów dipolowych sił  $F_j^S(p)$  na miejsce współczynników  $\chi_{j,1m}$  /za pomocą zależności (3.1.1) /,
- /c/ resumacje szeregów, występujących w wyrażeniach, opisujących  $\chi_{j,00}(p)$ , oraz  $\chi_{j,1m}(p)$ .

Powyższe działania prowadzą do niestacjonarnych relacji tarcia następującej postaci:

$$F_j^i(p) = -\sum_k \zeta_{jk}^{TT}(p) \cdot \dot{R}_k^c(p) - \sum_k \zeta_{jk}^{TR}(p) \cdot \omega_k(p) + I_j^T(p) +$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_k \sum_{lm} \zeta_{jk,lm}^{TV}(p) \cdot v_{k,lm}^0(p), \\
 (3.1.7) \quad \mathbb{T}_j(p) = & - \sum_k \zeta_{jk}^{RT}(p) \cdot \dot{R}_k^0(p) - \sum_k \zeta_{jk}^{RR}(p) \cdot \omega_k(p) + \mathbb{I}_j^R + \\
 & - \sum_k \sum_{lm} \zeta_{jk,lm}^{RV}(p) \cdot v_{k,lm}^0(p).
 \end{aligned}$$

Sumę ze wskaźnikiem "prim" określa się następująco:

$$\begin{aligned}
 \sum_{lm} \zeta_{jk,lm}^{TV} \cdot v_{k,lm}^0 &= \zeta_{jk,00}^{TV} \cdot v_{k,00}^0 + \zeta_{jk,W}^{TV} : W_k^0 + \\
 (3.1.7') \quad & + \sum_{l \neq 2,m} \zeta_{jk,lm}^{TV} \cdot v_{k,lm}^0.
 \end{aligned}$$

Analogicznie określona jest suma ze wskaźnikiem "prim" występująca w wyrażeniu, opisującym momenty sił  $\mathbb{T}_j(p)$ . Budowa otrzymanych tu relacji tarcia jest podobna do budowy relacji tarcia, charakteryzujących oddziaływania quasi-stacjonarne. Nowym elementem jest występowanie członów, opisujących inercję cieczy, wypartej przez kule. W relacjach (3.1.7) siła oporu hydrodynamicznego j-tej kuli, oraz moment siły, zależą liniowo od prędkości kul  $\dot{R}_k^0(p)$ ,  $\omega_k(p)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , oraz od prędkości cieczy  $v^0(\mathbf{r}, p)$ . Współczynniki tarcia  $\zeta_{jk}^{(\dots)}(p)$  są tensorami drugiego rzędu. Zależą one od różnych sekwencji oddziaływań, opisywanych za pomocą tensorów oddziaływań hydrodynamicznych. Współczynniki tarcia można przedstawić w postaci rozwinięcia na szeregi potęgowe względem  $a/R_{kj}$ , oraz  $\sqrt{p/\nu}$ .

Poniżej przedstawiono następujące współczynniki tarcia:

- A. Tensory tarcia  $\zeta_{jj}^{TT}$ ,  $\zeta_{jj}^{RT}$ , oraz tensory tarcia wzajemnego  $\zeta_{jk}^{TT}$ ,  $\zeta_{jk}^{RT}$ , działające na translacyjne prędkości kul,
- B. Tensory tarcia  $\zeta_{jj}^{TR}$ ,  $\zeta_{jj}^{RR}$ , oraz tensory tarcia wzajemnego  $\zeta_{jk}^{TR}$ ,  $\zeta_{jk}^{RR}$ , działające na rotacyjne prędkości kul,
- C. Tensory tarcia, oraz tensory tarcia wzajemnego, opisujące wpływ współczynników  $v_{j,00}^0$ , oraz momentów dipolowych  $W_j^0$ , na siły oporu hydrodynamicznego,



D. Tensory tarcia, oraz tensory tarcia wzajemnego, opisujące wpływ współczynników  $\nu_{j,00}^0$ , oraz momentów dipolowych  $W_j^0$ , na momenty sił oporu hydrodynamicznego.

Pozostałe tensory tarcia, oraz tensory tarcia wzajemnego, opisujące zależność sił, oraz momentów sił oporu hydrodynamicznego od współczynników rozwinięcia prędkości cieczy  $\nu_{j,lm}^0$ , 1, 2, są zebrane w Dodatku A.

(iii) Własności współczynników tarcia

Tensory tarcia przedstawiono tu w przybliżeniu, uwzględniając przyczynki do rzędu  $O((a/R_{kj})^3)$ , oraz  $O((a\sqrt{p/\nu})^2)$ .

Grupa A

A1. Translacyjno-translacyjne tensory tarcia są równe:

$$\begin{aligned} \zeta_{jj}^{\text{TT}} &= \tilde{T}(0_j) + \sum_{k \neq j} \tilde{T}(0_j) \cdot T(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(0_k) \cdot T(R_{jk}) \cdot \tilde{T}(0_j) + \\ (3.1.8) \quad & - \sum_{k_2 \neq k_1} \sum_{k_1 \neq j} \sum_{k_2 \neq j} \tilde{T}(0_j) \cdot T(R_{k_1 j}) \cdot \tilde{T}(0_{k_1}) \cdot T(R_{k_2 k_1}) \cdot \tilde{T}(0_{k_2}) \cdot T(R_{j k_2}) \cdot \tilde{T}(0_j). \end{aligned}$$

Zawierają one przyczynki od samo-oddziaływania, oraz od oddziaływań dwa- i trzykrotnych między kulami. Przyczynki te są, odpowiednio, rzędów  $O(\epsilon^0)$ ,  $O(\epsilon^2)$ , oraz  $O(\epsilon^3)$ . W warunkach quasi-stacjonarnych, opisują one odpowiednie oddziaływania quasi-stacjonarne (por. Rys 1).

A2. Translacyjno-translacyjne tensory tarcia wzajemnego są równe:

$$\begin{aligned} \zeta_{jk}^{\text{TT}} &= -\tilde{T}(0_j) \cdot T(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(0_k) + \sum_{k_1 \neq j} \sum_{k \neq k_1} \tilde{T}(0_j) \cdot T(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(0_{k_1}) \cdot T(R_{k k_1}) \cdot \tilde{T}(0_k) + \\ (3.1.9) \quad & - \sum_{k_2 \neq j} \sum_{k_2 \neq k_1} \sum_{k \neq k_1} \tilde{T}(0_j) \cdot T(R_{k_2 j}) \cdot \tilde{T}(0_{k_2}) \cdot T(R_{k_2 k_1}) \cdot \tilde{T}(0_{k_1}) \cdot T(R_{k k_1}) \cdot \\ & \tilde{T}(0_k) - \sum_m \tilde{T}_{00}^{2m}(0_j) \cdot T_{2m}^{00}(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(0_k) - \sum_m \tilde{T}(0_j) \cdot T_{00}^{2m}(R_{kj}) \cdot \tilde{T}_{2m}^{00}(0_k). \end{aligned}$$

Pierwsze trzy przyczynki wynikają z oddziaływań jedno-, dwu-, oraz trzykrotnych między kulami; są one odpowiednio rzędu  $O(\epsilon^1)$ ,  $O(\epsilon^2)$ , oraz  $O(\epsilon^3)$ . W warunkach quasi-stacjonarnych dążą one do odpowiednich przyczynków quasi-stacjonarnych. Dwa ostatnie przyczynki opisują jedno-krotne oddziaływania między kulami, będące rzędu  $O(\epsilon^3)$ . Dążą one do zera w warunkach quasi-stacjonarnych.

A3. Rotacyjno-translacyjne tensory tarcia są równe:

$$(3.1.10) \quad \zeta_{jj}^{RT} = -\sum_{k \neq j} \frac{a}{\sqrt{3}} \epsilon: \left[ \sum_{m_1, m_2} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(O_j) \right] \cdot T_{1m_2}^{00}(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(O_k) \cdot T(R_{jk}) \cdot \tilde{T}(O_j).$$

Są one wynikiem oddziaływań dwukrotnych między kulami. Oddziaływania te są rzędu  $O(\epsilon^3)$ . W warunkach quasi-stacjonarnych otrzymuje się odpowiednie quasi-stacjonarne oddziaływania.

A4. Rotacyjno-translacyjne tensory tarcia wzajemnego są równe:

$$(3.1.11) \quad \zeta_{jk}^{RT} = \frac{a}{\sqrt{3}} \epsilon: \left[ \sum_{m_1, m_2} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(O_j) \right] \cdot T_{1m_2}^{00}(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(O_k) + \\ - \sum_{k_1 \neq j} \sum_{k \neq k_1} \frac{a}{\sqrt{3}} \epsilon: \left[ \sum_{m_1, m_2} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(O_j) \right] \cdot T_{1m_2}^{00}(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(O_{k_1}) \cdot T(R_{kk_1}) \cdot \tilde{T}(O_k).$$

Pochodzą one od jedno- i dwu-krotnych oddziaływań między kulami, będących rzędu  $O(\epsilon^2)$ , oraz  $O(\epsilon^3)$ , odpowiednio.

W granicy, opisują one oddziaływania quasi-stacjonarne.

Grupa B

B1. Translacyjno-rotacyjne tensory tarcia są równe:



$$(3.1.12) \quad \begin{aligned} \zeta_{jj}^{TR} &= \sum_{k \neq j} \sum_{m_1} \tilde{T}(0_j) \cdot T(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(0_k) \cdot T_{00}^{1m_1}(R_{jk}) \\ &\cdot \left[ \sum_{m_2} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(0_j) \mathcal{L}_{m_2} \right] : \frac{a}{\sqrt{3}} \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Są one wynikiem oddziaływań dwu-krotnych między kulami, będących rzędu  $O(\sigma^3)$ . Dają one do odpowiednich quasi-stacjonarnych wyrażań w warunkach quasi-stacjonarnych.

B2. Translacyjno-rotacyjne tensory tarcia wzajemnego są równe:

$$(3.1.13) \quad \zeta_{jk}^{TR} = - \sum_{m_1} \tilde{T}(0_j) \cdot T_{00}^{1m_1}(R_{kj}) \cdot \left[ \sum_{m_2} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(0_k) \mathcal{L}_{m_2} \right] : \frac{a}{\sqrt{3}} \mathcal{E} +$$

$$+ \sum_{k_1 \neq j} \sum_{k \neq k_1} \sum_{m_1} \tilde{T}(0_j) \cdot T(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(0_{k_1}) \cdot T_{00}^{1m_1}(R_{kk_1}) \cdot \left[ \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(0_k) \mathcal{L}_{m_2} \right] : \frac{a}{\sqrt{3}} \mathcal{E}.$$

Opisują one jedno- i dwu-krotne oddziaływania między kulami, będące rzędu  $O(\sigma^2)$ , oraz  $O(\sigma^3)$ . W granicy opisują one oddziaływania quasi-stacjonarne.

B3. Rotacyjno-rotacyjne tensory tarcia są równe (Rys 1):

$$(3.1.14) \quad \zeta_{jj}^{RR} = - \frac{a^2}{3} \mathcal{E} : \left[ \sum_{m_1, m_2} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(0_j) \mathcal{L}_{m_2} \right] : \mathcal{E}.$$

Wyrażają one samo-oddziaływanie kuli, poruszającej się z prędkością rotacyjną  $\omega_j(p)$ , z otaczającą cieczą. W warunkach quasi-stacjonarnych opisują one tarcie quasi-stacjonarne.

B4. Rotacyjno-rotacyjne tensory tarcia wzajemnego są równe:

$$(3.1.15) \quad \begin{aligned} \zeta_{jk}^{RR} = \frac{a^2}{3} \varepsilon : \sum_{m_2, m_3} \left[ \sum_{m_1} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(O_j) \right] \cdot T_{1m_2}^{1m_3}(R_{kj}) \cdot \\ \cdot \left[ \sum_{m_4} \tilde{T}_{1m_3}^{1m_4}(O_k) \mathcal{L}_{m_4} \right] : \varepsilon. \end{aligned}$$

Zawierają one przyczynki od oddziaływań jedno-krotnych, będących rzędu  $O(\epsilon^3)$ . W granicy dążą one do odpowiednich przyczynków quasi-stacjonarnych.

### Grupa C

C1. Tensory tarcia, działające na  $v_{j,00}^0$ :

$$(3.1.16) \quad \begin{aligned} \zeta_{jj,00}^{TV} &= -\zeta_{jj,00}^{TT} \\ \zeta_{jk,00}^{TV} &= -\zeta_{jk,00}^{TT} \end{aligned}$$

Powyższe związki wynikają z własności współczynnika rozwinięcia prędkości względnych  $V_{j,00}$ .

C2. Tensory tarcia, działające na  $W_j^0$ :

$$(3.1.17) \quad \begin{aligned} \zeta_{jj, W^0}^{TV} &= -\sum_{k \neq j} \sum_{\substack{m_1 \\ m_2}} \tilde{T}(O_j) \cdot T(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(O_k) \cdot T_{00}^{1m_1}(R_{jk}) \cdot [\tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(O_j) \mathcal{L}_{m_2}], \\ \zeta_{jk, W^0}^{TV} &= \sum_{m_1, m_2} \tilde{T}(O_j) \cdot T_{00}^{1m_1}(R_{kj}) \cdot [\tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(O_k) \mathcal{L}_{m_2}] + \\ & - \sum_{k_1 \neq j} \sum_{k \neq k_1} \sum_{m_1, m_2} \tilde{T}(O_j) \cdot T(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(O_{k_1}) \cdot T_{00}^{1m_1}(R_{kk_1}) \cdot [\tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(O_k) \mathcal{L}_{m_2}]. \end{aligned}$$

Zgodnie z (3.1.7'), są one tensorami rzędu trzeciego. Dotyczą one jedno-, i dwu-krotnych oddziaływań między kulami, rzędu  $O(\epsilon^2)$ , oraz  $O(\epsilon^3)$ , odpowiednio. W granicy opisują one oddziaływanie quasi-stacjonarne.



## Grupa D

D1. Tensory tarcia, działające na  $v_{j,00}^0$  :

$$(3.1.18) \quad \begin{aligned} \zeta_{ij,00}^{RV} &= -\zeta_{ij}^{RT}, \\ \zeta_{jk,00}^{RV} &= -\zeta_{jk}^{RT}. \end{aligned}$$

Związki te wynikają z własności prędkości względnych kul (3.1.2).

D2. Tensory tarcia, działające na  $W_j^0$  :

$$(3.1.19) \quad \zeta_{ij,00}^{RV} W^0 = \frac{a}{\sqrt{3}} \varepsilon : \left[ \sum_{m_1, m_2} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(0_j) \mathcal{L}_{m_2} \right],$$

$$\zeta_{jk,00}^{RV} W^0 = -\frac{a}{\sqrt{3}} \varepsilon : \sum_{m_2, m_3} \left[ \sum_{m_1} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(0_j) \cdot T_{1m_2}^{1m_3}(R_{kj}) \cdot \left[ \sum_{m_4} \tilde{T}_{1m_3}^{1m_4}(0_k) \mathcal{L}_{m_4} \right] \right].$$

Są to tensory rzędu trzeciego. Opisują one samo-oddziaływania pojedynczej kuli, będące rzędu  $O(\sigma^0)$ , oraz jedno-krotne oddziaływanie między kulami, będące rzędu  $O(\sigma^3)$ . W warunkach quasi-stacjonarnych opisują one odpowiednie oddziaływanie quasi-stacjonarne.

Opisane niestacjonarne współczynniki tarcia posiadają następujące własności, wspólne ze współczynnikami tarcia w warunkach quasi-stacjonarnych:

- /a/ można je przedstawić w postaci szeregu potęgowego odwrotności odległości między środkami kul,  $R_{kj}$ ,
- /b/ na skutek własności tensorów oddziaływań hydrodynamicznych, niektóre potęgi odwrotności odległości między środkami kul nie występują w tych rozwinięciach,
- /c/ brak addytywności parami oddziaływań hydrodynamicznych przejawia się w budowie osłonów, opisujących oddziaływanie z udziałem więcej niż dwóch kul, są one rzędu  $O(\sigma^2)$ , i wyższych,

/d/ przybliżenie, charakteryzujące współczynniki tarcia, zależy od liczby kul, oddziaływania między którymi uwzględniono.

Niestacjonarność oddziaływań hydrodynamicznych prowadzi do następujących własności współczynników tarcia:

- /a/ współczynniki te można przedstawić w postaci szeregu potęg zmiennej  $a\sqrt{p/V}$ ,
- /b/ niektóre sekwencje oddziaływań występują w rozpatrywanych współczynnikach tylko w warunkach niestacjonarnych,
- /c/ na siłę, oraz moment siły oporu hydrodynamicznych wpływają tu współczynniki  $V_{j,lm}$  o indeksach  $l$  większych, niż w warunkach quasi-stacjonarnych,
- /d/ aby otrzymać, w rozpatrywanym przybliżeniu, niektóre współczynniki tarcia /np.  $\sum_{jk,2m}^{TV}$ ,  $j \neq k$ /, należy uwzględnić oddziaływania między większą liczbą kul, niż w warunkach quasi-stacjonarnych.

Otrzymane tu niestacjonarne współczynniki tarcia przechodzą w warunkach quasi-stacjonarnych we współczynniki quasi-stacjonarne. Natomiast w relacjach tarcia, przejście do warunków quasi-stacjonarnych dotyczy zarówno współczynników tarcia, jak i prędkości kul oraz prędkości cieczy  $v^0(\mathbf{r}, p)$ .

### 3.2. Niestacjonarne relacje ruchliwości

#### (i) Uwagi wstępne

Niestacjonarne relacje ruchliwości opisują zależność translacyjnych i rotacyjnych prędkości kul od siły, momentu siły oporu hydrodynamicznego, oraz od prędkości cieczy  $v^0(\mathbf{r}, p)$ . Aby otrzymać te relacje, układ równań algebraicznych (2.2.7) podzielono na dwa podukłady /w pracy [27]/. Pierwszy podukład składa się z wyrażań, opisujących  $V_{j,00}$ , oraz  $W_{j,A}$ , które zawierają translacyjne i rotacyjne prędkości kul. Drugi podukład zawiera  $W_{j,S}$ , oraz  $V_{j,lm}$ ,  $l \geq 2$ , w których prędkości kul explicite nie występują. W celu otrzymania relacji ruchliwości



ci, wyrażenia opisujące  $\dot{R}_j^0(p)$  sprowadzono do postaci:

$$(3.2.1) \quad \dot{R}_j^0 - v_{j,00}^0 - \sum_{k \neq j} \sum_m T_{00}^{2m}(R_{kj}) \cdot \tilde{T}_{2m}^{00}(0_k) \cdot V_{k,00} = (X) + (XX),$$

gdzie  $(X)$  oznacza człony dążące w warunkach quasi-stacjonarnych do odpowiednich wyrażeń quasi-stacjonarnych, natomiast  $(XX)$  - człony dążące do zera w takich warunkach. Przyczynki  $(X)$  zawarte są w tabelicy 5, natomiast przyczynki  $(XX)$  - w tabelicy 6 z pracy [27].

