

**R. Bogacz, A. Niespodziana**

**O OBSZARACH NIESTATECZNOŚCI  
PEWNYCH MODELI KOLUMN  
OBCIĄŻONYCH SIŁĄ ŚLEDZĄCĄ**

36/1984

P. 269



WARSZAWA 1984

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 17 lipca 1984 r.

Praca dotyczy tematu opracowywanego we współpracy  
z OBR FSM Bielsko-Biała w ramach zlecenia C 20830

56983



N a p r a w a c h   r ę k o p i s u

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 150 egz. Ark.wyd. 0,6. Ark. druk. 1.  
Odziano do drukarni w październiku 1984r.  
Nr zamówienia 667/84

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8

## O OBSZARACH NIESTATECZNOŚCI PEWNYCH MODELI KOLUMN OBCIĄŻONYCH SIŁĄ ŚLEDZĄCĄ

### 1. Wstęp

W problemach stateczności kolumn zachowanie się obciążenia w trakcie odkształcenia odgrywa istotną rolę. W literaturze szczególną uwagę zwrócono na przypadek siły "stycznej", tj. przypadek, w którym siła zachowuje styczny kierunek do zdeformowanej osi kolumny. Przy obciążeniu tego typu wartość siły krytycznej nie może być określona przy pomocy kryterium statycznego, ale wymaga zastosowania kinetycznego kryterium stabilności. Stwierdzenie to potwierdzają wyniki uzyskane w pracy [4]. Autorzy określają dla dyskretnego modelu sprężystego zależność siły krytycznej od współczynnika  $\alpha$  charakteryzującego niekonserwatywność obciążenia działającego na swobodny koniec kolumny dowodząc, że dla  $\alpha \in (0; 0.345)$  oraz  $\alpha \in (1.305; \infty)$  wartość krytyczną obciążenia można ustalić stosując wyłącznie statyczne kryterium stabilności, natomiast dla  $\alpha \in (0.345; 1.305)$  kinetyczne kryterium stabilności.

Zagadnieniem optymalizacji takiego układu zajmują się autorzy pracy [5]. Poszukując wartości ilorazu stałych sprężystych  $C_1 C_2^{-1}$ , dla którego objętość kolumny byłaby najmniejsza, w przypadku siły stycznej uzyskano wartość  $C_1 C_2^{-1} = 0$  oraz zmniejszenie objętości o 42,1%.

Uwzględnienie dyssypacji energii w układzie może istotnie wpływać na wartość siły krytycznej, zarówno stabilizująco jak i destabilizująco. Praca [1] zawiera analizę zachowania się kolumny oddziaływającej z dwójakiego rodzaju tłumikami; translacyjnym i rotacyjnym.

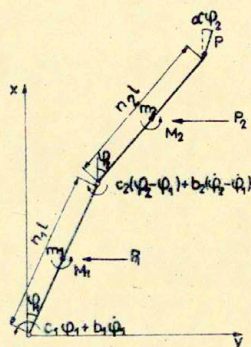
Prezentowana analiza miała na celu zbadanie wpływu podpór tłumiących na wartość siły krytycznej. Jednym z interesujących przypadków jest działanie pojedynczego tłumika, dla którego wartość siły krytycznej zależy istotnie od położenia tłumika a nie od intensywności tłumienia. Największe różnice w wartości siły krytycznej dla układu sprężystego i tłumionego występują gdy tłumik wychylen znajduje się na końcu kolumny, natomiast tłumik obrotu na wysokości 0.75 jej długości. Wykazano również, że w granicznym przypadku, kiedy współczynnik tłumienia dąży do zera, nie istnieje przejście graniczne do układu sprężystego.

W przypadku równoczesnego oddziaływania obydwóch rodzajów tłumików, poza ich położeniem, istotnie wpływa na wartość siły krytycznej wartość ilorazu współczynników tłumienia viskozycznego. Autor pracy [2] stosując dwuelementowy układ dyskretny z tłumieniem zewnętrznym translacyjnym oraz wewnętrznym rotacyjnym uzyskał wyniki wskazujące na zależność obciążenia krytycznego od intensywności tłumienia. Ze względu na fakt, że przyjęte w [2] tłumienie rotacyjne w przegubach, nie jest w pełni odpowiednikiem tłumienia rotacyjnego przyjętego w pracy [1] oraz występowanie istotnych różnic pomiędzy modelem dyskretnym kolumny [2] i ciągłym [1] bez szczególnej analizy nie można stwierdzić co jest przyczyną istotnych jakościowych różnic w kwestii stateczności.

