

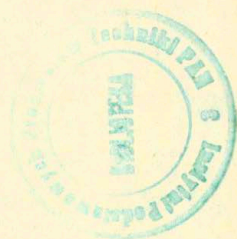
4.43 — belki
7.71 — teoria drgań
7.76 — fale w ciałach stałych

Roman Bogacz, Tomasz Krzyżyński

O BELCE BERNOULLIEGO-EULERA
SPOCZYWAJĄCEJ
NA LEPKOSPRIŻYSTYM PODŁOŻU
PODDANEJ DZIAŁANIU RUCHOMEGO
OSCYLACYJNEGO OBCIĄŻENIA

38 1986

P. 269



WARSZAWA 1986

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 czerwca 1986 r.



56883



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd. 1,42 Ark.druk. 2,5

Oddano do drukarni w listopadzie 1986 r.

17 zamówienia 6.6 86

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa.
ul. Śniadeckich 6

<http://rcin.org.pl>

Roman Bogacz
Tomasz Krzyżyński
Pracownia Teorii
Materiałów Niesprężystych
IPPT PAN Warszawa

O BELCE BERNOULLI'EGO - EULERA SPOCZYWAJĄCEJ
NA LEPKOSPĘŻYSTYM PODŁOŻU PODDANEJ DZIAŁANIU
RUCHOMEGO OSCYLACYJNEGO OBCIĄŻENIA

Streszczenie

Praca zawiera analizę zachowania się nieskończenie długiej, jednorodnej belki Eulera spoczywającej na lepkospężystym podłożu poddanej działaniu poruszającego się ze stałą prędkością obciążenia harmonicznym w postaci siły skupionej. Otrzymano rozwiązanie w ruchomym układzie odniesienia o początku w punkcie przyłożenia obciążenia. Zbadano cały zakres prędkości ruchu i częstości zmian obciążenia uwzględniając tłumienie zewnętrzne belki. Szczegółowo omówiono przypadek sprężysty.

Rozważono również graniczne przypadki obciążenia stanowiące poruszającą się siłę o stałej wartości oraz siłę harmonicznie zmienną działającą w ustalonym punkcie.

Rozwiązania uzyskano zakładając ich stacjonarną postać.

Oznaczenia.

Wielkości wymiarowe:

- EI - sztywność belki na zginanie,
 ξ - gęstość masy,
 A - pole przekroju poprzecznego belki,
 η - współczynnik zewnętrznego tłumienia,
 q - współczynnik sprężystości podłoża,
 F_0 - amplituda siły wymuszającej,
 ω - częstość zmiany obciążenia,
 $\delta(x)$ - funkcja Diraca,
 (x, t) - nieruchomy układ współrzędnych,
 v - prędkość ruchu obciążenia względem układu $|x, t|$,
 $\omega_0 = \sqrt{\frac{q}{\xi A}}$ - częstość krytyczna,
 $V_0 = \sqrt{\frac{4q EI}{(\xi A)^2}}$ - prędkość krytyczna,
 $\eta_0 = 2 \sqrt{q \xi A}$ - tłumienie krytyczne,
 $a_0 = \sqrt[4]{\frac{q}{4 EI}}$ - liczba falowa rozwiązania zagadnienia nieograniczonej belki Eulera obciążonej siłą skupioną o stałej wartości,
 $w_0 = \frac{F_0}{8EI a_0^3}$ - ugięcie belki w punkcie przyłożenia siły skupionej $F_0 = \text{const.}$,
 $w(x, t)$ - przemieszczenie belki.

Wielkości bezwymiarowe:

- $V = \frac{v}{V_0}$ - prędkość zmian obciążenia względem układu (x, t) ,
 $W = \frac{\omega}{\omega_0}$ - częstość zmian obciążenia,
 $N = \frac{\eta}{\eta_0}$ - tłumienie w podłożu.

1. WSTĘP

Zagadnienie odpowiedzi dynamicznej nieskończonych układów belkowych spoczywających na lepko-sprężystym podłożu, poddanych działaniu obciążeń ruchomych było rozważane wcześniej przez wielu autorów.

Do postawowych prac dotyczących belki Eulera należy praca [1], w której można znaleźć rozwiązanie problemu drgań stacjonarnych wymuszonych działaniem poruszającej się ze stałą prędkością siły skupionej o stałej wartości. W pracy [2] otrzymano to rozwiązanie jako granicę przy czasie dążącym do nieskończoności rozwiązania zagadnienia początkowo-brzegowego równania różniczkowego opisującego ruch belki.

W pracach [3] i [4] podjęto próbę rozwiązania zagadnienia w przypadku poruszającej się po belce siły oscylującej.

Otrzymane w pracy [3] rozwiązanie obejmowało tylko zakres małych wartości prędkości i częstości zmian obciążenia. Pominięto również wpływ tłumienia. Tłumienie zewnętrzne belki uwzględniono w pracy [4]. Jednak problem zbadano tylko dla granicznych przypadków obciążenia, tj. zerowej wartości prędkości ruchu siły oscylującej oraz przypadku zerowej wartości częstości zmian siły przy dowolnej prędkości ruchu.

Niniejsza praca stanowi kontynuację badań Mathews'a [3] i [4] i zawiera rozwiązanie problemu w całym zakresie zmian wartości parametrów prędkości i częstości oraz tłumienia.

Uzyskane w niniejszej pracy rozwiązanie umożliwi zbadanie stateczności układów hybrydowych mających liczne zastosowania w różnych dziedzinach techniki [5].

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Ruch belki spoczywającej na lepkko-sprężystym podłożu obciążonej poruszającą się ze stałą prędkością siłą oscylującą harmonicznie opisuje równanie różniczkowe:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + \xi A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial w}{\partial t} + qw = d(x-vt) F_0 \cos \omega t. \quad /1/$$

Ze względu na rodzaj obciążenia wygodnie jest poszukiwać rozwiązania w ruchomym układzie odniesienia o początku związanym z punktem przyłożenia obciążenia.

Po wprowadzeniu zmiennych $r = x-vt$ oraz $\tau = t$ otrzymujemy równanie różniczkowe w ruchomym układzie współrzędnych względem $w(r, \tau)$ o postaci:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \xi A v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - 2v\xi A \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \tau} + \xi A \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \eta v \frac{\partial w}{\partial r} + \eta \frac{\partial w}{\partial \tau} + qw = d(r) F_0 \cos \omega \tau. \quad /2/$$

Równanie /2/ zapiszemy względem bezwymiarowej funkcji

$$\bar{w}(R, \tau) = \frac{w(r, \tau)}{w_0} \quad \text{w zmiennych bezwymiarowych } R = r \cdot a_0 \quad \text{oraz} \\ \tau = \tau \cdot w_0:$$

$$\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial R^4} + 4v^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial R^2} - 8v \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial R \partial \tau} + 4 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} - 8Nv \frac{\partial \bar{w}}{\partial R} + 8N \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + 4\bar{w} = 8d(R) \cos W\tau. \quad /3/$$

Będziemy poszukiwać rozwiązania stacjonarnego równania /3/ podobnie jak w pracy [3] w następującej postaci:

$$\bar{w}(R, \tau) = \bar{w}_1(R) \cdot \cos W\tau + \bar{w}_2(R) \sin W\tau. \quad /4/$$

Po podstawieniu /4/ do równania /3/ i przyrównaniu do zera wyrażań przy funkcjach $\cos W\tau$ oraz $\sin W\tau$ otrzymujemy układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych względem funkcji $\bar{w}_1(R)$ i $\bar{w}_2(R)$:

$$\overline{W}_1^{(n)} + 4\sqrt{V}\overline{W}_1^{(n)} - 8NV\overline{W}_1^{(n)} + 4(1-W^2)\overline{W}_1^{(n)} - 8VW\overline{W}_2^{(n)} + 8NW\overline{W}_2^{(n)} - 8d(R) = 0, \quad /5/$$

$$\overline{W}_2^{(n)} + 4\sqrt{V}\overline{W}_2^{(n)} - 8NV\overline{W}_2^{(n)} + 4(1-W^2)\overline{W}_2^{(n)} + 8VW\overline{W}_1^{(n)} - 8NW\overline{W}_1^{(n)} = 0,$$

gdzie oznaczono: $\overline{W}_j^{(i)} = \frac{\partial^i \overline{W}_j}{\partial R^i}$, $j = 1, 2$.

Układ równań /5/ rozwiążemy za pomocą transformacji całkowej Fouriera zdefiniowanej następująco:

$$P_j(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}_j(R) e^{-i \cdot SR} dR, \quad /6/$$

$$\overline{W}_j(R) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_j(S) e^{iSR} dS.$$

Po wykonaniu transformacji otrzymujemy układ równań algebraicznych względem funkcji $P_j(S)$:

$$[S^4 - 4V^2S^2 - 8NViS + 4(1-W^2)] \cdot P_1(S) - [8VWiS - 8NW] \cdot P_2(S) = 8, \quad /7/$$

$$[8VWiS - 8NW] \cdot P_1(S) + [S^4 - 4V^2S^2 - 8NViS + 4(1-W^2)] \cdot P_2(S) = 0.$$

Rozwiązanie układu /7/ ma postać:

$$P_1(S) = \frac{8 [S^4 - 4V^2S^2 - 8NViS + 4(1-W^2)]}{[S^4 - 4V^2S^2 - 8NViS + 4(1-W^2)]^2 + 64[VWiS - NW]^2}, \quad /8/$$

$$P_2(S) = \frac{-64(VWiS - NW)}{[S^4 - 4V^2S^2 - 8NViS + 4(1-W^2)]^2 + 64[VWiS - NW]^2}.$$

3. ROZWIĄZANIE W PRZYPADKU POMINIĘCIA WPŁYWU TŁUMIENIA

Kładąc $N=0$ we wzorach /8/ otrzymujemy:

$$P_1(S) = \frac{8[S^4 - 4V^2S^2 + 4 \cdot (1 - W^2)]}{[S^4 - 4V^2S^2 + 4(1-W^2)]^2 - 64 V^2W^2S^2}, \quad /9/$$

$$P_2(S) = \frac{-64 VWIS}{[S^4 - 4V^2S^2 + 4(1-W^2)]^2 - 64 V^2W^2S^2}. \quad /10/$$

Funkcje $P_j(S)$ dane wzorami /9/, /10/ przedstawiamy w postaci ułamków prostych rozkładając wielomian występujący w mianowniku na czynniki. W tym celu poszukujemy rozwiązania następującego równania algebraicznego:

$$[S^4 - 4V^2S^2 + 4(1-W^2)]^2 - 64V^2W^2S^2 = 0 \quad /11/$$

lub dwóch równań algebraicznych:

$$S^4 - 4V^2S^2 + 8VWS + 4(1-W^2) = 0, \quad /12/$$

$$S^4 - 4V^2S^2 - 8VWS + 4(1-W^2) = 0.$$

Uwzględniając różnicę znaków przy nieparzystej potędze S , która sprawia, że pierwiastki równań /12/ różnią się tylko znakiem wystarczy rozwiązać pierwsze z równań /12/, będące równaniem charakterystycznym problemu sprzężonego.