Związki opisujące rotacyjne prędkości kul przedstawiono w podobnej formie:

$$(3.2.2) \quad W_{j,A} = \left( \begin{array}{l} \text{przyczynki z tabl. 7,} \\ \text{zawartej w [27]} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{przyczynki z tabl. 8,} \\ \text{zawartej w [27]} \end{array} \right).$$

### (ii) Relacje ruchliwości

Relacje ruchliwości otrzymuje się na drodze przekształcenia zależności (3.2.1), oraz (3.2.2). Wprowadza się mianowicie siły oporu hydrodynamicznego  $F_j(p)$  na miejsce  $\psi_{j,00}(p)$ , momenty sił oporu hydrodynamicznego  $T_j^T(p)$  na miejsce tensorów  $G_{j,A}$  /korzystając z relacji (3.1.1)/, oraz rotacyjne prędkości kul  $\omega_j(p)$  na miejsce  $W_{j,A}$  /korzystając z relacji (3.1.3)/. Pojawiają się przy tym wielkości  $I_j^T(p)$ , oraz  $I_j^R(p)$ , opisujące inercję cieczy, wypartej przez  $j$ -tą kulę, oraz moment dipolowy  $W_{j,A}^0$ . Podobnie jak w przypadku współczynników tarcia, niestacjonarne współczynniki ruchliwości można przedstawić w postaci szeregu potęgowego względem  $a/R_{kj}$ , oraz  $a\sqrt{p/\eta}$ .

W niniejszej pracy uwzględniono człony do rzędu  $O((a/R_{kj})^3)$ , oraz  $O((a\sqrt{p/\eta})^2)$ . W tym przybliżeniu niestacjonarne relacje ruchliwości przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \dot{R}_j^0(p) = & - \sum_k \mu_{jk}^{TT}(p) \cdot (F_j^T(p) - I_j^T(p)) - \sum_k \mu_{jk}^{TR}(p) \cdot (T_j^R(p) - I_j^R(p)) + \\ (3.2.3) \quad & - \sum_k \sum_{l_m} \mu_{jk, l_m}^{TV}(p) \cdot v_{k, l_m}^0(p), \end{aligned}$$

$$\dot{\omega}_j(p) = \sum_k \mu_{jk}^{RT}(p) \cdot (F_j^T(p) - I_j^T(p)) - \sum_k \mu_{jk}^{RR}(p) \cdot (T_j^R(p) - I_j^R(p)) - \sum_k \sum_{l_m} \mu_{jk, l_m}^{RV}(p) \cdot v_{k, l_m}^0(p).$$

Suma  $\sum'$  jest zdefiniowana analogicznie do sumy "primowanej" w relacjach tarcia. Otrzymane współczynniki ruchliwości składają się ze skończonej liczby członów. Na ich postać wpływają tylko samo-oddziaływania oraz oddziaływania jednokrotne między kulami /por. postać członów, opisujących różne sekwencje oddziaływań hydrodynamicznych z tablic 5 - 8 w pracy [27]/. Nie zachodzi więc potrzeba resumowania odpowiednich szeregów.

(iii) Własności współczynników ruchliwości

Współczynniki ruchliwości, działające na  $(F_j - I_j^T)$ , otrzymano w następującej postaci:

1. Translacyjno - translacyjne współczynniki ruchliwości ( $R_{ys} 2$ ):

$$(3.2.4) \quad \mu_{jj}^{TT} = T(O_j),$$

opisują oddziaływanie pojedynczej kuli z otaczającą cieczą;

2. Translacyjno - translacyjne współczynniki ruchliwości wzajemnej

$$\begin{aligned} (3.2.5) \quad \mu_{jk}^{TT} = & T(R_{kj}) + \sum_{m, m_1} T_{00}^{2m}(O_j) \cdot \tilde{T}_{2m}^{2m_1}(O_j) \cdot T_{2m_1}^{00}(R_{kj}) + \\ & + \sum_m T_{00}^{2m}(R_{kj}) \cdot \tilde{T}_{2m}^{00}(O_k) \cdot T(O_k), \end{aligned}$$

zależą od oddziaływań jednokrotnych, rzędu  $O(\sigma^1)$ , oraz  $O(\sigma^3)$ ; człony rzędu  $O(\sigma^3)$  dążą do zera w warunkach quasi-



stacjonarnych;

3. Rotacyjno - translacyjne współczynniki ruchliwości są równe zeru;
4. Rotacyjno - translacyjne współczynniki ruchliwości wzajemnej

$$(3.2.6) \quad \mu_{jk}^{RT} = -\frac{\sqrt{3}}{2a} \varepsilon : T_A^{00} (R_{kj}),$$

zależą od oddziaływań jednokrotnych rzędu  $O(\epsilon^2)$ ; w warunkach quasi-stacjonarnych dążą one do odpowiednich wyrażeń quasi-stacjonarnych ( $T_A^{00}(R_{kj})$ ) - por. wzory (6.5) w pracy [27].

Współczynniki ruchliwości, działające na wektory ( $T_j - T_j^R$ ), otrzymano w następującej postaci:

1. translacyjno - rotacyjne współczynniki ruchliwości są równe zeru;
2. translacyjno - rotacyjne współczynniki ruchliwości wzajemnej

$$(3.2.7) \quad \mu_{jk}^{TR} = \frac{\sqrt{3}}{2a} T_{00}^A (R_{kj}) : \varepsilon,$$

zawierają przyczynki od oddziaływań jednokrotnych, rzędu  $O(\epsilon^2)$ ; w granicy dążą one do odpowiednich wielkości quasi-stacjonarnych;

3. rotacyjno - rotacyjne współczynniki ruchliwości ( $R_{ijs}$ ):

$$(3.2.8) \quad \mu_{ij}^{RR} = -\frac{3}{4a^2} \varepsilon : T_A^A (O_j) : \varepsilon,$$

opisują oddziaływanie z cieczą pojedynczej kuli;

4. rotacyjno - rotacyjne współczynniki ruchliwości wzajemnej

$$(3.2.9) \quad \mu_{jk}^{RR} = -\frac{3}{4a^2} \varepsilon : T_A^A (R_{kj}) : \varepsilon,$$

zależą od oddziaływań jednokrotnych, rzędu  $O(\varepsilon^3)$ ; w warunkach quasi-stacjonarnych opisują one odpowiednie oddziaływania quasi-stacjonarne.

Współczynniki ruchliwości, opisujące wpływ pola prędkości cieczy  $v^0(\mathbf{r}, p)$  na translacyjne prędkości kul, otrzymano w następującej postaci:

1. tensory, działające na  $v_{j,00}^0$ :

$$(3.2.10) \quad \begin{aligned} \mu_{jj,00}^{TV} &= -1, \\ \mu_{jk,00}^{TV} &= 0, \end{aligned}$$

2. tensory, działające na  $W_j^0$ :

$$(3.2.11) \quad \begin{aligned} \mu_{jj,W^0}^{TV} &= 0, \\ \mu_{jk,W^0}^{TV} &= T_{00}^S (R_{kj}) : \tilde{T}_S^S (O_k), \end{aligned}$$

zależą od oddziaływań jednokrotnych, rzędu  $O(\varepsilon^2)$ ; w warunkach quasi-stacjonarnych opisują one odpowiednie oddziaływania quasi-stacjonarne;

3. tensory, działające na  $v_{j,2m}^0$ :

$$(3.2.12) \quad \begin{aligned} \mu_{jj,2m}^{TV} &= \sum_{m_1} T_{00}^{2m_1} (O_j) \cdot \tilde{T}_{2m_1}^{2m} (O_j), \\ \mu_{jk,2m}^{TV} &= \sum_{m_1} T_{00}^{2m_1} (R_{kj}) \cdot \tilde{T}_{2m_1}^{2m} (O_k), \end{aligned}$$

pierwszy z nich, rzędu  $O(\varepsilon^0)$ , dąży do zera w warunkach quasi-stacjonarnych; drugi z nich, zależący od oddziaływań jednokrotnych, rzędu  $O(\varepsilon^3)$ , w granicy opisuje odpo-



wiednie oddziaływania quasi-stacjonarne;

4. Tensory, działające na  $v_{j,3m}^0$  :

$$(3.2.13) \quad \begin{aligned} \mu_{jj,3m}^{TV} &= 0, \\ \mu_{jk,3m}^{TV} &= T_{00}^S(R_{kj}) : \tilde{T}_S^{3m}(0_k); \text{ te ostatnie} \end{aligned}$$

zależą od oddziaływań jednokrotnych, rzędu  $O(\sigma^2)$ ; w warunkach quasi-stacjonarnych dążą one do zera;

5. tensory, działające na  $v_{j,4m}^0$  :

$$(3.2.14) \quad \begin{aligned} \mu_{jj,4m}^{TV} &= 0, \\ \mu_{jk,4m}^{TV} &= \sum_{m_1} T_{00}^{2m_1}(R_{kj}) \cdot \tilde{T}_{2m_1}^{4m}(0_k); \text{ te ostatnie} \end{aligned}$$

zależą od oddziaływań jednokrotnych, rzędu  $O(\sigma^3)$ ; w warunkach quasi-stacjonarnych są one równe zeru.

Współczynniki ruchliwości, opisujące zależność rotacyjnych prędkości kul od pola prędkości cieczy  $v^0(\mathbf{r}, p)$ , otrzymano w następującej postaci:

1. tensory, działające na  $W_j^0$  :

$$(3.2.15) \quad \begin{aligned} \mu_{jj, W^0}^{RV} &= -\frac{\sqrt{3}}{2a} \epsilon, \\ \mu_{jk, W^0}^{RV} &= -\frac{\sqrt{3}}{2a} \epsilon : T_A^S(R_{kj}) : \tilde{T}_S^S(0_k); \text{ te ostatnie} \end{aligned}$$

zależą od oddziaływań jednokrotnych, rzędu  $O(\sigma^3)$ , dążących w warunkach quasi-stacjonarnych do odpowiednich oddziaływań quasi-stacjonarnych;

2. tensory, działające na  $v_{j,3m}^0$  :

$$(3.2.16) \quad \begin{aligned} \mu_{jj,3m}^{RV} &= -\frac{\sqrt{3}}{2a} \sum_{m_1} \epsilon : T_A^{3m_1}(0_j) \cdot \tilde{T}_{3m_1}^{3m}(0_j), \\ \mu_{jk,3m}^{RV} &= -\frac{\sqrt{3}}{2a} \epsilon : T_A^S(R_{kj}) : \tilde{T}_S^{3m}(0_k), \end{aligned}$$

pierwszy z nich opisuje samo-oddziaływanie kuli z cieczą; drugi — opisuje oddziaływania jednokrotne, rzędu  $O(\epsilon^3)$ ; oba tensory dążą do zera w warunkach quasi-stacjonarnych.

W rozpatrywanym tutaj przybliżeniu, pozostałe współczynniki ruchliwości są równe zeru.

Otrzymane relacje ruchliwości opisują liniową zależność prędkości kul od sił i momentów sił oporu hydrodynamicznego, oraz od prędkości cieczy  $\mathbf{v}^o(\mathbf{r}, p)$ . Budowa współczynników ruchliwości jest prostsza od budowy współczynników tarcia: liczba różnych sekwencji oddziaływań hydrodynamicznych, które kształtują współczynniki ruchliwości, jest mniejsza. Wynika to z faktu, że oddziaływania trój-krotne, cztero-krotne, itd. nie wpływają, w rozpatrywanym przybliżeniu, na współczynniki ruchliwości. Efekty niestacjonarne, podobne jak w relacjach tarcia, przejawiają się, m.in. w występowaniu sekwencji oddziaływań, dążących do zera w warunkach quasi-stacjonarnych. Otrzymane współczynniki ruchliwości dążą, w odpowiednich warunkach, do wyrażenń quasi-stacjonarnych. W relacjach ruchliwości przejście do warunków quasi-stacjonarnych dotyczy również sił  $\mathbf{f}_j(p)$ , momentów sił  $\mathbf{T}_j(p)$ , oraz prędkości cieczy  $\mathbf{v}^o(\mathbf{r}, p)$ .

Jak to omawiano w §1.4, niestacjonarne relacje ruchliwości badano w pracy [20]. W pracy tej przyjęto, że  $\mathbf{v}^o(\mathbf{r}, t)$  jest równe zeru. Celem opisu niestacjonarnych oddziaływań hydrodynamicznych wprowadzono tensory, wiążące momenty multipolowe sił indukowanych w kulach z prędkościami kul. Rząd tych tensorów wzrasta z rzędem rozpatrywanego momentu sił indukowanych. Tensory, zdefiniowane przez autorów pracy [20], oraz stosowane w tej pracy tensory oddziaływań, odgrywają podobną rolę w opisie badanych zjawisk. Współczynniki ruchliwości, otrzymane w pracy [20] dla przypadku  $R\sqrt{2\tilde{\omega}/v} \ll 1$ , oraz współczynniki ruchliwości otrzymane w niniejszym przybliżeniu, dotyczą tego samego zakresu oddziaływań. Jakościowo, własności odpowiednich tensorów ruchliwości, zależących od częstości  $\tilde{\omega}$  w pracy [20], oraz od zmiennej  $p$  w tej pracy, są zgodne /por. (6.11) w [27]/.



3.3 Symetryczny moment dipolowy siły  $F_j^S(p)$ , wywierany przez ciecz na  $j$ -tą kulę, oraz wielkości  $\psi_{j,lm}(p)$ ,  $l \geq 2$

Symetryczny moment dipolowy sił  $F_j^S(p)$ , oraz współczynniki rozwinięcia sił indukowanych o wskaźnikach  $l \geq 2$  można wyrazić albo w zależności od zadanych prędkości kul i pola prędkości cieczy, albo w zależności od zadanych sił i momentów sił oporu hydrodynamicznego, oraz pola prędkości cieczy.

W pierwszym przypadku otrzymujemy [27]:

$$(3.3.1) \quad F_j^S = -\frac{a}{\sqrt{3}} \left\{ \sum_{l_2 m_2} \tilde{T}_s^{l_2 m_2}(0_j) \cdot V_{j, l_2 m_2} + \right. \\ \left. - \sum_{l_2 m_2} \tilde{T}_s^{l_2 m_2}(0_j) \cdot \sum_{k \neq j} \sum_{l_3 m_3} \sum_{l_4 m_4} T_{l_3 m_3}^{l_2 m_2}(R_{kj}) \cdot \tilde{T}_{l_3 m_3}^{l_4 m_2}(0_k) \cdot V_{k, l_3 m_3} + \dots \right\}, \\ \psi_{j, l_1 m_1} = \sum_{l_2 m_2} \tilde{T}_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(0_j) \cdot V_{j, l_2 m_2} - \sum_{l_2 m_2} \tilde{T}_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(0_j) \cdot \sum_{k \neq j} \sum_{l_3 m_3} \sum_{l_4 m_4} \times \\ \times T_{l_1 m_1}^{l_3 m_3}(R_{kj}) \cdot \tilde{T}_{l_3 m_3}^{l_4 m_4}(0_k) \cdot V_{k, l_4 m_4} + \dots; \quad l_1 \geq 2.$$

Wzory te przedstawiają rozpatrywane wielkości jako wyniki wielokrotnych oddziaływań hydrodynamicznych. Różne sekwencje tych oddziaływań są "generowane" przez prędkości względne  $V_{j,lm}$ .

Zależność rozpatrywanych wielkości od odwrotności potęg odległości między środkami kul można podsumować następująco:

- (i) człony rzędu  $O(\sigma^0)$  opisują oddziaływanie kul z otaczającą cieczą, pojedynczych
- (ii) człony rzędu  $O(\sigma^2)$ , w przypadku  $F_j^S$ , oraz rzędu  $O(\sigma^{1-1})$ , w przypadku  $\psi_{j,lm}$ ,  $l \geq 2$ , opisują oddziaływania wzajemne między kulami.

Podobnie jak w przypadku oddziaływań kształtujących  $\psi_{j,00}$  oraz  $\psi_{j,1m}$ , w warunkach niestacjonarnych pojawia się większa liczba dopuszczalnych sekwencji oddziaływań, niż w warunkach quasi-stacjonarnych.

W drugim przypadku otrzymujemy [27]:

(i) symetryczny moment dipolowy siły, wywieranej przez ciecz na  $j$ -tą kulę:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\sqrt{3}}{2} F_j^S &= \sum_{\ell_2=0,3} \sum_{m_2} \tilde{T}_S^{\ell_2 m_2}(\mathbf{0}_j) \cdot [V_{j, \ell_2 m_2} + \sum_{k \neq j} (T_{\ell_2 m_2}^{00}(R_{kj}) \cdot \chi_{k,00} + \\
 &+ T_{\ell_2 m_2}^A(R_{kj}) : G_{k,A})] + \sum_{\ell_2=0,3} \sum_{m_2} \tilde{T}_S^{\ell_2 m_2}(\mathbf{0}_j) \cdot \sum_{k \neq j} \sum_{p m_3} T_{\ell_2 m_2}^{p m_3}(R_{kj}) \cdot \\
 (3.3.2) & \cdot \left\{ \sum_{\ell_4 m_4} \tilde{T}_{p m_3}^{\ell_4 m_4}(\mathbf{0}_k) \cdot [V_{k, \ell_4 m_4} + \sum_{k_1 \neq k} (T_{\ell_4 m_4}^{00}(R_{k_1 k}) \cdot \chi_{k_1,00} + \right. \\
 & \left. + T_{\ell_4 m_4}^A(R_{k_1 k}) : G_{k_1,A})] + \dots \right\},
 \end{aligned}$$

(ii) współczynniki  $\chi_{j,3m}$ :

$$\begin{aligned}
 \chi_{j,3m} &= \sum_{\ell_2=0,1,3} \sum_{m_2} \tilde{T}_{3m}^{\ell_2 m_2}(\mathbf{0}_j) \cdot [V_{j, \ell_2 m_2} + \sum_{k \neq j} (T_{\ell_2 m_2}^{00}(R_{kj}) \cdot \chi_{k,00} + \\
 &+ T_{\ell_2 m_2}^A(R_{kj}) : G_{k,A})] + \sum_{\ell_2=0,1,3} \sum_{m_2} \tilde{T}_{3m}^{\ell_2 m_2}(\mathbf{0}_j) \cdot \sum_{k \neq j} \sum_{p m_3} T_{\ell_2 m_2}^{p m_3}(R_{kj}) \cdot \\
 & \cdot \left\{ \sum_{\ell_4 m_4} \tilde{T}_{p m_3}^{\ell_4 m_4}(\mathbf{0}_k) \cdot [V_{k, \ell_4 m_4} + \sum_{k_1 \neq k} (T_{\ell_4 m_4}^{00}(R_{k_1 k}) \cdot \chi_{k_1,00} + \right. \\
 & \left. + T_{\ell_4 m_4}^A(R_{k_1 k}) : G_{k_1,A})] + \dots \right\},
 \end{aligned}$$

(iii) współczynniki  $\chi_{j,qm}$ ,  $q = 2, 4, 5, 6 \dots$ :

$$\chi_{j,qm} = \sum_{\ell_5 m_5} \tilde{T}_{qm}^{\ell_5 m_5}(\mathbf{0}_j) \cdot [V_{j, \ell_5 m_5} + \sum_{k \neq j} (T_{\ell_5 m_5}^{00}(R_{kj}) \cdot \chi_{k,00} + T_{\ell_5 m_5}^A(R_{kj}) :$$



$$:G_{k,A}] + \sum_{l_5 m_5} \tilde{T}_{q m_1}^{l_5 m_5} (0_j) \cdot \sum_{k \neq j} \sum_{p m_3} T_{l_5 m_5}^{p m_3} (R_{k,j}) \cdot \left\{ \sum_{l_4 m_4} \tilde{T}_{p m_3}^{l_4 m_4} (0_k) \cdot [V_{k,l_4 m_4} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k_1 \neq k} (T_{l_4 m_4}^{00} (R_{k_1,k}) \cdot \psi_{k_1,00} + T_{l_4 m_4}^A (R_{k_1,k}) : G_{k_1,A}] + \dots \right\}$$

gdzie  $l_5 = q - 2, q, q + 2$ .

Powyższe iteracyjne wyrażenia opisują dopuszczalne oddziaływania, kształtujące współczynniki rozwinięcia sił indukowanych. Oddziaływania te są "generowane" przez  $V_{j,lm}$ , oraz przez siły i momenty sił oporu hydrodynamicznego, wywieranego przez ciecz na kule.

