

R. Bogacz, H. Irretier, J. Sikora

O PEWNYCH ROZWIĄZANIACH
RUCHOMEGO UKŁADU
O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY
Z TARCIEM SUCHYM

39/1987

39/1987

P. 269



WARSZAWA 1987

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 września 1987 r.



56895



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 180 egz. Ark.wyd.1,17 Ark.druk.1,75
Oddano do drukarni w listopadzie 1987 r.
Nr zamówienia 602/87

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

R. Bogacz, H. Irretier[✉], J. Sikora
Samodzielna Pracownia Teorii Materiałów Niesprężystych

O PEWNYCH ROZWIĄZANIACH RUCHOMEGO UKŁADU O DWÓCH
STOPNIACH SWOBODY Z TARCIEM SUCHYM

Streszczenie

Praca zawiera analizę dynamiczną układu o dwóch stopniach swobody znajdującego się w stacjonarnym ruchu względem nieodkształcalnego podłoża, z którym cierne oddziaływanie opisano uogólnionym modelem Coulomba. Problem sformułowano przyjmując pewne bezwymiarowe wielkości umożliwiające ogólną analizę rozważanego układu. Rozważano przypadek drgań w ciągłym poślizgu a następnie przypadek drgań okresowych z chwilowym kontaktem spoczynkowym. Podano warunki istnienia rozwiązań okresowych "w przeciwfazie" oraz "w fazie". Z podanych rozważań wynikają ograniczenia dla przypadku klasycznego prawa tarcia Coulomba.

[✉] Prof. Dr H. Irretier - Dyrektor Instytutu Mechaniki GHK -
Uniwersytetu w Kassel.

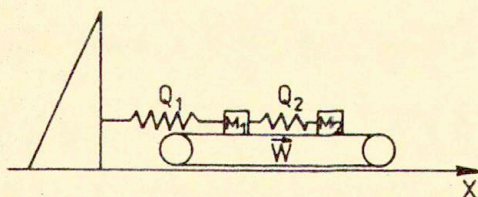
1.1. Wstęp

Rozwój techniki obliczeniowej stwarza możliwość badań numerycznych coraz bardziej złożonych zagadnień, w tym dynamicznych zagadnień kontaktowych. Badania te zmuszają do przestrzennej lub czasoprzestrzennej dyskretyzacji zagadnienia. Symulacja numeryczna ruchu wymaga znajomości pewnych cech zdyskretyzowanego układu, co umożliwia wykazanie jednoznaczności rozwiązania czy też poprawności sformułowania równań ruchu lub zagadnienia wariacyjnego. Powyższe względy spowodowały intensywne badania drgań relaksacyjnych w wielu ośrodkach naukowych, w tym w Hamburgu, Hanowerze i Kassel /RFN/. Niektóre z rezultatów badań teoretycznych nie zostały potwierdzone doświadczalnie. Trudny do uzasadnienia wydawał się efekt braku drugiej postaci ruchu /drgań w przeciwfazie/ dla rozważanego układu. Zjawisko to występowało zarówno w przypadku symulacji numerycznej jak i podczas badań układu na maszynie analogowej. Jako model tarcia suchego przyjmowano model Coulomba.

Przyjęcie, że cecha ta jest charakterystyczną dla tego modelu oraz względy aplikacyjne zagadnienia skłoniły autorów niniejszego komunikatu do badań analitycznych układu o dwóch stopniach swobody z uwzględnieniem uogólnionego modelu Coulomba. Założenia tego modelu zostaną sprecyzowane w następnej części pracy wraz ze sformułowaniem zagadnienia. Następnie podamy równania ruchu wprowadzając wielkości bezwymiarowe. W części trzeciej omówimy sposób ilustracji rozwiązań. Ogólna i szczególne postaci rozwiązań będą przedmiotem rozważań części czwartej, piątej i szóstej. Pracę zakończymy podaniem zasadniczych wniosków.

1.2 Model układu mechanicznego

Rozważmy układ mechaniczny przedstawiony na rysunku 1, złożony z dwóch mas połączonych liniowymi, nieważkimi sprężynami spoczywających na taśmie przesuwającej się ze stałą prędkością. Pomiędzy taśmą a masami występuje siła tarcia.



