

7.71 — identyfikacja układów liniowych,
analiza wrażliwości

Z. Kowalska, J. Wicher

ZASTOSOWANIE ANALIZY WRAŻLIWOŚCI
DO PRZYGOTOWANIA
EKSPERYMENTU IDENTYFIKACJI
UKŁADU BIOMECHANICZNEGO DŁOŃ-RAMIE

37/1984

P. 269



WARSZAWA 1984

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 października 1984 r.



56984



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd. 1,9. Ark.druk. 2,5.

Oddano do drukarni w październiku 1984.

Nr zamówienia 668/84

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Zofia Kowalska
Jerzy Wicher.
Zakład Układów Mechanicznych

ZASTOSOWANIE ANALIZY WRAŻLIWOŚCI DO PRZYGOTOWANIA
EKSPERYMENTU IDENTYFIKACJI UKŁADU BIOMECHANICZNEGO
DŁOŃ- RAMIĘ

Wstęp

W ogromnej większości przypadków identyfikacji układów dynamicznych przyjmuje się, że na podstawie informacji a priori znana jest struktura modelu matematycznego (np. struktura układu równań różniczkowych), a proces identyfikacji sprowadza się do poszukiwania zbioru wartości parametrów modelu.

Parametry modelu można wyznaczyć na podstawie pomiarów różnego rodzaju charakterystyk dynamicznych układu np.: zdeterminowanych przebiegów czasowych procesów przejściowych, charakterystyk częstotliwościowych, właściwości przebiegów czasowych procesów przypadkowych.

Omawiane w pracy zagadnienia dotyczą identyfikacji obiektów liniowych na podstawie zmierzonych charakterystyk częstotliwościowych: amplitudowych i amplitudowo-fazowych (transmitancji). Metoda częstotliwościowa badania i opisu właściwości dynamicznych obiektów jest powszechnie stosowana w przypadkach, gdy istnieją techniczne możliwości harmonicznego wymuszenia obiektu. Jej zaletą jest stosunkowo duża dokładność w porównaniu z innymi metodami, która wynika między innymi stąd, że w czasie pomiarów można odfiltrować zakłócenia za pomocą wąskopasmowych filtrów, a ponadto w zakresie liniowości układu można dobierać dla każdej wartości częstotliwości odpowiedni poziom wymuszenia harmonicznego.

W pracy zwrócono szczególną uwagę na identyfikację parametrów fizycznych tzn. takich, które reprezentują rzeczywiste

właściwości fizyczne elementów układu dynamicznego. Np. w przypadku dyskretnych układów mechanicznych o wielu stopniach swobody parametrami fizycznymi będą masy elementów sztywnych, współczynniki sztywności i tłumienia elementów podatnych. Charakterystyki częstotliwościowe są na ogół nieliniowymi funkcjami parametrów fizycznych, co ma istotne znaczenie dla przebiegu procesu identyfikacji.

Jeśli struktura modelu matematycznego jest dobrze dobrana, a błędy pomiaru charakterystyk-małe, parametry modelu można wyznaczyć w drodze identyfikacji deterministycznej. Identyfikacja deterministyczna wektora parametrów o wymiarze r polega na ułożeniu i rozwiązaniu układu r równań niezależnych linio-wo. Równania te przyrównują wartości charakterystyk modelu, dla wybranych wartości częstotliwości, do odpowiednich wartości zmierzonych.

Jeśli pomiary charakterystyk układu są obarczone dużymi błędami przypadkowymi lub jeśli struktura modelu różni się od struktury obiektu, należy stosować statystyczne metody identyfikacji. W metodach statystycznych poszukuje się takich wartości parametrów, dla których charakterystyki dynamiczne modelu aproksymują najlepiej, według pewnego kryterium (np. kryterium najmniejszej sumy kwadratów), charakterystyki zmierzone. Identyfikacja parametrów sprowadza się zatem do optymalizacji (minimalizacji) pewnego funkcjonału, przyjętego za kryterium identyfikacji, określonego na błędzie modelu rozumianym jako różnica między charakterystyką modelu a charakterystyką zmierzoną.

Przy identyfikacji parametrów fizycznych obiektu dynamicznego o wielu wejściach i wyjściach istnieje pewna dowolność w wyborze charakterystyk mających stanowić podstawę identyfikacji parametrów. Każda charakterystyka obiektu zależy od wartości wszystkich lub przynajmniej niektórych parametrów fizycznych.

Jeśli założyć, że struktury modelu i obiektu są identyczne, a błędy pomiarów-pomijalne małe, można wyznaczyć dokładne wartości parametrów przyjmując za podstawę identyfikacji wartości zmierzone dowolnych charakterystyk dla dowolnych wartości częstotliwości.

W praktyce pomiary charakterystyk obarczone są błędami.

Można ogólnie stwierdzić, że błędy identyfikacji, wywołane błędami pomiarowymi, zależą od wrażliwości charakterystyk na zmiany parametrów. Przyjęcie pewnych charakterystyk obiektu za podstawę identyfikacji parametrów nie może być zatem przypadkowe, powinno być poprzedzone analizą zakłóceń i błędów pomiarowych oraz ich wpływu na błąd oszacowania parametrów.

Celem pracy jest:

- 1^o - poznanie zależności błędów identyfikacji od wrażliwości charakterystyk częstotliwościowych na zmiany parametrów (rozdział 1),
- 2^o - wykorzystanie informacji uzyskanych z przebiegu funkcji wrażliwości transmitancji do przygotowania eksperymentu identyfikacji układu biomechanicznego dłoń-ramię.

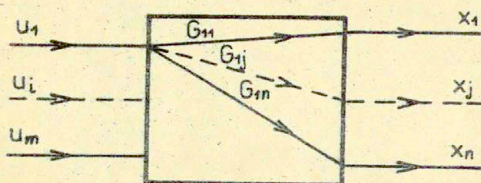
Zagadnieniem badania właściwości dynamicznych, modelowania i identyfikacji parametrów układu dłoń-ramię poświęcone są rozdziały 2 i 3 niniejszej pracy. W rozdziale 2 dokonano przeglądu publikacji podejmujących tę problematykę, natomiast w rozdziale 3 przedstawiono model matematyczny układu, zamieszczono wykresy funkcji wrażliwości różnych transmitancji oraz sformułowano wnioski dotyczące identyfikacji parametrów modelu układu dłoń-ramię oraz wnioski ogólniejsze o przydatności analizy wrażliwości transmitancji dla przygotowania eksperymentu identyfikacji układów dynamicznych.

1. Wpływ błędu pomiaru charakterystyk częstotliwościowych na błąd oszacowania parametrów.

Rozpatrzony będzie przypadek zbioru r parametrów p_j ($j=1, \dots, r$) układu o m wejściach i n wyjściach (rys.1.1).

Układ można opisać za pomocą $m \times n$ transmitancji. Transmitancja G_{kl} między k -tym wejściem a l -tym wyjściem jest zespoloną funkcją wektora parametrów \vec{p} oraz $s=j\omega$, gdzie ω oznacza częstość kołową, a $j=\sqrt{-1}$.

Transmitancje układu można zapisać w postaci macierzy



Rys. 1.1. Schemat układu o wielu wejściach i wyjściach.

transmitancji G o m wierszach i n kolumnach:

$$(1.1) \quad G(j\omega, \bar{p}) = \begin{bmatrix} G_{11}(j\omega, \bar{p}) & G_{12}(j\omega, \bar{p}) & \dots & G_{1n}(j\omega, \bar{p}) \\ G_{21}(j\omega, \bar{p}) & & \dots & \\ \vdots & & \dots & \\ G_{m1}(j\omega, \bar{p}) & G_{m2}(j\omega, \bar{p}) & \dots & G_{mn}(j\omega, \bar{p}) \end{bmatrix}$$

Jak stwierdzono we wstępie identyfikacja deterministyczna wektora r parametrów sprowadza się do ułożenia i rozwiązania układu r rzeczywistych, liniowo niezależnych równań. Jeśli parametry identyfikuje się na podstawie pomiarów charakterystyk amplitudowo-fazowych równania te mają postać:

$$(1.2a) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(G_{kl}(j\omega_s, \bar{p})) &= \operatorname{Re}(\tilde{G}_{kls}), \\ \operatorname{Im}(G_{kl}(j\omega_s, \bar{p})) &= \operatorname{Im}(\tilde{G}_{kls}) \end{aligned}$$

natomiast jeśli parametry wyznacza się wyłącznie na podstawie charakterystyk amplitudowych -postać:

$$(1.2b) \quad |G_{kl}(j\omega_s, \bar{p})| = |\tilde{G}_{kls}|$$

gdzie:

- ω_s - pewna, określona wartość częstości kołowej,
- \tilde{G}_{kls} - zmierzona wartość transmitancji między k-tym wejściem i l-tym wyjściem dla częstości ω_s .

Równania (1.2) są zwykle nieliniowe ze względu na parametry p_j . Rozwiązanie układu r równań nieliniowych metodami bezpośrednimi może okazać się niemożliwe i dlatego rozwiązanie znajduje się na ogół wyznaczając metodami numerycznymi taki wektor parametrów p_j ($j=1, \dots, r$), dla którego suma r składników o postaci:

$$(1.3a) \quad \begin{aligned} & [\operatorname{Re}[G_{kl}(j\omega_s, \bar{p})] - \operatorname{Re}(\tilde{G}_{kls})]^2 \\ & + [\operatorname{Im}[G_{kl}(j\omega_s, \bar{p})] - \operatorname{Im}(\tilde{G}_{kls})]^2 \end{aligned}$$

lub

$$(1.3b) \quad [|G_{kl}(j\omega_s, \bar{p})| - |\tilde{G}_{kls}|]^2$$

osiąga minimum równe zero w przybliżeniu numerycznym.