Zależność rozpatrywanych oddziaływań od odwrotności potęg odległości między kulami, oraz wpływ efektów niestacjonarnych są jakościowo podobne do własności charakteryzujących (3.3.1).

Znajomość  $F_j^S$  oraz  $\psi_{j,lm}$ ,  $l \geq 2$  jest konieczna, na przykład, przy otrzymywaniu relacji ruchliwości. Rozpatrując różne przybliżenia współczynników ruchliwości względem  $a/R_{k,j}$ , oraz  $a\sqrt{p/V}$ , konieczne jest uwzględnienie wpływu odpowiednich wielkości  $\psi_{j,lm}$ . Np. aby uwzględnić we współczynnikach ruchliwości członki do rzędu  $O(\sigma^3)$ , oraz  $O((a\sqrt{p/V})^2)$ , należy wziąć pod uwagę  $F_j^S$ , oraz  $\psi_{j,lm}$ ,  $l = 2, 3$ ; natomiast w przypadku uwzględniania członków do rzędu  $O(\sigma^5)$ , oraz  $O((a\sqrt{p/V})^2)$ , należy rozpatrzyć  $F_j^S$ , oraz  $\psi_{j,lm}$ ,  $l = 2, 3, 4$ .

### 3.4. Wpływ sił zewnętrznych, działających na ciecz, na względne prędkości kul

Zgodnie z definicją (2.1.10), względna prędkość  $V_j(\mathcal{A}_j, t)$   $j$ -tej kuli w odniesieniu do prędkości cieczy zależy od prędkości tej kuli  $\dot{R}_j(\mathcal{A}_j, t)$ , prędkości  $v^{01}(\mathcal{A}_j, t)$ , wynikającej z działania na ciecz sił zewnętrznych, oraz prędkości  $v^{02}(\mathcal{A}_j, t)$ , wynikającej z wpływu początkowego pola prędkości cieczy  $\psi(r)$ . W niniejszym rozdziale omówiono niektóre własności prędkości  $v^{01}(\mathcal{A}_j, t)$ , ze zwróceniem uwagi na rolę efektów niestacjonarnych. Prędkość cieczy  $v^{01}(\mathcal{A}_j, t)$ , która występuje w układzie równań całkowych (2.1.10), dana jest wyrażeniem:

$$(3.4.1) \quad v^{01}(\mathcal{L}_j(t), t) = \int_0^t dt' \int d\tau' G[R_j(\mathcal{L}_j(t), t) - \tau', t-t'] \cdot \psi^{\text{ext}}(\tau', t'),$$

$$j = 1, \dots, N,$$

$$t - t' > 0,$$

gdzie  $\psi^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$  wewnątrz i na powierzchniach kul. Z zależności (3.4.1) wynika, że prędkość  $v^{01}(\mathcal{L}_j, t)$  zależy m.in. od historii ruchu (trajektorii)  $N$  kul w rozpatrywanym przedziale czasu. Jednakże, w przybliżeniu dyskutowanym w tym rozdziale, zaniedbujemy małe przemieszczenia kul, występujące w argumentach odpowiednich tensorów Greena. W rezultacie, prędkości  $v^{01}(\mathcal{L}_j(0), t)$  określa się następująco:

$$(3.4.2) \quad v^{01}(\mathcal{L}_j(0), t) = \int_0^t dt' \int d\tau' G[R_j(\mathcal{L}_j(0), 0) - \tau', t-t'] \cdot \psi^{\text{ext}}(\tau', t').$$

Zależą one od ustalonych /początkowych/ położeń kul  $R_j(\mathcal{L}_j(0), 0) = \mathbf{R}_j^0 + \mathbf{r}_j^0$ . W opisie oddziaływań hydrodynamicznych, przedstawionym w §2.2, wymagana jest znajomość współczynników rozwinięcia prędkości  $v^{01}(\mathcal{L}_j(0), t)$  w bazie znormalizowanych powierzchniowych harmonik sferycznych:

$$(3.4.3) \quad v_j^{01}(\mathcal{L}_j(0), t) = \sqrt{4\pi} \sum_{lm} v_{j,lm}^{01}(t) Y_l^m(\theta_j^0, \phi_j^0).$$

Celem otrzymania wyrażeń, opisujących te współczynniki, przekształcamy zależności (3.4.2), korzystając z przedstawienia tensorów Greena za pomocą transformat Fouriera względem zmiennych przestrzennych:



$$(3.4.4.) \quad v^{01}(d_{ij}(0, t)) = \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \frac{1}{3} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_j^0(0) + \mathbf{r}_j(0) - \mathbf{r}')] \times \\ \times \exp[-v|\mathbf{k}|^2(t-t')] \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2}\right) \cdot \psi^{\text{ext}}(\mathbf{r}', t').$$

Z (3.4.3), oraz (3.4.4.) wynika, że współczynniki  $v_{j_1, l m}^{01}(t)$  są równe:

$$(3.4.5) \quad v_{j_1, l m}^{01}(t) = \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \frac{1}{3} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_j^0(0) - \mathbf{r}') - v|\mathbf{k}|^2(t-t')] \times \\ \times \sqrt{4\pi} i^l j_l(ak) Y_l^{-m}(\chi, \zeta) \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2}\right) \cdot \psi^{\text{ext}}(\mathbf{r}', t').$$

Korzystając z rozwinięcia  $\exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_j^0 - \mathbf{r}')] / |\mathbf{R}_j^0 - \mathbf{r}'|$  na powierzchniowe harmoniki sferyczne  $Y_l^m(\theta_j^{\text{ext}}, \phi_j^{\text{ext}})$ , gdzie

$$\mathbf{R}_j^0(0) - \mathbf{r}' = R_j^{\text{ext}} = (R_j^{\text{ext}}, \theta_j^{\text{ext}}, \phi_j^{\text{ext}})$$

we współrzędnych sferycznych, wykonujemy w wyrażeniu (3.4.5) całkowanie względem zmiennych kątowych  $\chi, \zeta$ . W ten sposób otrzymujemy:

$$(3.4.6) \quad v_{j_1, l m}^{01}(t) = \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \sum_{l m} H_{l l} (R_j^{\text{ext}}, t-t') Y_l^m(\theta_j^{\text{ext}}, \phi_j^{\text{ext}}) K_{l m, l m}^{\infty} \cdot \psi^{\text{ext}}(\mathbf{r}', t'), \\ \text{gdzie} \\ H_{l l} (R_j^{\text{ext}}, t-t') = \frac{2}{\pi^3} \int k dk j_l(ak) j_l(R_j^{\text{ext}} k) e^{-v|\mathbf{k}|^2(t-t')}, \quad 0 < a < R_j^{\text{ext}}.$$

Własności tensora  $K_{l m, l m}^{\infty} [g]$  powodują, że suma  $\sum_{l m}$  sprowadza się do sum zależnych od wskaźnika  $l_1$ , a mianowicie:

(i) dla przypadku  $l_1$  parzystego:

$$(3.4.7) \quad v_{j_1, l_1 m_1}^{01}(t) = \int_0^t dt' \int d\mathbf{r}' \sum_{l_1} \sum_{2\beta=-2m}^{2m} H_{l_1 l_1} (R_j^{\text{ext}}, t-t') Y_{l_1}^{m_1}(\theta_j^{\text{ext}}, \phi_j^{\text{ext}}) K_{l_1 m_1, l_1 m_1}^{\infty} \cdot \psi^{\text{ext}}(\mathbf{r}', t'),$$

(ii) dla przypadku  $l_1$  nieparzystego:

$$v_{j,l_1,m}^{01}(t) = \int_0^t dt' \int dr' \sum_{2\beta=-2}^{l_1-1} \sum_m H_{l_1,l}(R_j^{ext}, t-t') Y_L^m(\theta_j^{ext}, \phi_j^{ext}) K_{l_1, m, l, m}^{00} f^{ext}(\tau', t').$$

Wykorzystując, podobnie jak w §3.1 - 3.3, transformatę Laplace'a względem czasu, otrzymujemy współczynniki rozwinięcia

$v_{j,l_1,m}^{01}(p)$  w następującej postaci:

$$(3.4.8) \quad v_{j,l_1,m}^{01}(p) = \int dr' \sum_{2\beta=-2}^{l_1^*} \sum_m H_{l_1,l}(R_j^{ext}, p) Y_L^m(\theta_j^{ext}, \phi_j^{ext}) K_{l_1, m, l, m}^{00} f^{ext}(\tau', p),$$

gdzie  $l_1^* = l_1$ , w przypadku  $l_1$  parzystego, oraz  $l_1^* = l_1 - 1$ , w przypadku  $l_1$  nieparzystego. Dla występującego tu zbioru wskaźników  $l_1, l$ , funkcje  $H_{l_1 l}$  można wyrazić poprzez zmodyfikowane funkcje Bessela  $I_{l_1+1/2}$ ,  $K_{l_1+1/2}$ :

(i) w przypadku  $2\beta = l_1 - 1 = 0, 2, 4, \dots$  [28]:

$$(3.4.9) \quad H_{l_1,l}(R_j^{ext}, p) = \frac{1}{g\sqrt{a}R_j^{ext}} I_{l_1+1/2}(a\sqrt{\frac{p}{g}}) K_{l+1/2}(R_j^{ext}\sqrt{\frac{p}{g}}),$$

(ii) w przypadku  $2\beta = -2$ :

$$H_{l_1,l}(R_j^{ext}, p) = \frac{2}{gav} \left(\frac{a}{R_j^{ext}}\right)^{l_1+1} \left(R_j^{ext}\sqrt{\frac{p}{g}}\right)^{-2} \frac{1}{r(l_1+3/2)} \left[ \Gamma(l_1+5/2) - \left(\frac{1}{2}\right)^{l_1+3/2} \left(R_j^{ext}\sqrt{\frac{p}{g}}\right)^{l_1+5/2} K_{l_1+5/2}\left(R_j^{ext}\sqrt{\frac{p}{g}}\right) \right] + \frac{1}{gav} \left(\frac{a}{R_j^{ext}}\right)^{l_1+1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{l_1+1/2} \left(R_j^{ext}\sqrt{\frac{p}{g}}\right)^{l_1+1/2} K_{l_1+5/2}\left(R_j^{ext}\sqrt{\frac{p}{g}}\right) \sum_{x \geq 1} \frac{(-1)^x 2^{-2x} \cos(\pi(1-x))}{x! \Gamma(l_1+3/2+x)} \left(a\sqrt{\frac{p}{g}}\right)^{2x}.$$

Zależnie od wartości parametru  $2\beta$ , funkcje  $H_{l_1 l}$  wykazują odmienne własności przy przejściu do warunków quasi-stacjonarnych:



(i) w przypadku  $2\beta = -2, 0$  :

$$(3.4.10) \quad H_{\ell_1 \ell} (R_j^{\text{ext}}, p) \sim \left( \frac{a}{R_j^{\text{ext}}} \right)^{\ell_1 + 1}, \quad R_j^{\text{ext}} \sqrt{\frac{a}{v}} < 1,$$

(ii) w przypadku  $2\beta = 2, 4, 6, \dots$

$$(3.4.11) \quad H_{\ell_1 \ell} (R_j^{\text{ext}}, p) \sim \left( \frac{a}{R_j^{\text{ext}}} \right)^{\ell_1 + 1} \left( R_j^{\text{ext}} \sqrt{\frac{a}{v}} \right)^{2\beta}, \quad R_j^{\text{ext}} \sqrt{\frac{a}{v}} < 1,$$

gdzie  $2\beta = 2, 4, \dots, l_1$ , gdy  $l_1$  jest parzyste,

$2\beta = 2, 4, \dots, l_1 - 1$ , gdy  $l_1$  jest nieparzyste.

Ze wzorów (3.4.7) wynika, że w wyrażeniach, opisujących współczynniki  $\mathcal{N}_{j,00}^{01}(p)$ , oraz  $\mathcal{N}_{j,1m}^{01}(p)$  występują funkcje  $H_{1,1}$ ,

przechodzące w warunkach quasi-stacjonarnych w odpowiednie funkcje, opisujące quasi-stacjonarne relacje. Natomiast w wyrażeniach, opisujących współczynniki  $\mathcal{N}_{j,1m}^{01}(p)$ ,  $l \geq 2, \dots$  występują oprócz wspomnianych, również funkcje  $H_{1,1}$ , dążące do zera w warunkach quasi-stacjonarnych. Te ostatnie funkcje są związane z  $2\beta \geq 2$ .

Przykładowo, poniżej podano relację, opisującą współczynniki  $\mathcal{N}_{j,00}^{01}(p)$  :

$$(3.4.12) \quad \mathcal{N}_{j,00}^{01}(p) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} K_{00,00}^{00} \cdot \int d\tau' H_{00} (R_j^{\text{ext}}, p) \psi^{\text{ext}}(\tau', p) + \\ + \sum_m K_{00,2m}^{00} \cdot \int d\tau' H_{02} (R_j^{\text{ext}}, p) Y_2^m(\theta_j^{\text{ext}}, \phi_j^{\text{ext}}) \psi^{\text{ext}}(\tau', p),$$

gdzie funkcje  $H_{00}(R_j^{\text{ext}}, p)$ , oraz  $H_{02}(R_j^{\text{ext}}, p)$  są dane wzorami (3.4.9). W interesującym nas przypadku, można

Je przedstawić w postaci:

$$H_{00}(R_j^{\text{ext}}, p) = \frac{1}{2g\nu R_j^{\text{ext}}} (a\sqrt{\frac{p}{\nu}})^{-1} e^{-R_j^{\text{ext}}\sqrt{\frac{p}{\nu}}} [e^{a\sqrt{\frac{p}{\nu}}} - e^{-a\sqrt{\frac{p}{\nu}}}],$$

$$(3.4.13) H_{02}(R_j^{\text{ext}}, p) = \frac{1}{g\nu R_j^{\text{ext}}} \left\{ 3(R_j^{\text{ext}}\sqrt{\frac{p}{\nu}})^{-2} e^{-R_j^{\text{ext}}\sqrt{\frac{p}{\nu}}} (1 + 3(R_j^{\text{ext}}\sqrt{\frac{p}{\nu}})^{-1} + 3(R_j^{\text{ext}}\sqrt{\frac{p}{\nu}})^{-2}) \left[ 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(-1)^\alpha \cos(\pi(1-\alpha)) (a\sqrt{\frac{p}{\nu}})^{2\alpha}}{\alpha! 2^{2\alpha} \Gamma(3/2 + \alpha)} \right] \right\},$$

obrazującej wpływ efektów niestacjonarnych. Warunek  $R_j^{\text{ext}}\sqrt{\frac{p}{\nu}} < 1$  wiąże przedział czasowy, oraz zasięg przestrzeny rozpatrywanych przepływów. Przejście do warunków quasi-stacjonarnych w wyrażeniu, opisującym  $v_{j,lm}^{01}(p)$ , wiąże się zarówno z własnościami funkcji  $H_{1,1}$ , jak i z własnościami sił zewnętrznych, działających na ciecz.

### 3.5. Wpływ początkowego pola prędkości cieczy na względne prędkości kul

Prędkość  $v^{02}(\Omega_j, t)$ , wywołana różnym od zera początkowym polem prędkości cieczy, która występuje w układzie równań całkowych (2.1.10), jest równa :

$$(3.5.1) v^{02}(\Omega_j(t), t) = \int d\mathbf{r}' \Gamma(R_j(\Omega_j(t), t) - \mathbf{r}', t) \cdot \gamma(\mathbf{r}'),$$

gdzie całkowanie względem  $\mathbf{r}'$  obejmuje obszar  $E_3$ .

Jednakże, podobnie jak prędkość  $v^{01}(\Omega_j, t)$ , omawiana w §3.4, w rozpatrywanym przybliżeniu prędkość  $v^{02}$  przyjmuje następującą postać :

$$(3.5.2) v^{02}(\Omega_j(0), t) = \int d\mathbf{r}' \Gamma(R_j^0(0) + \mathbf{r}_j(0) - \mathbf{r}', t) \cdot \gamma(\mathbf{r}'),$$

$$j = 1, \dots, N,$$



tj. prędkość ta zależy od ustalonego rozkładu przestrzennego kul, opisanego wektorami  $R_j(0) = R_j^0(0) + r_j(0)$ ,  $j = 1, \dots, N$ . W dyskutowanych w §3.1, §3.2 relacjach tarcia i ruchliwości występują współczynniki rozwinięcia prędkości  $v^{02}(d_j(0), t)$  w bazie znormalizowanych powierzchniowych harmonik sferycznych:

$$(3.5.3) \quad v_j^{02}(d_j(0), t) = \sqrt{4\pi} \sum_{l,m} v_{j,l,m}^{02}(t) Y_l^m(\theta_j(0), \phi_j(0)), \\ l \geq 0, |m| \leq l.$$

Aby uprościć wyrażenie, określające te współczynniki, korzystamy z następującego przedstawienia prędkości  $v^{02}(d_j(0), t)$ :

$$(3.5.4) \quad v^{02}(d_j(0), t) = \int d\mathbf{r}' \int \frac{1}{S} \frac{dk}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{k} \cdot (R_j^0(0) + r_j(0) - \mathbf{r}')] \times \\ \times \exp[-v|k|^2 t] \zeta(\mathbf{r}').$$

W przedstawieniu tym użyto transformaty Fouriera względem zmiennych przestrzennych tensora  $\Gamma$ . Z zależności (3.5.3), oraz (3.5.4) wynika, że

$$(3.5.5) \quad v_{j,l_1,m_1}^{02}(t) = \int d\mathbf{r}' \int \frac{1}{S} \frac{dk}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{k} \cdot (R_j^0(0) - \mathbf{r}') - v|k|^2 t] \times \\ \times \sqrt{4\pi} i^{l_1} j_{l_1}(ak) Y_{l_1}^{-m_1}(\chi, \xi) \zeta(\mathbf{r}').$$

Podobnie, jak w §3.4, wyrażając  $\exp[i\mathbf{k} \cdot (R_j^0(0) - \mathbf{r}')] \text{ po-}$   
 przez harmoniki sferyczne, a następnie wykonując całkowanie  
 względem zmiennych kątowych  $(\chi, \xi)$ , otrzymujemy (rozpatrując  
 wpływ początkowego pola tylko prędkości uciwy):

$$(3.5.6) \tilde{v}_{j, l_1 m_1}^{02}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (i)^{2l_1} \int d\mathbf{r}' H_{l_1 l_1}(R_j^{\text{ext}}, t) Y_{l_1}^{-m_1}(\theta_j^{\text{ext}}, \phi_j^{\text{ext}}) \mathcal{Y}(\mathbf{r}'),$$

gdzie funkcje  $H_{l_1 l_1}(R_j^{\text{ext}}, t)$  są dane wzorem (3.4.6), przy  $l = l_1$ , oraz przy  $0 < a < R_j^{\text{ext}}$ .

W rozpatrywanych relacjach tarcia i ruchliwości występują transformaty Laplace'a współczynników  $\tilde{v}_{j, lm}^{02}(t)$ , a mianowicie:

$$(3.5.7) \tilde{v}_{j, l_1 m_1}^{02}(p) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (i)^{2l_1} \int d\mathbf{r}' H_{l_1 l_1}(R_j^{\text{ext}}, p) Y_{l_1}^{-m_1}(\theta_j^{\text{ext}}, \phi_j^{\text{ext}}) \mathcal{Y}(\mathbf{r}'),$$

gdzie funkcje  $H_{l_1 l_1}(R_j^{\text{ext}}, p)$  są dane wzorem (3.4.9), dla  $l = l_1$ .