Równanie /12/₁ w zależności od wartości parametrów V i W może mieć następujące postaci pierwiastków:

I/ Cztery liczby zespolone parami sprzężone

$$A + iB_1; \quad A - iB_1; \quad -A_1 + iB_2; \quad -A_1 - iB_2$$

II/ dwie liczby zespolone sprzężone oraz dwie liczby rzeczywiste

$$A + iB ; A - iB ; C ; D$$

III/ cztery liczby rzeczywiste

$$A ; B ; C ; D$$

Podział płaszczyzny (V,W) na obszary, w których występują uprzednio wymienione postaci pierwiastków przedstawiono na rys. 1.

W obszarze 1 występują pierwiastki postaci I, w obszarze 2 pierwiastki postaci II, w obszarze 3 pierwiastki postaci III. Parametry krzywych I i II dzielących płaszczyznę (V,W) na obszary 1, 2 i 3 spełniają równanie:

$$v^4 [27 - 18(1-w^2) - (1-w^2)^2 - 4v^4] = 4(1-w^2)^3. \quad M3/$$

Rozkładając funkcję $P_j(s)$ na ułamki proste otrzymamy w poszczególnych obszarach:

W obszarze pierwszym:

$$P_j(s) = 2 \left\{ \frac{1}{[(-1)^j B_1 [2A + i(B_1 - B_2)] [2A_1 + i(B_1 + B_2)]]} \left[\frac{1}{S - A - iB_1} + (-1)^j \frac{1}{S + A + iB_1} \right] \right. \\ - \frac{1}{[(-1)^j B_1 [2A - i(B_1 + B_2)] [2A_1 - i(B_1 - B_2)]]} \left[\frac{1}{S - A + iB_1} + (-1)^j \frac{1}{S + A - iB_1} \right] + /14/ \\ + \frac{1}{[(-1)^j B_2 [2A - i(B_2 - B_1)] [2A - i(B_2 + B_1)]]} \left[\frac{1}{S + A - iB_2} + (-1)^j \frac{1}{S - A + iB_2} \right] + \\ \left. - \frac{1}{[(-1)^j B_2 [2A + i(B_1 + B_2)] [2A + i(B_2 - B_1)]]} \left[\frac{1}{S + A + iB_2} + (-1)^j \frac{1}{S - A - iB_2} \right] \right\}.$$

W obszarze drugim:

$$P_j(S) = 2 \left\{ \frac{1}{((-1)^j B [(A-C) + iB] [(A-D) + iB]} \left[\frac{1}{S-A-iB} + (-1)^j \frac{1}{S+A+iB} \right] + \right. \\ \left. - \frac{1}{((-1)^j B [(A-C) - iB] [(A-D) - iB]} \left[\frac{1}{S-A+iB} + (-1)^j \frac{1}{S+A-iB} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{(-1)^{j+1}}}{(C-D) [(A-C)^2 + B^2]} \left[\frac{1}{S-C} + (-1)^j \frac{1}{S+C} \right] + \frac{\sqrt{(-1)^{j+1}}}{(D-C) [(A-D)^2 + B^2]} \left[\frac{1}{S-D} + (-1)^j \frac{1}{S+D} \right] \right\} \quad /15/$$

W obszarze trzecim:

$$P_j(S) = \frac{\sqrt{(-1)^{j+1}}}{(A-B)(A-D)(A-C)} \left[\frac{1}{S-A} + (-1)^j \frac{1}{S+A} \right] + \\ + \frac{1}{(C-B)(C-D)(C-A)} \left[\frac{1}{S-C} + (-1)^j \frac{1}{S+C} \right] + \frac{1}{(B-A)(B-C)(B-D)} \left[\frac{1}{S-B} + (-1)^j \frac{1}{S+B} \right] + \\ + \frac{1}{(D-A)(D-B)(D-C)} \left[\frac{1}{S-D} + (-1)^j \frac{1}{S+D} \right] \quad /16/$$

Transformację odwrotną funkcji $P_j(S)$ danych wzorami /15/ i /16/ rozważymy jako granicę rozwiązania lepko-sprężystego przy tłumieniu dążącym do zera podobnie jak w pracy [6] w przypadku modelu Timoshenki.

Powracając do problemu lepko-sprężystego zauważmy, że w celu rozłożenia funkcji $P_j(S)$ danych wzorami /8/ należy znaleźć rozwiązanie równania algebraicznego:

$$[S^4 - 4V^2S^2 - 8NViS + 4(1-W^2)]^2 + 64 [VWiS - NW]^2 = 0, \quad /17/$$

będącego równaniem charakterystycznym zagadnienia lepko-sprężystego.

W przypadku $N \neq 0$ pierwiastki równania /17/ przyjmują postać następujących par

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + iB_1; \quad A_2 + iB_2; \quad A_3 - iB_3; \quad A_4 - iB_4 \\ -A_1 + iB_1; \quad -A_2 + iB_2; \quad -A_3 - iB_3; \quad -A_4 - iB_4 \end{array} \right\} . \quad /18/$$

Natomiast dla $N=0$ otrzymujemy:
w obszarze drugim

$$\left\{ \begin{array}{l} A + iB; \quad D; \quad A - iB; \quad C \\ -A - iB; \quad -D; \quad -A + iB; \quad -C \end{array} \right\} , \quad /19/$$

w obszarze trzecim

$$\left\{ \begin{array}{l} A; \quad B; \quad C; \quad D \\ -A; \quad -B; \quad -C; \quad -D \end{array} \right\} . \quad /20/$$

Po dokonaniu transformacji odwrotnej oraz przekształceniach algebraicznych z uwzględnieniem postaci rozwiązania danej wzorem /4/ otrzymujemy:

- rozwiązanie w obszarze pierwszym

$$\begin{aligned} \overline{W}(R, \tau) = & \left\{ X_1 \cos[AIRI + (\pm)W\tau] + Y_1 \sin[AIRI + (\pm)W\tau] \right\} e^{-B_1IRI} + \\ & + \left\{ V_1 \cos[AIRI - (\pm)W\tau] + Z_1 \sin[AIRI - (\pm)W\tau] \right\} e^{-B_2IRI} \end{aligned} \quad /21/$$

- rozwiązanie w obszarze drugim

$$\begin{aligned} \overline{W}(R, \tau) = & \left\{ X_2 \cos[AIRI + (\pm)W\tau] + Y_2 \sin[AIRI + (\pm)W\tau] \right\} e^{-BIRI} + \\ & + V_2 \sin[DIRI + W\tau]H(-R) - Z_2 \sin[CIRI - W\tau]H(-R) \end{aligned} \quad /22/$$

- rozwiązanie w obszarze trzecim

$$\begin{aligned} \bar{W}(R, \tau) = H(R) \left\{ -X_3 \sin[B_1 R I + W \tau] + Y_2 \sin[D_1 R I + W \tau] \right. \\ \left. + H(-R) \left\{ +V_3 \sin[A_1 R I - W \tau] - Z_3 \sin[C_1 R I - W \tau] \right\} \right. \end{aligned} \quad /23/$$

Symbol (\pm) we wzorach /21/ i /22/ oznacza (+) dla $R > 0$ oraz (-) dla $R < 0$, $H(R)$ i $H(-R)$ są funkcjami Heaviside'a.

We wzorach /21/÷/23/ oznaczono:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{4(4A^2 - B_1^2 + B_2^2)}{B_1[(4A^2 - B_1^2 + B_2^2)^2 + 16A^2 B_1^2]} ; Y_1 = \frac{8A}{(4A^2 - B_1^2 + B_2^2)^2 + 16A^2 B_1^2} \\ V_1 &= \frac{4(4A^2 - B_2^2 + B_1^2)}{B_2[(4A^2 - B_2^2 + B_1^2)^2 + 16A^2 B_2^2]} ; Z_1 = \frac{8A}{(4A^2 - B_2^2 + B_1^2)^2 + 16A^2 B_2^2} \quad /24/ \\ X_2 &= \frac{4[A^2 - B^2 - A(C+D) + CD]}{B[(A-C)^2 + B^2][(A-D)^2 + B^2]} ; Y_2 = \frac{4(2A - C - D)}{[(A-C)^2 + B^2][(A-C)^2 + B^2]} \\ V_2 &= \frac{8}{[(A-D)^2 + B^2](C-D)} ; Z_2 = \frac{8}{[(A-C)^2 + B^2](C-D)} \\ X_3 &= \frac{8}{(B-A)(B-C)(B-D)} ; Y_3 = \frac{8}{(D-A)(D-C)(B-D)} \\ V_3 &= \frac{8}{(B-A)(A-C)(A-D)} ; Z_3 = \frac{8}{(C-B)(C-D)(C-A)} . \end{aligned}$$

4. Dyskusja rozwiązania sprężystego

Uzyskane rozwiązanie jest superpozycją fal bieżących, które zależnie od wartości parametrów V i W i obszaru ($R > 0$ i $R < 0$) zanikają w miarę wzrostu odległości od źródła zaburzeń lub pozostają stałe, propagując się w kierunku osi współrzędnych R (R^+) lub w kierunku przeciwnym (R^-).

W wyrażeniach /22/ i /23/ liczba $D < 0$. Liczba $C > 0$ w obszarach 2^B i 3^B , w obszarach 2^A i 3^A liczba $C < 0$. $C = 0$ na

granicy pomiędzy tymi obszarami tj. $W = 1.0$. W rozwiązaniach /21/ i /22/ $A > 0$, podczas gdy w /23/ liczba $A > 0$ i $B > 0$. Oznaczając:

$$V_A = \frac{W}{A}; \quad V_B = \frac{W}{B}; \quad V_C = \frac{W}{|C|}; \quad V_D = \frac{W}{|D|}, \quad /25/$$

możemy rozwiązania /21/ ÷ /23/ zapisać następująco:

Obszar 1

$$\begin{aligned} \overline{W}(R, \tau) = & \left\{ X_1 \cos A[|R| + (\pm)V_A \tau] + Y_1 \sin A[|R| + (\pm)V_A \tau] \right\} e^{-B_1 |R|} + /26/ \\ & + \left\{ V_1 \cos A[|R| - (\pm)V_A \tau] + Z_1 \sin A[|R| - (\pm)V_A \tau] \right\} e^{-B_2 |R|}. \end{aligned}$$

Obszar 2

$$\begin{aligned} \overline{W}(R, \tau) = & \left\{ X_2 \cos A[|R| + (\pm)V_A \tau] + Y_2 \sin A[|R| + (\pm)V_A \tau] \right\} e^{-B_1 |R|} + /27/ \\ & - V_2 \sin |D| [|R| - V_D \tau] H(R) - (\mp) Z_2 \sin |C| [|R| - (\mp) V_C \tau] H(R). \end{aligned}$$

Obszar 3

$$\begin{aligned} \overline{W}(R, \tau) = & \left\{ -X_3 \sin B[|R| + V_B \tau] - Y_3 \sin |D| [|R| - V_D \tau] \right\} H(R) + /28/ \\ & + \left\{ V_3 \sin A[|R| - V_A \tau] - (\pm) Z_3 \sin |C| [|R| - (\mp) V_C \tau] \right\} H(-R). \end{aligned}$$

Symbol (\pm) we wzorach /26/ i /27/ należy rozumieć analogicznie jak w /21/ i /22/, a symbol (\mp) we wzorach /27/ i /28/ oznacza $(-)$ dla $W < 1.0$ oraz $(+)$ gdy $W > 1.0$.