Prezentowane poniżej rozważania stanowią analizę zachowania się dwuelementowego układu dyskretnego z dwójakiego rodzaju tłumieniem; translacyjnym i rotacyjnym. Tłumienie rotacyjne nie jest jednak zlokalizowane w przegubach, jak to ma miejsce w pracy [2] lecz w sposób, który może być odpowiednikiem tłumienia rotacyjnego przyjętego w pracy [1]. Rozważenie tego modelu umożliwi porównanie wyników dla układów dyskretnych o nieznacznie różnych modelach tłumienia a także porównanie z rezultatami uzyskanymi dla układu ciągłego co pozwoli na ocenę wpływu dyskretyzacji układu.

## 2. Sformułowanie problemu

Rozważmy układ dyskretny przedstawiony na rysunku 1 będący podobnie jak w [2] wahadłem podwójnym składającym się z dwóch sztywnych prętów o łącznej długości 1 oraz dwóch przegubów sprężystych, poddany działaniu siły niekonserwatywnej. Zachowanie się siły charakteryzowane jest współczynnikiem  $\alpha$ .



Rys. 1

Przeguby charakteryzować będziemy stałymi sprężystymi  $c_1$  i  $c_2$ , tłumienie lepkie translacyjne stałymi  $\bar{\tau}_1$  i  $\bar{\tau}_2$  a tłumienie rotacyjne stałymi  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $b_4$ . Momenty przenoszone przez przeguby podano na Rys. 1 natomiast obciążenie działające w punktach skupienia masy określa je związki

$$P_1 = \bar{\tau}_1 v_1, \quad M_1 = b_3 \dot{\varphi}_1, \quad /2.1/$$

$$P_2 = \bar{\tau}_2 v_2, \quad M_2 = b_4 \dot{\varphi}_2,$$

gdzie  $v_1, v_2$  są prędkościami, natomiast  $b_3, b_4$  współczynnikami zewnętrznego tłumienia rotacyjnego.

Ruch układu opiszemy równaniami Lagrange'a drugiego rodzaju o postaci:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_i} = Q_i, \quad i=1,2 /2.2/$$

gdzie:

- T - energia kinetyczna
- V - energia potencjalna
- D - funkcja dyssypacji
- $Q_i$  - uogólnione siły niekonserwatywne.

Zakładając, że kąty  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  są małe możemy napisać

$$T = \frac{1}{2} l^2 [(m_1 n_1^2 + \frac{1}{4} m_2) \dot{\varphi}_1^2 + m_2 n_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 n_2^2 \dot{\varphi}_2^2],$$

$$V = \frac{1}{2} [(c_1 + c_2) \varphi_1^2 - 2 c_2 \varphi_1 \varphi_2 + c_2 \varphi_2^2],$$

$$D = \frac{1}{2} [b_3 \dot{\varphi}_1^2 + b_4 \dot{\varphi}_2^2] + \frac{1}{2} [(b_1 + b_2) \dot{\varphi}_1^2 - 2 b_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + b_2 \dot{\varphi}_2^2] + \\ + \frac{1}{2} [(n_1^2 \tau_1 + \frac{1}{4} \tau_2) \dot{\varphi}_1^2 + n_2 \tau_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + n_2^2 \tau_2 \dot{\varphi}_2^2],$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} Pl (\varphi_1 - \alpha \varphi_2),$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} Pl (1 - \alpha) \varphi_2,$$