Rys. 1.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- X_1 - wychylenie masy M_1 od położenia, w którym obie sprężyny nie są napięte
 Q_1 - stała sprężystości i-tej sprężyny
 F_1 - siła tarcia działająca na masę M_1
 τ - czas

$W > 0$ - prędkość ruchu taśmy

Zakłada się, że siła tarcia F_1 zależy od prędkości ruchu masy M_1 względem taśmy S_1 ;

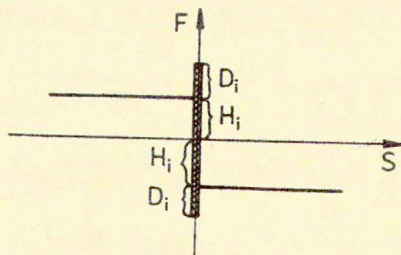
$$S_1 \equiv \frac{d}{d\tau} X_1 - W$$

w sposób określony następującą relacją

$$(1.1) \quad \begin{aligned} F_1(S_1) &= -H_1 \operatorname{sgn}(S_1) \quad \text{dla } S_1 \neq 0 \\ F_1(0) &\in \langle -H_1 - D_1, H_1 + D_1 \rangle \end{aligned}$$

gdzie $H_1 > 0$, $D_1 \geq 0$ stałe charakteryzujące tarcie.

Relacja (1.1) przedstawiona jest na rysunku 2 .



Rys. 2

Przy przyjętych założeniach badany układ opisany jest następującym układem równań

$$(1.2) \quad \begin{aligned} M_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} X_1 &= - Q_1 \cdot X_1 + Q_2 \cdot (X_2 - X_1) + F_1(S_1) \\ M_2 \frac{d^2}{dt^2} X_2 &= - Q_2 \cdot (X_2 - X_1) + F_2(S_2) \end{aligned}$$

Opis ruchu za pomocą równań (1.2) w przypadku przyjęcia relacji (1.1) ma pewne cechy charakterystyczne utrudniające analizę zachowania się układu. W szczególności dla pewnych stanów początkowych ($S = 0$) nie jest zapewniona jednoznaczność. Niemniej przedstawione w dalszej części pracy rozwiązania są jednymi z możliwych, zależących od parametrów $D_1 > 0$.

2. Równania ruchu i wielkości bezwymiarowe

Po wprowadzeniu następujących bezwymiarowych wielkości

$$t = \sqrt{\frac{Q_2}{M_2}} \tau$$

$$x_i = \sqrt{\frac{Q_2}{M_2}} \cdot \frac{X_i}{W} \quad i = 1, 2$$

$$m = \frac{M_2}{M_1} \quad ; \quad q = \frac{Q_1}{Q_2}$$

$$d_i = \frac{1}{\sqrt{M_2 \cdot Q_2}} \cdot \frac{D_i}{W} \quad ; \quad h_i = \frac{1}{\sqrt{M_2 \cdot Q_2}} \cdot \frac{H_i}{W}$$

układ (1.2) przyjmie postać

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= m [-(1+q)x_1 + x_2 + f_1(x_1-1)] \\ \ddot{x}_2 &= x_1 - x_2 + f_2(x_2-1) \quad , \end{aligned}$$

gdzie $\ddot{x}_1 = \frac{d^2}{dt^2} x_1$ oraz $\dot{x}_1 = \frac{d}{dt} x_1$.

Symbole f_1 oznaczają relacje określone następująco:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} f_1(\dot{x}_1-1) &= -h_1 \operatorname{sgn}(\dot{x}_1-1) && \text{gd}y \dot{x}_1-1 \neq 0 \\ f_1(0) &\in \langle -h_1-d_1, h_1+d_1 \rangle && i=1,2 \end{aligned}$$

Łatwo jest sprawdzić, że rozwiązanie

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{q} h_1 + \frac{1}{q} h_2 && \dot{x}_1 = 0 \\ x_2 &= \frac{1}{q} h_1 + \frac{1+q}{q} h_2 && \dot{x}_2 = 0 \end{aligned}$$

jest rozwiązaniem stałym układu (2.1).