Poniżej podano, przykładowo, współczynnik  $\tilde{v}_{j, 00}^{02}(p)$ :

$$(3.5.8) \tilde{v}_{j, 00}^{02}(p) = \frac{\sinh(a\sqrt{\frac{p}{v}})}{4\pi g a v} \int d\mathbf{r}' (R_j^{\text{ext}} \sqrt{\frac{p}{v}})^{-1} \exp[-R_j^{\text{ext}} \sqrt{\frac{p}{v}}] \mathcal{Y}(\mathbf{r}').$$

Dla warunków bliskich quasi-stacjonarym, funkcje  $H_{l_1 l_1}(R_j^{\text{ext}}, p)$  zachowują się następująco:

$$(3.5.9) H_{l_1 l_1}(R_j^{\text{ext}}, p) \sim (a/R_j^{\text{ext}})^{l_1+1}, \quad R_j^{\text{ext}} \sqrt{\frac{p}{v}} < 1.$$

Przejście do granicy przepływów quasi-stacjonarnych zależy od własności funkcji  $H_{l_1 l_1}(R_j^{\text{ext}}, p)$ , oraz od własności początkowego pola prędkości cieczy.



#### 4. Niestacjonarne relacje tarcia, opisujące oddziaływania hydrodynamiczne przy uwzględnieniu małych przemieszczeń kul

##### 4.1 Uwagi wstępne

W niniejszym rozdziale rozpatrujemy niestacjonarne relacje tarcia, charakteryzujące takie oddziaływania hydrodynamiczne pomiędzy kulami, w przypadku których wpływ małych przemieszczeń kul nie jest pomijalny. Przybliżenie to zostało omówione w § 2.3. W rozpatrywanym przypadku siła  $F_j(\lambda, p)$ , oraz moment siły oporu hydrodynamicznego  $T_j(\lambda, p)$ , wywierane przez ciecz na kule są równe:

$$(4.1.1) \quad F_j(\lambda, p) = \frac{4}{3} \pi a^3 [\rho \dot{R}_j^0(p) - \dot{R}_j^0(0)] - \psi_{j,00}(\lambda, p),$$

$$(4.1.2) \quad T_j(\lambda, p) = \frac{a}{\sqrt{3}} \varepsilon \left[ \sum_{m=-1}^1 \mathcal{L}_m \psi_{j,1m}(\lambda, p) \right],$$

$$\text{gdzie } \psi_{j,1m}(\lambda, p) = \mathcal{L}_m \left[ -\frac{\sqrt{3}}{a} F_j^s(\lambda, p) - \frac{\sqrt{3}}{2a} \varepsilon \cdot T_j(\lambda, p) \right].$$

Wielkości  $\psi_{j,00}(\lambda, p)$ , oraz  $\psi_{j,1m}(\lambda, p)$ , występujące w powyższych zależnościach, obliczamy w przyjętym przybliżeniu, korzystając z iteracyjnego wyrażenia (2.3.7). Wielkości te zależą od względnych prędkości kul  $V_{j,1m}(\lambda, p)$ , za pośrednictwem dopuszczalnych sekwencji oddziaływań hydrodynamicznych.

W rozpatrywanym przypadku, prędkości te są równe:

$$(4.1.3) \quad \begin{aligned} V_{j,00}(\lambda, p) &= \dot{R}_j^0(p) - v_{j,00}^0(\lambda, p), \\ V_{j,1m}(\lambda, p) &= -v_{j,1m}^0(\lambda, p) = -\mathcal{L}_m \cdot W_j^0(\lambda, p), \\ V_{j,lm}(\lambda, p) &= -v_{j,lm}^0(\lambda, p), \quad l \geq 2. \end{aligned}$$

We wzorze (4.1.3) współczynniki  $V_{j,1m}(\lambda, p)$  wyrażono za pomocą momentów dipolowych prędkości cieczy  $W_j^0(\lambda, p)$ .

Własności tensorów oddziaływań hydrodynamicznych  $T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(\mathbf{O}_j, \lambda, p)$ , oraz  $T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, p)$ , występujących w rozpatrywanym przybliżeniu, są tematem dodatku B. Poniżej przedstawiamy krótkie podsumowanie wyników tego dodatku.

Tensor samooddziaływania przedstawiono w postaci:

$$(4.1.4) \quad T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(\mathbf{O}_j, \lambda, p) = T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(\mathbf{O}_j, p) + S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(\mathbf{O}_j, \lambda, p).$$

Własności tensorów  $T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(\mathbf{O}_j, p)$  omawiano w §3. Tensor  $S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(\mathbf{O}_j, \lambda, p)$  opisują wpływ małych przemieszczeń kul. Są one równe:

$$(4.1.5) \quad S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(\mathbf{O}_j, \lambda, p) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} E_{l_1 l_2, 0}(\mathbf{O}_j, \lambda, p) B_{l_1 m_1, 00}^{l_2 m_2},$$

gdzie funkcje  $E_{l_1 l_2, 0}$  zależą liniowo od modułu prędkości charakterystycznej  $\lambda$ . Z użyciem tej prędkości można zbudować bezwymiarową wielkość charakterystyczną  $\varepsilon_s = \lambda/ap$ . Wyraża ona stosunek dwóch długości:  $\lambda/p$  - opisującej drogę przebytą przez kulę w czasie charakterystycznym  $1/p$ , oraz promienia kuli  $a$ . W rozpatrywanych warunkach  $\varepsilon_s < 1$ .

Tensor  $T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(\mathbf{O}_j, \lambda, p)$  są równe zero, o ile ich wskaźniki nie odpowiadają następującym warunkom  $l_2 = l_1, l_1 \pm 1, l_1 \pm 2, l_1 \pm 3$ . W porównaniu z tensorami rozpatrywanymi w §3, mamy więc dwa dodatkowe typy tensorów samooddziaływania, różnych od zera. Są one poza-diagonalne, z punktu widze-



nia wartości przyjmowanych przez wskaźniki  $l_1, l_2$ , a mianowicie  $l_2 = l_1 \pm 1, l_1 \pm 3$ . W warunkach bliskich quasi-stacjonarnym, funkcje  $E_{l_1 l_2, 0}$ , z punktu widzenia ich zależności od  $p$ , zachowują się następująco:

$$(4.1.6) \quad E_{l_1 l_2, 0} \sim \frac{\lambda}{ap} \left( a \sqrt{\frac{p}{\lambda}} \right)^2, \text{ gdy } |l_1 - l_2| = 1,$$

$$E_{l_1 l_2, 0} \sim \frac{\lambda}{ap} \left( a \sqrt{\frac{p}{\lambda}} \right)^4, \text{ gdy } |l_1 - l_2| = 3.$$

W warunkach quasi-stacjonarnych są one równe zeru.

Tensory oddziaływań wzajemnych, w rozpatrywanym przybliżeniu, są równe:

$$(4.1.7) \quad T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, p) = T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, p) + S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, p).$$

W powyższym wyrażeniu mamy tensory  $T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, p)$ , omówione w §3, oraz tensory  $S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, p)$ , opisujące wpływ małych przemieszczeń kul. Są one następującej postaci:

$$(4.1.8) \quad S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, p) = \sum_{l_3 m_3} E_{l_1 l_2 l_3}(R_{kj}, \lambda, p) B_{l_1 m_1 l_3 m_3}^{l_2 m_2} Y_{l_3}^{m_3}$$

$$l_3 \geq 0, |m_3| \leq l_3.$$

Funkcje  $E_{l_1 l_2 l_3}$  są proporcjonalne do bezwymiarowej wielkości  $\epsilon_m = \lambda / (R_{kj} p)$ . Wielkość ta jest zbudowana analogicznie do wielkości  $\epsilon_s$ ; występuje w niej jednakże inna długość charakterystyczna -  $R_{kj}$ . W rozpatrywanych warunkach  $\epsilon_m < 1$ .

Jak wynika z zależności (B7) z punktu widzenia własności tensorów  $S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, p)$  interesują nas tylko te funkcje  $E_{l_1 l_2 l_3}$ , których indeksy spełniają  $2\tilde{\beta} = l_1 + l_2 - l_3 = -3, -1, 1, 3, \dots$

W warunkach bliskich quasi-stacjonarym, zależność funkcji  $E_{l_1 l_2 l_3}$  od odległości między kulami można podsumować następująco:

(i) w przypadkach  $2\tilde{\beta} = -3, -1$  mamy:

$$(4.1.9) \quad E_{l_1 l_2 l_3} \sim \frac{\lambda}{Rp} \left(\frac{a}{R}\right)^{l_1 + l_2 + 1} \left(R\sqrt{\frac{p}{V}}\right)^2,$$

(ii) w przypadkach  $2\tilde{\beta} = 1, 3, 5, \dots$  zachodzi:

$$(4.1.10) \quad E_{l_1 l_2 l_3} \sim \frac{\lambda}{Rp} \left(\frac{a}{R}\right)^{l_1 + l_2 + 1} \left(R\sqrt{\frac{p}{V}}\right)^{2\tilde{\beta} + 1}$$

gdzie  $R\sqrt{p/V} < 1$ .

Zależność funkcji  $E_{l_1 l_2 l_3}$  od odwrotności potęg odległości między kulami jest więc jakościowo podobna do zależności od  $G^n$  funkcji  $F_{l_1 l_2 l_3}$ , omawianej w §3. Podobnie, jak w przypadku samo-oddziaływania, tensory  $S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}$  oddziaływań wzajemnych są równe zero w warunkach quasi-stacjonarych.

Oprócz tensorów, będących tensorami rzędu drugiego, w przedstawionym opisie oddziaływań hydrodynamicznych występują również zmodyfikowane tensory oddziaływań, rzędu trzeciego oraz czwartego. Są one zbudowane z odpowiednich tensorów rzędu drugiego, oraz wektorów  $\mathcal{L}_m$ . Przykładowo, poniżej zdefinio-



wano dwa zmodyfikowane tensory oddziaływań hydrodynamicznych /pozostałe zmodyfikowane tensory są zbudowane analogicznie/:

$$\sum_{m_1} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{S}_{1m_1}^{00} = \tilde{S}_S^{00} + \tilde{S}_A^{00} = \left[ \sum_{m_1} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{S}_{1m_1}^{00} \right]_S + \left[ \sum_{m_1} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{S}_{1m_1}^{00} \right]_A, \quad (4.1.11)$$

$$\sum_{m_2} \tilde{S}_{00}^{1m_2} \mathcal{L}_{m_2} = \tilde{S}_{00}^S + \tilde{S}_{00}^A = \left[ \sum_{m_2} \tilde{S}_{00}^{1m_2} \mathcal{L}_{m_2} \right]^S + \left[ \sum_{m_2} \tilde{S}_{00}^{1m_2} \mathcal{L}_{m_2} \right]^A.$$

Tensory  $\tilde{S}_S^{00}$ , oraz  $\tilde{S}_A^{00}$  są, odpowiednio, symetryczne, oraz antysymetryczne względem dwóch pierwszych wskaźników, natomiast tensory  $\tilde{S}_{00}^S$ , oraz  $\tilde{S}_{00}^A$  są, odpowiednio, symetryczne, oraz antysymetryczne względem dwóch ostatnich wskaźników.

Znając odpowiednie własności tensorów oddziaływań hydrodynamicznych, możemy otrzymać wyrażenie opisujące  $\psi_{j,00}(\lambda, p)$ , oraz  $\psi_{j,1m}(\lambda, p)$  z dowolnym przybliżeniem. W rozdziale tym rozpatrujemy następujące przybliżenie:

(i) wpływ małych przemieszczeń kul uwzględniamy do rzędu  $O(\varepsilon_s)$ , lub  $O(\varepsilon_m)$ , odpowiednio,

(ii) wpływ odległości między kulami uwzględniamy do rzędu  $O\left(\left(a/R_{kj}\right)^2\right)$ ,

(iii) wpływ niestacjonarności ruchu cieczy uwzględniamy do rzędu  $O\left(\left(a/\sqrt{v}\right)^2\right)$ , oraz  $O\left(\left(R_{kj}/\sqrt{v}\right)^2\right)$ , odpowiednio.

Dodatek C zawiera wyrażenia iteracyjne, opisujące  $\psi_{j,00}(\lambda, p)$ , oraz  $\psi_{j,1m}(\lambda, p)$ , w powyższym przybliżeniu.

## 4.2. Relacje tarcia

Znajomość postaci współczynników rozwinięcia sił indukowanych  $\psi_{j,00}(\lambda, p)$ , oraz  $\psi_{j,1m}(\lambda, p)$  prowadzi do otrzymania relacji tarcia. Postępujemy tu podobnie, jak w rozdziale 3. Wyrażenia iteracyjne, opisujące  $\psi_{j,00}(\lambda, p)$ , oraz  $\psi_{j,1m}(\lambda, p)$ , przekształcamy tak, aby wydzielić następujące efekty:

- (i) wpływ translacyjnych prędkości kul, oraz wpływ prędkości cieczy,
- (ii) oddziaływania, decydujące o momentach sił oporu hydrodynamicznego  $\mathbb{T}_j(\lambda, p)$ , oraz o symetrycznych momentach dipolowych sił  $\mathbb{F}_j^S(\lambda, p)$ .

Przy przekształceniach tych stosujemy zależności (4.1.2), oraz (4.1.3). W rezultacie otrzymujemy relacje tarcia:

następujące

$$(4.2.1) \quad \mathbb{F}_j(\lambda, p) = -\sum_{k=1}^N \mathbb{Z}_{jk}^{TT}(\lambda, p) \cdot \dot{R}_k^0(p) + \frac{4}{3} \pi a^3 g [p \dot{R}_j^0(p) - \dot{R}_j^0(0)] + \\ - \sum_{k=1}^N \sum_{lm}^I \mathbb{Z}_{jk,lm}^{TV}(\lambda, p) \cdot v_{k,lm}^0(\lambda, p),$$

$$(4.2.2) \quad \mathbb{T}_j(\lambda, p) = -\sum_{k=1}^N \mathbb{Z}_{jk}^{RT}(\lambda, p) \cdot \dot{R}_k^0(p) - \sum_{k=1}^N \sum_{lm}^I \mathbb{Z}_{jk,lm}^{RV}(\lambda, p) \cdot v_{k,lm}^0(\lambda, p),$$

$k, j = 1, \dots, N.$

Postać tych relacji jest podobna do postaci relacji tarcia, rozpatrywanych w §3. Jednakże tutaj siły oraz momenty sił oporu hydrodynamicznego zależą od małych przemieszczeń kul; bezwymiarowe wielkości  $\varepsilon_g$ , oraz  $\varepsilon_m$ , kontrolujące te efekty, występują w tensorach oddziaływań hydrodynamicznych. W §4.3 wymieniono tensory tarcia, działające na translacyjne prędkości kul, oraz na pole prędkości cieczy, za pośrednictwem współczynników  $v_{j,00}^0$ , oraz  $v_{j,1m}^0$ . Tensory tarcia, działające na  $v_{j,lm}^0$ ,  $l \geq 2$ , umieszczono w dodatku D.

#### 4.3. Własności współczynników tarcia

Na translacyjne prędkości kul działają następujące współczynniki tarcia:

1. translacyjno-translacyjne współczynniki tarcia postaci:



$$(4.3.1) \quad \check{z}_{jj}^{TT}(\lambda, p) = \check{z}_{jj}^{TT}(p) + \sum_{k \neq j} \tilde{T}(O_j) \cdot T(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(O_k) \cdot S(R_{jk}) \cdot \tilde{T}(O_j) + \\ + \sum_{k \neq j} \tilde{T}(O_j) \cdot S(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(O_k) \cdot T(R_{jk}) \cdot \tilde{T}(O_j);$$

dwa dodatkowe człony, które występują w  $\check{z}_{jj}^{TT}(\lambda, p)$  w porównaniu z  $\check{z}_{jj}^{TT}(p)$ , są rzędu  $O(\epsilon^2)$ ; wynikają one z dwukrotnych oddziaływań między kulami;

2. translacyjno-translacyjne współczynniki tarcia wzajemnego postaci:

$$(4.3.2) \quad \check{z}_{jk}^{TT}(\lambda, p) = \check{z}_{jk}^{TT}(p) - \tilde{T}(O_j) \cdot S(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(O_k) - \sum_m \tilde{S}_{00}^{1m}(O_j) \cdot T_{1m}^{00}(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(O_k) + \\ - \sum_m \tilde{T}(O_j) \cdot T_{00}^{1m}(R_{kj}) \cdot \tilde{S}_{1m}^{00}(O_k) + \sum_{k \neq k_1} \sum_{k_1 \neq j} \tilde{T}(O_j) \cdot T(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(O_{k_1}) \cdot \\ \cdot S(R_{k_1 k_j}) \cdot \tilde{T}(O_k) + \sum_{k \neq k_1} \sum_{k_1 \neq j} \tilde{T}(O_j) \cdot S(R_{k_1 j}) \cdot \tilde{T}(O_{k_1}) \cdot T(R_{k_1 k_j}) \cdot \tilde{T}(O_k);$$

pięć dodatkowych członów, które występują w  $\check{z}_{jk}^{TT}(\lambda, p)$  w porównaniu z  $\check{z}_{jk}^{TT}(p)$ , jest rzędu, odpowiednio,  $O(\epsilon^3)$ , oraz  $O(\epsilon^2)$ ; trzy z tych członów opisuje oddziaływania jednokrotne między kulami, natomiast ostatnie dwa - oddziaływania dwukrotne między kulami;

3. rotacyjno-translacyjne współczynniki tarcia postaci:

$$(4.3.3) \quad \check{z}_{ij}^{RT}(\lambda, p) = \check{z}_{ij}^{RT}(p) - \frac{a}{\sqrt{3}} \epsilon : \left[ \sum_m \mathcal{L}_{-m} \tilde{S}_{1m}^{00}(O_j) \right] + \\ - \sum_{k \neq j} \frac{a}{\sqrt{3}} \epsilon : \left[ \sum_m \mathcal{L}_{-m} \tilde{S}_{1m}^{00}(O_j) \right] \cdot T(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(O_k) \cdot T(R_{jk}) \cdot \tilde{T}(O_j);$$

dotkowe, w porównaniu z §3, człony w tych współczynnikach są rzędu  $O(\epsilon^0)$ , oraz  $O(\epsilon^2)$ ; pierwszy z nich dotyczy samo-oddziaływania pojedynczej kuli z otaczającą cieczą, natomiast drugi wynika z oddziaływań dwukrotnych; sprzężenie między momentami sił oporu hydrodynamicznego, a transla-

cyjnymi prędkościami kul, opisane pierwszym członem, nie występuje w przybliżeniu, rozpatrywanym w rozdziale 3.

4. rotacyjno-translacyjne współczynniki tarcia wzajemnego postaci :

$$\begin{aligned}
 \zeta_{jk}^{RT}(\lambda, p) = & \zeta_{jk}^{RT}(p) + \frac{a}{\sqrt{3}} \varepsilon : \left[ \sum_m \mathcal{L}_{-m} \tilde{S}_{1m}^{00}(\mathbf{0}_j) \right] \cdot T(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(\mathbf{0}_k) + \\
 (4.3.4) \quad & + \frac{a}{\sqrt{3}} \varepsilon : \left[ \sum_{m_1, m_2} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(\mathbf{0}_j) \right] \cdot S_{1m_2}^{00}(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(\mathbf{0}_k) + \\
 - \sum_{k_1 \neq j} \sum_{k \neq k_1} \frac{a}{\sqrt{3}} \varepsilon : & \left[ \sum_m \mathcal{L}_{-m} \tilde{S}_{1m}^{00}(\mathbf{0}_j) \right] \cdot T(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(\mathbf{0}_{k_1}) \cdot T(R_{kk_1}) \cdot \tilde{T}(\mathbf{0}_k)
 \end{aligned}$$

dotatkowe, w porównaniu z §3, członów w tych współczynnikach są rzędu  $O(\sigma^j)$ , oraz  $O(\sigma^2)$ , odpowiednio; dwa z nich są generowane przez oddziaływania jednokrotne, natomiast jeden - przez oddziaływania dwukrotne między kulami.