Wykresy zależności liczby falowej niezankających fal sprężystych dla wybranych wartości częstości W przedstawia rysunek 2. Na rysunku tym linią przerywaną oznaczono wykres dla $R > 0$, natomiast linią ciągłą dla $R < 0$. Strzałką oznaczono kierunek propagacji fal względem ruchomego układu odniesienia. Rozwiązanie w obszarze pierwszym składa się z zanikających fal o długości $\lambda_A = \frac{2\pi}{A}$ propagujących się z prędkością V_A . Fale o współczynniku zanikania B_1 propagują się w kierunku

przeciwnym do osi R, fale o współczynniku zanikania B_2 propagują się w kierunku osi R.

Nieograniczoność rozwiązań występuje przy parametrach V, W tworzących krzywą I, przy których $B_2 = 0, e^{-B|R|} = 1, x_1 \rightarrow \infty$. Rozwiązaniem jest wówczas fala sprężysta o nieograniczenie narastającej amplitudzie propagująca się z prędkością V_A w kierunku osi R.

Graficzną ilustrację rozwiązań w obszarze pierwszym przedstawiono na rys. 3 odpowiednio dla chwil $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{8} T, t_3 = \frac{1}{4} T, t_4 = \frac{3}{8} T$. /T - okres zmian obciążenia zewnętrznego/.

Rozwiązanie w obszarze drugim składa się z fal zanikających propagujących się z prędkością V_A w kierunku przeciwnym do osi R oraz z fal o stałej amplitudzie; fali o długości $\alpha_D = \frac{2\pi}{D}$ propagującej się z prędkością $V_D = \frac{W}{|D|}$ w kierunku osi R dla $R > 0$, fali o długości $\alpha_C = \frac{2\pi}{C}$ propagującej się z prędkością $V_C = \frac{W}{|C|}$ w kierunku osi R dla $W < 1.0$ oraz w kierunku przeciwnym dla $W > 1.0$ i $R < 0$. Nieograniczoność rozwiązań występuje w dwóch przypadkach. W przypadku wymienionym uprzednio tj. na krzywej I $C=D, \alpha_C = \alpha_D, V_C = V_D, V_2 \rightarrow \infty, Z_2 \rightarrow \infty$.

Prędkość $V_C = V_D$ jest równa prędkości V_A w obszarze pierwszym. Ponadto w przypadku parametrów V, W należących do krzywej II, gdy współczynnik zanikania $B=0, e^{-B|R|} = 1, x_2 \rightarrow \infty$. Wówczas fala sprężysta o nieograniczenie rosnącej amplitudzie propaguje się z prędkością V_A w kierunku przeciwnym do osi R.

Rozwiązanie w obszarze drugim ilustrują wykresy na rys. 4 i 5 odpowiednio dla obszaru 2^A i 2^B .

Rozwiązanie w obszarze trzecim jest superpozycją fal bieżących o stałej amplitudzie. Fale o długościach $\alpha_A = \frac{2\pi}{A}, \alpha_C = \frac{2\pi}{C}$ propagują się odpowiednio z prędkością V_A w kierunku przeciwnym do osi R oraz z prędkością V_C w kierunku osi R dla $W < 1.0$ i w kierunku przeciwnym dla $W > 1.0$ i $R < 0$.

Fale o długościach $\alpha_B = \frac{2\pi}{B}$ oraz $\alpha_D = \frac{2\pi}{D}$ propagują się odpowiednio w kierunku R^- z prędkością V_D w części belki $R > 0$. Ponadto zachodzi zależność: $\alpha_C > \alpha_A > \alpha_B > \alpha_D$.

Nieograniczone narastanie rozwiązań występuje dla parametrów wyznaczających krzywą II przy $A=B, \alpha_A = \alpha_B, V_A = V_B$,

$|V_3| \rightarrow \infty, |X_3| \rightarrow \infty$. Rozwiązaniem jest wówczas fala sprężysta o nieograniczenie narastającej amplitudzie, propagująca się z prędkością V_B w kierunku przeciwnym do osi R. Prędkość V_B jest równa V_A z obszaru drugiego dla parametrów V i W określających krzywą II. Rozwiązanie w obszarze trzecim ilustrują wykresy przedstawione na rys. 6 i 7.

Rozwiązanie na prostej III zapiszemy w następującej formie: w obszarze 2

$$\bar{W}(R, \tau) = \left\{ X_2 \cos A[|R| + (\pm) V_A \tau] + Y_2 \sin A[|R| + (\pm) V_A \tau] \right\} e^{-B|R|} - V_2 \sin D|I[|R| - V_b \tau] H(R) + Z_3 \sin W \tau H(-R), \quad /29/$$

w obszarze 3

$$\bar{W}(R, \tau) = H(R) \left\{ -X_3 \sin B[|R| + V_b \tau] - Y \sin D|I[|R| - V_b \tau] \right\} + H(-R) \left\{ V_3 \sin A[|R| - V_A \tau] + Z_3 \sin W \tau \right\}. \quad /30/$$

Gdy $W = 1.0$ rozwiązanie składa się z fal biegnących w zależności od obszaru o malejącej bądź stałej amplitudzie oraz fali stojącej o liczbie falowej dążącej do zera i stałej amplitudzie. Amplitudy wszystkich fal przy $W = 1.0$ mają wartość skończoną z wyjątkiem punktów przecięcia linii II oraz punktu $V = 0.0$. Podobnie dla parametrów określonych prostą $V = 1.0$ amplitudy mają również wartości skończone z wyjątkiem punktu $W = 0.0$. Przypadek $V = 1.0, W = 1.0$ ilustruje rys. 8 a przypadek $V = 2.0$ i $W = 1.0$ przedstawiono na rys. 9.

Rozwiązanie, które zależnie od wartości parametrów V i W dane jest wzorami /21/, /22/ lub /23/ można przedstawić w innej formie. Na przykład w obszarze pierwszym otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \bar{W}(R, \tau) &= \bar{W}_1(R) \cos W\tau + \bar{W}_2(R) \sin W\tau = /31/ \\ &= \left\{ [X_1 \cos A|R| + Y_1 \sin A|R|] e^{-B|R|} + [V_1 \cos A|R| + Z_1 \sin A|R|] e^{B|R|} \right\} \cos W\tau + \\ &- \text{sign}(R) \left\{ [X_1 \sin A|R| - Y_1 \cos A|R|] e^{-B|R|} - [V_1 \sin A|R| - Z_1 \cos A|R|] e^{B|R|} \right\} \cdot \sin W\tau. \end{aligned}$$

W tym przypadku rozwiązanie jest superpozycją sprężystych fal stojących, które zanikają wraz ze wzrostem odległości od źródła zaburzeń. Tego typu postać rozwiązania uzyskana została w pracy [3]. Pozwoliło to Autorowi [3] na wyznaczenie parametrów V i W tworzących krzywą I, uniemożliwiając wyciągnięcie szeregu istotnych, jakościowych wniosków podanych w niniejszej pracy.

Dyskusyjne kwestie fal propagujących się do źródła zaburzeń z określoną prędkością fazową można wyjaśnić za pomocą analizy energetycznej.

W tym celu rozważymy zagadnienie propagacji fal bieżących o stałej amplitudzie w nieobciążonej belce spoczywającej na sprężystym podłożu.

Poszukujemy rozwiązań własnych równania różniczkowego:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 4 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 4W = 0 \quad /32/$$

w postaci harmonicznej fali bieżącej

$$W = \sin k \cdot (x - at) , \quad /33/$$

gdzie: k jest liczbą falową, natomiast a jest prędkością fazową fali

Po podstawieniu /33/ do /32/ otrzymujemy zależność o następującej postaci:

$$a = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^4 + 4}{k^2}} . \quad /34/$$

Prędkości fazowej fali a odpowiada prędkość grupowa \bar{V} , czyli prędkość przenoszenia energii. Prędkość \bar{V} obliczymy z następującej zależności:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{\omega}}{dk} = a + \frac{dV}{dk} \cdot k \quad /35/$$

gdzie: $\bar{\omega} = ka$ jest częstością fali.

Wykresy prędkości fazowych fal o stałej amplitudzie oraz odpowiadających im prędkości grupowych przedstawia rysunek 10.

Prędkość fazowa fal o liczbie falowej $k > \sqrt{2}$ jest mniejsza od prędkości grupowej, natomiast falom o liczbie falowej $k < \sqrt{2}$ odpowiada prędkość fazowa większa niż prędkość grupowa.

Zależność pomiędzy liczbą falową a prędkością ruchu źródła dla różnych wartości częstości ω z naniesioną zależnością prędkości grupowej oraz fazowej $v/v_g = 0.0$ w funkcji liczby falowej przedstawia rysunek 11. Podobnie jak na rys. 2 strzałką oznaczono kierunek propagacji fal względem ruchomego układu odniesienia z prędkością $V_R = \frac{\omega}{|k|}$. Wartości prędkości fazowych fal względem nieruchomego układu odniesienia dane wzorem

$$V_f = v - \frac{\omega}{k} \quad /36/$$

spełniają warunek dopuszczalnych prędkości fazowych /34/ używany w poprzednich rozważaniach.

Falom propagującym się przed obciążeniem odpowiada prędkość grupowa o wartości większej od prędkości ruchu źródła zaburzeń. Oznacza to, że część dostarczanej przez źródło energii jest promieniowana w kierunku osi R.

Fale propagujące się za obciążeniem przenoszą energię z prędkością mniejszą od prędkości ruchu źródła zaburzeń.

Ta część energii dostarczanej do układu może być promieniowana tylko w kierunku przeciwnym od R.

Nieograniczoność rozwiązań ma miejsce wówczas, gdy źródło zaburzeń porusza się z prędkością grupową generowanej fali /punkty minimum na wykresach z rysunku /11/ /.

Przyczyną nieograniczonego narastania amplitud fal w tym przypadku jest brak możliwości wypromieniowania energii dostarczonej do układu.