/2.3/

gdzie oznaczono:

$$\tau_1 = \bar{\tau}_1 l^2, \quad \tau_2 = \bar{\tau}_2 l^2.$$

/2.4/

Równania /2.2/ prowadzą do następującego układu równań różniczkowych liniowych:

$$(m_1 n_1^2 + \frac{1}{4} m_2) l^2 \ddot{\varphi}_1 + [(n_1^2 \tau_1 + \frac{1}{4} \tau_2) + (b_1 + b_2) + b_3] \dot{\varphi}_1 + \\ + (c_1 + c_2 - \frac{1}{2} Pl) \varphi_1 + \frac{1}{2} m_2 n_2 l^2 \ddot{\varphi}_2 + (\frac{1}{2} n_2 \tau_2 - b_2) \dot{\varphi}_2 + \\ + (\frac{1}{2} Pl \alpha - c_2) \varphi_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2} m_2 n_2 l^2 \ddot{\varphi}_1 + (\frac{1}{2} n_2 \tau_2 - b_2) \dot{\varphi}_1 - c_2 \varphi_1 + m_2 n_2^2 l^2 \ddot{\varphi}_2 + \\ + (n_2^2 \tau_2 + b_2 + b_4) \dot{\varphi}_2 + [c_2 - \frac{1}{2} Pl (1 - \alpha)] \varphi_2 = 0.$$

/2.5/

Poszukując rozwiązania w postaci

$$\varphi_j = A_j e^{i\omega t}, \quad j=1,2 \quad /2.6/$$

oraz wprowadzając następujące wielkości:

$$\Omega = l \left( \frac{m_2}{c_2} \right)^{\frac{1}{2}} \omega, \quad \beta = \frac{Pl}{c_2}, \quad \mu = \frac{m_1}{m_2}, \quad \psi = \frac{c_1}{c_2},$$

$$T_i = \frac{T_i}{l\sqrt{m_2 c_2}}, \quad B_j = \frac{b_j}{l\sqrt{m_2 c_2}}, \quad i=1,2, \quad j=1,2,3,4 \quad /2.7/$$

otrzymujemy układ równań liniowych jednorodnych względem stałych  $A_1$  i  $A_2$ :

$$\left\{ (\mu n_1^2 + \frac{1}{4}) \Omega^2 + (n_1^2 T_1 + \frac{1}{4} T_2 + B_1 + B_2 + B_3) \Omega + (1 + \psi - \frac{1}{2} \beta) \right\} A_1 + \left\{ \frac{1}{2} n_2 \Omega^2 + (\frac{1}{2} n_2 T_2 - B_2) \Omega + (\frac{1}{2} \beta \alpha - 1) \right\} A_2 = 0,$$

$$\left\{ \frac{1}{2} n_2 \Omega^2 + (\frac{1}{2} n_2 T_2 - B_2) \Omega - 1 \right\} A_1 + \left\{ n_2^2 \Omega^2 + (n_2^2 T_2 + B_2 + B_4) \Omega + (1 - \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \alpha \beta) \right\} A_2 = 0.$$

/2.8/

Z warunku nietrywialności rozwiązań otrzymamy następujący związek:

$$\begin{aligned} & 8\mu n_1^2 n_2^2 \Omega^4 + \Omega^3 [8n_2^2 (B_1 + B_3) + 2(1 + 4n_2 + 4n_2^2 + 4\mu n_1^2) B_2 + \\ & + 2(1 + 4\mu n_1^2) B_4 + 8n_1^2 n_2^2 T_1 + 8\mu n_1^2 n_2^2 T_2] + \\ & + \Omega^2 \{ -\beta [(1 - \alpha)(4\mu n_1^2 + 1) + 4n_2^2 + 2n_2 \alpha] + [8n_2^2 (1 + \psi) + 8\mu n_1^2 + \\ & + 2 + 8n_2] + 8n_1^2 n_2^2 T_1 T_2 + 8n_1^2 T_1 (B_2 + B_4) + 2T_2 B_2 (1 + 4n_2^2 + \\ & + 4n_2) + 8T_2 n_2^2 (B_1 + B_3) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 8(B_1B_2 + B_1B_4 + B_2B_4 + B_2B_3 + B_3B_4) + 2T_2B_2 \} + \\
 &+ \Omega \{ 4(2 - \beta + \alpha\beta)(B_1 + B_3) + 8(\Psi + \alpha\beta - \beta)B_2 + \\
 &+ 4(2 + 2\Psi - \beta)B_4 + 4T_1n_1^2(2 - \beta + \alpha\beta) + \\
 &+ T_2[\beta(\alpha - 1 - 4n_2^2 - 2n_2\alpha) + 8n_2^2\Psi + \\
 &+ 2(1 + 4n_2 + 4n_2^2)] + [8\Psi - 4(1 - \alpha)(2 + \Psi)\beta + \\
 &+ 2(1 - \alpha)\beta^2] = 0.
 \end{aligned}$$