Przy identyfikacji obiektów trudno dostępnych pod względem pomiarowym, do których należą układy biomechaniczne, często zachodzi potrzeba wyznaczenia parametrów wyłącznie na podstawie pomiarów jednej charakterystyki amplitudowo-fazowej lub amplitudowej. W ostatnim przypadku sumę r składników (1.3) można zapisać w postaci:

$$(1.4) \quad S = \sum_{s=1}^r [|G_{kl}(j\omega_s, \bar{p})| - |\tilde{G}_{kls}|]^2$$

W praktyce przy stosowaniu kryterium (1.4) uwzględnia się tylko wybrane transmitancje G_{kl} i wybrane przedziały częstości (wybrane wartości ω_s) - w zależności od wrażliwości na parametry. Wyboru można dokonać na podstawie przebiegu funkcji wrażliwości transmitancji G_{kl} .

Należy zauważyć, że identyfikacja deterministyczna jest pod względem formalnym bardzo podobna do identyfikacji statycznej metodą najmniejszej sumy kwadratów błędów modelu (patrz wstęp), z tym, że w metodzie statystycznej liczba pomiarów \tilde{G}_{kls} lub $|\tilde{G}_{kls}|$ oraz liczba składników kryterium identyfikacji S jest na ogół znacznie większa od liczby parametrów P .

Ponieważ w praktyce przy pomiarze transmitancji popełnia się błędy, wyznaczony w drodze minimalizacji kryterium S optymalny wektor parametrów \bar{p} również obciążony jest pewnym błędem $\Delta \bar{p}$.

W większości przypadków zespoloną wartość transmitancji wyznacza się mierząc osobno moduł transmitancji oraz fazę transmitancji. Błąd pomiaru modułu transmitancji $\Delta |G_{kls}|$ zależy na ogół od wartości modułu $|G_{kls}|$. Dokładność różnego rodzaju mierników poziomu drgań wielkości fizycznych, które wykorzystuje się do pomiaru modułu transmitancji wyraża się przez maksymalny względny (procentowy) błąd pomiaru. Natomiast pomiar fazy charakteryzuje, w odróżnieniu od pomiaru modułu, stały bezwzględny błąd pomiaru. Błąd pomiaru nowoczesnych mierników fazy wynosi około 1° i nie zależy od wartości fazy oraz poziomu sygnału pomiarowego.

W pracy przeprowadzono analizę wpływu błędów pomiarowych na błędy identyfikacji w zależności od wrażliwości charakterystyk częstotliwościowych na parametry przy założeniu, że względny błąd pomiaru modułu transmitancji oraz błąd bezwzględny pomiaru fazy są stałe.

W dalszej części tekstu, dla uproszczenia zapisu, w oznaczeniach wartości transmitancji $G_{kl}(j\omega_s, \bar{p})$ i \tilde{G}_{kls} pominięto argument $j\omega_s$ oraz indeksy: wejścia $-k$, wyjścia $-l$, częstości $-s$, wprowadzono natomiast indeks i oznaczający numer porządkowy wartości transmitancji przyjętej za podstawę identyfikacji. Oznaczeniom $G_{kl}(j\omega_s, \bar{p})$, \tilde{G}_{kls} odpowiadają

zatem $G_i(\bar{p})$ i \tilde{G}_i

Jeśli błędy pomiaru modułu i fazy transmitancji są małe można przyjąć, że błędy oszacowania parametru p_j ($j=1, \dots, r$) wywołane błędem pomiaru modułu $|\tilde{G}_i|$ i fazy φ_i wynoszą odpowiednio:

$$(1.5) \quad \frac{\Delta |G_i|}{p_j} = \frac{\partial p_j / p_j}{\partial |\tilde{G}_i| / |\tilde{G}_i|} \bigg|_{\tilde{G}_0} \frac{\Delta |\tilde{G}_i|}{|\tilde{G}_i|}$$

1

$$(1.6) \quad \frac{\Delta \varphi_i}{p_j} = \frac{\partial p_j / p_j}{\partial \varphi_i} \bigg|_{\tilde{G}_0} \Delta \tilde{\varphi}_i$$

gdzie:

- p_j - wartość j -tego elementu wektora parametrów optymalnych \bar{p} , dla którego kryterium identyfikacji $S=0$,
- $\Delta |G_i|$ - bezwzględny błąd parametru p_j wywołany błędem pomiaru modułu $|\tilde{G}_i|$,
- $\Delta \varphi_i$ - bezwzględny błąd parametru p_j wywołany błędem pomiaru fazy φ_i ,
- $\Delta |\tilde{G}_i|$ - błąd pomiaru modułu $|\tilde{G}_i|$,
- $\Delta \varphi_i$ - błąd pomiaru fazy φ_i ,
- \tilde{G}_0 - wektor dokładnych, nie obciążonych błędem, wartości transmitancji \tilde{G}_{i0} ,

Ze wzorów (1.5), (1.6) wynika, że przy założonych wcześniej stałych wartościach błędów $\Delta |\tilde{G}_i| / |\tilde{G}_i|$ oraz $\frac{1}{p_j} \Delta \varphi_i$ błędy estymacji parametrów $\frac{\Delta |G_i|}{p_j}$ oraz $\frac{\Delta \varphi_i}{p_j}$ są

proporcjonalne do pochodnych $\frac{\partial P_j / P_i}{\partial |\tilde{G}_i|} \Big|_{\tilde{G}_0}$, $\frac{\partial P_j / P_i}{\partial \varphi_i} \Big|_{\tilde{G}_0}$.

Aby poznać charakter zależności między wartościami pochodnych we wzorach (1.5), (1.6) a wrażliwością charakterystyk na parametry zostanie rozpatrzony jako przykład przypadek identyfikacji parzystej liczby parametrów p_j ($j=1, \dots, 2l$) na podstawie pomiarów modułu i fazy transmitancji G_i ($i=1, \dots, l$).

W identyfikacji deterministycznej kryterium identyfikacji dla wektora parametrów optymalnych \bar{p} jest zawsze równe 0 i dla każdej transmitancji uwzględnionej w kryterium zachodzi równanie:

$$(1.7) \quad G_i(\bar{p}) - \tilde{G}_i = 0 \quad (i=1, \dots, l)$$

Równanie (1.7) wielkości zespolonych jest równoważne 2 równaniom wielkości rzeczywistych:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} |G_i(\bar{p})| - |\tilde{G}_i| &= 0 \\ \varphi_i(\bar{p}) - \tilde{\varphi}_i &= 0 \end{aligned}$$

Układ równań

$$(1.9) \quad \begin{aligned} |G_1(\bar{p})| - |\tilde{G}_1| &= 0 \\ |G_i(\bar{p})| - |\tilde{G}_i| &= 0 \\ |G_l(\bar{p})| - |\tilde{G}_l| &= 0 \\ \varphi_1(\bar{p}) - \tilde{\varphi}_1 &= 0 \\ \varphi_i(\bar{p}) - \tilde{\varphi}_i &= 0 \\ \varphi_l(\bar{p}) - \tilde{\varphi}_l &= 0 \end{aligned}$$

jest uwikłaną postacią funkcji parametrów optymalnych p_1, \dots, p_{2l} od zmierzonych wartości $|\tilde{G}_i|$ oraz $\tilde{\varphi}_i$ ($i=1, \dots, l$).

Pochodne cząstkowe parametrów optymalnych względem dowolnego argumentu $|G_i|$ i $\tilde{\varphi}_i$ wyznacza się, zgodnie z ogólnymi zasadami różniczkowania funkcji uwikłanych, różniczkując układ równań (1.9) względem $|G_i|$ oraz $\tilde{\varphi}_i$. Różniczkując układ (1.9) względem $|G_i|$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial G_i}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial |G_i|} + \dots + \frac{\partial G_i}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial |G_i|} + \dots + \frac{\partial G_i}{\partial p_{2i}} \frac{\partial p_{2i}}{\partial |G_i|} = 0 \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \frac{\partial G_i}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial |G_i|} + \dots + \frac{\partial G_i}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial |G_i|} + \dots + \frac{\partial G_i}{\partial p_{2i}} \frac{\partial p_{2i}}{\partial |G_i|} = 1 \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \frac{\partial G_i}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial |G_i|} + \dots + \frac{\partial G_i}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial |G_i|} + \dots + \frac{\partial G_i}{\partial p_{2i}} \frac{\partial p_{2i}}{\partial |G_i|} = 0 \\
 (1.10) \quad & \dots \dots \dots \\
 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial |G_i|} + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial |G_i|} + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_{2i}} \frac{\partial p_{2i}}{\partial |G_i|} = 0 \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial |G_i|} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial |G_i|} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{2i}} \frac{\partial p_{2i}}{\partial |G_i|} = 0 \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \frac{\partial \varphi_l}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial |G_i|} + \dots + \frac{\partial \varphi_l}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial |G_i|} + \dots + \frac{\partial \varphi_l}{\partial p_{2i}} \frac{\partial p_{2i}}{\partial |G_i|} = 0
 \end{aligned}$$