5. ROZWIĄZANIA DLA UKŁADU TŁUMIONEGO

Po rozłożeniu funkcji $P_j(s)$ danych wzorem /8/ na ułamki proste z uwzględnieniem postaci /18/ pierwiastków równania charakterystycznego /17/ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 P_j(s) = & 4\sqrt{(-1)^{j+1}} \left\{ \frac{1}{[(A_1-A_2)+i(B_1-B_2)][(A_1-A_3)+i(B_1+B_3)][(A_1-A_4)+i(B_1+B_4)]} \cdot \frac{1}{S-A_1-iB_1} + \right. \\
 & + (-1)^j \frac{1}{[(A_1-A_2)-i(B_1-B_2)][(A_1-A_3)-i(B_1+B_3)][(A_1-A_4)-i(B_1+B_4)]} \cdot \frac{1}{S+A_1-iB_1} + \\
 & + \frac{1}{[(A_2-A_1)+i(B_2-B_1)][(A_2-A_3)+i(B_2+B_3)][(A_2-A_4)+i(B_2+B_4)]} \cdot \frac{1}{S-A_2-iB_2} + \\
 & + (-1)^j \frac{1}{[(A_2-A_1)-i(B_2-B_1)][(A_2-A_3)-i(B_2+B_3)][(A_2-A_4)-i(B_2+B_4)]} \cdot \frac{1}{S+A_2-iB_2} + \\
 & + \frac{1}{[(A_3-A_1)-i(B_3+B_1)][(A_3-A_2)-i(B_3+B_2)][(A_3-A_4)-i(B_3-B_4)]} \cdot \frac{1}{S-A_3+iB_3} + \\
 & + (-1)^j \frac{1}{[(A_3-A_1)+i(B_3+B_1)][(A_3-A_2)+i(B_3+B_2)][(A_3-A_4)+i(B_3-B_4)]} \cdot \frac{1}{S+A_3+iB_3} + \\
 & + \frac{1}{[(A_4-A_1)-i(B_4+B_1)][(A_4-A_2)-i(B_4+B_2)][(A_4-A_3)-i(B_4-B_3)]} \cdot \frac{1}{S-A_4+iB_4} + \\
 & \left. + (-1)^j \frac{1}{[(A_4-A_1)+i(B_4+B_1)][(A_4-A_2)+i(B_4+B_2)][(A_4-A_3)+i(B_4-B_3)]} \cdot \frac{1}{S+A_4+iB_4} \right\}
 \end{aligned}$$

Po dokonaniu transformacji odwrotnej oraz przekształceniach algebraicznych z uwzględnieniem rozwiązania danego wzorem /4/ otrzymujemy następującą postać rozwiązania niezależnie od wartości V , W i N :

$$\begin{aligned} \bar{W}(R, \tau) = & \left\{ \sum_{j=1}^4 [X_j \cos(A_j |R| + W\tau) + Y_j \sin(A_j |R| + W\tau)] e^{-B_j |R|} \right\} H(R) + \\ & + \left\{ \sum_{j=3}^4 [X_j \cos(A_j |R| - W\tau) + Y_j \sin(A_j |R| - W\tau)] e^{-B_j |R|} \right\} H(-R) . \end{aligned} \quad /38/$$

Amplitudy X_j oraz Y_j / $j=1-4$ / w rozwiązaniu /38/ są określone następująco:

$$X_j = \frac{8D_j}{C_j^2 + D_j^2} ; \quad Y_j = \frac{-8C_j}{C_j^2 + D_j^2} , \quad /39/$$

$$\begin{aligned} C_j = & (A_j - A_K)(A_j - A_L)(A_j - A_M) - (A_j - A_N)(B_j - B_K)(B_j + B_L) + \\ & - (A_j - A_K)(B_j + B_L)(B_j + B_M) - (A_j - A_L)(B_j - B_K)(B_j + B_M) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_j = & (A_j - A_K)(A_j - A_L)(B_j + B_M) - (B_j - B_K)(B_j + B_L)(B_j + B_M) + \\ & + (A_j - A_K)(A_j - A_M)(B_j + B_L) + (A_j - A_L)(A_j - A_M)(B_j - B_K) , \end{aligned}$$

$$C_j^2 + D_j^2 = [(A_j - A_K)^2 + (B_j - B_K)^2] [(A_j - A_L)^2 + (B_j + B_L)^2] [(A_j - A_M)^2 + (B_j + B_M)^2] .$$

Dla $j = 1$; $K = 2$; $L = 3$; $M = 4$

Dla $j = 2$, $K = 1$; $L = 3$; $M = 4$

oraz

$$\begin{aligned} C_j = & (A_j - A_K)(A_j - A_L)(A_j - A_M) - (A_j - A_N)(B_j + B_K)(B_j + B_L) + \\ & - (A_j - A_K)(B_j + B_L)(B_j - B_M) - (A_j - A_L)(B_j + B_K)(B_j - B_M) , \end{aligned}$$

$$D_j = (A_j - A_k)(A_j - A_L)(B_j - B_M) - (B_j + B_K)(B_j + B_L)(B_j - B_N) + \\ + (A_j - A_k)(A_j - A_M)(B_j + B_L) + (A_j - A_L)(A_j - A_M)(B_j + B_K), \\ C_j^2 + D_j^2 = [(A_j - A_k)^2 + (B_j + B_K)^2][(A_j - A_L)^2 + (B_j + B_L)^2][(A_j - A_M)^2 + (B_j - B_N)^2].$$

Dla $j = 3$ $K = 1$; $L = 2$; $M = 4$.

Dla $j = 4$ $K = 1$; $L = 2$; $M = 3$.

W przestrzeni parametrów V , W oraz N istnieją powierzchnie, na których liczby falowe A_j zmieniają znak przechodząc przez wartość równą zero.

Przecięciem tych powierzchni z płaszczyzną (V , W) są proste $W = 0,0$, $V = 0,0$ oraz $W = 1,0$.

W przypadku małego tłumienia można przyjąć, z pewnym przybliżeniem w otoczeniu tych prostych, że liczby falowe A_j mają następujące znaki:

$$A_1 > 0, \quad A_2 < 0, \quad A_3 > 0; \quad A_4 < 0 \quad \text{dla } W < 1,0, \\ A_4 > 0 \quad \text{dla } W > 1,0. \quad /40/$$

Oznaczając: (\pm) , $(+)$ dla $W > 1,0$, $(-)$ dla $W < 1,0$ oraz

$$V_{A_1} = \frac{W}{A_1}; \quad V_{A_2} = \frac{W}{|A_2|}; \quad V_{A_3} = \frac{W}{A_3}; \quad V_{A_4} = \frac{W}{|A_4|} \quad /41/$$

otrzymujemy

$$\overline{W}(R, \tau) = \left\{ (X_1 \cos A_1 [IRI + V_{A_1} \tau] + Y_1 \sin A_1 [IRI + V_{A_1} \tau]) e^{-B_1 IRI} + /42/ \right. \\ \left. + (X_2 \cos |A_2| [IRI - V_{A_2} \tau] - Y_2 \sin |A_2| [IRI - V_{A_2} \tau]) e^{-B_2 IRI} \right\} H(R) + \\ + \left\{ (X_3 \cos A_3 [IRI - V_{A_3} \tau] + Y_3 \sin A_3 [IRI - V_{A_3} \tau]) e^{-B_3 IRI} \right. \\ \left. + (X_4 \cos |A_4| [IRI - (\pm) V_{A_4} \tau] + (\pm) Y_4 \sin |A_4| [IRI - (\pm) V_{A_4} \tau]) e^{-B_4 IRI} \right\} H(-R).$$

Rozwiązanie składa się z fal zanikających. Fale o długościach

$$\alpha_{A_1} = \frac{2\pi}{A_1}, \alpha_{A_2} = \frac{2\pi}{|A_2|}, \alpha_{A_3} = \frac{2\pi}{A_3}, \alpha_{A_4} = \frac{2\pi}{|A_4|}$$

propagują się odpowiednio z prędkością V_{A_1} w kierunku R^+ i z prędkością V_{A_2} w kierunku R^- w części belki $R > 0$ oraz z prędkością V_{A_3} w kierunku R^+ i z prędkością V_{A_4} w kierunku R^+ dla $W < 1.0$, w kierunku R^- dla $W > 1.0$, w części belki $R < 0$.

W przypadku $N > 0$ nie występuje nieograniczoność rozwiązań dla V i W spełniających równanie /13/.

Z rozwiązań /42/ można uzyskać otrzymane wcześniej rozwiązania układu sprężystego przyjmując:

$$A_1 = A_3 = A, A_2 = A_4 = -A \text{ oraz } B_1 = B_3 = B_1, B_2 = B_4 = B_2,$$

aby otrzymać rozwiązanie w obszarze pierwszym dane wzorami /26/, następnie $A_1 = A_3 = A, A_2 = D, A_4 = C$ oraz $B_1 = B_3 = B, B_2 = B_4 = 0$ aby otrzymać rozwiązanie w obszarze drugim dane wzorem /27/.

Rozwiązanie w obszarze trzecim dane wzorem /28/ otrzymamy podstawiając w /37/ $A_1 = B, A_2 = D, A_3 = A, A_4 = C, B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 0$.

Wpływ tłumienia na zanikanie rozwiązań przedstawionych na rys. 5, 6 i 7 ilustrują wykresy na rys. 12, 13 i 14.

6. PRZYPADKI SZCZEGÓLNE OBCIĄŻENIA

W pierwszej kolejności rozważymy przypadki lepko-sprężyste $N > 0, W = 0, V \neq 0$ oraz $N > 0, W \neq 0, V = 0$.

Równanie charakterystyczne /17/ po podstawieniu $W = 0$ ma następującą postać pierwiastków:

w obszarze pierwszym /Rys. 15/

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + iB; \quad -A_1 + iB; \quad A_3 - iB; \quad -A_3 - iB \\ -A_1 + iB; \quad A_1 + iB; \quad -A_3 - iB; \quad A_3 - iB \end{array} \right\}, \quad /43/$$

w obszarze drugim / Rys. 15/

$$\begin{cases} A_1 + iB_1; & -A_1 + iB_1; & -B_3; & -iB_4 \\ -A_1 + iB_1; & A_1 + iB_1; & -B_3; & -iB_4 \end{cases} \quad /44/$$

Po uwzględnieniu /43/ i /44/ oraz $W=0$ w rozwiązaniu /38/ otrzymujemy:

w obszarze pierwszym / Rys. 15/

$$\bar{W}(R) = \frac{8 e^{-B|R|}}{[(A_1 - A_3)^2 + 4B^2][(A_3 + A_1)^2 + 4B^2]} \quad /45/$$

$$\cdot \left\{ H(R) \left[4B \cos A_1 |R| + \frac{A_3^2 - A_1^2 + 4B^2}{A_1} \sin A_1 |R| \right] + H(-R) \left[4B \cos A_3 |R| + \frac{A_1^2 - A_3^2 + 4B^2}{A_3} \sin A_3 |R| \right] \right\},$$

w obszarze drugim / Rys. 15/

$$\bar{W}(R) = \frac{H(R) 8 e^{-B_1 |R|}}{[A_1^2 + (B_1 + B_3)^2][A_1^2 + (B_1 + B_4)^2]} [(2B_1 + B_2 + B_4) \cos A_1 |R| + \frac{A_1^2 - (B_1 + B_3)(B_1 + B_4)}{A_1} \sin A_1 |R|] + H(-R) \left\{ \frac{-8 e^{-B_3 |R|}}{(B_3 - B_4)[A_1^2 + (B_3 + B_1)^2]} - \frac{8 e^{-B_4 |R|}}{(B_2 - B_3)[A_1^2 + (B_4 + B_1)^2]} \right\} \quad /46/$$

Postać pierwiastków równania /17/ po podstawieniu $V=0$ jest następująca:

$$\begin{cases} -A + iB; & B + iA; & A - iB; & -B - iA \\ A + iB; & -B + iA; & -A - iB; & B - iA \end{cases} \quad /47/$$

Po podstawieniu /47/ do rozwiązania /38/ otrzymujemy:

$$\bar{W}(R, \tau) = \frac{2e^{-B|R|}}{A^2 + B^2} [B(3A^2 - B^2) \cos A(|R| + V_\lambda \tau) + A(A^2 - 3B^2) \sin A(|R| + V_\lambda \tau)] \quad /48/$$

$$-\frac{2e^{-A|R|}}{A^2+B^2} [A(A^2-3B^2)\cos B(|R|-V_B\tau) + B(3A-B)\sin B(|R|-V_B\tau)] .$$

We wzorze /48/ $V_A = \frac{W}{A}$, $V_B = \frac{W}{B}$.