/2.9/

Równanie to istotnie się uprości jeżeli przyjąć, że obie masy są równe i skoncentrowane w środku prętów ( $\mu = 1$ ,  $n_1 = n_2 = \frac{1}{4}$ ). Jeżeli ponadto założymy identyczne wartości współczynników sprężystości obu przegubów ( $\Psi = 1$ ), to przyjmie ono postać:

$$\begin{aligned}
 &\Omega^4 + \Omega^3[16(B_1 + B_3) + 160B_2 + 80B_4 + T_1 + T_2] + \\
 &+ \Omega^2[176 - 24(2 - \alpha)\beta + 256(B_1B_2 + B_1B_4 + B_2B_4 + B_2B_3 + \\
 &+ B_3B_4) + 16T_2(B_1 + B_3) + T_2(144B_2 + 64B_4) + 16T_1(B_2 + B_4) + \\
 &+ T_1T_2] + \Omega\{128(2 - \beta + \alpha\beta)(B_1 + B_3) + 256(1 + \alpha\beta - \beta)B_2 + \\
 &+ 128(4 - \beta)B_4 + 8(2 + \alpha\beta - \beta)T_1 + [160 + 8(2\alpha - 5)\beta]T_2\} + \\
 &+ 64[4 - 6(1 - \alpha)\beta + (1 - \alpha)\beta^2] = 0.
 \end{aligned}$$

/2.10/

Stosując kryterium statyczne (2.9) uzyskujemy wyrażenie na wartości siły krytycznej, analogicznie jak w [2], postaci:

$$\beta_{1/2} = \frac{3(1 - \alpha) \pm \sqrt{(1 - \alpha)(5 - 9\alpha)}}{1 - \alpha}.$$

/2.11/



Nie zależy ona od parametrów tłumienia. Kryterium to jest jednak słuszne tylko dla  $\alpha < \frac{5}{8}$  i  $\alpha > 1$ . Natomiast wewnątrz tego przedziału należy stosować kinetyczne kryterium stabilności.

W przypadku równania charakterystycznego o postaci

$$L\Omega^4 + M\Omega^3 + N\Omega^2 + S\Omega + R = 0 \quad /2.12/$$

kinetyczne kryterium stabilności otrzymane z warunku Routh'a-Hurwitz'a [3] wyrazi się następująco:

$$LS^2 - MNS + M^2R < 0. \quad /2.13/$$

Nierówność ta wraz z żądaniem dodatniej określoności wszystkich współczynników równania /2.12/ jest warunkiem wystarczającym stabilności.

Wykorzystując warunek /2.13/ otrzymamy:

$$A\beta^2 - B\beta + C = 0, \quad /2.14/$$

gdzie oznaczono:

$$A = b^2 - bce + 64(1-\alpha)c^2,$$

$$B = 2ab - bcd - ace + 384(1-\alpha)c^2,$$

$$C = a^2 - acd + 256c^2,$$

$$a = 256(1+\zeta_1) + 256\zeta_2 + 512\zeta + 16\kappa + 160\xi\kappa,$$

$$b = (1-\alpha)[128(1+\zeta_1) + 256\zeta_2 + 8\kappa] - 8(2\alpha-5)\xi\kappa + 128\zeta,$$

$$c = 16(1+\zeta_1) + 160\zeta_2 + 80\zeta + \kappa + \xi\kappa,$$

$$d = 176 + B_3^2 [256(\zeta_1\zeta_2 + \zeta_1\zeta + \zeta_2\zeta + \zeta_2 + \zeta) + 16\xi\kappa(1+\zeta_2) + \xi\kappa(64\zeta + 144\zeta_2) + 16\kappa(\zeta + \zeta_2) + \xi\kappa^2],$$