Wygodnie jest wprowadzić inne zmienne y_1 związane z x_1 następującym związkiem:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} y_1 &= x_1 - \frac{1}{q} h_1 - \frac{1}{q} h_2 && \dot{y}_1 = \dot{x}_1 \\ y_2 &= x_2 - \frac{1}{q} h_1 - \frac{1+q}{q} h_2 && \dot{y}_2 = \dot{x}_2 \end{aligned}$$

Wtedy układ (2.1) przyjmie postać

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \ddot{y}_1 &= m \left[-(1+q)y_1 + y_2 - h_1 + f_1(\dot{y}_1-1) \right] \\ \ddot{y}_2 &= y_1 - y_2 - h_2 + f_2(\dot{y}_2-1) \end{aligned}$$

Będziemy poszukiwać rozwiązań spełniających warunek:

$$(2.5) \quad \dot{y}_1 \leq 1 \quad \text{ i } \quad \dot{y}_2 \leq 1 \quad .$$

Rozważymy cztery szczególne przypadki warunku (2.5)

$$(2.6.1) \quad \dot{y}_1 < 1 \quad , \quad \dot{y}_2 < 1$$

$$(2.6.2) \quad \dot{y}_1 = 1 \quad , \quad \dot{y}_2 < 1$$

$$(2.6.3) \quad \dot{y}_1 < 1 \quad , \quad \dot{y}_2 = 1$$

$$(2.6.4) \quad \dot{y}_1 = 1 \quad , \quad \dot{y}_2 = 1 \quad .$$

Jeżeli spełniony jest warunek (2.6.1), to układ (2.4) przyjmuje postać

$$(2.7.1) \quad \begin{aligned} \ddot{y}_1 &= m [-(1+q)y_1 + y_2] \\ \ddot{y}_2 &= y_1 - y_2 \quad . \end{aligned}$$

W przypadku, gdy spełniony jest warunek (2.6.2), to układ (2.4) przyjmie postać

$$(2.7.2) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= 1 \\ \ddot{y}_2 &= y_1 - y_2 \end{aligned}$$

Jeżeli spełniony jest warunek (2.6.3), wówczas układ (2.4) przyjmie postać

$$(2.7.3) \quad \begin{aligned} \ddot{y}_1 &= m [-(1+q)y_1 + y_2] \quad , \\ \dot{y}_2 &= 1 \quad , \end{aligned}$$

a warunkowi (2.6.4) odpowiadają równania

$$(2.7.4) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= 1 \quad , \\ \dot{y}_2 &= 1 \quad . \end{aligned}$$

3. Konwencja graficznej ilustracji rozwiązań

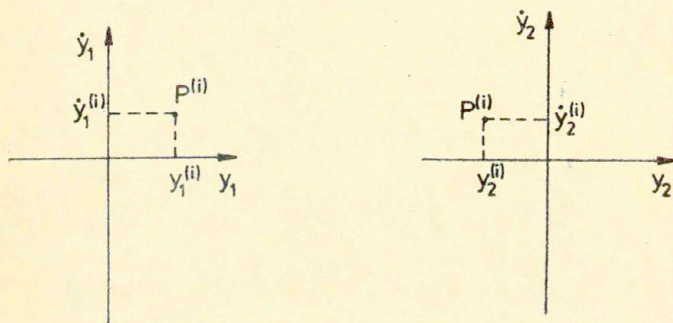
Stan układu opisany jest czterema parametrami

$$(3.1) \quad (y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2)$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$p(i) = (y_1^{(i)}, \dot{y}_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dot{y}_2^{(i)})$$

Stan $p(i)$ będziemy przedstawiać graficznie na dwu sprzężonych układach współrzędnych.



Rys.3

Stanowi $p(i)$ odpowiadają dwa punkty na powyższych układach współrzędnych będących odpowiednimi rzutami czterowymiarowej przestrzeni (3.1).