Powyższe rozwiązania w granicznych przypadkach obciążenia są analogiczne z otrzymanymi w pracy [4].

Rozwiązania w przypadku sprężystym $N=0$, $V=0$, $W \neq 0$ otrzymamy uwzględniając postać pierwiastków równania charakterystycznego /12/: podstawiając w nim $V=0$, tj.:

$$W < 1.0 \text{ /obszar pierwszy/ } A=B_1 = B_2 = \sqrt{1-W^2} ,$$

$$W > 1.0 \text{ /obszar drugi/ } A=D, B=C = -D = \sqrt{2} \sqrt{W^2-1} . \quad /49/$$

Uwzględniając /49/ odpowiednio we wzorach /26/ i /27/ otrzymujemy

$$W < 1.0 \quad \bar{W}(R,\tau) = \frac{e^{-4\sqrt{1-W^2}|R|}}{(1-W^2)^{3/4}} (\cos^4\sqrt{1-W^2}|R| + \sin^4\sqrt{1-W^2}|R|) \cos W\tau , \quad /50/$$

$$W > 1.0 \quad \bar{W}(R,\tau) = \frac{-1}{(W^2-1)^{3/4}} [e^{-4\sqrt{W^2-1}|R|} \cos W\tau + \sin^4\sqrt{W^2-1} (|R| - \frac{W}{\sqrt{W^2-1}}\tau)] .$$

Uzyskane rozwiązanie opisuje falę stojącą dla $W < 1.0$ natomiast dla $W > 1.0$ składa się z^{13k} biegnących propagujących się od źródła zaburzeń $|R|=0$, oraz zanikającej fali stojącej o liczbie falowej dążącej do zera.

Rozwiązanie w przypadku szczególnym $N=0$, $W=0$, $V \neq 0$ otrzymamy uwzględniając we wzorach /26/ i /28/ następującą postać pierwiastków równania charakterystycznego /12/: podstawiając $W=0$.

$$V < 1.0 \text{ /obszar pierwszy/ } A = \sqrt{1+V^2} ; \quad B_1=B_2 = \sqrt{1, V^2} , \quad /51/$$

$$V > 1.0 \text{ /obszar trzeci/ } A = -C = \sqrt{2} \sqrt{V^2 - \sqrt{V^4-1}} = \infty .$$

$$B = -D = \sqrt{2} \sqrt{V^2 + \sqrt{V^4 - 1}} = \bar{\beta},$$

$$V < 1.0 \quad \bar{w}(R) = e^{-\sqrt{1-V^2}} \left(\frac{\cos \sqrt{1+V^2} |R|}{\sqrt{1-V^2}} + \frac{\sin \sqrt{1+V^2} |R|}{\sqrt{1+V^2}} \right),$$

1521

$$V > 1.0 \quad \bar{w}(R) = \frac{2}{\sqrt{V^4-1}} \left[-\frac{\sin \bar{\beta} |R|}{\bar{\beta}} H(R) + \frac{\sin \bar{\alpha} |R|}{\bar{\alpha}} H(-R) \right].$$

Rozwiązanie to opisuje stojącą zanikającą dla $V < 1.0$ oraz niezanikającą dla $V > 1.0$ propagującą się z prędkością ruchu obciążenia względem nieruchomego układu odniesienia. Nieograniczoność rozwiązań występuje dla $V=1.0$,

Powyższe rozwiązanie w przypadku $N = 0, V = 0, W < 1.0$ jest równoważne uzyskanemu w pracy [3], a w przypadku $N = 0, V \neq 0, W = 0$ uzyskujemy rezultaty rozważań [1, 2, 3].

7. WNIOSKI

Otrzymane w niniejszej pracy rozwiązanie zagadnienia belki Eulera spoczywającej na lepko-sprężystym podłożu poddanej działaniu obciążenia w postaci poruszającej się ze stałą prędkością siły oscylującej przedstawiono jako superpozycję fal bieżących.

W przypadku sprężystym w zależności od wartości prędkości i częstości zmian obciążenia fale mogą być zanikające lub niezanikające.

Dla małych wartości parametrów V i W rozwiązanie to nie różni się od uzyskanego w pracy [3], gdzie zapisano je w postaci fal stojących. W przypadkach granicznych, gdy następuje zmiana natury fal bieżących z zanikających w przestrzeni na niezanikające lub odwrotnie występują fale o nieograniczonej na-

rastającej amplitudzie propagujące się w prawo lub w lewo względem ruchomego układu odniesienia.

Zjawisko to jest analogiczne z propagującą nieograniczonej fali w przypadku poruszania się po belce siły o stałej wartości z prędkością krytyczną.

Dla wartości parametrów V i W , przy których ma miejsce nieograniczonosc rozwiązań układu sprężystego przemieszczenia układu tłumionego są ograniczone.

Uwzględnienie tłumienia zewnętrznego powoduje przesunięcie fazowe fal bieżących propagujących się w tym układzie.

W przypadkach $V \neq 0$, $W=1.0$ oraz $V=1.0$, $W \neq 0$ nie występuje nieograniczonosc rozwiązań układu sprężystego /por. rys. 8 i 9/.

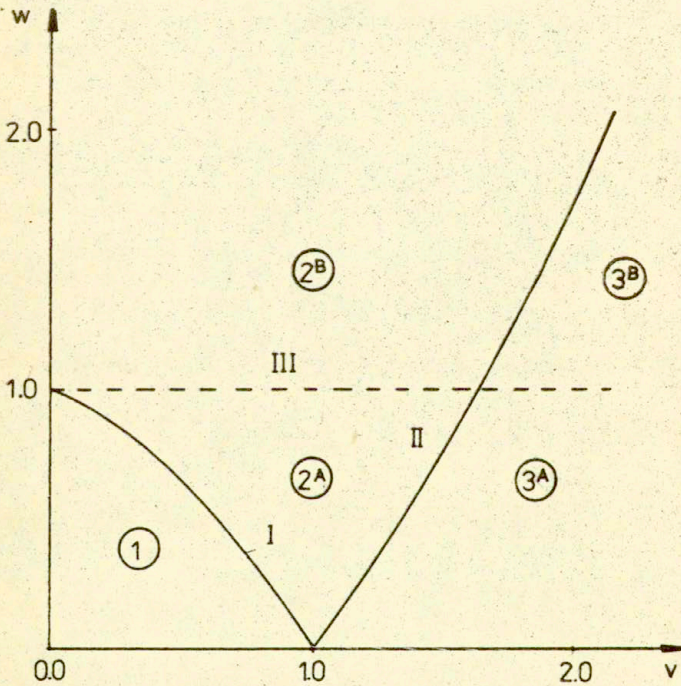
Warto zauważyć, że względem nieruchomego układu odniesienia prędkosc fal bieżących o stałej amplitudzie propagujących się w części belki $R > 0$ w kierunku R^- jest zawsze dodatnia. Oznacza to, że fale te propagują się w kierunku zgodnym z osią nieruchomego układu odniesienia.

Uogólnienie rozważań podanych w [7] dotyczących modelu belki Timoshenki będzie przedmiotem następnej pracy.

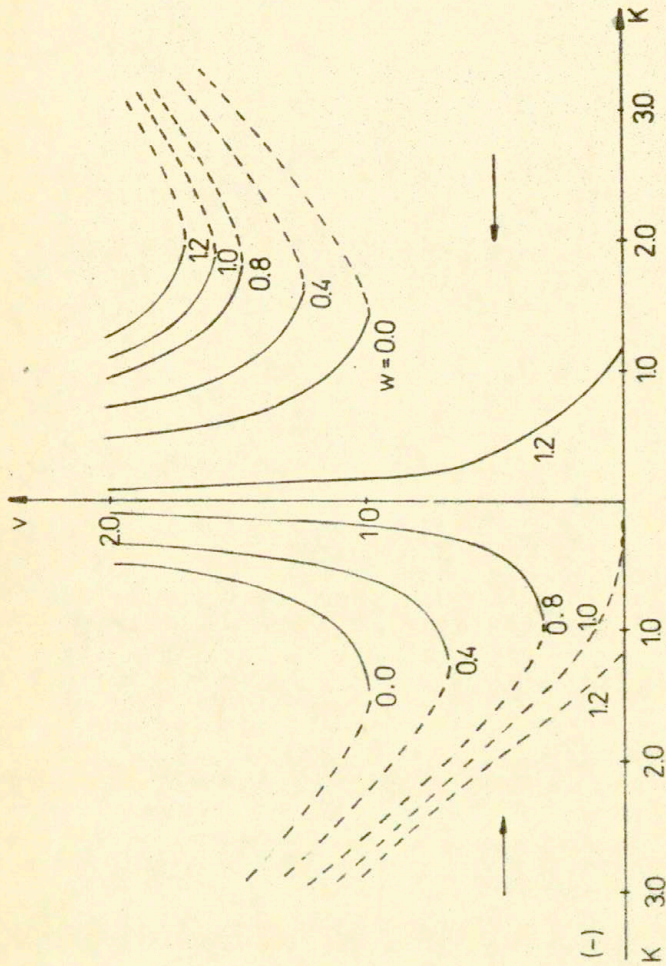
LITERATURA CYTOWANA W PRACY

- [1] I.T. KENNEY, Steady-State Vibrations of Beam on Elastic Foundation for Moving Load. Journal of Applied Mechanics 21/1954/, 359-364
- [2] W. STADLER, R.W. SHREEVES, The Transient and Steady-State Response of the Infinite Bernoulli-Euler Beam with Damping and on Elastic Foundation. Quart. Journ Mech. and Applied Math., Vol XXIII, Pt.2, /1970/, 197-208
- [3] P.M. MATHEWS, Vibrations of a Beam on Elastic Foundation. ZAMM, Bd 38, Nr 3/4, /1958/, 105-115
- [4] P.M. MATHEWS, Vibrations of a Beam on Elastic Foundations II. ZAMM, Bd 39, Nr 1/2, /1959/, 13-19
- [5] R. BOGACZ, K. POPP, Dynamics and Stability of Train-Track-Systems. Pros. 2 nd Int. Conf. on Recent Advances in Structural Dynamics. Southampton 1984