Jeśli dla każdego $i=1, \dots, l$ moduł $|G_i(\bar{p})| \neq 0$, układ (1.10) można przekształcić do postaci:

$$(1.11) \quad \begin{array}{cccc|c} \frac{\partial G_1 / |G_1|}{\partial p_1 / p_1} \dots \frac{\partial G_1 / |G_1|}{\partial p_i / p_i} \dots \frac{\partial G_1 / |G_1|}{\partial p_{21} / p_{21}} & \frac{\partial p_1 / p_1}{\partial \tilde{G}_1 / |\tilde{G}_1|} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial G_i / |G_i|}{\partial p_1 / p_1} \dots \frac{\partial G_i / |G_i|}{\partial p_i / p_i} \dots \frac{\partial G_i / |G_i|}{\partial p_{21} / p_{21}} & \frac{\partial p_i / p_i}{\partial \tilde{G}_i / |\tilde{G}_i|} & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial G_l / |G_l|}{\partial p_1 / p_1} \dots \frac{\partial G_l / |G_l|}{\partial p_i / p_i} \dots \frac{\partial G_l / |G_l|}{\partial p_{21} / p_{21}} & \frac{\partial p_l / p_l}{\partial \tilde{G}_l / |\tilde{G}_l|} & 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1 / p_1} \dots \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_i / p_i} \dots \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_{21} / p_{21}} & \frac{\partial p_{(1+1)} / p_{(1+1)}}{\partial \tilde{G}_1 / |\tilde{G}_1|} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_1 / p_1} \dots \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i / p_i} \dots \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{21} / p_{21}} & \frac{\partial p_{(i+1)} / p_{(i+1)}}{\partial \tilde{G}_i / |\tilde{G}_i|} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_l}{\partial p_1 / p_1} \dots \frac{\partial \varphi_l}{\partial p_i / p_i} \dots \frac{\partial \varphi_l}{\partial p_{21} / p_{21}} & \frac{\partial p_{21} / p_{21}}{\partial \tilde{G}_l / |\tilde{G}_l|} & 0 \end{array} =$$

Oznaczając macierz kwadratową układu (1.11) przez A , wektor pochodnych parametrów optymalnych przez P , a wektor prawych stron równań przez I można zapisać

$$(1.12) \quad AP = I$$

Jeśli układ (1.9) zróżniczuje się po $\tilde{\varphi}_i$ to po odpowiednich przekształceniach otrzymuje się równanie macierzowe (1.12) z tym, że wektory P^T i I^T są równe:

$$(1.13) \quad P^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1 / p_1}{\partial \tilde{\varphi}_1} & \dots & \frac{\partial p_l / p_l}{\partial \tilde{\varphi}_l} & \dots & \frac{\partial p_{(1+1)} / p_{(1+1)}}{\partial \tilde{\varphi}_1} & \dots & \frac{\partial p_{21} / p_{21}}{\partial \tilde{\varphi}_l} \end{bmatrix}$$

$$(1.14) \quad I^T = [0 \dots \dots 0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0]$$

Uogólniając można stwierdzić, że pochodna $\frac{\partial p_i / p_i}{\partial \varphi_j / M \varphi_j}$, dla $i=1, \dots, 2l$ i $j=1, \dots, l$ jest elementem i -tego wiersza i j -tej kolumny macierzy odwrotnej do A , natomiast pochodna $\frac{\partial p_i / p_i}{\partial \varphi_j}$ jest elementem i -tego wiersza i $(l+j)$ -tej kolumny macierzy A^{-1} .

Zależność elementów macierzy odwrotnej A^{-1} od elementów macierzy A ma złożony charakter. Na ogół elementy macierzy A^{-1} mają małe wartości bezwzględne jeśli wartości bezwzględne elementów macierzy A są duże. Np. jeśli wszystkie elementy macierzy A pomnożymy przez liczbę $\lambda > 1$ to wartości bezwzględne macierzy odwrotnej do λA zmniejszą w stosunku do elementów macierzy A^{-1} λ -krotnie. Trzeba jednakże podkreślić, że elementy macierzy A^{-1} mogą mieć bardzo duże wartości bezwzględne nawet przy dużych wartościach bezwzględnych elementów macierzy A jeśli ta ostatnia jest źle uwarunkowana, tzn. jeśli wiersze kolumny macierzy są w przybliżeniu liniowo zależne. Te właściwości macierzy odwrotnej trzeba uwzględnić przygotowując eksperyment identyfikacji.

W wielu przypadkach, jeszcze przed rozpoczęciem identyfikacji, znane są przybliżone wartości parametrów. Dla tych przybliżonych wartości parametrów można zbadać przebiegi funkcji wrażliwości modułu i fazy mierzalnych transmitancji obiektu i na tej podstawie ocenić, które transmitancje i jakie zakresy częstotliwości należy uwzględnić w kryterium identyfikacji. W rozdziale 3 na przykładzie identyfikacji układu biomechanicznego dłoń-ramię sprawdzono przydatność analizy wrażliwości dla przybliżonych wartości parametrów w przygotowaniu eksperymentu identyfikacji.

Jeśli określenie przybliżonych wartości parametrów jest trudne, można przeprowadzić identyfikację wstępną na podstawie arbitralnie przyjętych charakterystyk i w oparciu o wyznaczone wartości parametrów przygotować eksperyment drugiego etapu identyfikacji.

Błędy (1.5) i (1.6) dla ustalonej wartości j i różnych wartości i mogą się dodawać lub wzajemnie kompensować. Jeśli błędy pomiaru modułu $\Delta|\tilde{G}_i|$ i fazy $\Delta\tilde{\varphi}_i$ mają charakter przypadkowy można dla uzyskania wzajemnej kompensacji błędów (1.5) i (1.6), stosować statystyczne metody identyfikacji.

W takim przypadku całkowity błąd identyfikacji parametru $\Delta p_j/p_j$ maleje przy wzroście liczby pomiarów $|\tilde{G}_i|$ i $\tilde{\varphi}_i$ oraz liczby składników kryterium identyfikacji S .

Natomiast jeśli przy pomiarze charakterystyk popełnia się błędy systematyczne zwiększanie liczby pomiarów i składników sumy S nie ma wpływu na dokładność identyfikacji. Przy formułowaniu kryterium identyfikacji trzeba zatem kierować się tymi samymi przesłankami co w identyfikacji deterministycznej tzn. dobrać takie transmitancje G_i aby pochodne $\frac{\partial G_i/|G_i|}{\partial p_j/p_j}$ (podobnie $\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j/p_j}$) dla różnych wartości i były liniowo niezależne oraz aby miały możliwie duże wartości bezwzględne.

W teorii wrażliwości układów wyróżnia się trzy rodzaje funkcji wrażliwości transmitancji: względną, semiwzględną i bezwzględną.

Klasyczną funkcją wrażliwości transmitancji $G = G(s, \bar{p})$ na parametr p_j ($j = 1, \dots, r$) lub funkcją wrażliwości w sensie Bode'ego jest nazywana względną (logarytmiczna) pochodna cząstkowa transmitancji:

$$(1.15) \quad \bar{\xi}_{p_j}^G = \frac{\partial \ln G}{\partial \ln p_j} \Big|_{\bar{p}_0} = \frac{\partial G/G}{\partial p_j/p_j} \Big|_{\bar{p}_0} = \frac{\partial G}{\partial p_j} \Big|_{\bar{p}_0} \frac{p_{j0}}{G_0} \quad (j=1, \dots, r)$$

gdzie:

\bar{p}_0 - wektor nominalnych wartości parametrów p_{j0} ($j=1, \dots, r$),

G_0 - transmitancja układu dla nominalnych wartości parametrów.

Semiwzględną funkcją wrażliwości transmitancji jest pochodna cząstkowa:

$$(1.16) \quad \bar{\xi}_{p_j}^G = \frac{\partial G}{\partial \ln p_j} \Big|_{\bar{p}_0} = \frac{\partial G}{\partial p_j/p_j} \Big|_{\bar{p}_0} = \frac{\partial G}{\partial p_j} \Big|_{\bar{p}_0} p_{j0} \quad (j=1, \dots, r)$$

a bezwzględną - pochodna cząstkowa:

$$(1.17) \quad S_{P_j}^G = \frac{\partial G}{\partial P_j} \Big|_{P_0} \quad (j=1, \dots, r)$$

Funkcje wrażliwości (1.15), (1.16), (1.17) są wielkościami zespolonymi.

Można wykazać [6], że część rzeczywista wrażliwości względnej

$$(1.18) \quad \operatorname{Re}(\bar{S}_{P_j}^G) = \frac{\partial \ln|G|}{\partial \ln P_j} \Big|_{P_0} = \frac{\partial |G|/|G|}{\partial P_j/P_j} \Big|_{P_0} = \frac{\partial |G|}{\partial P_j} \Big|_{P_0} \frac{P_j}{|G_0|}$$

a część urojona wrażliwości względnej

$$(1.19) \quad \operatorname{Im}(\bar{S}_{P_j}^G) = \frac{\partial \varphi}{\partial \ln P_j} \Big|_{P_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial P_j/P_j} \Big|_{P_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial P_j} \Big|_{P_0} P_j$$

gdzie:

φ - faza transmitancji,
 $|G|$ - moduł transmitancji.

Funkcję wrażliwości względnej można zatem łatwo zinterpretować; jej część rzeczywista jest miarą względnych zmian modułu transmitancji wywołanych względną zmianą parametrów, a część urojona - miarą bezwzględnych zmian fazy transmitancji przy względnej zmianie parametru.

Dla układów wyższych rzędów wyznaczenie analitycznej postaci transmitancji $G(s, \vec{p})$ oraz analitycznej postaci pochodnej transmitancji $\frac{\partial G(s, \vec{p})}{\partial p_j}$ jest często bardzo trudne lub praktycznie niemożliwe. Wartości funkcji wrażliwości transmitancji na parametry fizyczne można natomiast łatwo obliczyć jeśli obiekt jest opisany za pomocą układu liniowych równań różniczkowych.

Układ mechaniczny n dyskretnych mas połączonych liniowymi

elementami sprężystymi i tłumiącymi można opisać za pomocą układu n równań różniczkowych drugiego rzędu, które w notacji macierzowej mają postać:

$$(1.20) \quad M\ddot{\bar{x}} + C\dot{\bar{x}} + K\bar{x} = \bar{w}(t)$$

gdzie:

- \bar{x} - wektor przemieszczeń x_i ($i=1, \dots, n$) mas dyskretnych,
- M - diagonalna macierz bezwładności o wymiarze $n \times n$,
- C - symetryczna macierz tłumienia o wymiarze $n \times n$,
- K - symetryczna macierz sztywności o wymiarze $n \times n$,
- \bar{w} - wektor wymuszeń o wymiarze $n \times 1$.