4. Rozwiązania układu równań

Układ (2.7.1) można zapisać w następującej postaci macierzowej:

$$(4.1) \quad \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\Omega} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \underset{\sim}{\Omega} = \begin{bmatrix} -m(1+q) & m \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny macierzy $\underset{\sim}{\Omega}$ zapiszemy następująco:

$$(4.2) \quad \lambda^2 + [m(1+q)+1] \lambda + mq = 0.$$

Wyróżnik tego wielomianu dany jest wzorem

$$\Delta = [m-1+qm]^2 + 4m > 0.$$

Istnieją więc dwa różne pierwiastki λ_1, λ_2 równania (4.1.2) Można wykazać, że po odpowiednim oznaczeniu tych pierwiastków spełnione są następujące nierówności:

$$(4.3) \quad \lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 0.$$

Korzystając z teorii liniowych układów równań różniczkowych otrzymujemy następującą postać rozwiązań układu (2.7.1)

$$(4.4) \quad \begin{aligned} y_1 &= \delta_1 A \sin(\alpha_1 t + \varphi_1) + \delta_2 B \sin(\alpha_2 t + \varphi_2) \\ y_2 &= A \sin(\alpha_1 t + \varphi_1) + B \sin(\alpha_2 t + \varphi_2), \end{aligned}$$

gdzie stałe $A, B, \varphi_1, \varphi_2$ zależą od wartości początkowych. Stałe δ_1 oraz α_1 są określone zależnościami:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= 1 + \lambda_1 \\ \alpha_1^2 &= -\lambda_1. \end{aligned}$$

Ze względu na warunek (4.3) stałe δ_1 spełniają nierówności

$$(4.6) \quad \delta_1 < 0 < \delta_2 < 1$$

Po zróżniczkowaniu (4.1.4) względem τ określimy prędkości ruchu \dot{y}_1, \dot{y}_2 :

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= \delta_1 A \alpha_1 \cos(\alpha_1 t + \varphi_1) + \delta_2 B \alpha_2 \cos(\alpha_2 t + \varphi_2), \\ \dot{y}_2 &= A \alpha_1 \cos(\alpha_1 t + \varphi_1) + B \alpha_2 \cos(\alpha_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Rozwiązanie (4.7) jest superpozycją dwóch typów rozwiązań okresowych układu (2.7.1); drgań w fazie i drgań w przeciwfazie.

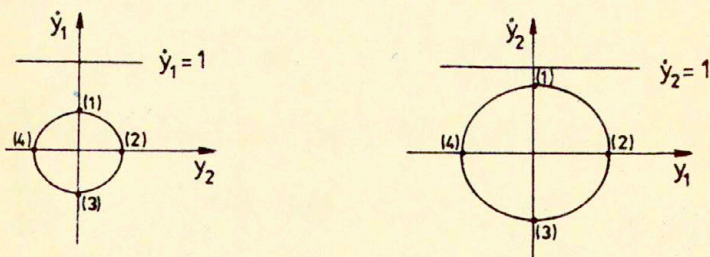
4.1 Drgania w fazie

Przypadek ten otrzymujemy, gdy spełnione są następujące warunki

$$(4.8) \quad A = 0 \quad \text{oraz} \quad |B \alpha_2| < 1.$$

Warunek drugi zapewnia spełnienie nierówności (2.6.1).

Rozwiązanie to można przedstawić graficznie w następujący sposób:



Rys. 4

Na powyższym rysunku zaznaczone są cztery kolejne punkty, aby zilustrować zmianę konfiguracji układu.

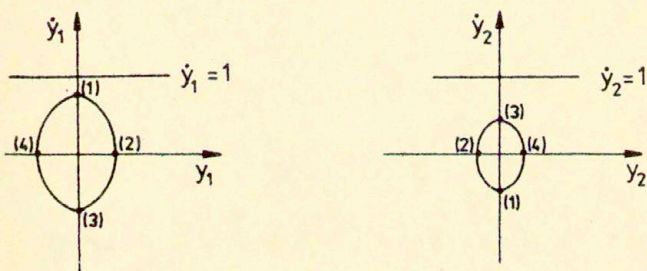
4.2 Drgania w przeciwfazie

Przypadek ten otrzymujemy, gdy spełnione są warunki

$$(4.9) \quad B = 0 \quad \text{oraz} \quad \max(|\delta_1 A \alpha_1|, |A \alpha_1|) < 1.$$

Drugi warunek podobnie jak w przypadku (4.8) zapewnia spełnienie nierówności (2.6.1).