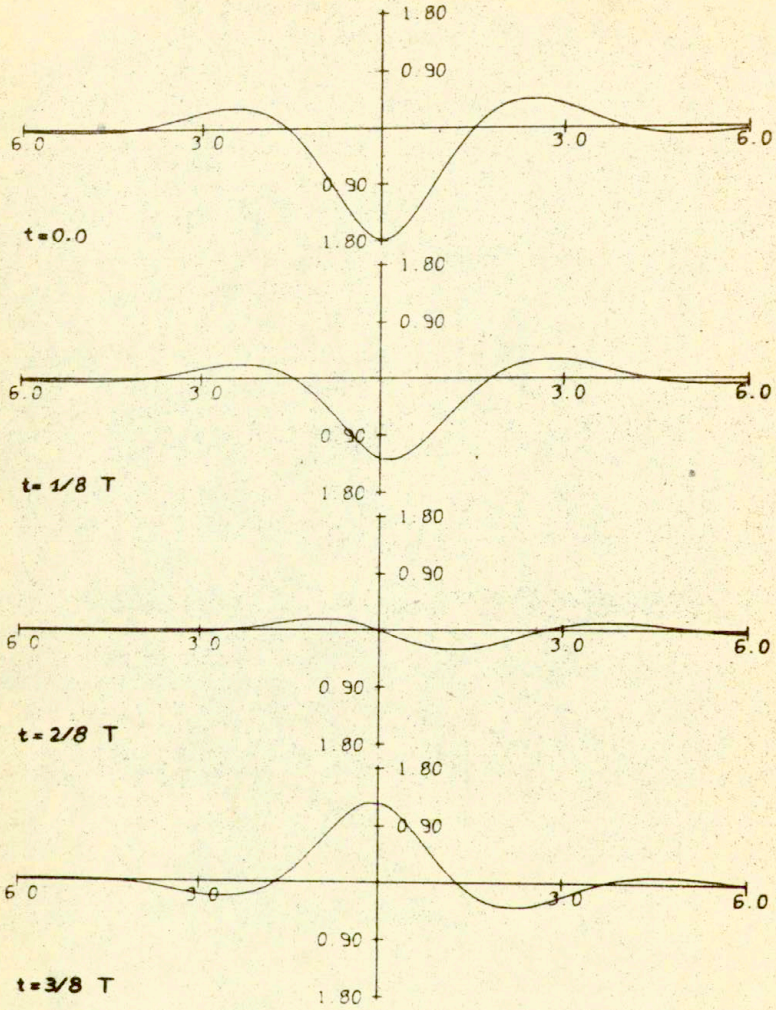
- [6] I.D. ACHENBACH, C.T. SUN, Moving Load on a Flexibly Supported Timoshenko Beam. Intern. J. Solids Structures, Vol.1 /1965/, No 4, 353-370
- [7] S. CHONAN, Moving Harmonic Load on an Elastically Supported Timoshenko Beam. ZAMM, Bd 58, /1978/, 9-15