Jeśli na i -tą masę układu działa siła $f(t)$, wektor wymuszeń ma postać:

$$(1.21) \quad \bar{w}(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_i(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przy wymuszeniu kinematycznym $x_0(t)$ wektor

$$(1.22) \quad \bar{w}(t) = \bar{K}_0 x_0(t) + \bar{C}_0 \dot{x}_0(t)$$

gdzie:

- \bar{K}_0 (lub \bar{C}_0) - wektor o wymiarze $n \times 1$; niektóre elementy wektora zależą od sztywności (lub tłumienia) pewnych elementów układu, pozostałe są równe zero.

Jeśli na obiekt opisany układem równań (1.20) działa jednostkowy impuls siły $f(t)$ lub przemieszczenia $x_0(t)$, to transformata Laplace'a wyjścia X_i dla zerowych warunków początkowych jest zgodnie z definicją transmitancji, odpowiednią transmitancją X_i obiektu. Aby wyznaczyć wektor transmitancji \bar{X} trzeba wykonać, przy założonym przebiegu siły $f(t)$ lub prze-

mieszczania $x_0(t)$ i założonych warunkach początkowych, przekształcenie Laplace'a układu (1.20). W wyniku przekształcenia otrzymujemy układ równań algebraicznych o postaci:

$$(1.23) \quad (Ms^2 + Cs + K)\bar{X} = \bar{W}$$

przy czym dla wymuszenia jednostkową siłą przyłożoną do 1-tej masy

$$(1.24) \quad \bar{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_i \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

a dla wymuszenia kinematycznego

$$(1.25) \quad \bar{W} = \bar{K}_0 + \bar{C}_0 s$$

Wartości pochodnych cząstkowych $\frac{\partial X_i}{\partial p_j}$ dla pewnego wektora parametrów nominalnych \bar{p}_0 można wyznaczyć różniczkując po p_j układ (1.23):

$$(1.26) \quad \left(\frac{\partial M}{\partial p_j} s^2 + \frac{\partial C}{\partial p_j} s + \frac{\partial K}{\partial p_j} \right) \bar{X} + (Ms^2 + Cs + K) \frac{\partial \bar{X}}{\partial p_j} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial p_j}$$

zatem

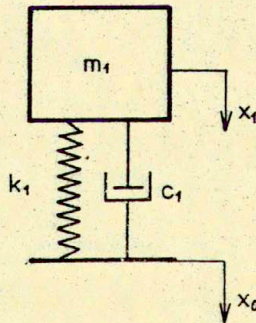
$$(1.27) \quad (Ms^2 + Cs + K) \frac{\partial \bar{X}}{\partial p_j} = - \left(\frac{\partial M}{\partial p_j} s^2 + \frac{\partial C}{\partial p_j} s + \frac{\partial K}{\partial p_j} \right) \bar{X} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial p_j}$$

Pochodne $\frac{\partial \bar{X}}{\partial p_j} \Big|_{\bar{p}_0}$ oblicza się rozwiązując układ równań algebraicznych (1.27).

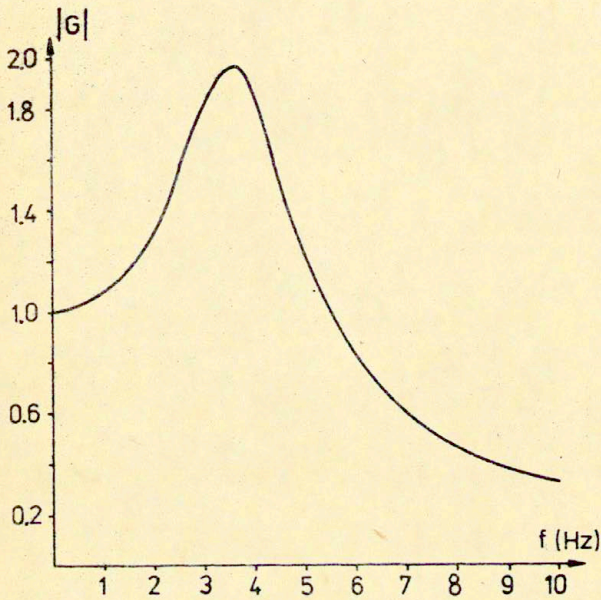
Opisaną metodę obliczania wartości pochodnych cząstkowych transmitancji wykorzystano przy analizie wrażliwości transmitancji układu biomechanicznego. dłoń-ramię.

Model układu dłoń-ramię składa się z trzech dyskretnych mas połączonych szeregowo elementami sprężystymi i tłumiącymi. Zamieszczone w rozdziale 3 wykresy funkcji wrażliwości względnej modułu transmitancji mają złożony, trudny do przewidzenia przebieg, ponieważ drgania poszczególnych mas są silnie wzajemnie sprzężone.

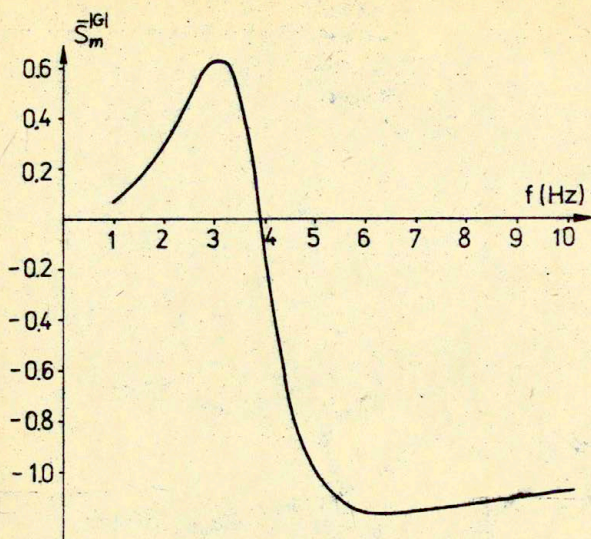
Natomiast przebiegi funkcji wrażliwości transmitancji prostych układów można łatwo uzasadnić i fizycznie zinterpretować. Jako przykład zamieszczono na rys. 1.4, 1.5, 1.6 wykresy funkcji wrażliwości względnej modułu transmitancji X_1/X_0 układu z rys. 1.2 względem parametrów; masy $m = 1$ kg, tłumienia $c = 15$ Nsm⁻¹ i sztywności $k = 600$ Nm⁻¹. Z wykresów wynika, że przebieg charakterystyk częstotliwościowych najsilniej zależy od wartości parametrów w pobliżu rezonansu. Jest to znana właściwość układów dynamicznych, którą teoria wrażliwości układów liniowych uzasadnia w sposób ścisły [6].



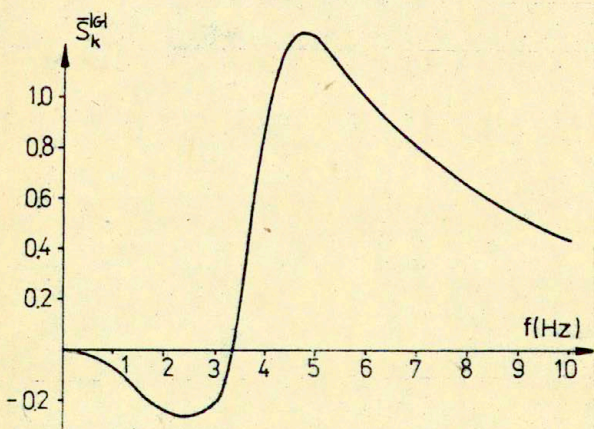
Rys. 1.2. Model układu jednomasowego.



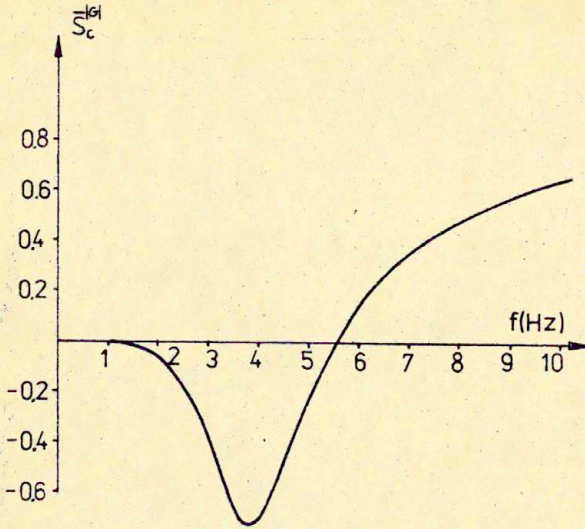
Rys. 1.3. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa $|G(j\omega)|$
(moduł transmitencji $G=X_1/X_0$) układu z rys.1.2.



Rys.1.4. Funkcja wrażliwości względnej $\bar{S}_m^{|G|}$ modułu transmisji $G=X_1/X_0$ na parametr m układu z rys. 1.2.



Rys.1.5. Funkcja wrażliwości względnej $\bar{S}_k^{|G|}$ modułu transmisji $G=X_1/X_0$ na parametr k układu z rys. 1.2.



Rys.1.6. Funkcja wrażliwości względnej $|S_c|$ modułu transmisji $G=X_1/X_0$ na parametr c układu z rys. 1.2.

2. Modelowanie układu biomechanicznego dłoń-ramię, przegląd literatury.

Badania właściwości dynamicznych układu dłoń-ramię zaczęto prowadzić w latach 60-tych. Bezpośrednią przyczyną podjęcia prac badawczych w tym zakresie był wzrost zarejestrowanych przypadków t.zw. choroby "białych palców" wśród robotników posługujących się przez okres kilku lat silnie drgającymi narzędziami ręcznymi takimi jak świdry górnicze, pily łańcuchowe [4]. Powstała konieczność doskonalenia narzędzi w celu zmniejszenia poziomu drgań rękojeści i uczynienia przez to pracy bezpieczną.