Przy założeniu, że $|\delta_1| < 1$ rozwiązanie w przeciwfazie można przedstawić graficznie w następujący sposób

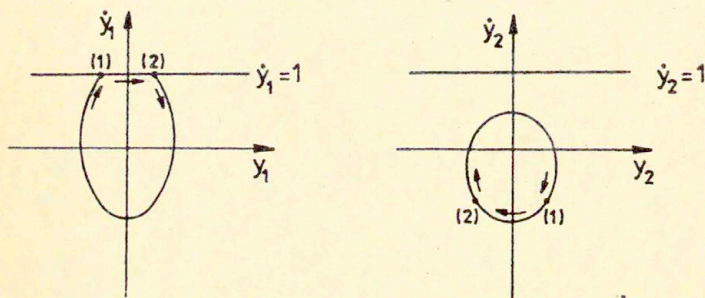


Rys.5

W przedstawionych rozważaniach przyjęto, że obie masy są w ciągłym poślizgu względem taśmy. W dalszej części pracy rozważać będziemy inne rodzaje rozwiązań okresowych układu równań (2.4) obejmujące przypadek, w którym jedna z mas przez określony czas porusza się z taśmą.

5. Przypadek kontaktu spoczynkowego. Rozwiązania okresowe
układu równań (2.4) "w przeciwfazie"

Charakterystyczne cechy poszukiwanego rozwiązania przedstawiono na Rys.5



(Rys.5)

Ze względu na przyjętą postać prawa tarcia wygodnie jest podzielić rozwiązanie na dwie części. Część pierwszą rozwiązania stanowić będzie trajektoria pomiędzy punktami (1) i (2) a częścią drugą będzie trajektoria zaczynająca się w punkcie (2) i kończąca się w punkcie (1). W pierwszej części rozwiązania masa nr 1 porusza się razem z taśmą dzięki siłom tarcia statycznego, a druga masa znajduje się w poślizgu względem taśmy. Przypadek ten odpowiada warunkowi (2.6.2) i opisany jest układem (2.7.2). W punkcie (2) następuje utrata przyczepności pomiędzy pierwszą masą a taśmą. W przypadku, gdy obydwie masy ślizgają się po taśmę, co odpowiada warunkowi (2.6.1) ruch układu opisany układem równań (2.7.1).

Konstrukcja rozwiązania okresowego polega na rozwiązaniu ukła-

du równań (2.7.1) oraz (2.7.2) i spełnieniu warunku ciągłości trajektorii w pkt.(1) i (2) aby otrzymać rozwiązanie okresowe. Zakładając, że spełnione są następujące trzy warunki

5a) punkty (1) i (2) spełniają następujące związki

$$0 > y_1^{(1)} = -y_1^{(2)} \quad ; \quad v_1^{(1)} = v_1^{(2)} = 1$$

$$0 < y_2^{(1)} = -y_2^{(2)} \quad ; \quad v_2^{(1)} = v_2^{(2)} < 0 \quad ,$$

5b) w trakcie pierwszej części rozwiązania czas t przebiega przedział

$$[p, -p] \quad , \quad \text{gdzie} \quad p < 0$$

$$\text{oraz zachodzi} \quad y_1(0) = y_2(0) = 0$$

5c) w trakcie drugiej części rozwiązania czas t przebiega przedział

$$[-T, T] \quad , \quad \text{gdzie} \quad T > 0$$

$$\text{oraz zachodzi} \quad y_1(0) = y_2(0) = 0 \quad .$$

Poszukiwane rozwiązanie będzie posiadać własność

$$\text{sgn } y_1 = - \text{sgn } y_2 \quad .$$

Jeżeli ponadto założymy, że stałe m i q są takie, że $|\delta_1| > 1$, nietrudno wykazać, że układ równań (2.7.2) ma rozwiązania postaci

$$(5.1) \quad \begin{aligned} y_1 &= t + c \quad , \\ \dot{y}_1 &= 1 \quad , \quad \text{gdy } t \in [p, -p] \quad , \quad p \leq 0 \\ y_2 &= r \sin(t + \varphi) + (t+c) \quad , \end{aligned}$$

$$\dot{y}_2 = r \cos(t + \varphi) + 1 ,$$

gdzie c, φ, r są stałymi zależnymi od warunków początkowych.