Spośród współczynników tarcia, wpływających na siły oporu hydrodynamicznego  $\mathbf{F}_j(\lambda, p)$ , na pole prędkości cieczy działają następujące współczynniki:

1. współczynniki tarcia, działające na  $\mathbf{v}_{j,00}^0$ :

$$(4.3.5) \quad \zeta_{jj,00}^{TV}(\lambda, p) = -\zeta_{jj}^{TT}(\lambda, p);$$

2. współczynniki tarcia wzajemnego, działające na  $\mathbf{v}_{j,00}^0$ :

$$(4.3.6) \quad \zeta_{jk,00}^{TV}(\lambda, p) = -\zeta_{jk}^{TT}(\lambda, p).$$

Ten sam rodzaj zależności występował dla współczynników tarcia, rozpatrywanych w przybliżeniu z §3.



3. współczynniki tarcia, działające na  $W^0_j$  :

$$(4.3.7) \quad \begin{aligned} \ddot{\xi}_{jj}^{TV, W^0}(\lambda, p) = & \ddot{\xi}_{jj}^{TV, W^0}(p) - \tilde{S}_{00}^A(O_j) - \tilde{S}_{00}^S(O_j) + \\ & - \sum_{k \neq j} \tilde{T}(O_j) \cdot T(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(O_k) \cdot T(R_{jk}) \cdot [\tilde{S}_{00}^A(O_j) + \tilde{S}_{00}^S(O_j)] ; \end{aligned}$$

dotatkowe, w porównaniu z §3, człony w tych współczynnikach są rzędu  $O(G^0)$ , oraz  $O(G^2)$ ; pierwszy z nich opisuje samo-oddziaływanie kuli z cieczą, drugi wynika z oddziaływań dwukrotnych; sprzężenie siły oporu hydrodynamicznego z momentem dipolowym prędkości cieczy, opisane przez pierwszy człon, nie występuje w przybliżeniu rozpatrywanym w §3.

4. współczynniki tarcia wzajemnego, działające na  $W^0_j$  :

$$(4.3.8) \quad \begin{aligned} \ddot{\xi}_{jk}^{TV, W^0}(\lambda, p) = & \ddot{\xi}_{jk}^{TV, W^0}(p) + \tilde{T}(O_j) \cdot T(R_{kj}) \cdot \left[ \sum_m \tilde{S}_{00}^{1m}(O_k) \mathcal{L}_m \right] + \\ & + \sum_{m_1} \tilde{T}(O_j) \cdot S_{00}^{1m_1}(R_{kj}) \cdot \left[ \sum_{m_2} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2}(O_k) \mathcal{L}_{m_2} \right] - \\ & - \sum_{k \neq k_1} \sum_{k_1 \neq j} \tilde{T}(O_j) \cdot T(R_{kj}) \cdot \tilde{T}(O_{k_1}) \cdot T(R_{k_1 k_1}) \cdot \left[ \sum_{m_2} \tilde{S}_{00}^{1m_2}(O_k) \mathcal{L}_{m_2} \right] ; \end{aligned}$$

trzy dodatkowe sekwencje oddziaływań hydrodynamicznych są rzędu  $O(G^1)$ , oraz  $O(G^2)$ , odpowiednio; dwie z nich wynikają z oddziaływań jednokrotnych, trzecia natomiast - z oddziaływań dwukrotnych między kulami.

Pośród współczynników tarcia, wpływających na momenty sił oporu hydrodynamicznego  $T_j(\lambda, p)$ , na pole prędkości cieczy działają następujące współczynniki:

1. współczynniki tarcia, oraz współczynniki tarcia wzajemnego, działające na  $v^0_{j,00}$  :

$$(4.3.9) \quad \overset{RV}{\zeta}_{jj,00}(\lambda, p) = -\overset{RT}{\zeta}_{jj}(\lambda, p),$$

$$(4.3.10) \quad \overset{RV}{\zeta}_{jk,00}(\lambda, p) = -\overset{RT}{\zeta}_{jk}(\lambda, p),$$

2. współczynniki tarcia, oraz współczynniki tarcia wzajemnego, działające na  $W_j^0$ :

$$(4.3.11) \quad \overset{RV}{\zeta}_{jj, W^0}(\lambda, p) = \overset{RV}{\zeta}_{jj, W^0}(p),$$

$$(4.3.12) \quad \overset{RV}{\zeta}_{jk, W^0}(\lambda, p) = \overset{RV}{\zeta}_{jk, W^0}(p) +$$

$$-\frac{a}{\sqrt{3}} \varepsilon : \left[ \sum_{m_1, m_2} \mathcal{L}_{-m_1} \overset{\sim}{T}_{1m_2}^{1m_2}(0_j) \right] \cdot T_{1m_2}^{00}(R_{kj}) \cdot \left[ \sum_m \overset{\sim}{S}_{00}^{1m}(0_k) \mathcal{L}_{m_3} \right] +$$

$$-\frac{a}{\sqrt{3}} \varepsilon : \left[ \sum_{m_1} \mathcal{L}_{-m_1} \overset{\sim}{S}_{1m_1}^{00}(0_j) \right] \cdot \sum_{m_2} T_{00}^{1m_2}(R_{kj}) \cdot \left[ \sum_{m_3} \overset{\sim}{T}_{1m_2}^{1m_3}(0_k) \mathcal{L}_{m_3} \right].$$

Pozostałe współczynniki tarcia, w rozpatrywanym przybliżeniu, działające na  $W_j^0$ ,  $l \geq 2$ , są zebrane w Dodatku D.

Jak wynika z powyższych relacji, uwzględnienie małych przemieszczeń kul prowadzi do wystąpienia specyficznych sekwencji oddziaływań hydrodynamicznych. W rezultacie, relacje tarcia posiadają następujące charakterystyczne własności:

- (i) Występują w nich współczynniki tarcia, zależące od bezwymiarowych wielkości  $\xi_s$ , lub odpowiednio  $\xi_m$ ,



- (ii) We współczynnikach tarcia, opisujących momenty sił oporu hydrodynamicznego, występują człony rzędu  $O(\sigma^1)$ , których brak w przybliżeniu rozpatrywanym w §3,
- (iii) W szczególnym przypadku umieszczenie w przepływie pojedynczej kuli, siła oporu zależy <sup>m.in.</sup> od momentu dipolowego  $W_j^0$  prędkości cieczy, a moment siły oporu zależy m.in. od prędkości translacyjnej rozpatrywanej kuli.

Opór hydrodynamiczny pojedynczej kuli, wynikający z wpływu małego przemieszczenia się tej kuli w rozpatrywanym czasie oddziaływania, jest więc jakościowo różny od oporu, występującego w warunkach quasi-stacjonarnych. Jest on również jakościowo różny od oporu wynikającego z wpływu przemieszczenia się kuli, ograniczonego tylko założeniem o małości liczby Reynoldsa. Opór taki, dla kuli poruszającej się ze stałą prędkością w cieczy spoczywającej w nieskończoności, rozpatrywali Mazur i Weisenborn [34]. Otrzymana przez tych autorów siła oporu hydrodynamicznego zależy od liczby Reynoldsa, natomiast moment siły oporu jest równy zeru.

## 5. Uwagi końcowe

W pracy tej analizowano niestacjonarne Stokesowskie oddziaływania hydrodynamiczne pomiędzy skończoną liczbą sztywnych kul, umieszczonych w cieczy nieściśliwej. Zastosowano podejście całkowe, z użyciem niestacjonarnego tensora Greena. Oddziaływania hydrodynamiczne między kulami przedstawiono jako wynik wielokrotnego rozpraszania zaburzeń pola prędkości cieczy, wywołanych obecnością kul. Dopuszczalne sekwencje oddziaływań opisywane są za pomocą tensorów niestacjonarnych oddziaływań hydrodynamicznych. Występują wśród nich tzw. tensory samo-oddziaływania pojedynczej kuli, umieszczonej w cieczy, oraz tzw. tensory oddziaływań wzajemnych, opisujące oddziaływania między  $j$ -tą, a  $k$ -tą kulą. Podobnie, jak w warunkach quasi-stacjonarnych, również w rozpatrywanych warunkach niestacjonarnych oddziaływania hydrodynamiczne charakteryzuje nieaddytywność parami.

Rozpatrywano dwa przypadki szczególne oddziaływań niestacjonarnych:

- /a/ oddziaływania, w czasie charakterystycznym których wpływ przemieszczeń kul, jest do pominięcia,
- /b/ oddziaływania przy słabym wpływie przemieszczeń kul.

Analiza własności sekwencji oddziaływań posłużyła do otrzymania niestacjonarnych relacji tarcia, oraz niestacjonarnych relacji ruchliwości kul. Otrzymano współczynniki tarcia w przypadkach /a/ i /b/, oraz współczynniki ruchliwości w przypadku /a/, w rozpatrywanym przybliżeniu. Sekwencje oddziaływań hydrodynamicznych, kształtujących te współczynniki, są zebrane, w przypadku /a/ - w tablicach 1 - 8 z pracy [27], natomiast w przypadku /b/ - w dodatku C.

W przypadku /a/, wpływ niestacjonarności przejawia się następująco:

- (i) współczynniki tarcia oraz ruchliwości można przedstawić w postaci szeregu potęg zmiennej  $a\sqrt{p/V}$ , opisującej niestacjonarność ruchu cieczy, oraz zmiennej  $\lambda/ap$ , opisującej wpływ małych przemieszczeń kul /w rozpatrywanym



przybliżeniu  $a\sqrt{p/\nu} < 1$ ,  $\lambda/ap \approx 0$  /,

- (ii) pole prędkości cieczy wpływa na opór hydrodynamiczny oraz ruchliwość kul za pośrednictwem wielkości  $\mathcal{R}_{j,lm}^0(p)$  o większych indeksach  $l \leq 4$  /, niż w warunkach quasi-stacjonarnych  $l \leq 2$  /,
- (iii) w relacjach tarcia i ruchliwości występują wielkości  $\mathbf{I}_j^T, \mathbf{I}_j^R$ , opisujące inercję cieczy, wypartej przez j-tą kulę,  $j = 1, \dots, N$ ,
- (iv) niestacjonarny opór hydrodynamiczny oraz ruchliwość kul zależą od historii ruchu kul oraz cieczy /efekty pamięci/.

W przypadku /b/, pojawiają się następujące dodatkowe efekty niestacjonarności:

- (i) współczynniki tarcia zależą liniowo od bezwymiarowych wielkości  $\lambda/ap$ , lub  $\lambda/R_{kj}p$ , za wyjątkiem współczynników, wymienionych w dodatku D /w rozpatrywanym przybliżeniu  $\lambda/ap < 1$ ,  $\lambda/R_{kj}p < 1$  /,
- (ii) przy obliczaniu momentów sił oporu hydrodynamicznego nieaddytywność oddziaływań ingeruje w przyczynkach niższego rzędu względem  $\sigma/a$  mianowicie w członach rzędu  $O(\sigma^2)$  /, niż w przypadku /a/ /tu odpowiednio w członach rzędu  $O(\sigma^3)$  /.

Otrzymane współczynniki tarcia i ruchliwości w warunkach quasi-stacjonarnych przechodzą w odpowiednie wielkości, opisujące oddziaływania quasi-stacjonarne.

## Literatura

- 1 H.LAMB, Hydrodynamics, 6 Ed. Cambridge, University Press, 1932.
- 2 J.HAPPEL, H.BRENNER, Low Reynolds Number Hydrodynamics, Prentice - Hall, 1965.
- 3 A.ACRIVOS, Fluid Dynamics Transactions, 13, 1987.
- 4 G.K.BATCHELOR, J.T.GREEN, J.Fluid Mech. 56, /375-400/, 1972.
- 5 R.SCHMITZ, B.U.FELDERHOF, Physica 116A, /163-177/, 1982.
- 6 B.U.FELDERHOF, Physica 89A, /373-384/, 1977.
- 7 A.J.HURD, N.A.CLARK, R.C.MOCKLER, W.J.O'SULLIVAN, J.Fluid Mech. 153, /401-416/, 1985.
- 8 K.FREED, M.MUTHUKUMAR, J.Chem.Phys. 69, /2657-2671/, 1978.
- 9 T.YOSHIZAKI, H.YAMAKAWA, J.Chem.Phys. 73, /578-582/, 1980.
- 10 P.MAZUR, W.VAN SAARLOOS, Physica 115A, /21-57/, 1982.
- 11 L.G.LEAL, Ann.Rev.Fluid Mech. 12, /435-476/, 1980.
- 12 J.R.OCKENDON, J.Fluid Mech. 34, /229-239/, 1968.
- 13 R.H.DAVIS, J.Fluid Mech. 145, /179-199/, 1984.
- 14 C.W.J.BEENAKKER, Physica 128A, /48-81/, 1984.
- 15 C.W.J.BEENAKKER, P.MAZUR, Phys.Fluids, 28, /767-770/, 1985.
- 16 J.C.SLATTERY, J.Fluid Mech. 19, /625-630/, 1964.
- 17 R.BERKER, Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible; Encyclopedia of Physics, tom VIII/2, ed. S.Flügge, Springer 1963.
- 18 P.MAZUR, D.BEDEAUX, Physica 76, /235-246/, 1974.
- 19 B.P.HILLS, Physica 80A, /360-368/, 1975.  
F.FEVILLEBOIS, A.LASEK, Q.J.Mech.Appl. Math., 31, /435-443/, 1978.
- 20 W.VAN SAARLOOS, P.MAZUR, Physica 120A, /77-102/, 1983.



- 21 S.LEICHTBERG, S.WEINBAUM, R.PFEFFER, M.J.GLUCKMAN, Phil. Trans.Roy.Soc.London, 292A, /585-610/, 1976.
- 22 D.BEDEAUX, R.KAPRAL, P.MAZUR, Physica 88A, /88-121/, 1977.
- 23 О.А.Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, Наука, Москва, 1970.
- 24 В.А.Солонников, Труды Матем. Инстит. им. Стеклова, 70, /213-317/, 1964.
- 25 A.R.EDMONDS, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton University Press, 1957.
- 26 M.MUTHUKUMAR, K.FREED, J.Chem.Phys. 70, /5875-5887/, 1979.
- 27 I.PIEŃKOWSKA, Arch.Mech. 36, /749-769/, 1984.
- 28 ed. A.ERDELYI, Tables of Integral Transforms, том II, McGraw - Hill, 1954.
- 29 У.Градштейн, И.Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, Москва, 1971.
- 30 ed. A.ERDELYI, Tables of Integral Transforms, том I, McGraw - Hill, 1954.
- 31 R.G.COX, H.BRENNER, J.Fluid Mech. 28, /391-411/, 1967.
- 32 S.C.SZU, J.J.HERMANS, J.Polymer Science, 11, /1941-1948/, 1973.
- 33 С.М.Белоносов, К.А.Черноус, Краевые задачи для уравнений Навье - Стокса, Наука, Москва, 1985.
- 34 P.MAZUR, A.J.WEISENBORN, Physica 123A, /209-226/, 1984.
- 35 I.PIEŃKOWSKA, Arch.Mech. 34, /297-307/, 1982.
- 36 ed. R.E.MEYER, Theory of Dispersed Multiphase Flow, Academic Press, 1983.
- 37 ed. A.ERDELYI, Higher Transcendental Functions, том II, McGraw - Hill, 1954.

## 7. Oznaczenia

- $a$  - promień kuli,  $A$  - objętość kuli,  
 $B_{l_1 m_1, l_2 m_2, l_3 m_3}$  - tensor, zdefiniowany wzorem (B1),  
 $E_{l_1 l_2, l_3}$  - funkcja, zdefiniowana wzorem (B1),  
 $F_j$  - siła oporu hydrodynamicznego, wywieranego przez ciecz na  $j$ -tą kulę,  
 $F_j^S$  - symetryczny moment dipolowy siły, wywierany przez ciecz na  $j$ -tą kulę,  
 $F_j^{\text{ext}}$  - siła zewnętrzna, działająca na  $j$ -tą kulę,  
 $\psi_j^{\text{ext}}$  - siła zewnętrzna, działająca na ciecz,  
 $\psi_j$  - siła indukowana na powierzchni  $j$ -tej kuli,  
 $\psi_{j,lm}$  - współczynnik rozwinięcia siły indukowanej  $\psi_j$ , zdefiniowany wzorem (2.2.4),  
 $G$  - tensor, określony we wzorze (2.1.8),  
 $G_j$  - moment dipolowy siły indukowanej na powierzchni  $j$ -tej kuli,  
 $G_{j,S}, G_{j,A}$  - symetryczny i antysymetryczny moment dipolowy siły indukowanej na powierzchni  $j$ -tej kuli,  
 $H_{l_1 l_1}$  - funkcja, zdefiniowana wzorem (3.4.6),  
 $I_{l_1+1/2}$  - zmodyfikowana funkcja Bessela, o połówkowym indeksie, pierwszego rodzaju,  
 $I_j^T, I_j^R$  - wielkości, opisujące inercję cieczy, wypartej przez  $j$ -tą kulę /por. wzór (3.1.1)/,  
 $j = 1, \dots, N$  - wskaźnik numerujący kule,  
 $j_1$  - sferyczna funkcja Bessela pierwszego rodzaju,  
 $k$  - wektor falowy,  
 $k, k_1, k_2, \dots$  - wskaźniki numerujące kule,  
 $K_{l_1+1/2}$  - zmodyfikowana funkcja Bessela, o połówkowym indeksie, trzeciego rodzaju,  
 $K_{l_2 m_2, l_1 m_1, l_3 m_3}$  - tensor, zdefiniowany wzorem (3.5) w pracy [9],  
 $l, l_1, l_2, \dots$  - wskaźniki, zmieniające się w przedziale  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  
 $-l_1 \leq m_1 \leq l_1$ ,  
 $N$  - liczba kul, umieszczonych w cieczy,



$p$  - zmienna sprzężona poprzez transformatę Laplace'a z czasem  $t$ ,

$\mathbf{P}$  - tensor naprężeń

$\mathbf{r}(x, y, z)$  - wektor położenia dowolnego punktu w cieczy,

$\mathbf{R}_j$  - wektor, wskazujący położenie środka  $j$ -tej kuli,

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_j^0$$

$$\mathbf{R}_{kj} = \mathbf{R}_j^0|_{t=0} - \mathbf{R}_k^0|_{t=0}$$

$\dot{\mathbf{R}}_j$  - prędkość  $j$ -tej kuli,

$\dot{\mathbf{R}}_j^0$  - prędkość translacyjna  $j$ -tej kuli,

$$\mathbf{R}^{\text{ext}} = \mathbf{R}_j^0 - \mathbf{r} \quad \text{/por. wzory (3.4.5), (3.4.6)/}$$

$$\text{Re}_s = \lambda a/\nu, \quad \text{Re}_m = \lambda R_{kj}/\nu \text{ - liczby Reynoldsa,}$$

$S_j$  - powierzchnia  $j$ -tej kuli,

$\mathbf{T}_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(\mathbf{R}_{kj}, \lambda, t)$  - tensor hydrodynamicznego oddziaływania między  $j$ -tą, a  $k$ -tą kulą, zdefiniowany wzorem (2.3.5),

$\mathbf{T}_j$  - moment siły oporu hydrodynamicznego, wywieranego przez ciecz na  $j$ -tą kulę,

$\mathbf{T}_j^{\text{ext}}$  - moment siły zewnętrznej, wywieranej na  $j$ -tą kulę,

$t$  - czas,

$\mathbf{T}_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(\mathbf{0}_j, t), \mathbf{T}_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(\mathbf{0}_j, \lambda, t)$  - tensory samo-oddziaływania hydrodynamicznego  $j$ -tej kuli, zdefiniowane wzorami (2.2.6), oraz (2.3.4),