Przedmiot obróbki, narzędzie i operator tworzą w czasie pracy złożony biomechaniczny układ drgający o strukturze szeregowej. Analiza drgań tego układu, a w szczególności drgań rękojeści narzędzia wymaga uwzględnienia właściwości wszystkich

wymienionych elementów, w tym dynamicznej reakcji ręki na wymuszenia zewnętrzne. Źródłem wymuszenia zewnętrznego dla układu dłoń-ramię jest drgająca rękojeść narzędzia, oddziaływanie rękojeści na rękę można w ogólnym przypadku przedstawić za pomocą zmiennego w czasie wektora siły i wektora momentu [2].

Badania dynamicznej reakcji ręki na zewnętrzne wymuszenie mają podstawowe znaczenie dla projektowania, umożliwiają teoretyczną analizę drgań narzędzia i optymalizowanie konstrukcji narzędzia z punktu widzenia poziomu drgań rękojeści.

Badania takie były prowadzone przez różnych autorów, przy czym opublikowane dotychczas wyniki badań ograniczają się do prostych przypadków drgań rękojeści w jednym wybranym kierunku. Przyjmuje się, że przy małych przemieszczeniach rękojeści drganie układu dłoń-ramię w trzech ortogonalnych kierunkach są wzajemnie niesprzężone [2], można zatem bez popełnienia błędu badać ruch w każdym kierunku osobno.

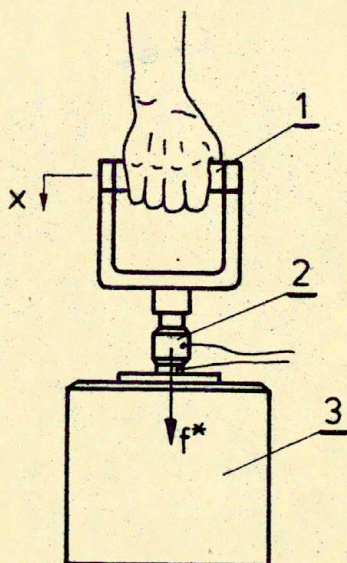
Zasada pomiaru dynamicznej reakcji układu dłoń-ramię jest we wszystkich opisanych przypadkach jednakowa, chociaż technika pomiarów i sposób przedstawienia wyników różnią się między sobą. Schemat stanowiska pomiarowego podano na rys.2.1. Do wzbudnika drgań 3, elektromagnetycznego lub mechanicznego, przymocowana jest rękojeść 1; jej drgania symulują drgania rękojeści narzędzia. W czasie pomiarów osoba badana zaciska dłoń na rękojeści. Mierzone są równocześnie: siła działająca na rękojeść f^* oraz przemieszczenie x , prędkość \dot{x} lub przyspieszenie \ddot{x} rękojeści. Pomiar wykonuje się na ogół przy drganiach harmonicznym rękojeści w szerokim zakresie częstotliwości. W większości przypadków siła f^* i przyspieszenie \ddot{x} mierzone są za pomocą piezoelektrycznej głowicy impedancyjnej 2 umieszczonej między rdzeniem wzbudnika a rękojeścią.

Między siłą mierzoną f^* a siłą f działającą bezpośrednio na dłoń osoby badanej zachodzi zależność:

$$(2.1) \quad f = f^* - m_T \ddot{x}$$

gdzie:

m_T - masa rękojeści.



Rys. 2.1. Schemat stanowiska do badania układu dłoń-ramię

Aby umożliwić bezpośredni pomiar i rejestrację przebiegów czasowych siły f stosuje się proste układy elektroniczne kompensujące masę rękocyści, które elektryczne sygnały pomiarowe siły f^* i przyspieszenia \ddot{x} przetwarzają zgodnie z równaniem (2.1.) . Szczegółowy opis konstrukcji jednego z możliwych wariantów układu kompensacji wraz z analizą dokładności kompensacji można znaleźć w publikacji [5] .

Pomiary odpowiedzi dynamicznej układu dłoń-ramię na drgania rękocyści powinny obejmować cały zakres częstotliwości, w

którym składowe częstotliwościowego widma drgań narzędzi mają znaczące amplitudy.

Autorzy publikacji [1,2,3,5] badali układ dłoń-ramię przy częstotliwości drgań od kilku [1,3] lub kilkudziesięciu [2,5] Hz do kilkuset [1,2,5] a nawet tysiąca [3] Hz.

Badania Albrams'a [2], Reynolds'a [2] i Zaveri'ego [5] wskazują, że w całym badanym zakresie częstotliwości oraz w dużym zakresie zmienności amplitudy siły f i przyspieszenia \ddot{x} układ dłoń-ramię można uważać za liniowy.

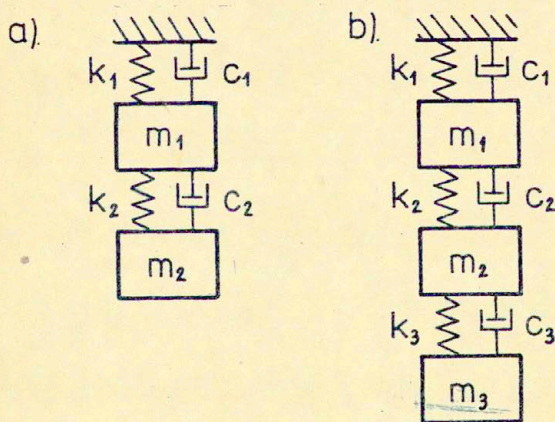
Reynolds wykazał, że charakterystyki częstotliwościowe amplitudy przemieszczenia x przy wymuszeniu siłą harmoniczną o wartościach amplitudy 1 - 3 lb_f nie różnią się w sposób istotny między sobą. Podobne rezultaty uzyskali Abrams i Zaveri badając charakterystyki częstotliwościowe siły f przy różnych wartościach amplitudy przyspieszenia rękojeści; Zaveri dla amplitudy przyspieszenia 1g i 10g, a Abrams - dla 4,7 g i 9,4g.

Autorzy wymienionych publikacji opisują odpowiedź dynamiczną układu dłoń-ramię na drgania rękojeści za pomocą amplitudowych lub amplitudowych i fazowych charakterystyk częstotliwościowych impedancji, masy dynamicznej lub ruchliwości dynamicznej, przy czym impedancją układu jest w omawianym przypadku transmitancja siły f do prędkości \dot{x} , masą dynamiczną - transmitancja siły f do przyspieszenia \ddot{x} , a ruchliwością dynamiczną - transmitancja przemieszczenia x do siły f . W przypadku układów liniowych między charakterystykami częstotliwościowymi impedancji, masy dynamicznej i ruchliwości dynamicznej zachodzą stałe liczbowe zależności; możliwe jest zatem porównanie wyników pomiarów uzyskanych przez poszczególnych autorów.

Porównując charakterystyki zamieszczone w publikacjach [1,2,3,5] można ogólnie stwierdzić, że zasadniczo charakter zależności amplitudy czy fazy transmitancji układu od częstotliwości jest we wszystkich omawianych przypadkach podobny ale istnieją duże różnice co do wartości między porównywanymi charakterystykami w wybranych pasmach częstotliwości. Różnice te tłumaczy się głównie niejednakowym we wszystkich przypadkach sposobem trzymania rękojeści. Stwierdzono bowiem, że sposób trzymania rękojeści (np. całą dłonią, palcami), siła zacisku

i nacisku na rękojęść mają bardzo duży wpływ na przebieg charakterystyk częstotliwościowych, szczególnie dla częstotliwości powyżej 100 Hz [2]. Ponadto badania wykazały, że przebieg charakterystyk zależy od kierunku drgań rękojęści 3, natomiast w niewielkim stopniu, albo wcale, od postawy przyjętej w czasie pomiaru przez osobę, badaną, od masy osoby badanej i napięcia mięśni ramienia.

Opis układu dłoń-ramię za pomocą charakterystyk częstotliwościowych impedancji, masy dynamicznej czy ruchliwości dynamicznej przedstawia jedynie zewnętrzną reakcję układu na drgania rękojęści, nie daje natomiast wglądu w wewnętrzną strukturę układu oraz mechanizm rozchodzenia i tłumienia drgań w biologicznych tkankach dłoni i ramienia. Aby umożliwić fizyczną interpretację przebiegu charakterystyk częstotliwościowych podjęto próby budowy, na podstawie tych charakterystyk, modeli strukturalnych układu dłoń-ramię. Układ ten modeluje się za pomocą dwóch [2] lub trzech [1,3] dyskretnych mas połączonych szeregowo liniowymi elementami sprężystymi i tłumiącymi (rys. 2.2).



Rys. 2.2. Modele układu dłoń-ramię: a/dwu-masowy, b/trzy-masowy.

Dłoń i ramię człowieka stanowią w rzeczywistości bardzo złożoną strukturę o ciągłym rozkładzie parametrów. Modelując układ wprowadza się dyskretyzację parametrów ze względu na występowanie w zmierzonych charakterystykach częstotliwościowych układu dwóch lub trzech słabo zarysowanych "garbów", typowych dla układów o strukturze jak na rys. 2.2 i o silnym tłumieniu.

Wartości parametrów modelu, tzn. mas, sztywności i tłumienia ustala się w drodze identyfikacji parametrów, na podstawie zmierzonych charakterystyk częstotliwościowych.