Wykorzystując założenia 5a i 5b otrzymujemy

$$\varphi = 0 , \quad c = 0 .$$

Rozwiązania układu równań (2.7.1) dane są wzorami (4.4) i (4.7). Z założeń 5a i 5c wynika, że $\varphi_1 = 0$ i $\varphi_2 = 0$. Porównując wartości $(y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2)$ w punkcie (1) otrzymamy następujący układ równań:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} p &= \delta_1 A s_1 + \delta_2 B s_2 \\ 1 &= \delta_1 A c_1 + \delta_2 B c_2 \\ r \sin p + p &= A s_1 + B s_2 \\ r \cos p + 1 &= A c_1 + B c_2 , \end{aligned}$$

gdzie $s_1 = \sin \alpha_1^T$; $c_1 = \alpha_1 \cos \alpha_1^T$.

Analogiczne równania w punkcie (2) są spełnione automatycznie.

Wykorzystując związki (5.2) otrzymamy

$$(5.3) \quad \begin{aligned} p &= \delta_1 A s_1 + \delta_2 B s_2 \\ 1 &= \delta_1 A c_1 + \delta_2 B c_2 \\ r \sin p &= (1 - \delta_1) A s_1 + (1 - \delta_2) B s_2 \\ r \cos p &= (1 - \delta_1) A c_1 + (1 - \delta_2) B c_2 \end{aligned}$$

Z układu równań (5.3) otrzymamy następujące związki:

$$(5.4) \quad p = \frac{s_1 + \frac{\delta_2 B}{\delta_1 A} s_2}{c_1 + \frac{\delta_2 B}{\delta_1 A} c_2}$$

$$(5.5) \quad \operatorname{tg} p = \frac{s_1 + \frac{(1-\delta_2)}{(1-\delta_1)} \frac{B}{A} s_2}{c_1 + \frac{(1-\delta_2)}{(1-\delta_1)} \frac{B}{A} c_2}$$

Jeżeli z równania (5.4) wyznaczymy iloraz $\frac{B}{A}$ a następnie podstawimy do równania (5.5), to po przekształceniach otrzymamy zależność

$$(5.6) \quad \operatorname{tg} p = \frac{s_1 \cdot s_2 - [k_1 s_1 c_2 + k_2 s_2 c_1] p}{[k_2 s_1 c_2 + k_1 s_2 c_1] - c_1 c_2 p},$$

gdzie k_i oznacza stałe zależne od δ_1, δ_2 spełniające relacje

$$(5.7) \quad \begin{aligned} k_i &> 0 \quad \text{dla } i = 1, 2 \\ k_1 + k_2 &= 1 \end{aligned}$$

Równanie (5.6) stanowi związek między p i T .

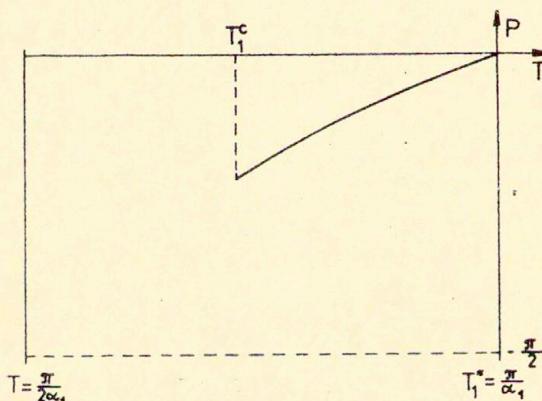
Jeśli para (p, T) spełnia związek (5.6), to stałe A, B, r są określone jednoznacznie. Jednak nie wszystkie pary (p, T) spełniające (5.6) i wygenerowane przez nie trójki (A, B, r) tworzą poszukiwane rozwiązania.

W wyniku analizy numerycznej równania (5.6) dla $m = 1$ i $q = 1$ stwierdzono istnienie takiej wartości T_1^C spełniającej nierówności

$$\frac{\pi}{2\alpha_1} < T_1^C < T_1^M = \frac{\pi}{\alpha_1}$$

a ponadto posiadającą tę własność, że dla każdego $T \in (T_1^C, T_1^*)$ istnieje dokładnie jedno $p < 0$ takie, że para (p, T) spełnia związek (5.6) i włącznie z wygenerowaną trójką (A, B, r) tworzy poprawne rozwiązanie. Generowane przez T_1^C rozwiązanie nie spełnia warunku (2.6.1).