Rys.1

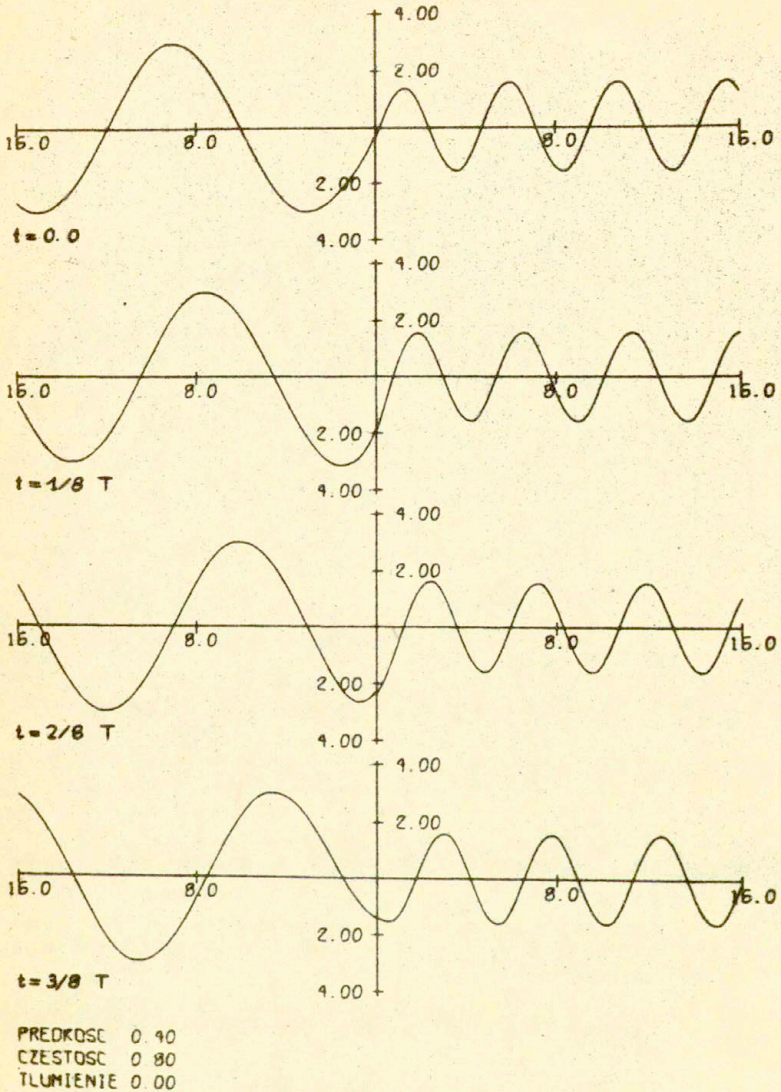


Rys. 2

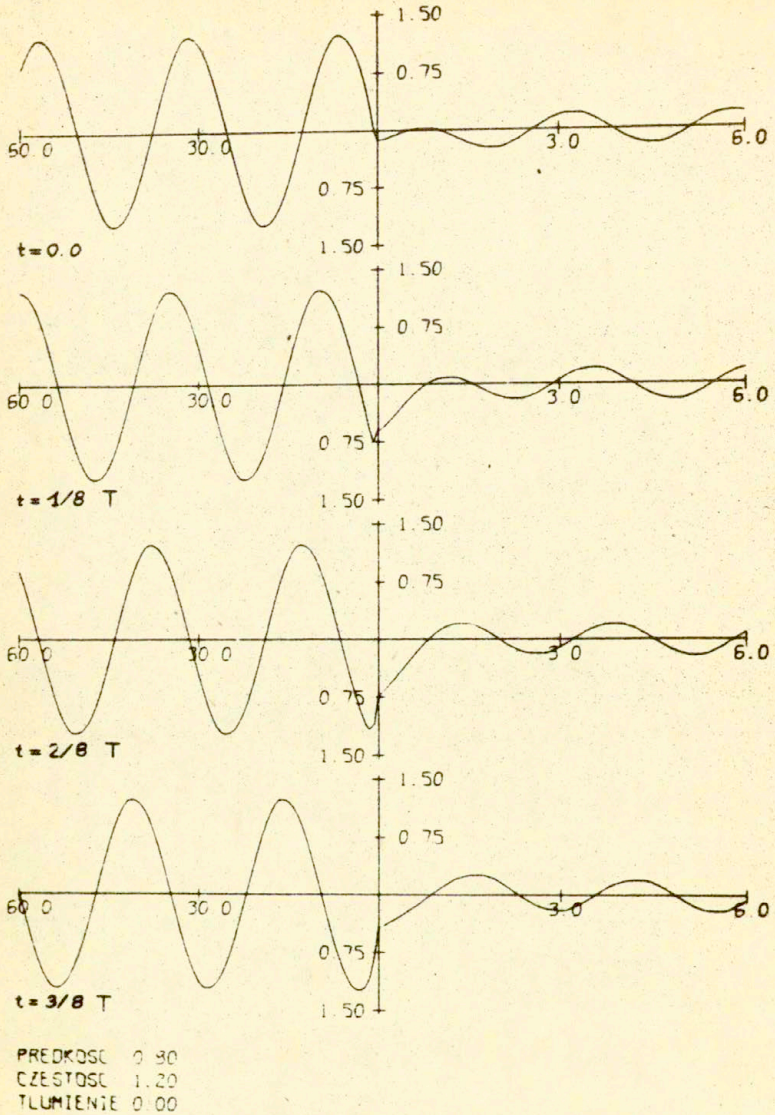


PRĘDKOŚĆ 0.80
CZĘSTOŚĆ 0.10
ŁĄCZENIE 0.00

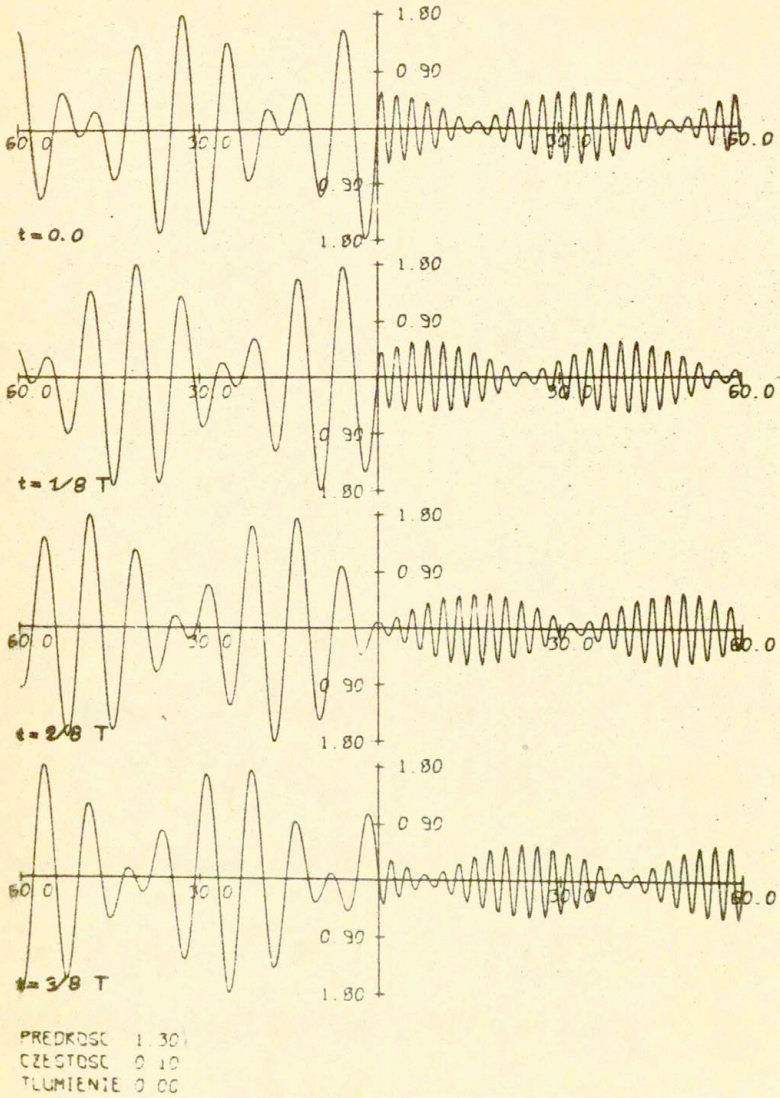
Rys.3



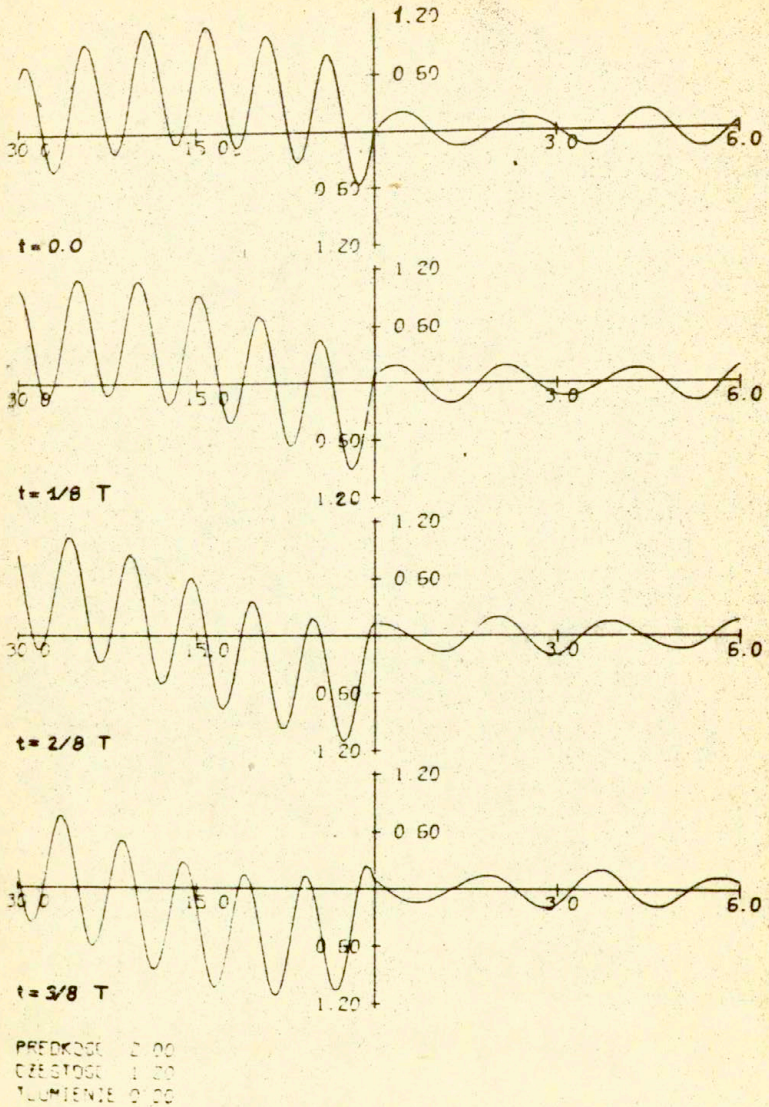
Rys.4



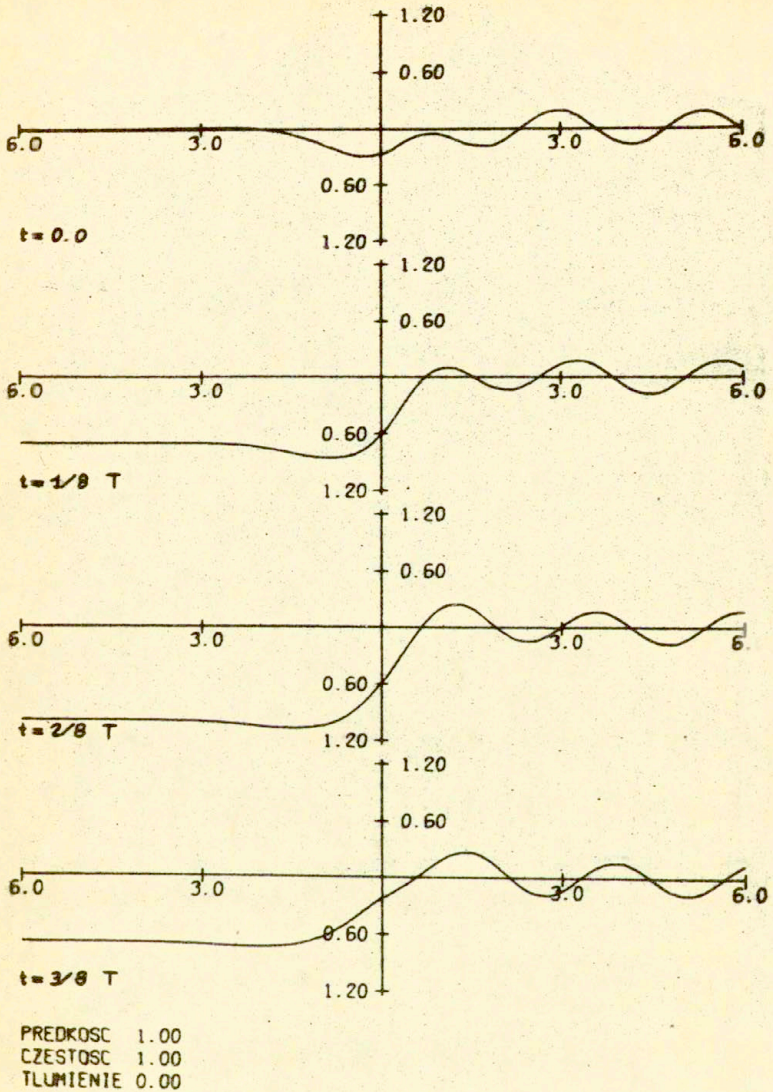
Rys. 5



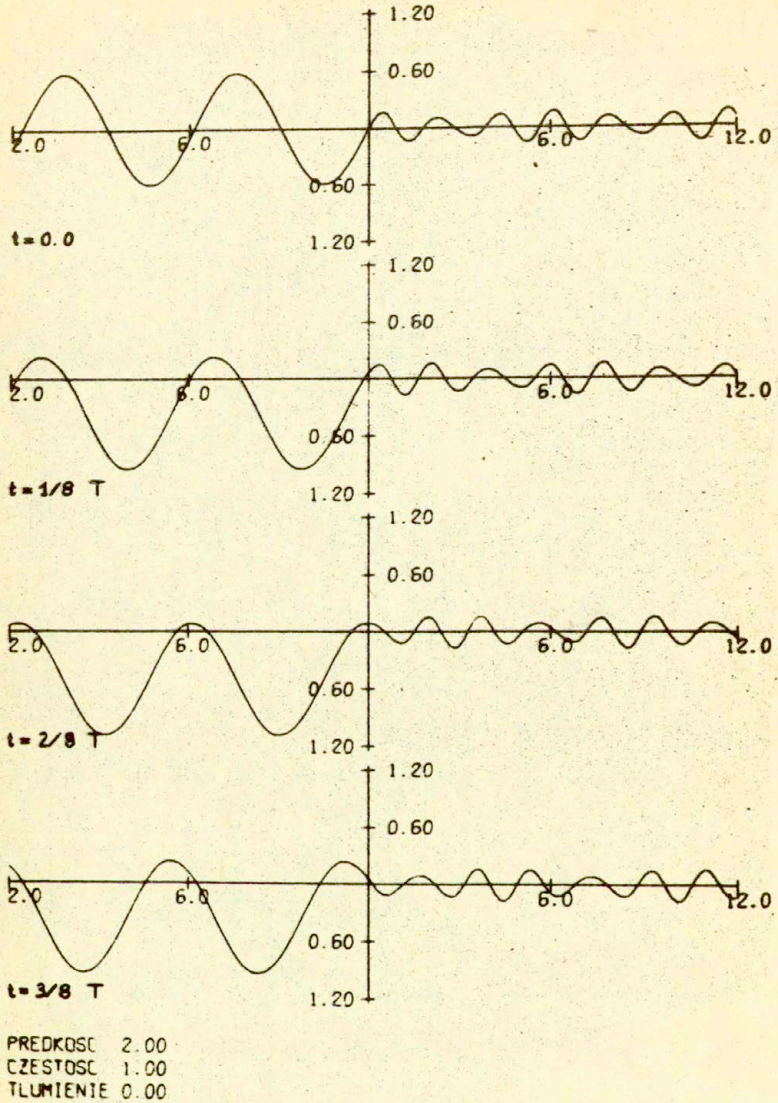
Rys. 6



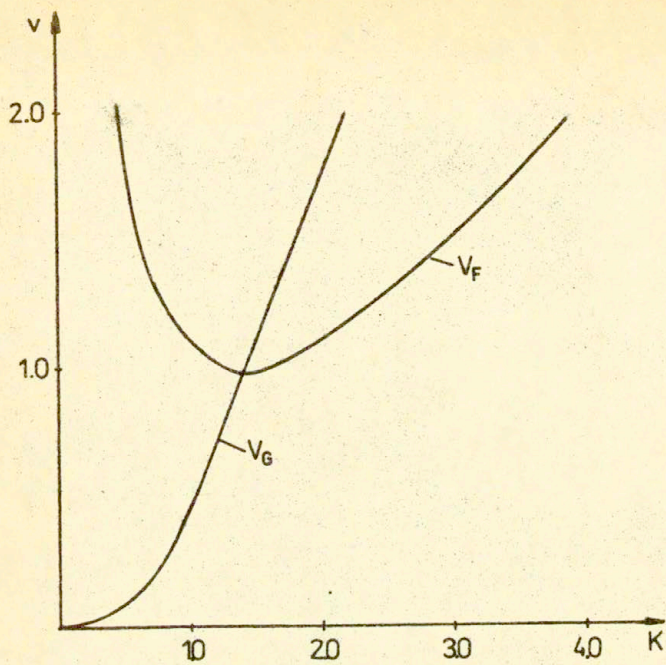
Rys.7



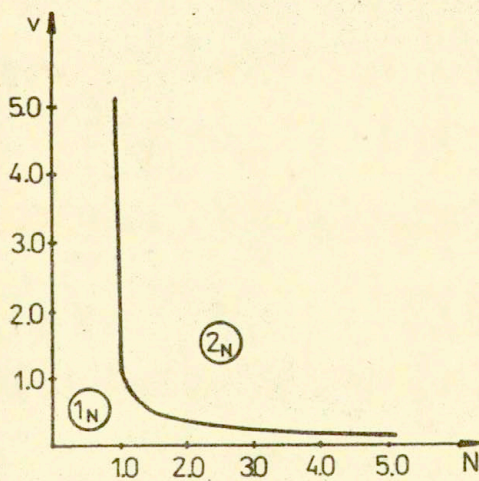
Rys.8



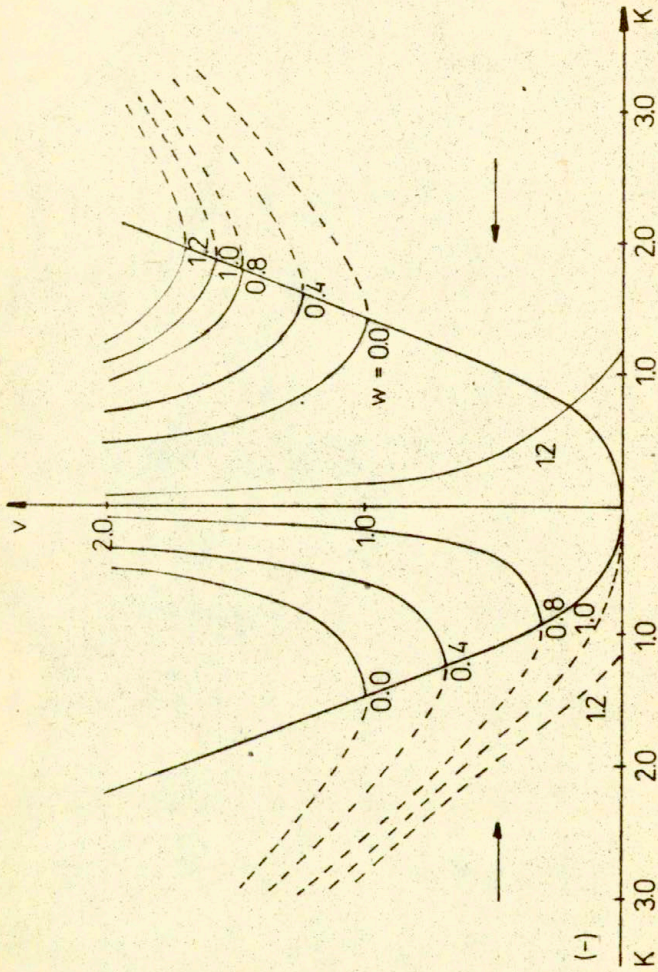
Rys.9



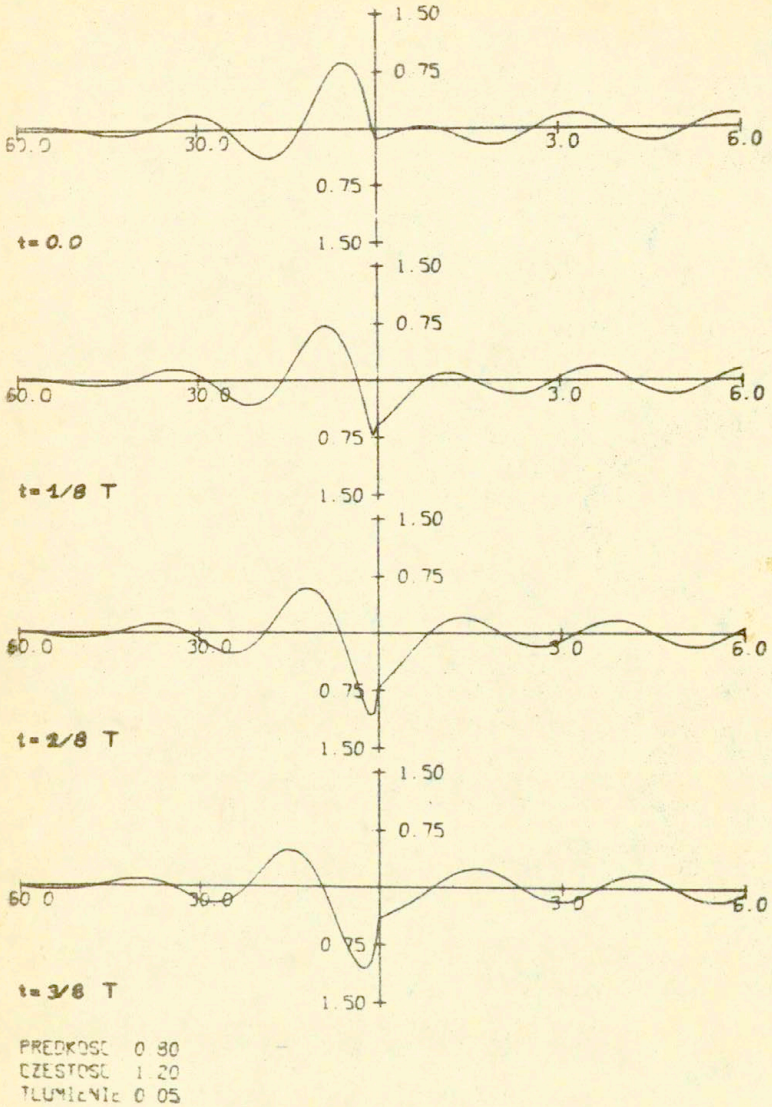
Rys.10