Ponieważ modele o strukturze w/g rys. 2.2a lub 2.2b są bardzo dużym uproszczeniem układu rzeczywistego, trudno jest przyporządkować dyskretnym elementom modelu masy konkretnych partii dłoni czy ramienia oraz właściwości lepkosprężyste określonych tkanek lub ich połączeń. Próby takie jednak były czynione, np. Reynolds i Soedel [2] zbudowali model z dwiema masami (rys. 2.2a) przy czym masę m_1 modelu utożsamiali z rzeczywistą masą drgającą dłoni, a masę m_2 - z masą drgającą ramienia. W późniejszej publikacji [3] Reynolds i Keith przedstawili nowy model układu dłoń-ramię z trzema masami dyskretnymi (rys. 2.2b) i podali odmienną interpretację wyznaczonych w drodze identyfikacji wartości parametrów. W tym przypadku m_1 oznacza masę drgającą skóry i naskórka, m_2 - masę drgającą tkanki podskórnej, m_3 - masę drgającą tkanki mięśniowej. Przyjmując taką interpretację Reynolds i Keith, na podstawie analizy drgań modelu, wyprowadzili szereg wniosków o mechanizmie rozchodzenia się i tłumienia drgań w ręce człowieka.

Charakterystyczna dla modeli strukturalnych z dwoma lub trzema szeregowo połączonymi masami jest właściwość polegająca na tym, że ze wzrostem częstotliwości wymuszenia amplituda drgań mas m_2 i m_3 , oddalonych od miejsca wymuszenia, zmniejszają się szybciej od amplitudy drgań masy m_1 . Ta właściwość modelu jest zgodna z zaobserwowanym w czasie pomiarów zjawiskiem zmniejszenia się ze wzrostem częstotliwości obszaru ręki, w którym zlokalizowane są drgania. Np. Reynolds i Keith stwierdzili, że przy częstotliwościach drgań powyżej 100 - 200 Hz cała energia drgań lokalizuje się w obszarze palców i dłoni, a

przy częstotliwościach wyższych od 150 - 200 Hz obszar drgań zmniejsza się do tkanki przylegającej bezpośrednio do rękocyści.

3. Analiza wrażliwości układu dłoń-ramię

Identyfikacja obiektów biomechanicznych jest trudna ze względu na ich małą dostępność. Przez dostępność obiektu rozumie się możliwość wprowadzenia do układu wymuszeń i pomiaru odpowiedzi dynamicznej na wymuszenie.

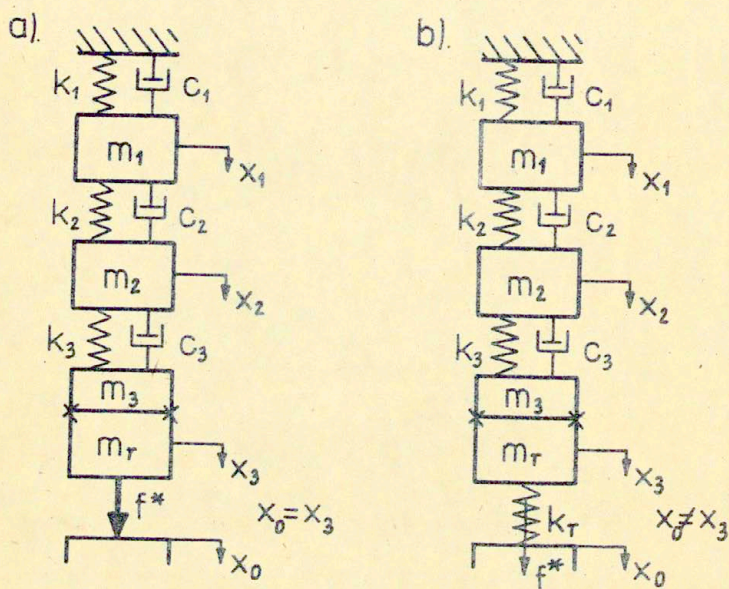
W przypadku układu dłoni i ramienia nie ma praktycznie możliwości pewnego zamocowania czujników drgań na dłoni czy wzdłuż ramienia. Dlatego identyfikację parametrów modelu układu przeprowadza się na podstawie pomiarów drgań, trzymanej przez osobę badaną, rękocyści oraz siły f^* działającej na rękocyść od strony wzbudnika drgań (rys. 2.1) [1,2,3,5] .

Jeśli przyjęć za [1,3] trzmasowy, dyskretny model układu dłoń-ramię to model fizyczny tego układu wraz z układem pomiarowym (rękocyścią) będzie miał postać jak na rys. 3.1a.

W badaniach prowadzonych przez autorów publikacji [1,2,3,5] połączenie rękocyści z rdzeniem wzbudnika było bardzo sztywne, a siłę f^* mierzono za pomocą czułych piezoelektrycznych czujników.

W stanowisku przeznaczonym do badań właściwości dynamicznych ręki wykonanym w Zakładzie Układów Mechanicznych IPPT PAN pomiar siły f^* jest realizowany za pomocą czujników tensometrycznych, przy czym, ze względu na konieczność zapewnienia dostatecznej czułości pomiaru siły, połączenie rękocyści z rdzeniem wzbudnika jest mniej sztywne niż w stanowiskach opisanych w [1,2,3,5] . Model fizyczny ręki oraz mechanicznej części układu pomiarowego przedstawiono na rys. 3.1b.

Parametry m_r i k_r zidentyfikowano na podstawie drgań rękocyści nie obciążonej ręką. Porównując charakterystyki teoretyczne ze zmierzonymi stwierdzono, że układ masy m_r i sztywności k_r dobrze opisuje dynamikę rękocyści połączonej sprężystości z rdzeniem wzbudnika; tłumienie w układzie jest pomijalnie małe.



Rys. 3.1. Modele fizyczne układu dłoń-ramię i układu pomiarowego:

a/pierwszy wariant pomiaru, b/drugi wariant pomiaru

Aby ustalić, którą z dających się zmierzyć transmitancji układu z rys. 3.1b należy przyjąć za podstawę identyfikacji, aby błąd identyfikacji parametrów był najmniejszy, przeprowadzono analizę wrażliwości na parametry następujących transmitancji:

$$(3.1) \quad G_1 = \frac{X_3}{F^*}$$

$$(3.2) \quad G_2 = \frac{X_3}{X_0}$$

$$(3.3) \quad G_3 = \frac{F^*}{X_0}$$

gdzie:

X_0 - transformata Laplacea przemieszczenia $x_0(t)$,

X_3 - transformata Laplacea przemieszczenia $x_3(t)$,

F^* - transformata Laplacea siły $f^*(t)$.

Ruch układu dłoń-ramię-rękojeść przy wymuszeniu siłą $f^*(t)$ opisuje układ 3-ech równań różniczkowych:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 &= 0 \\ -c_2 \dot{x}_1 - k_2 x_1 + m_2 \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 + (k_2 + k_3) x_2 - c_3 \dot{x}_3 - k_3 x_3 &= 0 \\ -c_3 \dot{x}_2 - k_3 x_2 + (m_3 + m_r) \ddot{x}_3 + c_3 \dot{x}_3 + k_3 x_3 &= f^*(t) \end{aligned}$$

Jeśli siła $f^*(t)$ jest jednostkowym impulsem Diraca to po wykonaniu przekształcenia Laplace'a równań (3.4) otrzymujemy układ równań algebraicznych o postaci:

$$(3.5) \quad \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 / F^* \\ X_2 / F^* \\ X_3 / F^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Układ (3.5) można zapisać zgodnie z oznaczeniami przyjętymi w rozdziale 1 w postaci:

$$(3.6) \quad (Ms^2 + (c_s + K)\bar{X} = \bar{W}$$

Rozwiązując układ (3.6) można wyznaczyć wartości transmitancji X_1/F^* , X_2/F^* , X_3/F^* dla dowolnego $s = j\omega$.

Analogicznie, jeśli na układ dłoń-ramię-rękojeść-sprężyste połączenie k_r działa wymuszenie kinematyczne $x_0(t)$ to wartości transmitancji $G_2 = X_3/X_0$ oblicza się rozwiązując układ (3.6), ale w tym przypadku wektor transmitancji:

$$(3.7) \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} X_1/X_0 \\ X_2/X_0 \\ X_3/X_0 \end{bmatrix}$$

a wektor wymuszeń

$$(3.8) \quad \bar{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_r \end{bmatrix}$$

Znając transmitancję $G_2 = X_3/X_0$ można wyznaczyć $G_3 = F^*/X_0$ korzystając z zależności:

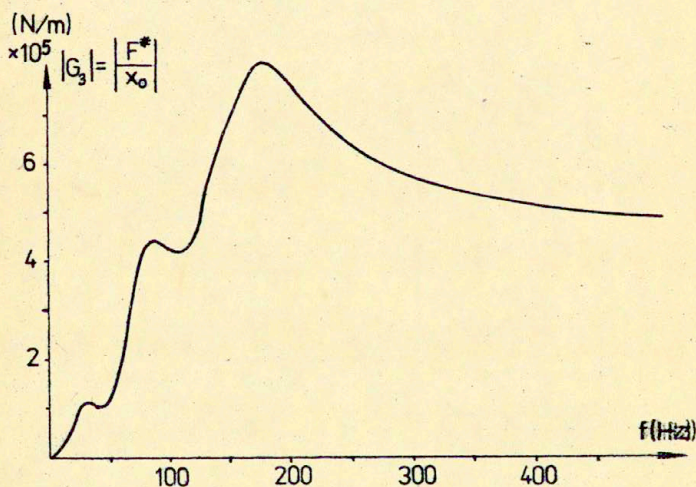
$$(3.9) \quad F^* = k_r (X_0 - X_3)$$

Wartości funkcji wrażliwości transmitancji G_1, G_2, G_3 obliczono dla częstotliwości $f = 2\pi\omega$ z przedziału od 0 do 500 Hz. Obliczenia wykonano na EMC wykorzystując uniwersalny program w języku FORTRAN, który liczy wartości funkcji wrażliwości wektora transmitancji \bar{X} dowolnego układu opisanego równaniem macierzowym (3.6). Metodę obliczeń funkcji wrażliwości opisano w rozdziale 1.