$\mathbf{T}_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(\mathbf{R}_{kj}, t), \mathbf{T}_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(\mathbf{R}_{kj}, \lambda, t)$  - tensory oddziaływania hydrodynamicznego między  $j$ -tą, a  $k$ -tą kulą, zdefiniowane wzorami (2.2.6), oraz (2.3.5),

$\mathbf{T}_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(\mathbf{0}_j), \mathbf{T}_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(\mathbf{R}_{kj})$  - tensory oddziaływań hydrodynamicznych, wprowadzone w pracy [9],

$\mathbf{v}$  - pole prędkości cieczy, zdefiniowane wzorem (2.1.7),

$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^{01} + \mathbf{v}^{02}$  - pola prędkości cieczy, zdefiniowane wzorem

- $v_{j,lm}^0$ ,  $v_{j,lm}^{o1}$ ,  $v_{j,lm}^{o2}$  - współczynniki rozwinięcia odpowiednich prędkości /por. wzór (2.2.4) /,
- $V_j$  - prędkość j-tej kuli względem cieczy, określona wzorem (2.1.10),
- $V_{j,lm}$  - współczynniki rozwinięcia prędkości  $V_j$  /por. wzór (2.2.4) /,
- $W_j$  - moment dipolowy prędkości  $V_j$ , /por. wzór (6.4) w pracy [27] /,
- $W_{j,S}$ ,  $W_{j,A}$  - symetryczny i antysymetryczny moment dipolowy prędkości  $V_j$ ,
- $W_j^o$  - moment dipolowy prędkości  $v_{j,lm}^o$ ,
- $W_{j,S}^o$ ,  $W_{j,A}^o$  - symetryczny i antysymetryczny moment dipolowy prędkości  $v_{j,lm}^o$ ,
- $Y_1^m$  - znormalizowane powierzchniowe harmoniki sferyczne [25],
- $\tilde{\alpha}$  - zmienna, występująca we wzorze (1.4.2),
- $\beta$  - parametr, zdefiniowany wzorem (4.9) w pracy [27],
- $\hat{\beta}$ ,  $\beta^*$ ,  $\tilde{\beta}$  - parametry, zdefiniowane wzorami (B5), (B6), (B8),
- $\delta_s = a\sqrt{p/\nu}$ ,  $\delta_m = R_{kj}\sqrt{p/\nu}$  - zmienne bezwymiarowe,
- $\Gamma$  - funkcja gamma,  $\Gamma(\tau, t)$  - tensor Greena (2.1.8),
- $\varepsilon$  - tensor Levi-Civita,
- $\varepsilon_s = \lambda/ap$ ,  $\varepsilon_m = \lambda/R_{kj}p$  - zmienne bezwymiarowe,
- $\mathcal{U}$  - pole prędkości cieczy w chwili  $t = 0$
- $a$  - prędkość charakterystyczna kul, rozpatrywana w §4;  $\lambda = |\lambda|$ ,
- $\mu$  - lepkość dynamiczna cieczy,
- $\mu_{ij}^{TT}$ ,  $\mu_{ij}^{TR}$ ,  $\mu_{ij}^{RT}$ ,  $\mu_{ij}^{RR}$  - współczynniki ruchliwości kul, działające odpowiednio na siły, momenty sił oporu hydrodynamicznego, oraz na wielkości  $\mathbf{I}_j^T$ ,  $\mathbf{I}_j^R$ ,
- $\mu_{ij,lm}^{TV}$ ,  $\mu_{ij,lm}^{RV}$  - współczynniki ruchliwości kul, działające na pole prędkości cieczy,
- $\nu$  - lepkość kinematyczna cieczy,



$\{_{ij}^{TT}$ ,  $\{_{ij}^{TR}$ ,  $\{_{ij}^{RT}$ ,  $\{_{ij}^{RR}$  - współczynniki tarcia kul, działające odpowiednio na prędkości translacyjne, lub rotacyjne kul,

$\{_{ij,lm}^{TV}$ ,  $\{_{ij,lm}^{RV}$  - współczynniki tarcia kul, działające na pole prędkości cieczy  $v_{j,lm}^0$ ,

$\rho$  - gęstość cieczy,

$\sigma = a/R$ ,  $R$  - typowa odległość między środkami kul,

$\omega_j$  - prędkość rotacyjna j-tej kuli,

$\tilde{\omega}$  - częstość, sprzężona poprzez transformatę Fouriera z czasem  $t$ .

Stosowane współrzędne sferyczne:

$$r_j(a, \theta_j) = r_j(a, \theta_j, \phi_j),$$

$$R(R, \psi, \varphi),$$

$$R_{kj}(R_{kj}, \alpha, \gamma),$$

$$K(k, \chi, \zeta).$$

Tilda nad tensorem oznacza tensor odwrotny.

Dodatek A : *Tensory* tarcia, opisujące zależność sił  $F_j(p)$ , oraz momentów sił  $T_j(p)$  oporu hydrodynamicznego od współczynników rozwinięcia prędkości cieczy  $v_{j,1m}^0$ ,  $1 \geq 2$ .

Dodatek ten składa się z dwóch części. Pierwsza część zawiera współczynniki tarcia, wpływające na siły, druga natomiast - wpływające na momenty sił oporu hydrodynamicznego.

### Część pierwsza

1. Współczynniki tarcia, działające na  $v_{j,2m}^0$ , są równe:

$$(A1) \quad \begin{aligned} \tilde{\zeta}_{jj}^{TV, 2m} = & -(\tilde{T}_{00}^{2m})_j + \\ & - \sum_{k \neq j} \tilde{T}_j \cdot T_{kj} \cdot \tilde{T}_k \cdot T_{jk} \cdot (\tilde{T}_{00}^{2m})_j + \\ & + \sum_{k \neq j} \sum_{k_1 \neq k} \sum_{k_1 \neq j} \tilde{T}_j \cdot T_{kj} \cdot \tilde{T}_k \cdot T_{kk_1} \cdot \tilde{T}_{k_1} \cdot T_{jk_1} \cdot (\tilde{T}_{00}^{2m})_j, \text{ gdzie} \\ (\tilde{T}_{00}^{2m})_j = & \tilde{T}_{00}^{2m}(0_j, p), \quad \tilde{T}_j = \tilde{T}_{00}^{00}(0_j, p), \quad T_{kj} = T(R_{kj}, p), \text{ itp.} \end{aligned}$$

2. Współczynniki tarcia wzajemnego, działające na  $v_{j,2m}^0$ , są równe:

$$(A2) \quad \begin{aligned} \tilde{\zeta}_{jk, 2m}^{TV} = & \sum_{m_1} \tilde{T}_j \cdot (\tilde{T}_{00}^{2m_1})_{kj} \cdot (\tilde{T}_{2m_1}^{2m})_k + \\ & + \tilde{T}_j \cdot T_{kj} \cdot (\tilde{T}_{00}^{2m})_k + \\ & - \sum_{k_1 \neq j} \sum_{k \neq k_1} \tilde{T}_j \cdot T_{kj} \cdot \tilde{T}_{k_1} \cdot T_{kk_1} \cdot (\tilde{T}_{00}^{2m})_k + \\ & + \sum_{k_2 \neq k_1} \sum_{k_2 \neq j} \sum_{k \neq k_1} \tilde{T}_j \cdot T_{k_2j} \cdot \tilde{T}_{k_2} \cdot T_{k_1k_2} \cdot \tilde{T}_{k_1} \cdot T_{kk_1} \cdot (\tilde{T}_{00}^{2m})_k. \end{aligned}$$



3. Współczynniki tarcia, działające na  $v_{j,3m}^0$ , wynoszą:

$$(A3) \quad \left\{ \begin{matrix} TV \\ j \\ j \end{matrix} \right\}_{j,3m} = - \sum_{k \neq j} \sum_{m_1} \tilde{T}_j \cdot T_{kj} \cdot \tilde{T}_k \cdot (T_{00}^{1m_1})_{jk} \cdot (\tilde{T}_{1m_1}^{3m})_j.$$

4. Współczynniki tarcia wzajemnego, działające na  $v_{j,3m}^0$ , wynoszą:

$$(A4) \quad \left\{ \begin{matrix} TV \\ j \\ k_1 \end{matrix} \right\}_{j,3m} = \sum_{m_1} \tilde{T}_j \cdot (T_{00}^{1m_1})_{kj} \cdot (\tilde{T}_{1m_1}^{3m})_k + \\ - \sum_{k_1 \neq j} \sum_{k \neq k_1} \sum_{m_1} \tilde{T}_j \cdot T_{kj} \cdot \tilde{T}_{k_1} \cdot (T_{00}^{1m_1})_{kk_1} \cdot (\tilde{T}_{1m_1}^{3m})_k.$$

5. Współczynniki tarcia, działające na  $v_{j,4m}^0$ , są równe:

$$(A5) \quad \left\{ \begin{matrix} TV \\ j \\ j \end{matrix} \right\}_{j,4m} \approx 0,$$

6. Współczynniki tarcia wzajemnego, działające na  $v_{j,4m}^0$ , są równe:

$$(A6) \quad \left\{ \begin{matrix} TV \\ j \\ k_1 \end{matrix} \right\}_{j,4m} = \sum_{m_2} \tilde{T}_j \cdot (T_{00}^{2m_2})_{kj} \cdot (\tilde{T}_{2m_2}^{4m})_k.$$

## Część druga

1. Współczynniki tarcia, działające na  $v^{\circ}_{j,2m}$ , wynoszą:

$$(A7) \quad \left\{ \begin{matrix} RV \\ j \\ j \end{matrix} \right\}_{j,2m} = \frac{a}{\sqrt{3}} \sum_{k \neq j} \sum_{m_2} \varepsilon : \left[ \sum_{m_1} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2} \right]_j \cdot (T_{1m_2}^{00})_{kj} \cdot \tilde{T}_k \cdot T_{jk} \cdot (\tilde{T}_{00}^{2m})_j.$$

2. Współczynniki tarcia wzajemnego, działające na  $v^{\circ}_{j,2m}$ , wynoszą:

$$(A8) \quad \left\{ \begin{matrix} RV \\ j \\ k \end{matrix} \right\}_{j,2m} = -\frac{a}{\sqrt{3}} \sum_{m_2} \varepsilon : \left[ \sum_{m_1} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2} \right]_j \cdot (T_{1m_2}^{00})_{kj} \cdot (\tilde{T}_{00}^{2m})_k + \frac{a}{\sqrt{3}} \sum_{k_1 \neq j} \sum_{k \neq k_1} \sum_{m_2} \varepsilon : \left[ \sum_{m_1} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2} \right]_j \cdot (T_{1m_2}^{00})_{k_1 j} \cdot \tilde{T}_{k_1} \cdot T_{kk_1} \cdot (\tilde{T}_{00}^{2m})_k.$$

3. Współczynniki tarcia, działające na  $v^{\circ}_{j,3m}$ , są równe:

$$(A9) \quad \left\{ \begin{matrix} RV \\ j \\ j \end{matrix} \right\}_{j,3m} = \frac{a}{\sqrt{3}} \varepsilon : \left[ \sum_{m_1} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{T}_{1m_1}^{3m} \right]_j.$$

4. Współczynniki tarcia wzajemnego, działające na  $v^{\circ}_{j,3m}$ , są równe:

$$(A10) \quad \left\{ \begin{matrix} RV \\ j \\ k \end{matrix} \right\}_{j,3m} = -\frac{a}{\sqrt{3}} \sum_{m_2, m_3} \varepsilon : \left[ \sum_{m_1} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{T}_{1m_1}^{1m_2} \right]_j \cdot (T_{1m_2}^{1m_3})_{kj} \cdot (\tilde{T}_{1m_3}^{3m})_k.$$

W rozpatrywanym przybliżeniu, pozostałe współczynniki tarcia oraz tarcia wzajemnego nie występują.



Dodatek B: Własności tensorów oddziaływań hydrodynamicznych, przy  
uwzględnieniu małych przemieszczeń kul

Definicje

Definicje tensorów oddziaływań hydrodynamicznych, zależących od małych przemieszczeń kul, zawiera §2.3. Ze wzoru (2.3.5) wynika, że rozwinięcie  $\exp[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_{kj}]$  na szereg powierzchniowych harmonik sferycznych prowadzi do otrzymania następującej relacji:

$$(B1) \quad S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(\mathbf{R}_{kj}, \lambda, t) = \sum_{l_3 m_3} E_{l_1 l_2 l_3}(\mathbf{R}_{kj}, \lambda, t) B_{l_1 m_1, l_3 m_3}^{l_2 m_2} Y_{l_3}^{m_3}(\alpha, \sigma),$$

gdzie 
$$E_{l_1 l_2 l_3} = \frac{4\lambda t}{13\pi^2} \int_0^\infty k^3 dk e^{-\nu|k|^2 t} j_{l_1}(ak) j_{l_2}(ak) j_{l_3}(R_{kj}k),$$

$$B_{l_1 m_1, l_3 m_3}^{l_2 m_2} = i^{l_1 - l_2 + l_3 + 1} \int d\Omega Y_{l_1}^{-m_1} Y_{l_2}^{m_2} Y_{l_3}^{-m_3} Y_1^0 \left(1 - \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2}\right),$$

$$l_1, l_2, l_3 \geq 0, \quad |m_i| \leq l_i, \quad i=1, 2, 3.$$

Budowa zdefiniowanych powyżej wielkości jest podobna do budowy, zawartych w pracy [27], wyrażeń (3.5), określających tensory oddziaływań w przybliżeniu z §2.2. W rezultacie, podobnie jak w § 3, występuje tu prosty związek między tensorami oddziaływań wzajemnych, a tensorami samo-oddziaływania:

$$(B2) \quad S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(\mathbf{0}_j, \lambda, t) = E_{l_1 l_2, 0}(\mathbf{0}_j, \lambda, t) B_{l_1 m_1, 00}^{l_2 m_2} Y_0^0(\alpha, \sigma).$$

Tensory samo-oddziaływania  $S_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(0_j, \lambda, t)$  przedstawiają więc szczególnie przypadek tensorów oddziaływań wzajemnych

$$S_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, t).$$

Własności tensorów oddziaływań wzajemnych  $S_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, t)$

(i) Własności tensorowe  $S_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, t)$

Własności  $S_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}$  jako tensorów zależą od własności tensorów

$B_{1_1 m_1, 1_3 m_3}^{1_2 m_2}$ . Te ostatnie, korzystając z relacji [25],

$$(B3) \quad Y_{l_1}^{-m_1} Y_1^0 (-1)^{\frac{|m_1|+3m_1}{2}} = \sum_{l_m} \left[ \frac{3(2l_1+1)(2l_1+1)}{4\pi} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l_1 \\ -m_1 & 0 & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-1)^{\frac{|m|+5m}{2}} \right] Y_{l_1}^{-m}$$

$$l_1 \geq 0, \quad l \geq 0, \quad |m| \leq l,$$

można przedstawić w postaci skończonej sumy tensorów o znanych własnościach,  $K_{1_1 m_1, 1_3 m_3}^{1_2 m_2}$ . Podstawiając (B3) do wzoru (B1), otrzymujemy:

$$(B4) \quad B_{1_1 m_1, 1_3 m_3}^{1_2 m_2} = \left[ \frac{3(2l_1+1)(2l_1+3)}{4\pi} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l_1+1 \\ -m_1 & 0 & m_1 \end{pmatrix} (-1)^{m_1} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l_1+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} K_{l_1+1, m_1, l_3 m_3}^{1_2 m_2} + \right. \\ \left. - \left[ \frac{3(2l_1+1)(2l_1-1)}{4\pi} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l_1-1 \\ -m_1 & 0 & m_1 \end{pmatrix} (-1)^{m_1} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l_1-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} K_{l_1-1, m_1, l_3 m_3}^{1_2 m_2} \right. \right.$$

W powyższym wyrażeniu, suma względem  $l$  składa się z dwóch wyrazów:  $l = l_1 - 1$ , oraz  $l = l_1 + 1$ . Ta redukcja ilości wyrazów wynika z własności symboli Wignera 3-j /por. [9] /.

Z kolei, własności tensorów  $B_{1_1 m_1, 1_3 m_3}^{1_2 m_2}$  powodują, że

suma względem  $l_3$  we wzorze (B1) redukuje się również do skończonej ilości wyrazów. Ilość ta zależy od dwóch bezwymiarowych parametrów  $2\hat{\beta} = l_1 + 1 + l_2 - l_3$ , oraz  $2\hat{\beta}^* = l_1 - 1 + l_2 - l_3$ , związanych z występowaniem we wzorze (B4) dwóch



tensorów  $K_{l_1 m_1, l_2 m_2, l_3 m_3}^{l_2 m_2}$ . Odpowiednie tensory  $K:::$ , ... są różne od zera, gdy  $2\hat{\beta} \gg -2 i l_1 + 1 + l_2 - l_3$  jest parzyste, oraz gdy  $2\hat{\beta} \gg -2 i l_1 - 1 + l_2 - l_3$  jest parzyste. W rezultacie, przyczynki do sumy względem  $l_3$  w (B1) pochodzą od następujących wartości parametrów  $2\hat{\beta}$ , oraz  $2\hat{\beta}^*$ :

$$(B5) \quad 2\hat{\beta} = \begin{cases} -2, 0, 2, \dots, l_1 + l_2 + 1, & \text{jeżeli } l_1 + l_2 + 1 \text{ jest parzyste} \\ -2, 0, 2, \dots, l_1 + l_2, & \text{jeżeli } l_1 + l_2 + 1 \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

$$(B6) \quad 2\hat{\beta}^* = \begin{cases} -2, 0, 2, \dots, l_1 + l_2 - 1, & \text{jeżeli } l_1 + l_2 + 1 \text{ jest parzyste} \\ -2, 0, 2, \dots, l_1 + l_2 - 2, & \text{jeżeli } l_1 + l_2 + 1 \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

Tensory  $S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, t)$  można więc przedstawić w postaci:

/a/ gdy  $l_1 + 1 + l_2$  jest parzyste

$$S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, t) = \sum_{2\hat{\beta}=-2}^{l_1+1+l_2} \sum_{m_3} c_1 E_{l_1 l_2, l_1+1+l_2-2\hat{\beta}} K_{l_1+1 m_1, l_1+1+l_2-2\hat{\beta} m_3}^{l_2 m_2} Y_{l_1+1+l_2-2\hat{\beta}}^{m_3} + \\ - \sum_{2\hat{\beta}^*=-2}^{l_1-1+l_2} \sum_{m_3} c_2 E_{l_1 l_2, l_1-1+l_2-2\hat{\beta}^*} K_{l_1-1 m_1, l_1-1+l_2-2\hat{\beta}^* m_3}^{l_2 m_2} Y_{l_1-1+l_2-2\hat{\beta}^*}^{m_3}$$

gdzie

$$c_1 = \sqrt{\frac{3(2l_1+1)(2l_1+3)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l_1+1 \\ -m_1 & 0 & m_1 \end{pmatrix} (-1)^{m_1} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l_1+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(B7) \quad c_2 = \sqrt{\frac{3(2l_1+1)(2l_1-1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l_1-1 \\ -m_1 & 0 & m_1 \end{pmatrix} (-1)^{m_1} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l_1-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

/b/ gdy  $l_1 + 1 + l_2$  jest nieparzyste

$$S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, t) = \sum_{2\hat{\beta} = -2}^{l_1 + l_2} \sum_{m_3} c_1 E_{l_1 l_2, l_1 + 1 + l_2 - 2\hat{\beta}} K_{l_1 + 1, m_1, l_1 + 1 + l_2 - 2\hat{\beta}}^{l_2 m_2} Y_{l_1 + 1 + l_2 - 2\hat{\beta}}^{m_3} +$$

$$- \sum_{2\hat{\beta}^* = -2}^{l_1 + l_2 - 2} \sum_{m_3} c_2 E_{l_1 l_2, l_1 - 1 + l_2 - 2\hat{\beta}^*} K_{l_1 - 1, m_1, l_1 - 1 + l_2 - 2\hat{\beta}^*}^{l_2 m_2} Y_{l_1 - 1 + l_2 - 2\hat{\beta}^*}^{m_3}.$$

W obu przypadkach, wskaźniki występujące w  $E_{l_1 l_2, l_3}$ ,  $K_{l_1 m_1, l_3}^{l_2 m_2}$  oraz  $Y_{l_3}^{m_3}$  mają tę samą postać. Różne są natomiast ich przedziały zmienności.