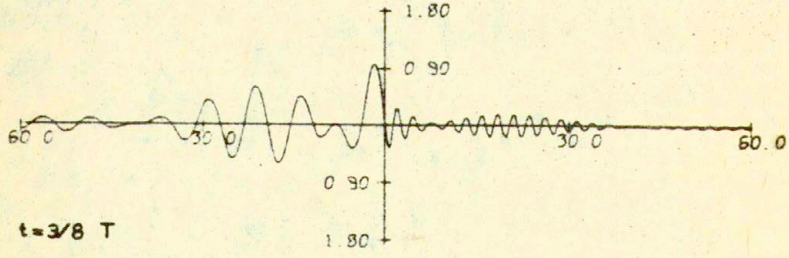
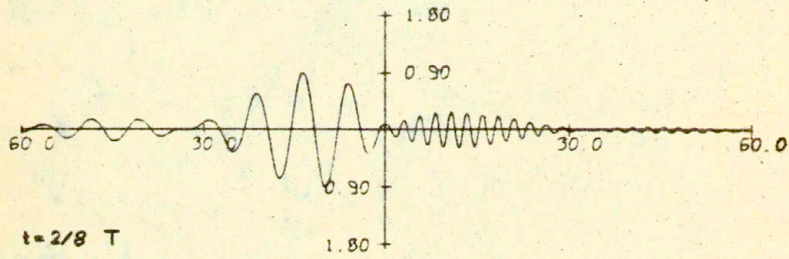
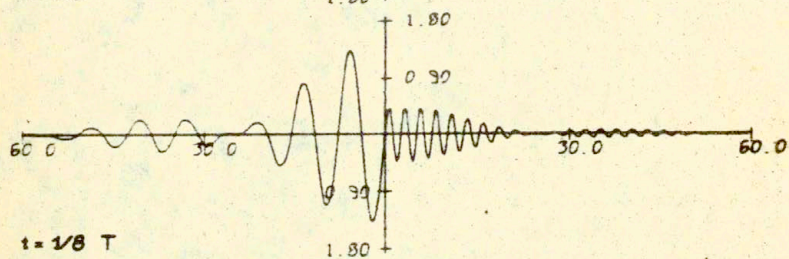
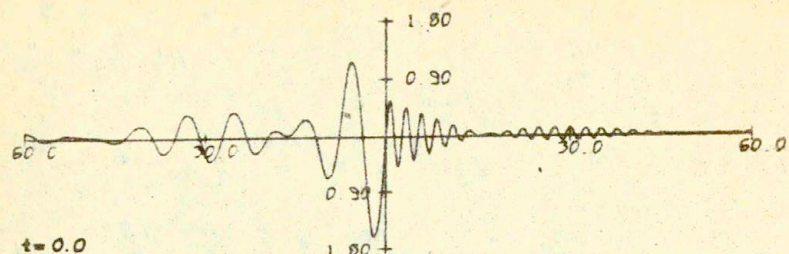
Rys.15



Rys. 11

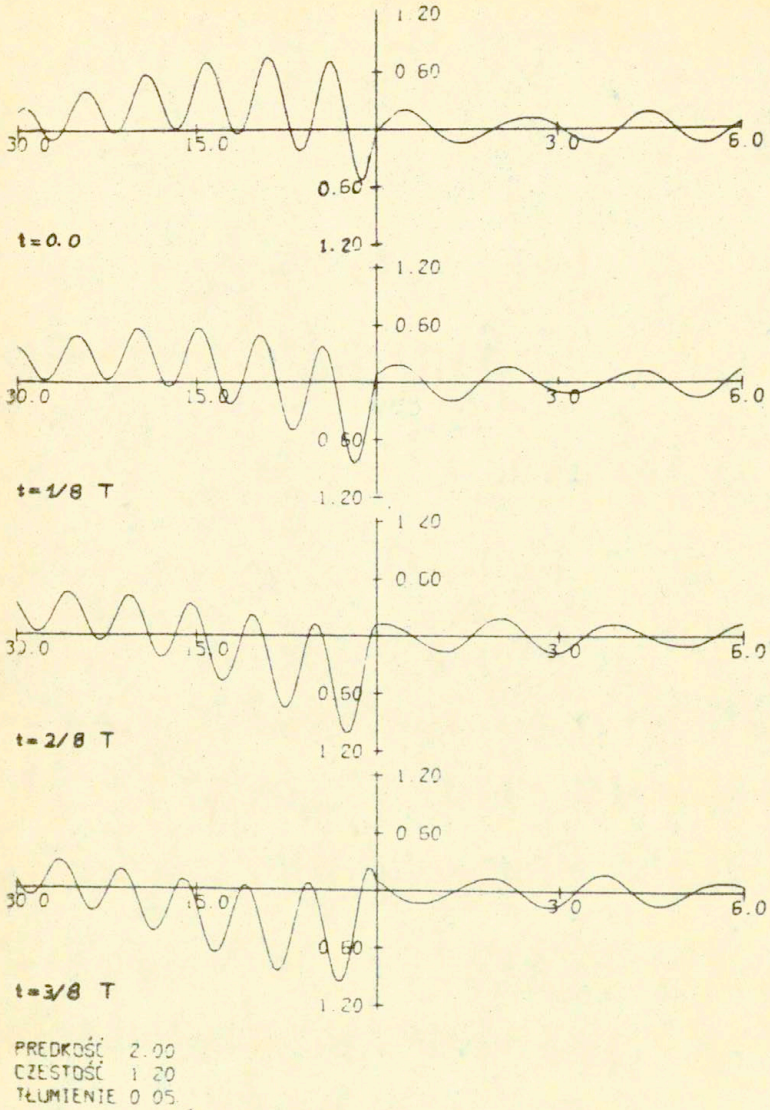


Rys.12



PRĘDKOŚĆ 1.30
 CZĘSTOŚĆ 0.10
 TŁUMIENIE 0.05

Rys.13



Rys.14

Spis treści

1. Wstęp	5
2. Sformułowanie problemu	6
3. Rozwiązanie w przypadku pominięcia wpływu tłumienia	8
4. Dyskusja rozwiązania sprężystego	12
5. Rozwiązania dla układu tłumionego	18
6. Przypadki szczególne obciążenia	21
7. Wnioski	24
Literatura cytowana w pracy	25
Rysunki	26