$$e = 24(2-\alpha).$$

/2.15/

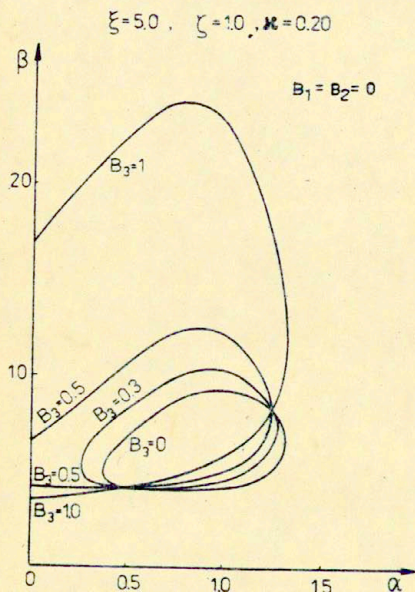
Wprowadzono tu następujące parametry charakteryzujące tłumienie:

$$\frac{B_1}{B_3} = \zeta_1, \quad \frac{B_2}{B_3} = \zeta_2, \quad \frac{B_4}{B_3} = \zeta, \quad \frac{T_2}{T_1} = \xi, \quad \frac{T_4}{B_3} = \kappa.$$

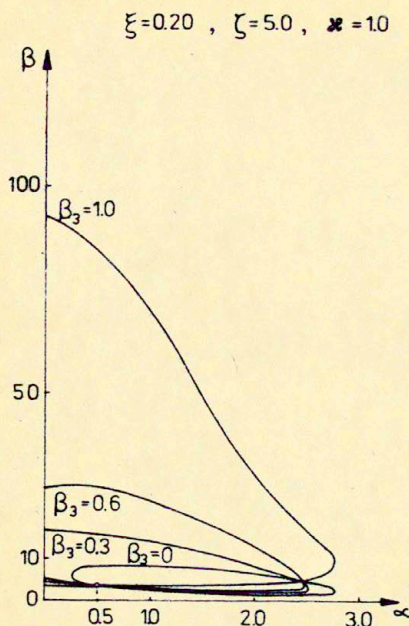
### 3. Wyniki analizy numerycznej

Analizę numeryczną przeprowadzono dla następujących przypadków szczególnych;  $\xi=5$ ,  $\zeta=1$ ,  $\kappa=0.2$ ,  $\zeta_1=\zeta_2=0$  oraz  $\xi=0.2$ ,  $\zeta=5$ ,  $\kappa=1$ ,  $\zeta_1=\zeta_2=0$ .

Wyniki zilustrowano odpowiednio na rysunkach 2 i 3 dla wybranych wartości  $B_3$  (0.0, 0.3, 0.5, 1.0).



Rys.2 Zależność  $\beta(\alpha)$  w przypadku  $\kappa=0.2$  oraz jednorodnego tłumienia rotacyjnego  $\zeta=1.0$  i niejednorodnego tłumienia translacyjnego  $\xi=5$ .



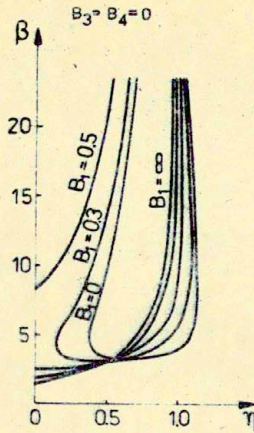
Rys.3 Zależność  $\beta(\alpha)$  dla  $\zeta = 5$ ,  $\xi = 0.2$ ,  $\kappa = 1$ .

W pracy [2] zbadano zależność siły krytycznej  $\beta$  od wartości współczynnika  $\alpha$  dla różnych rodzajów tłumienia.

Na rysunkach 4 i 5 zilustrowano odpowiednio przypadki, jednorodnego tłumienia wewnętrznego przy niejednorodnym tłumieniu zewnętrznym oraz przypadek obu niejednorodnych rodzajów tłumienia.