(ii) Zależność tensorów  $S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(R_{kj}, \lambda, p)$  od odległości między kulami, oraz od zmiennej  $p$

Jak wynika z zależności (B5-7), interesują nas funkcje  $E_{l_1 l_2, l_3}^{m_3}$  tylko o takich wskaźnikach, przy których parametr  $2\tilde{\beta}$

$$2\tilde{\beta} = l_1 + l_2 - l_3$$

przyjmuje wartości:

$$(B8) \quad 2\tilde{\beta} = \begin{cases} -3, -1, 1, \dots, l_1 + l_2, & \text{jeżeli } l_1 + l_2 \text{ jest parzyste} \\ -3, -1, 1, \dots, l_1 + l_2 - 1, & \text{jeżeli } l_1 + l_2 \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

Transformaty Laplace'a funkcji  $E_{l_1 l_2, l_3}^{m_3}$  obliczamy więc tylko dla zadanych wartości parametru  $2\tilde{\beta}$ . Dla przypadku  $2\tilde{\beta} = -1, 1, 3, \dots$ , transformaty Laplace'a funkcji  $E_{l_1 l_2, l_3}^{m_3}$  można przedstawić w następującej postaci:



$$E_{l_1 l_2 l_3} = -\frac{\pi}{16} \frac{1}{gav} \varepsilon_m \left(R \sqrt{\frac{p}{v}}\right) \frac{1}{\cos\left[\frac{\pi}{2}(2\tilde{\beta}+1)\right]} \times$$

$$(B9) \quad \times \frac{d}{d\left(R \sqrt{\frac{p}{v}}\right)} \left[ \left(R \sqrt{\frac{p}{v}}\right)^{1/2} I_{l_1+1/2} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}}\right) I_{l_2+1/2} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}}\right) K_{l_3+1/2} \left(R \sqrt{\frac{p}{v}}\right) \right],$$

gdzie wykorzystano wzór (51) z tablic [28]. Natomiast dla przypadku  $2\tilde{\beta} = -3$ , mamy odpowiednio:

$$E_{l_1 l_2 l_3} = \frac{4\pi}{13} \frac{1}{gav} \varepsilon_m \left(\frac{a}{R}\right)^{l_1+l_2+1} \frac{\Gamma(l_1+l_2+7/2)}{\Gamma(l_1+3/2) \Gamma(l_2+3/2)} \left(R \sqrt{\frac{p}{v}}\right)^{-2} +$$

$$(B10) \quad + \frac{\pi}{2^{l_1+l_2+1/2} \sqrt{3}} \frac{1}{gav} \varepsilon_m \left(R \sqrt{\frac{p}{v}}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^{3/2} \left(\frac{a}{\sqrt{v}}\right)^{l_1+l_2-1/2},$$

$$\times \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\Gamma(l_1+l_2+2+2x)}{\Gamma(l_1+l_2+2+x) \Gamma(l_1+x+3/2) \Gamma(l_2+x+3/2)} \frac{d}{dp} \left[ p^{\frac{l_1+l_2+3/2+2x}{2}} K_{l_1+l_2+3/2} \left(R \sqrt{\frac{p}{v}}\right) \right],$$

$$\varepsilon_m = \frac{\lambda}{Rp}, \quad \varepsilon_s = \frac{\lambda}{ap}.$$

Wykorzystano przy tym wzory (8.442.1), (6.631.1), oraz (7.629.2) z tablic [29], oraz wzór (32) z tablic [30]. Zmienna  $p$  występuje w  $\varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_m$ , oraz, podobnie jak w §3, w  $a\sqrt{p/v}$ , oraz  $R_{kj}\sqrt{p/v}$ . W rozpatrywanym przybliżeniu  $\varepsilon_s < 1$ ,  $\varepsilon_m < 1$ . Iloczynny  $\varepsilon_s \delta_s^2$ , oraz  $\varepsilon_m \delta_m^2$ , są równe odpowiednio, liczbom Reynoldsa  $Re_s$ ,  $Re_m$ , charakteryzującym oddziaływanie pojedynczej kuli z otaczającą ją cieczą, oraz oddziaływania hydrodynamiczne między  $j$ -tą, a  $k$ -tą kulą:

$$\varepsilon_s \delta_s^2 = \frac{\lambda a}{v} = Re_s, \quad \varepsilon_m \delta_m^2 = \frac{\lambda R}{v} = Re_m.$$

Rozkład przestrzenny kul opisuje się za pomocą zmiennej  $a/R_{kj}$ .

Oddziaływania niestacjonarne, "bliskie" quasi-stacjonarnym, można opisać za pomocą warunków:

$$(B11) \quad R_{kj} \sqrt{\frac{a}{V}} < 1, \quad \frac{\lambda}{R_{kj} p} < 1.$$

Przy spełnieniu tego warunku, interesujące nas funkcje  $E_{1_1 1_2, 1_3}$  są proporcjonalne do:

(i) w przypadkach  $2\tilde{\beta} = -3, -1$ :

$$(B12) \quad E_{l_1, l_2, l_3} \sim \left(\frac{a}{R}\right)^{l_1 + l_2 + 1} \varepsilon_m \left(R \sqrt{\frac{a}{V}}\right)^2,$$

(ii) w przypadkach  $2\tilde{\beta} = 1, 3, 5, \dots$ :

$$(B13) \quad E_{l_1, l_2, l_3} \sim \left(\frac{a}{R}\right)^{l_1 + l_2 + 1} \varepsilon_m \left(R \sqrt{\frac{a}{V}}\right)^{2\tilde{\beta} + 1}.$$

Zależność od  $a/R_{kj}$  funkcji  $E_{1_1 1_2, 1_3}$  oraz  $F_{1_1 1_2, 1_3}$  jest podobna /por. wzory (4.12) w pracy [27]/. Różnią się one jednak na skutek występowania we wzorach (B12), (B13) wielkości  $\varepsilon_m$ , opisującej wpływ małych przemieszczeń kul. W rezultacie, funkcje  $E_{1_1 1_2, 1_3}$  są równe zero w przypadku oddziaływań quasi-stacjonarnych.

Jako przykład rozpatrywanych tensorów oddziaływań hydrodynamicznych, poniżej przedstawiono tensor  $T_{00}^{00}(R_{kj}, \lambda, p)$ :

$$(B14) \quad T_{00}^{00}(R_{kj}, \lambda, p) = T_{00}^{00}(R_{kj}, p) + S_{00}^{00}(R_{kj}, \lambda, p),$$



gdzie

$$T_{00}^{00}(R_{kj}, p) = F_{00,0} K_{00,00}^{00} + F_{00,2} \sum_m K_{00,2m}^{00} Y_2^m,$$

$$S_{00}^{00}(R_{kj}, \lambda, p) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} E_{00,1} \sum_m K_{10,1m}^{00} Y_1^m + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} E_{00,3} \sum_m K_{10,3m}^{00} Y_3^m.$$

Funkcje  $F_{1,1,2,1,3}$ , oraz  $E_{1,1,2,1,3}$ , dla przypadku oddziaływań bliskich quasi-stacjonarym, można przedstawić w postaci:

$$F_{00,0}(R, p) = \frac{1}{g_{av}} \left[ \frac{a}{R} - \frac{a}{R} \left( R \sqrt{\frac{p}{v}} \right) + \left[ \frac{1}{2} \frac{a}{R} + \frac{1}{3} \left( \frac{a}{R} \right)^3 \right] \left( R \sqrt{\frac{p}{v}} \right)^2 + \dots \right],$$

$$F_{00,2}(R, p) = \frac{1}{g_{av}} \left[ \frac{1}{2} \frac{a}{R} - \left( \frac{a}{R} \right)^3 + \left[ -\frac{1}{8} \frac{a}{R} + \frac{1}{6} \left( \frac{a}{R} \right)^3 \right] \left( R \sqrt{\frac{p}{v}} \right)^2 + \dots \right],$$

(B15)

$$E_{00,1}(R, \lambda, p) = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{g_{av}} \frac{\lambda}{R p} \left( R \sqrt{\frac{p}{v}} \right)^2 \left[ \frac{a}{R} - \frac{2}{3} \left( \frac{a}{R} \right)^3 + \dots \right],$$

$$E_{00,3}(R, \lambda, p) = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{g_{av}} \frac{\lambda}{R p} \left( R \sqrt{\frac{p}{v}} \right)^2 \left[ \frac{1}{4} \frac{a}{R} - \left( \frac{a}{R} \right)^3 + \frac{8}{3} \left( \frac{a}{R} \right)^5 + \dots \right],$$

$$\frac{\lambda}{R p} < 1, \quad R \sqrt{\frac{p}{v}} < 1.$$

Tensory  $T_{00}^{00}(R_{kj}, \lambda, p)$  składają się więc z tensorów  $T_{00}^{00}(R_{kj}, p)$  nie zależących od przemieszczeń kul, oraz tensorów

$S_{00}^{00}(R_{kj}, \lambda, p)$ , zależących od tych przemieszczeń. Opisujące te

relacje funkcje  $E_{00,1}$ , oraz  $E_{00,3}$  są proporcjonalne do  $\xi_m$ .  
W przypadku oddziaływań quasi-stacjonarnych, funkcje te są  
równe zeru.

Własności tensorów samo-oddziaływania  $S_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(0_j, \lambda, t)$

(i) Własności tensorowe

Własności tensorowe  $S_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(0_j, \lambda, t)$  związane są z własnościami  
tensorów  $B_{1_1 m_1, 00}^{1_2 m_2}$ . Jak to opisuje relacja (B4), tensory  
 $B_{1_1 m_1, 00}^{1_2 m_2}$  można przedstawić w postaci sumy tensorów  
 $K_{1_1 + 1 m_1, 00}^{1_2 m_2}$ , oraz  $K_{1_1 - 1 m_1, 00}^{1_2 m_2}$ , z odpowiednimi współ-  
czynnikami. W rezultacie, na skutek własności tensorów  
 $K_{1_1 m_1, 00}^{1_2 m_2}$ , diskutowanych w pracy [9], tensory  $B_{1_1 m_1, 00}^{1_2 m_2}$  są  
różne od zera tylko, gdy  $|l_1 - l_2| = 1$ , lub  $|l_1 - l_2| = 3$ .  
Wynika stąd, że tensory  
 $T_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(0_j, \lambda, t)$  /por. (2.3.4)/ są różne od zera, gdy ich indeksy  
spełniają następujące relacje:

$$(B16) \quad \begin{aligned} l_1 &= l_2, \\ |l_1 - l_2| &= 1, 2, 3, \\ l_1 &\geq 0, \quad l_2 \geq 0. \end{aligned}$$

W tych przypadkach, tensory  $T_{1_1 m_1}^{1_2 m_2}(0_j, \lambda, t)$  są równe:

$$(B17) \quad T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(0_j, \lambda, t) = T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(0_j, t) + S_{l_1 m_1}^{l_2 m_2}(0_j, \lambda, t),$$

gdzie



$$T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2} (0_j^*, \lambda, t) = T_{l_1 m_1}^{l_2 m_2} (0_j^*, t) +$$

$$+ E_{l_1 l_2, 0} (0_j^*, \lambda, t) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left\{ \frac{3(2l_1+1)(2l_1+3)}{4\pi} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l_1+1 \\ -m_1 & 0 & m_1 \end{pmatrix} (-1)^{m_1} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l_1+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} K_{l_1+1, m_1, 0}^{l_2 m_2} + \right.$$

$$\left. - \frac{3(2l_1+1)(2l_1-1)}{4\pi} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l_1-1 \\ -m_1 & 0 & m_1 \end{pmatrix} (-1)^{m_1} \begin{pmatrix} l_1 & 1 & l_1-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} K_{l_1-1, m_1, 0}^{l_2 m_2} \right\}.$$

(ii) Zależność tensorów samo-oddziaływania od zmiennej  $p$

Dokonując transformaty Laplace'a względem czasu wielkości  $E_{l_1 l_2, 0}$ , otrzymujemy:

(i) w przypadkach  $|l_1 - l_2| = 1$ :

$$(B18) \quad E_{l_1 l_2, 0} = -\frac{\sqrt{\pi}}{3} \frac{1}{gav} \frac{\lambda}{ap} \left( a\sqrt{\frac{p}{v}} \right)^4 \frac{d}{d(a\sqrt{\frac{p}{v}})} \left[ \left( a\sqrt{\frac{p}{v}} \right) \mathcal{I}_{l_2+\frac{1}{2}} \left( a\sqrt{\frac{p}{v}} \right) K_{l_2+\frac{3}{2}} \left( a\sqrt{\frac{p}{v}} \right) \right],$$

(ii) w przypadkach  $|l_1 - l_2| = 3$ :

$$(B19) \quad E_{l_1 l_2, 0} = -\frac{\sqrt{\pi}}{3} \frac{1}{gav} \frac{\lambda}{ap} \left( a\sqrt{\frac{p}{v}} \right)^4 \frac{d}{d(a\sqrt{\frac{p}{v}})} \left[ 4 \left( l_2 + \frac{5}{2} \right) \left( l_2 + \frac{3}{2} \right) \left( a\sqrt{\frac{p}{v}} \right)^{-1} \mathcal{I}_{l_2+\frac{3}{2}} \left( a\sqrt{\frac{p}{v}} \right) \times \right.$$

$$\times K_{l_2+\frac{1}{2}} \left( a\sqrt{\frac{p}{v}} \right) - 2 \left( l_2 + \frac{5}{2} \right) \mathcal{I}_{l_2+\frac{1}{2}} \left( a\sqrt{\frac{p}{v}} \right) K_{l_2+\frac{1}{2}} \left( a\sqrt{\frac{p}{v}} \right) +$$

$$\left. - \left( a\sqrt{\frac{p}{v}} \right) \mathcal{I}_{l_2+\frac{1}{2}} \left( a\sqrt{\frac{p}{v}} \right) K_{l_2+\frac{3}{2}} \left( a\sqrt{\frac{p}{v}} \right) \right].$$

W powyższych obliczeniach wykorzystano wzór (57) z §7.14.2 pozycji [37]. Występuje tu  $\varepsilon_s < 1$ , oraz, podobnie jak w §3, zmienna  $a\sqrt{p/v}$ . Iloczyn  $\varepsilon_s \delta_s^2$  jest równy liczbie Reynoldsa  $Re_s$ , charakteryzującej oddziaływanie pojedynczej kuli z otaczającą ją cieczą:

$$\varepsilon_s \delta_s^2 = \left(\frac{\lambda}{ap}\right) \left(\frac{a^2 p}{v}\right) = \frac{\lambda a}{v} = Re_s.$$

Oddziaływania, bliskie quasi-stacjonarnym, opisują relacje:

$$(B20) \quad \frac{\lambda}{ap} < 1, \quad a\sqrt{\frac{p}{v}} < 1.$$

Przy spełnieniu tego warunku, funkcje  $E_{1,1,2,0}$  zachowują się następująco:

$$(B21) \quad \begin{aligned} E_{l_1, l_2, 0} &\sim \varepsilon_s \left(a\sqrt{\frac{p}{v}}\right)^2, \quad \text{gdy } |l_1 - l_2| = 1, \\ E_{l_1, l_2, 0} &\sim \varepsilon_s \left(a\sqrt{\frac{p}{v}}\right)^4, \quad \text{gdy } |l_1 - l_2| = 3. \end{aligned}$$

Z porównania (B21) z relacjami (4.3) z pracy [27] wynika, że wpływ małych przemieszczeń kul zależy od wartości przyjmowanej przez  $\varepsilon_s$ .

$$(iii) \quad \text{Odwrotne tensory samo-oddziaływania } \tilde{T}_{1,1,1}^{1,2,2}(\mathbf{0}_j, \lambda, p)$$

Odwrotne tensory samo-oddziaływania występują w wyrażeniach iteracyjnych (2.3.7), opisujących współczynniki rozwinięcia sił indukowanych  $f_{j,lm}(\lambda, p)$ . Tensory te można wyrazić, w rozpatrywanym przybliżeniu, korzystając z rozwinięcia (4.6) z pracy [27]. Uwzględniając człony do rzędu  $O\left(\left(a\sqrt{p/v}\right)^2\right)$ , oraz  $O(\varepsilon_s)$ , otrzymujemy, w przypadku tensorów diagonalnych względem



wskaźnika 1 :

$$(B22) \quad \tilde{T}_{l_1 m_1}^{l_1 m_2}(\mathbf{0}_j, \lambda, p) \approx \tilde{T}_{d l_1 m_1}^{l_1 m_2}(\mathbf{0}_j, p), \text{ oraz odpowiednio}$$

$$\tilde{T}_{l_1 m_1}^{l_1+2 m_2}(\mathbf{0}_j, \lambda, p) \approx -\sum_{m_3, m_4} \tilde{T}_{d l_1 m_1}^{l_1 m_3} \cdot S_{0d l_1 m_3}^{l_1+2 m_4} \cdot \tilde{T}_{d l_1+2 m_4}^{l_1+2 m_2},$$

$$\tilde{T}_{l_1 m_1}^{l_1+1 m_2}(\mathbf{0}_j, \lambda, p) \approx -\sum_{m_3, m_4} \tilde{T}_{d l_1 m_1}^{l_1 m_3} \cdot S_{0d l_1 m_3}^{l_1+1 m_4} \cdot \tilde{T}_{d l_1+1 m_4}^{l_1+1 m_2}$$

$$(B23) \quad \tilde{T}_{l_1 m_1}^{l_1+3 m_2}(\mathbf{0}_j, \lambda, p) \approx -\sum_{m_3, m_4} \tilde{T}_{d l_1 m_1}^{l_1 m_3} \cdot S_{0d l_1 m_3}^{l_1+3 m_4} \cdot \tilde{T}_{d l_1+3 m_4}^{l_1+3 m_2},$$

w przypadku tensorów poza-diagonalnych.

Poniżej podano przykładowo tensor samo-oddziaływania

$\tilde{T}_{00}^{1m}(\mathbf{0}_j, \lambda, p)$ , oraz tensor odwrotny  $\tilde{T}_{00}^{-1m}(\mathbf{0}_j, \lambda, p)$  :

$$\tilde{T}_{00}^{1m}(\mathbf{0}_j, \lambda, p) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} E_{01,0} B_{00,00}^{1m} = \frac{1}{4\pi} E_{01,0} K_{10,00}^{1m},$$

(B24)

$$\tilde{T}_{00}^{1m}(\mathbf{0}_j, \lambda, p) \approx \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \frac{1}{6gav} \frac{\lambda}{ap} \left(a\sqrt{\frac{p}{v}}\right)^2 K_{10,00}^{1m},$$

(B25)

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{00}^{1m}(\mathbf{0}_j, \lambda, p) &\approx -\sum_{m_4} \tilde{T}_{00}^{00} \cdot S_{00}^{1m_4} \cdot \tilde{T}_{1m_4}^{1m} \approx \\ &\approx -2\sqrt{3}\sqrt{\frac{\pi}{gav}} \frac{\lambda}{ap} \left(a\sqrt{\frac{p}{v}}\right)^2 \sum_{m_4} K_{10,00}^{1m_4} \cdot \tilde{K}_{1m_4,00}^{1m}. \end{aligned}$$

Tensorzy te, zależące od małych przemieszczeń kul, są proporcjonalne do  $\mathcal{E}_s$ .