Na rysunku (6) przedstawiono zależność p od T dla równania (5.6)



Jednym z rozwiązań równania (5.6) jest para

$$(5.8) \quad A = 0, \quad T = T_1^* = \frac{\pi}{\alpha_1}.$$

Generowane przez (5.8) rozwiązanie jest granicznym rozwiązaniem typu drgania w przeciwfazie prezentowanym w części 4 (tzn. $|\delta_1 A \alpha_1| = 1$). Dla rozwiązania tego stałe A i B są określone następująco

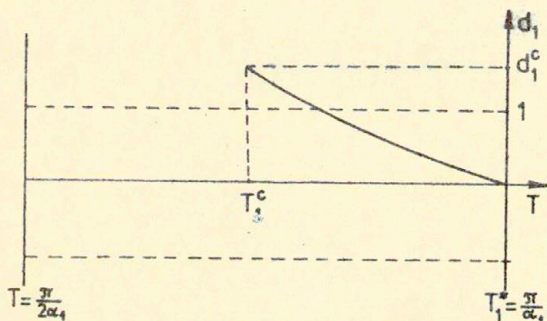
$$|\delta_1 A \alpha_1| = 1 \quad \text{oraz} \quad B = 0.$$

Rozwiązanie to otrzymamy gdy $d_1 = 0$.

Na rysunku (7) przedstawiona jest zależność parametru d_1 od T dla $T \in (T_1^c, T_1^*)$.

Wartość d_1 obliczono ze wzoru

$$d_1 = m[(1+q)y_1^{(2)} - y_2^{(2)}] = -\ddot{y}_1^{(2)}$$

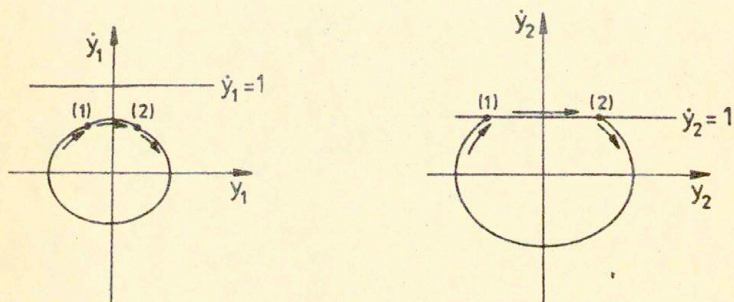


Rys.7

Oznaczmy przez d_1^c wartość parametru d_1 dla rozwiązania generowanego przez T_1^c . Z analizy związku (5.6) i równań (5.2) wynika, że dla $d_1 \in [0, d_1^c)$ istnieją rozwiązania okresowe równania (2.4) o cechach przedstawionych na rys.5. Wniosek ten można wyciągnąć na podstawie kształtu krzywej przedstawionej na Rys.7. Można również podkreślić, że otrzymane rozwiązania spełniają warunek $\text{sgn } y_1 = -\text{sgn } y_2$ dla każdego t .

6. Rozwiązanie okresowe układu równań (2.4). Przypadek ruchu w fazie

Podobnie jak w części 5 zaczniemy od schematu poszukiwanego rozwiązania, który ilustruje Rys.8.



Rys.8

Część pierwszą rozwiązania stanowi trajektoria wychodząca z punktu (1) do punktu (2). Część druga zamkniętej trajektorii wychodzi z punktu (2) i kończy się w punkcie (1).

Podczas ruchu odpowiadającego pierwszej części trajektorii druga masa spoczywa na taśmie oddziałując z nią siłą tarcia statycznego i przesuwa się wraz z nią z prędkością $\dot{y}_2 = 1$. Masa pierwsza ślizga się po taśmie w ruchu względnym. Przypadek ten odpowiada warunkowi (2.6.3) i jest opisany układem równań (2.7.3).

W punkcie (2) następuje utrata przyczepności między drugą masą a taśmą. Druga część trajektorii odpowiada przypadkowi,

w którym obie masy ślizgają się po taśmie. Spełniony jest wówczas warunek (2.6.1), a ruch układu jest opisany równaniami (2.7.1). Dalej postąpimy podobnie jak w przypadku ruchu w przeciwfazie.