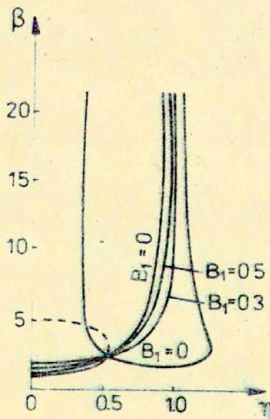
Zwraca uwagę fakt, że kształt krzywych ograniczających obszary stabilności istotnie różni się od kształtu krzywych otrzymanych w [2]. Zamiast jednej-jak w [2], istnieją dwie pary wartości charakterystycznych  $\alpha, \beta$ , przy których parametry krytyczne nie zależą od intensywności tłumienia /wartości parametru  $\beta_3$  /.

$$\xi = 5, \zeta = 1, \kappa = 0.20$$



Rys.4 Zależność  $\beta(\alpha)$  w przypadku jednorodnego tłumienia wewnętrznego przy niejednorodnym tłumieniu zewnętrznym.

$$\xi = 0.20, \zeta = 5, \kappa = 1$$



Rys.5.  $\beta(\alpha)$  w przypadku niejednorodnego tłumienia zewnętrznego oraz wewnętrznego.

Odpowiednikiem zależności przedstawionych na Rys.2 jest w pracy [2] wykres przedstawiony na Rys.4. Dla przyjętego w [2] modelu tłumienia, przy pewnych wartościach parametru  $\alpha$  krzywe ograniczające obszary niestabilności dążą asymptotycznie do nieskończoności niezależnie od przyjętej intensywności tłumienia  $B_1$ .

Podobne cechy wykazują wykresy przedstawione na Rys.5, ilustrujące przypadek parametrów charakteryzujących niejednorodność obydwóch rodzajów tłumienia ( $\xi = 0.20, \zeta = 5, \kappa = 1$ ). Przy  $\alpha = 0.5$  wartość siły krytycznej również nie zależy od wartości  $B_1$ .

Porównując wykresy przedstawione na Rys. 2 i 3 z ich odpowiednikami z Rys.4 i 5 łatwo zauważyć, że tłumienie wewnętrzne w przegubach układu dyskretnego nie jest odpowiednikiem tłumienia rotacyjnego prętów przyłożonego np. w punktach środków masy.

W celu uwypuklenia wpływu dyskretyzacji układu na krytyczne wartości obciążenia porównamy wyniki uzyskane w pracy [1] z rezultatami otrzymanymi dla następujących parametrów  $\alpha = 1$ ,

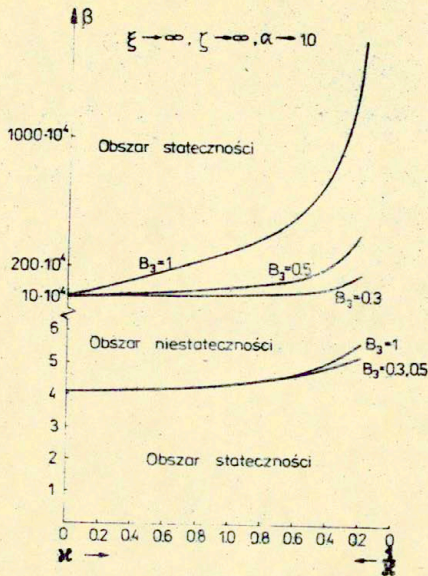
$$\xi \rightarrow \infty, \zeta \rightarrow \infty, \kappa \in (0, \infty).$$

Przyjęcie takich parametrów odzwierciedla sytuację, w której  $T_1 = 0$  i  $B_3 = 0$ , co oznacza, że oddziałują tylko tłumiki na drugim elemencie modelu.

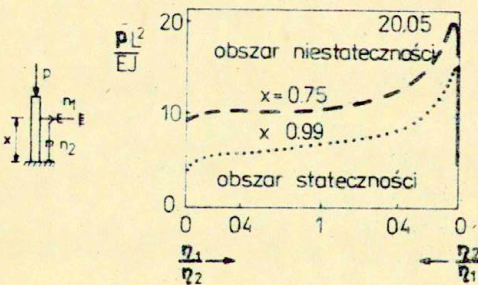
W obliczeniach numerycznych dla  $\xi = 1000$  i  $\zeta = 1000$  otrzymano rezultaty zilustrowane na rysunku 6.