Dodatek C : Wyrażenia iteracyjne, opisujące  $f_{j,00}(\lambda, p)$ , oraz  $f_{j,1m}(\lambda, p)$ .

Korzystając z opisu oddziaływań hydrodynamicznych w postaci rozwinięcia wielokrotnego rozpraszania (2.3.7), otrzymuje się przybliżone wyrażenia dla współczynników rozwinięcia sił indukowanych  $f_{j,00}(\lambda, p)$ , oraz  $f_{j,1m}(\lambda, p)$ . Są one, odpowiednią, równe:

$$\begin{aligned}
 (C1) \quad f_{j,00}(\lambda, p) &= \sum_{l_2 m_2} \tilde{T}_{00}^{l_2 m_2}(0_j, \lambda, p) \cdot [V_{j, l_2 m_2} - \sum_{k \neq j} \sum_{l_3 m_3} \sum_{l_4 m_4} T_{l_2 m_2}^{l_3 m_3}(R_{kj}, \lambda, p) \cdot \\
 &\cdot \tilde{T}_{l_3 m_3}^{l_4 m_4}(0_{k'}, \lambda, p) \cdot V_{k, l_4 m_4} + \sum_{k \neq j} \sum_{k_1 \neq k} \sum_{l_5 m_5} T_{l_2 m_2}^{l_3 m_3}(R_{kj}, \lambda, p) \cdot \\
 &\cdot \tilde{T}_{l_3 m_3}^{l_4 m_4}(0_k, \lambda, p) \cdot T_{l_4 m_4}^{l_5 m_5}(R_{k_1 k'}, \lambda, p) \cdot \tilde{T}_{l_5 m_5}^{l_6 m_6}(0_{k_1}, \lambda, p) \cdot V_{k_1, l_6 m_6} - \dots]; \\
 (C2) \quad f_{j,1m}(\lambda, p) &= \sum_{l_2 m_2} \tilde{T}_{1m_1}^{l_2 m_2}(0_j, \lambda, p) \cdot [V_{j, l_2 m_2} - \sum_{k \neq j} \sum_{l_3 m_3} \sum_{l_4 m_4} T_{l_2 m_2}^{l_3 m_3}(R_{kj}, \lambda, p) \cdot \\
 &\cdot \tilde{T}_{l_3 m_3}^{l_4 m_4}(0_{k'}, \lambda, p) \cdot V_{k, l_4 m_4} + \sum_{k \neq j} \sum_{k_1 \neq k} \sum_{l_5 m_5} T_{l_2 m_2}^{l_3 m_3}(R_{kj}, \lambda, p) \cdot \tilde{T}_{l_3 m_3}^{l_4 m_4}(0_{k'}, \lambda, p) \cdot \\
 &\cdot T_{l_4 m_4}^{l_5 m_5}(R_{k_1 k'}, \lambda, p) \cdot \tilde{T}_{l_5 m_5}^{l_6 m_6}(0_{k_1}, \lambda, p) \cdot V_{k_1, l_6 m_6} - \dots], \quad i = 3, 4, 5, 6.
 \end{aligned}$$

W rozpatrywanym przybliżeniu, uwzględniamy człony do rzędu  $O(\varepsilon_s)$ ,  $O(\varepsilon_m)$ , oraz  $O(\varepsilon^2)$ . W rezultacie, współczynniki rozwinięcia sił indukowanych  $f_{j,00}(\lambda, p)$ , oraz  $f_{j,1m}(\lambda, p)$  można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}
 (C3) \quad f_{j,00}(\lambda, p) &= f_{j,00}(p) + (\text{dodatkowe człony}), \\
 f_{j,1m}(\lambda, p) &= f_{j,1m}(p) + (\text{dodatkowe człony}).
 \end{aligned}$$



Współczynniki  $\lambda_{j,00}(p)$ , oraz  $\lambda_{j,1m}(p)$  omówiono w §3. Nowe przyczynki, opisujące wpływ małych przemieszczeń kul, są zebrane w tablicach 1-2. W tablicach tych zastosowano następującą notację:

$$\tilde{T}_{00}^{1m_2}(0_j; \lambda, p) = \tilde{S}_{00}^{1m_2}(0_j; \lambda, p) = (\tilde{S}_{00}^{1m_2})_j,$$

$$S_{00}^{00}(R_{kj}; \lambda, p) = S_{kj},$$

$$\tilde{T}_{1m_1}^{2m_2}(0_j; \lambda, p) = \tilde{S}_{1m_1}^{2m_2}(0_j; \lambda, p) = (\tilde{S}_{1m_1}^{2m_2})_j,$$

$$(C4) \quad S_{00}^{1m_2}(R_{kj}; \lambda, p) = (S_{00}^{1m_2})_{kj}.$$

Tablica 1

Dodatkowe człony w wyrażeniach, opisujących współczynniki rozwinięcia sił indukowanych  $\frac{1}{2}j,_{oo}(\lambda, p)$ , liniowe względem  $\varepsilon_s(\varepsilon_m)$ , oraz rzędu  $O((a|\overline{p}/\overline{v})^2)$ , lub odpowiednio  $O((R|\overline{p}/\overline{v})^2)$ .

$\varepsilon^0$	$\sum_{m_2} (\tilde{S}_{00}^{1m_2})_j \cdot V_{j,1m_2}$
$\varepsilon^1$	$-\sum_{k \neq j} \sum_{m_2} \tilde{T}_j \cdot T_{kj} \cdot (\tilde{S}_{00}^{1m_2})_k \cdot V_{k,1m_2}$ $-\sum_{k \neq j} \tilde{T}_j \cdot S_{kj} \cdot \tilde{T}_k \cdot V_{k,00}$
$\varepsilon^2$	$-\sum_{k \neq j} \sum_{m_2} (\tilde{S}_{00}^{1m_2})_j \cdot (T_{1m_2}^{00})_{kj} \cdot \tilde{T}_k \cdot V_{k,00}$ $-\sum_{k \neq j} \sum_{m_2} \tilde{T}_j \cdot (T_{00}^{1m_2})_{kj} \cdot (\tilde{S}_{1m_2}^{00})_k \cdot V_{k,00}$ $-\sum_{k \neq j} \sum_{m_1, m_2} \tilde{T}_j \cdot (T_{00}^{1m_1})_{kj} \cdot (\tilde{S}_{1m_1}^{2m_2})_k \cdot V_{k,2m_2}$ $-\sum_{k \neq j} \sum_{m_1, m_2} \tilde{T}_j \cdot (S_{00}^{1m_1})_{kj} \cdot (\tilde{T}_{1m_1}^{1m_2})_k \cdot V_{k,1m_2}$ $\sum_{k \neq j} \sum_{k_1 \neq k} \sum_{m_1} \tilde{T}_j \cdot T_{kj} \cdot \tilde{T}_k \cdot T_{k_1 k} \cdot (\tilde{S}_{00}^{1m_1})_{k_1} \cdot V_{k_1,1m_1}$ $\sum_{k \neq j} \sum_{k_1 \neq k} \tilde{T}_j \cdot T_{kj} \cdot \tilde{T}_k \cdot S_{k_1 k} \cdot \tilde{T}_{k_1} \cdot V_{k_1,00}$ $\sum_{k \neq j} \sum_{k_1 \neq k} \tilde{T}_j \cdot S_{kj} \cdot \tilde{T}_k \cdot T_{k_1 k} \cdot \tilde{T}_{k_1} \cdot V_{k_1,00}$



Tablica 2

Dodatkowe człony w wyrażeniach, opisujących współczynniki rozwinięcia sił indukowanych  $f_{j,1m}(\lambda, p)$ , liniowe względem  $\varepsilon_s(\varepsilon_m)$ , oraz rzędu  $O((a/p/v)^2)$ , lub odpowiednio  $O((R/p/v)^2)$ .

$\sigma^0$	$(\tilde{S}_{1m_1}^{00})_j \cdot V_{j,100}$ $\sum_{m_2} (\tilde{S}_{1m_1}^{2m_2})_j \cdot V_{j,2m_2}$
$\sigma^1$	$-\sum_{k \neq j} (\tilde{S}_{1m_1}^{00})_j \cdot T_{kj} \cdot \tilde{T}_k \cdot V_{k,00}$
$\sigma^2$	$-\sum_{k \neq j} \sum_{m_2, m_3} (\tilde{T}_{1m_1}^{1m_2})_j \cdot (T_{1m_2}^{00})_{kj} \cdot (\tilde{S}_{00}^{1m_3})_k \cdot V_{k,1m_3}$ $-\sum_{k \neq j} \sum_{m_2} (\tilde{T}_{1m_1}^{1m_2})_j \cdot (S_{1m_2}^{00})_{kj} \cdot \tilde{T}_k \cdot V_{k,00}$ $-\sum_{k \neq j} \sum_{m_2, m_3} (\tilde{S}_{1m_1}^{00})_j \cdot (T_{00}^{1m_2})_{kj} \cdot (\tilde{T}_{1m_2}^{1m_3})_k \cdot V_{k,1m_3}$ $\sum_{k \neq j} \sum_{k_1 \neq k} (\tilde{S}_{1m_1}^{00})_j \cdot T_{kj} \cdot \tilde{T}_k \cdot T_{k_1 k} \cdot \tilde{T}_{k_1} \cdot V_{k_1,00}$

Dodatek D : Tensory tarcia  $\zeta_{jk,lm}^{TV}(\lambda, p)$ ,  $\zeta_{jk,lm}^{RV}(\lambda, p)$ ,  
 $2 \leq l$

Część pierwsza tego dodatku zawiera tensory tarcia, opisujące wpływ pola prędkości cieczy na siły oporu hydrodynamicznego  $F_j(\lambda, p)$ ; część druga - tensory tarcia, opisujące wpływ pola prędkości cieczy na momenty sił  $T_j(\lambda, p)$ .

Część pierwsza

1. Współczynniki tarcia wzajemnego, działające na  $v_{j,2m}^0$  są równe:

$$(D1) \zeta_{jk,2m}^{TV}(\lambda, p) = \zeta_{jk,2m}^{TV}(p) + \sum_{m_1} \tilde{T}_j \cdot (T_{00}^{1m_1})_{kj} \cdot (\tilde{S}_{1m_1}^{2m})_k$$

Pozostałe występujące tu współczynniki tarcia, oraz tarcia wzajemnego, są równe w rozpatrywanym przybliżeniu odpowiednim współczynnikom, otrzymanym w §3.

Część druga

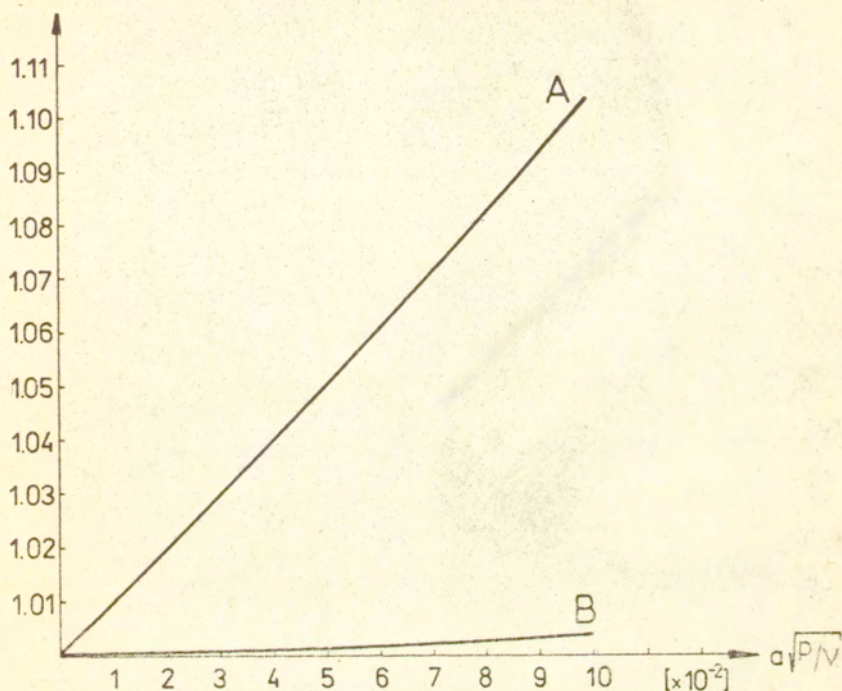
Współczynniki tarcia, działające na  $v_{j,2m}^0$ , wynoszą:

$$(D2) \zeta_{jj,2m}^{RV}(\lambda, p) = \zeta_{jj,2m}^{RV}(p) + \frac{a}{13} \varepsilon : \left[ \sum_{m_1} \mathcal{L}_{-m_1} \tilde{S}_{1m_1}^{2m} \right]_j$$

Podobnie jak w części pierwszej, pozostałe występujące tu współczynniki tarcia, oraz tarcia wzajemnego, są równe odpowiednim współczynnikom, otrzymanym w §3.

W rezultacie, w rozpatrywanym przybliżeniu, małe przemieszczenia kul wpłynęły na postać dwóch spośród współczynników tarcia, działających na  $v_{j,lm}^0$ ,  $l \geq 2$ .



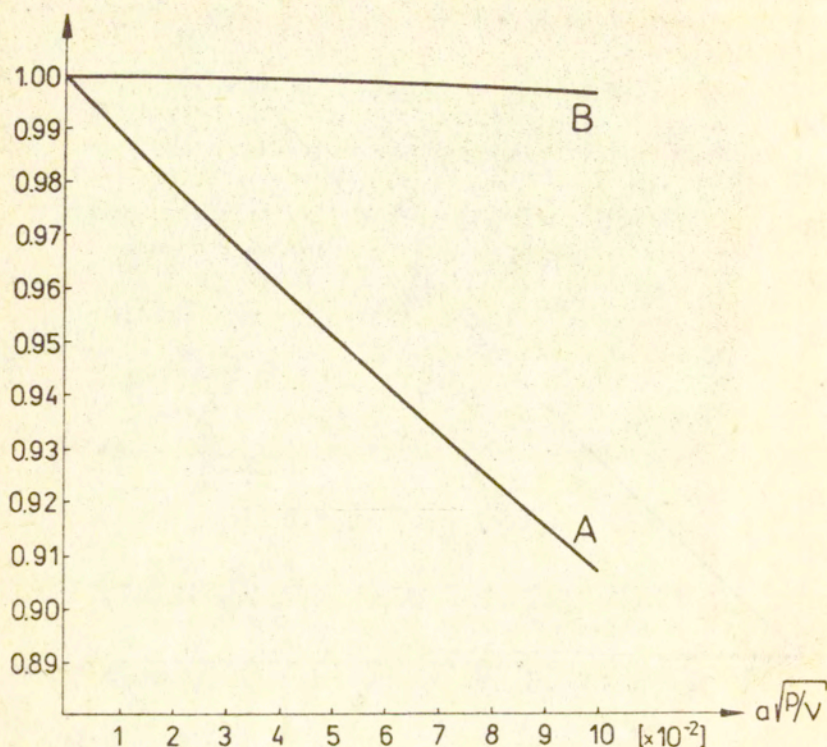


Rys. 1. Wpływ niestacjonarności przepływu cieczy na współczynniki tarcia pojedynczej kuli (wg. (4,8) z pracy [27]):

$$\zeta_{jj}^{TT} = 6\pi\mu a^2 A,$$

$$\zeta_{jj}^{RR} = -\frac{a^2}{\beta} \varepsilon : \left[ \sum_{m_1, m_2} \mathcal{L}_{-m_1} 6\pi\mu a^2 \tilde{K}_{1m_1, \infty}^{1m_2} \mathcal{L}_{m_2} \right] : \varepsilon.$$

W warunkach quasi-stacjonarnych  $A=1$ ,  $B=1$ .



Rys. 2. Wpływ niestacjonarności przepływu cieczy na współczynniki ruchliwości pojedynczej kuli (wg. (4.4) z pracy [27]):

$$\mu_{jj}^{TT} = \frac{1}{2\sqrt{\pi} g a v} K_{00,00}^{00} A,$$

$$\mu_{jj}^{RR} = -\frac{3}{4a^2} \varepsilon : \left[ \sum_{m_1, m_2} \mathcal{L}_{-m_1} \frac{1}{6\sqrt{\pi} g a v} K_{1m_1, 00}^{1m_2} B \mathcal{L}_{m_2} \right] \varepsilon.$$

W warunkach quasi-stacjonarnych  $A=1$ ,  $B=1$ .



## Spis treści

1. Wprowadzenie : - - - - - 3
- 1.1 Uwagi wstępne,
- 1.2 Oddziaływania hydrodynamiczne pomiędzy sztywnymi kulami przy przepływach powolnych,
- 1.3 Quasi-stacjonarne relacje tarcia i ruchliwości,
- 1.4 Niestacjonarne oddziaływania hydrodynamiczne pomiędzy sztywnymi kulami przy przepływach Stokesa,
- 1.5 Cel pracy.
2. Podstawowe związki między siłami indukowanymi, a prędkościami kul względem cieczy : - - - - - 14
- 2.1 Relacje całkowe między siłami indukowanymi, a prędkościami kul względem cieczy,
- 2.2 Oddziaływania hydrodynamiczne w przypadku zaniedbywalnie małych przemieszczeń kul,
- 2.3 Oddziaływania hydrodynamiczne przy uwzględnieniu małych przemieszczeń kul.
3. Niestacjonarne relacje tarcia i ruchliwości, opisujące oddziaływania hydrodynamiczne w przypadku zaniedbywalnie małych przemieszczeń kul : - - - - - 27
- 3.1 Niestacjonarne relacje tarcia:
- /i/ Uwagi wstępne,
- /ii/ Relacje tarcia,
- /iii/ Własności współczynników tarcia;
- 3.2 Niestacjonarne relacje ruchliwości:
- /i/ Uwagi wstępne,
- /ii/ Relacje ruchliwości,
- /iii/ Własności współczynników ruchliwości;
- 3.3 Symetryczny moment dipolowy siły  $F_j^S(p)$ , wywierany przez ciecz na  $j$ -tą kulę, oraz wielkości  $\chi_{j,lm}(p)$ ,  $l \geq 2$ ;
- 3.4 Wpływ sił zewnętrznych, działających na ciecz, na względne prędkości kul;
- 3.5 Wpływ początkowego pola prędkości cieczy na względne prędkości kul.

4.	Niestacjonarne relacje tarcia, opisujące oddziaływania hydrodynamiczne przy uwzględnieniu małych przemieszczeń kul: - - - - -	55
4.1	Uwagi wstępne,	
4.2	Relacje tarcia,	
4.3	Własności współczynników tarcia.	
5.	Uwagi końcowe. - - - - -	66
6.	Literatura. - - - - -	68
7.	Oznaczenia. - - - - -	70
Dodatek A :	Tensory tarcia, opisujące zależność siły oporu $F_j(p)$ , oraz momentu siły oporu $T_j(p)$ od prędkości cieczy $v_{j,1m}^o$ , $1 \geq 2$ . - - - - -	74
Dodatek B :	Własności tensorów oddziaływań hydrodynamicznych, przy uwzględnieniu małych przemieszczeń kul. -	77
Dodatek C :	Wyrażenia iteracyjne, opisujące $f_{j,oo}(\lambda, p)$ , oraz $f_{j,1m}(\lambda, p)$ . - - - - -	88
Dodatek D :	Tensory-tarcia $\{_{jk,1m}^{TV}(\lambda, p)$ , oraz $\}_{jk,1m}^{RV}(\lambda, p)$ , $2 \leq 1$ . - - - - -	92