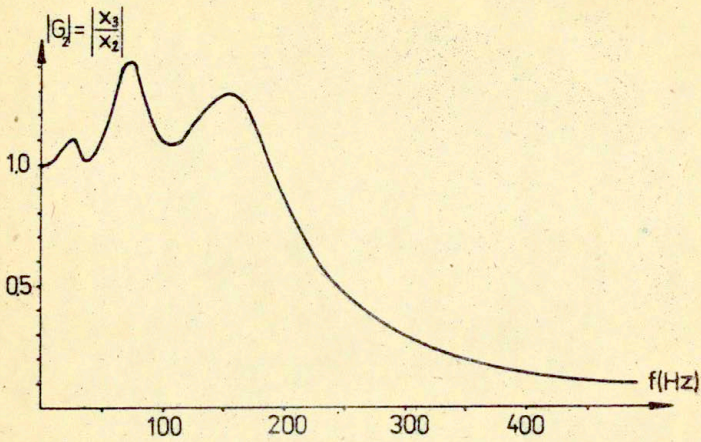
Na rys. 3.2, 3.3. i 3.4 przedstawiono wykresy modułu transmitancji: $G_1 = X_3/F^*$, $G_2 = X_3/X_0$, $G_3 = F^*/X_0$

/charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe/ natomiast na rys. 3.5 do 3.13 zamieszczono wykresy części rzeczywistych funkcji wrażliwości względnej transmitancji G_1, G_2, G_3 na parametry $m_1, m_2, m_3, c_1, c_2, c_3, k_1, k_2, k_3$, które zgodnie z (1.18), są równoważne funkcjom wrażliwości względnej modułów odpowiednich transmitancji na parametry.

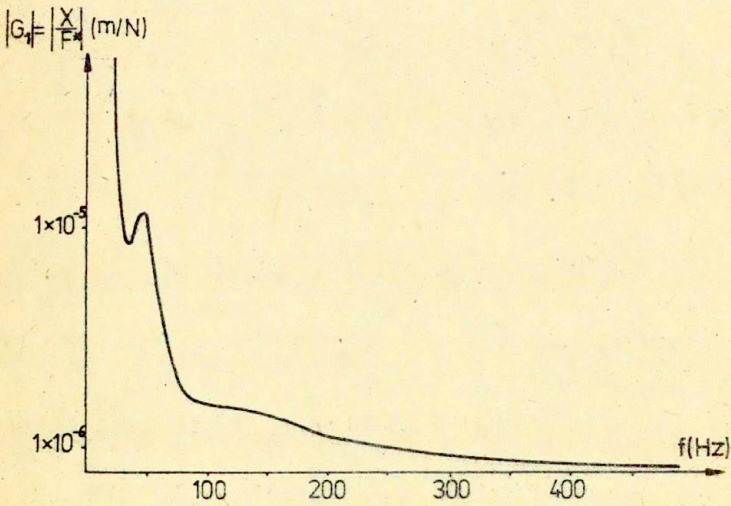
Ze względu na duży błąd pomiaru fazy transmitancji, zalecmano przeprowadzić identyfikację parametrów wyłącznie na podstawie amplitudowych charakterystyk częstotliwościowych; wartości wrażliwości względnej modułu mają w tym przypadku decydujące znaczenie dla dokładności identyfikacji.



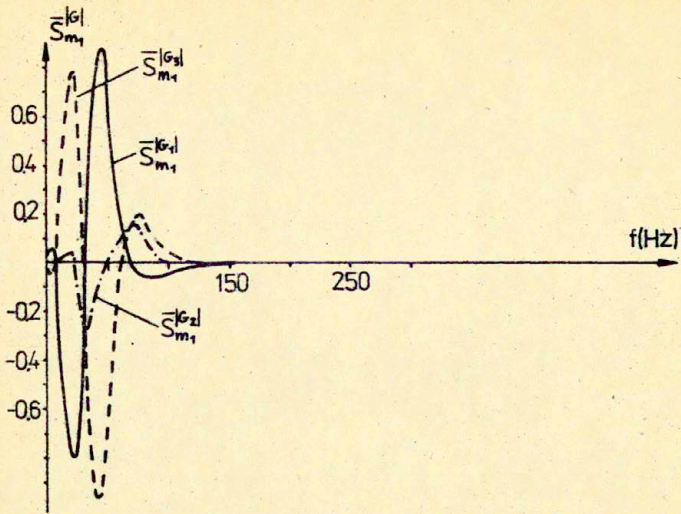
Rys. 3.2. Wykres modułu transmitancji $G_3 = X_3/F^*$



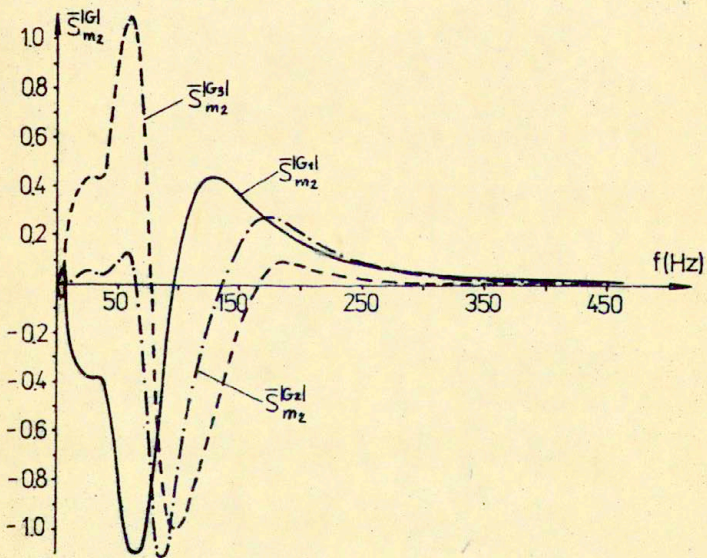
Rys. 3.3. Wykres modułu transmitancji $G_2 = X_3/X_0$



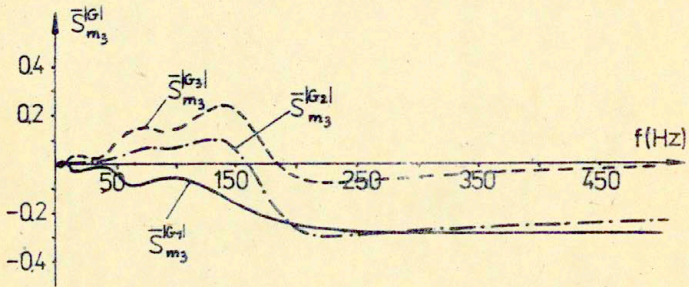
Rys. 3.4. Wykres modułu transmitancji $G_3 = F^*/X_0$



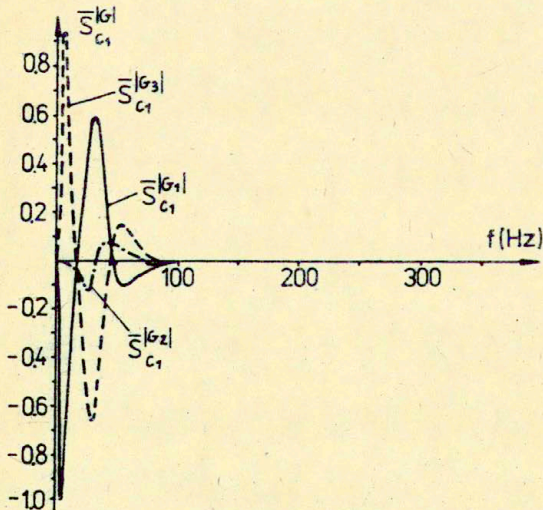
Rys. 3.5. Wykresy funkcji wrażliwości względnej modułów transmitancji G_1, G_2, G_3 na parametr m_1



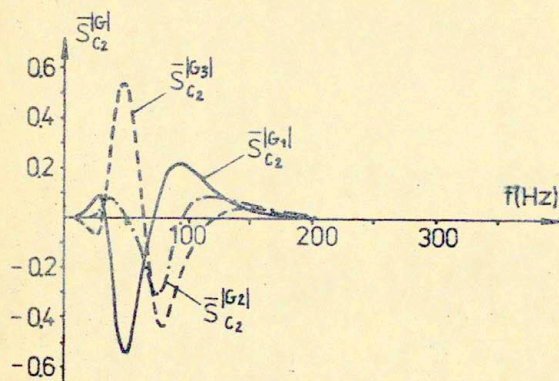
Rys. 3.6. Wykresy funkcji wrażliwości względnej modułów transmitancji G_1, G_2, G_3 na parametr m_2



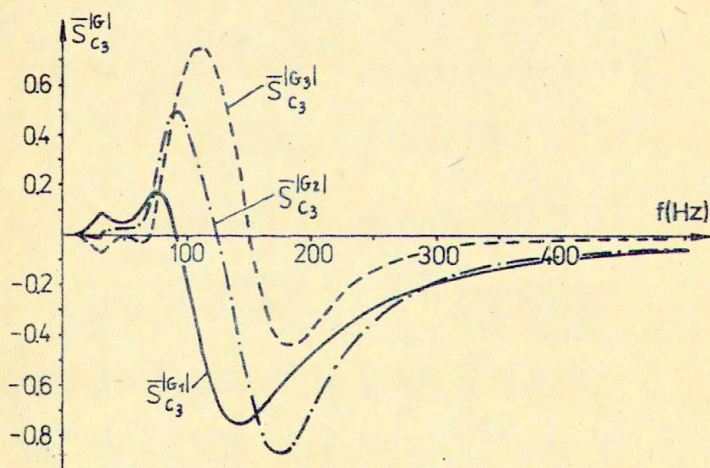
Rys. 3.7. Wykresy funkcji wrażliwości względnej modułów transmitancji G_1, G_2, G_3 na parametr m_3