Z przedstawionych wykresów wynika, że intensywność tłumienia ma niewielki wpływ na dolną granicę obszaru niestateczności. Wpływ ilorazu współczynników tłumienia translacyjnego i rotacyjnego jest jakościowo podobny do przypadku przedstawionego w pracy [1] /Rys.7/.

Wpływ intensywności tłumienia na górną granicę obszaru niestateczności jest widoczny. Wartość drugiej siły krytycznej rośnie wraz ze wzrostem współczynnika tłumienia. W pracy [1] obszar niestateczności dla kolumny modelowanej układem ciągłym, był nieograniczony. Różnica ta jest skutkiem dyskretyzacji zagadnienia.



Rys.6 Zależność  $\beta(x)$  dla przypadku  $\alpha = 1, \xi = 1000, \zeta = 1000$ .



Rys.7 Zależność siły krytycznej od ilorazu współczn. tłumienia

Jeżeli założymy, że tłumiki oddziałują tylko na pierwszym elemencie modelu ( $\xi = 0, \zeta = 0$ ), to niezależnie od przyjętej intensywności tłumienia  $B_3$  oraz niezależnie od wartości ilorazu  $\kappa$  otrzymujemy stałą wartość siły krytycznej.

Podobny rezultat otrzymano w pracy [1] /Rys.3 i 4/. W przypadku tłumików działających na dolną część kolumny wpływ położenia tłumika na wartość siły krytycznej jest nieznaczący.

## 5. Wnioski

Porównując wyniki dla  $\alpha = 1$  z rezultatami uzyskanymi w pracy [1] stwierdzamy istotny wpływ dyskretyzacji rozważanego układu. Poza różnicami ilościowymi mamy do czynienia również z różnicami jakościowymi. Zaskakującym jest występowanie ograniczonych obszarów niestateczności w przypadku układów dyskretnych, podczas gdy w przypadku układów ciągłych są one nieograniczone. Rozważany układ dyskretny złożony ze sztywnych elementów obciążony siłami śledzącymi, jest jednym z najprostszych układów tego typu. Następnym kierunkiem badań będzie analiza układu złożonego z odkształcalnych prętów połączonych przegubami o zadanej sztywności. Umożliwi to zebranie w jednym modelu cech obu rozważanych układów co ma określone znaczenie poznawcze a także pozwoli dać odpowiedź na pytanie kiedy rezultaty powyższej dyskretyzacji mogą być wykorzystane w praktyce inżynierskiej. Dyskretyzacja układów tego typu jest bowiem obecnie powszechnie stosowana zarówno w dynamice maszyn i konstrukcji jak i mechanice robotów. W badaniach układów poddanych obciążeniom niekonserwatywnym wyniki analizy dynamicznej i stateczności technicznej nie są tak wrażliwe na sposób dyskretyzacji jak to ma miejsce w przypadku niektórych typów obciążeń niekonserwatywnych. Typowym przykładem jest rozważany w niniejszej pracy przykład obciążeń śledzących.

Literatura

- 1 R.Bogacz, O.Mahrenholtz, On the optimal design of visco-elastic structures subjected to circulatory loading, Proc. of EUROBECH 164 Colloquium, Siegen, 1982
- 2 M.Życzkowski, Lectures on stability of elastic structures, Udine 1976.
- 3 T.V.Karman, M.A.Biot, Metody matematyczne w technice, PWN, Warszawa 1958
- 4 G.Herrmann, R.W.Bungay, On the stability of elastic systems subjected to non-conservative forces, J.Appl.Mech. 31, 1964, 435-440
- 5 M.Życzkowski, A.Gajewski, Optimal structural design in non-conservative problems of elastic stability, IUTAM Symp. on Instability of Continuous Systems. Herrenalb 1969, Springer-Verlag /1971/ 295-301.