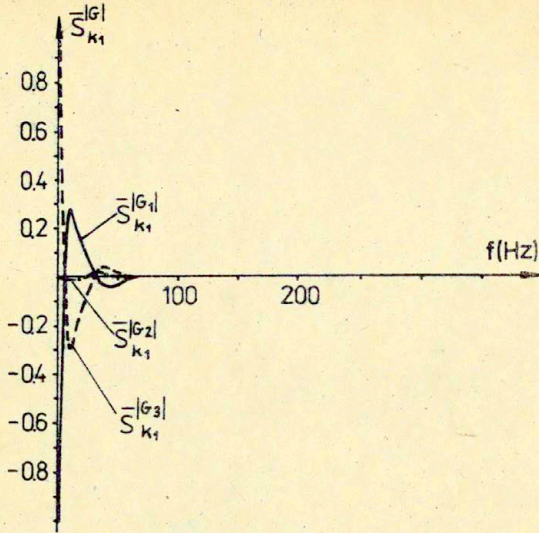
Rys. 3.8. Wykresy funkcji wrażliwości względnej modułów transmitancji G_1, G_2, G_3 na parametr c_1



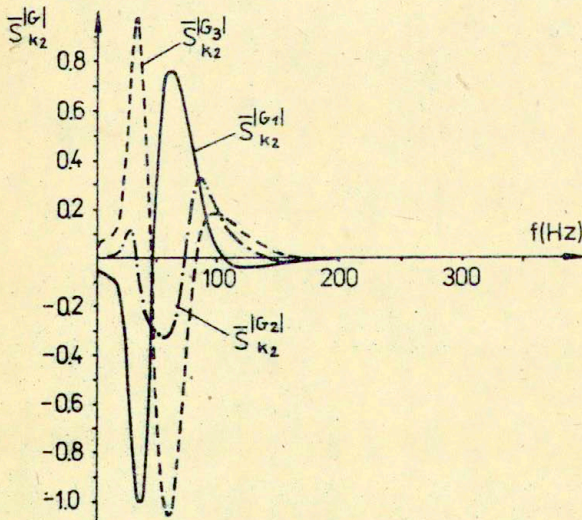
Rys. 3.9. Wykresy funkcji wrażliwości względnej modułów transmitancji G_1, G_2, G_3 na parametr c_2



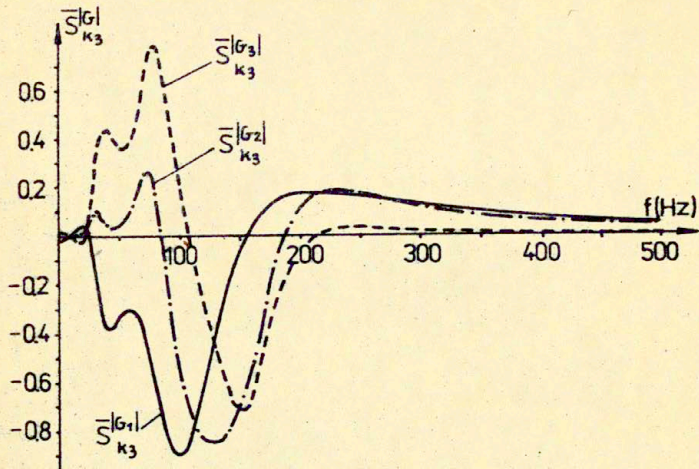
Rys. 3.10. Wykresy funkcji wrażliwości względnej modułów transmitancji G_1, G_2, G_3 na parametr c_3



Rys. 3.11. Wykresy funkcji wrażliwości względnej modułów transmitancji G_1, G_2, G_3 na parametr k_1



Rys. 3.12. Wykresy funkcji wrażliwości względnej modułów transmitancji G_1, G_2, G_3 na parametr k_2



Rys. 3.13. Wykresy funkcji wrażliwości względnej modułów transmitancji G_1, G_2, G_3 na parametr k_3 .

Obliczenia wykonano dla wartości parametrów:

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad & m_1 = 1.4 \text{ kg} & m_2 = 1.0 \text{ kg} & m_3 = 0.13 \text{ kg} \\
 & c_1 = 1.45 \cdot 10^2 \text{ Ns/m} & c_2 = 1.0 \cdot 10^2 \text{ Ns/m} & c_3 = 2.45 \cdot 10^2 \text{ Ns/m} \\
 & k_1 = 4.1 \cdot 10^3 \text{ N/m} & k_2 = 7.2 \cdot 10^4 \text{ N/m} & k_3 = 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/m}
 \end{aligned}$$

Wartości (3.10) zaczerpnięto z publikacji Meltzera [1], który wyznaczył parametry $m_1, m_2, m_3, c_1, c_2, c_3, k_1, k_2, k_3$ w drodze identyfikacji na podstawie pomiarów charakterystyki amplitudowej masy dynamicznej układu dłoń-ramię.

Analiza przebiegów charakterystyk częstotliwościowych modułów transmitancji i funkcji wrażliwości pozwala na sformułowanie następujących wniosków i spostrzeżeń:

1. Wszystkie wyznaczone funkcje wrażliwości modułów transmitancji na parametry mają największe bezwzględne wartości w zakresie częstotliwości do 200 Hz. Powyżej tej częstotliwości wrażliwość charakterystyk na parametry jest mała. Wyjątek stanowi wrażliwość charakterystyki $|G_1(j\omega)|$ na parametr m_3 , która powyżej 200 Hz rośnie jeszcze nieznacznie ze wzrostem częstotliwości, asymptotycznie do wartości $m_3/(m_3+m_r)$. Można zatem wnioskować, że do celu identyfikacji pomiary charakterystyk w zakresie do 200 Hz są wystarczające.
2. Funkcje wrażliwości mają największe bezwzględne wartości w pobliżu częstotliwości rezonansowych układu.
3. Porównując wrażliwość charakterystyk amplitudowych transmitancji G_1, G_2, G_3 można stwierdzić, że bezwzględne wrażliwości modułów $|G_1(j\omega)|, |G_3(j\omega)|$ są w przybliżeniu jednakowe w całym zakresie częstotliwości 0-200 Hz i na ogół znacznie większe od wrażliwości modułu $|G_2(j\omega)|$. Charakterystyka $|G_2(j\omega)|$ jest wrażliwa w znaczącym stopniu tylko na niektóre parametry, np. jej wrażliwość na parametr k_1 jest mniejsza od 0,03 w całym zakresie częstotliwości.
Jako źródło informacji z eksperymentu dla celów identyfikacji parametrów przyjęto charakterystykę $|G_3(j\omega)|$. Z dwu charakterystyk $|G_1(j\omega)|$ i $|G_3(j\omega)|$ wybrano $|G_3(j\omega)|$ ze względu na większą łatwość i dokładność jej pomiaru w konkretnym, omówionym wcześniej stanowisku.
4. Charakterystyka $|G_3(j\omega)|$ jest wrażliwa na parametry k_1, c_1 , w stopniu zapewniającym dobrą dokładność identyfikacji tylko w zakresie od 0 do 20 Hz, wrażliwość charakterystyki na k_1 jest największa gdy $\omega \rightarrow 0$. Niezbędne jest zatem przeprowadzenie pomiarów dla niskich częstotliwości drgań i w związku z tym należy liczyć się z koniecznością zastosowania mechanicznych wzbudników drgań ze względu na ograniczony dolny zakres drgań wzbudników elektromagnetycznych.
5. Warto zwrócić uwagę, że wrażliwość charakterystyk na masę jest mała w całym rozważanym przedziale częstotliwości. Można spodziewać się dużego błędu identyfikacji wartości m_3 .

Przyczyną małej wrażliwości charakterystyk na m_3 jest mała wartość tej masy w stosunku do przyjętej masy ręki m_r . Konstruując stanowisko pomiarowe należy dążyć do tego aby masa ręki była możliwie mała.

W celu sprawdzenia poprawności sformułowanych wyżej wniosków wykonano obliczenia charakterystyk częstotliwościowych i funkcji wrażliwości dla innych wartości parametrów, różniących się od wartości nominalnych (3.10) o $0 \pm 50\%$. Obliczenia wykazały, że mające charakter jakościowy wnioski 1-5 zachowują swoją ważność w dużym otoczeniu nominalnych wartości parametrów.

Rozpatrzony w pracy przykład identyfikacji parametrów układu dynamicznego wskazuje na przydatność analizy wrażliwości do przygotowania eksperymentu identyfikacji.

Odnosi się to szczególnie do przypadków, gdy dla przeprowadzenia eksperymentu konieczne jest zaprojektowanie i wykonanie specjalnych czujników, układów pomiarowych oraz urządzeń wymuszających drgania.

LITERATURA

- [1] Meltzer G. A vibration model for the human hand-arm system, /maszynopis/.
- [2] Reynolds D.D., Soedel W. Dynamic response of the hand-arm system to a sinusoidal input, Journal of Sound and Vibration, 1972, vol. 21 (3).
- [3] Reynolds D.D., Keith R.H. Hand-arm vibration, Journal of Sound and Vibration, 1977, vol. 51 (2).
- [4] Taylor W., Pelmear F.L., Pearson J. Raynaud's phenomenon in forestry chain saw operators, The vibration syndrome - Proceedings of a Conference on the Medical Engineering and Legal Aspects of Hand-Arm Vibration, 1974.
- [5] Zaveri K., Phil M. Measurement of the dynamic mass of the hand-arm system, B & K Technical Review, 1974, Nr 3.

- [6] Frank P.M. Introduction to System Sensitivity Theory,
Academic Press, 1978.