Zakładamy, że

6a) punkty (1), (2) spełniają następujące związki

$$\begin{aligned} 0 > y_1^{(1)} &= -y_1^{(2)} & ; & & v_1^{(1)} &= v_1^{(2)} > 0 & ; \\ 0 > y_2^{(1)} &= -y_2^{(2)} & ; & & v_2^{(1)} &= v_2^{(2)} = 1 & . \end{aligned}$$

6b) W pierwszej części rozwiązania

$$\begin{aligned} t \in [p, -p] & , \quad \text{gdzie } p < 0 \\ \text{oraz zachodzi } & y_1(0) = y_2(0) = 0 . \end{aligned}$$

6c) W drugiej części rozwiązania

$$\begin{aligned} t \in [-T, T] & , \quad \text{gdzie } T > 0 \\ \text{oraz zachodzi równość } & y_1(0) = y_2(0) = 0 . \end{aligned}$$

Z nierówności (4.6) mamy

$$0 < \delta_2 < 1$$

Oznaczmy $x^2 = m(1+q)$. Rozwiązaniem (2.7.3) jest

$$\begin{aligned} (6.1) \quad y_1 &= r \sin(xt + \varphi) + \frac{1}{1+q}(t+c) \\ \dot{y}_1 &= rx \cos(xt + \varphi) + \frac{1}{1+q} \quad \text{gd } t \in [p, -p] , p \leq 0 \\ y_2 &= t + c \\ \dot{y}_2 &= 1 , \end{aligned}$$

gdzie r, φ, c stałe zależne od warunków początkowych.

Z założeń (6a), (6b) wynika

$$\varphi = 0, \quad c = 0.$$

Rozwiązanie układu równań (2.7.1) dane są przez (4.4) i (4.7).
Z założeń (6a) i (6c) wynika

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0$$

Z ciągłości trajektorii w punkcie (1) wynika następujący układ równań

$$(6.2) \quad \begin{aligned} r \sin xp + \frac{1}{1+q} p &= \delta_1 A s_1 + \delta_2 B s_2 \\ rx \cos xp + \frac{1}{1+q} &= \delta_1 A c_1 + \delta_2 B c_2 \\ p &= A s_1 + B s_2 \\ 1 &= A c_1 + B c_2 \end{aligned}$$

Przekształcając pierwsze dwa z równań (6.2) otrzymujemy

$$(6.3) \quad \begin{aligned} r \sin xp &= \left(\delta_1 - \frac{1}{1+q} \right) A s_1 + \left(\delta_2 - \frac{1}{1+q} \right) B s_2 \\ rx \cos xp &= \left(\delta_1 - \frac{1}{1+q} \right) A c_1 + \left(\delta_2 - \frac{1}{1+q} \right) B c_2 \end{aligned}$$

skąd

$$(6.4) \quad \frac{1}{x} \operatorname{tg} xp = \frac{s_2 + \frac{\left(\delta_1 - \frac{1}{1+q} \right)}{\left(\delta_2 - \frac{1}{1+q} \right)} \frac{A}{B} s_1}{c_2 + \frac{\left(\delta_1 - \frac{1}{1+q} \right)}{\left(\delta_2 - \frac{1}{1+q} \right)} \frac{A}{B} c_1}$$

Z ostatnich dwu równań (6.2) mamy

$$(6.5) \quad p = \frac{s_2 + \frac{A}{B} s_1}{c_2 + \frac{A}{B} c_1}$$

Po wyznaczeniu ilorazu $\frac{A}{B}$ z równania (6.5) i podstawieniu do (6.4) otrzymamy:

$$(6.6) \quad \frac{1}{x} \operatorname{tg} xp = \frac{s_1 s_2 - [l_1 s_1 c_2 + l_2 s_2 c_1] p}{[l_2 s_1 c_2 + l_1 s_2 c_1] - c_1 c_2 p},$$

gdzie l_1 oznaczają stałe zależne od δ_1 , przy czym l_1 spełniają zależności

$$(6.7) \quad \begin{aligned} l_1 &> 0 && \text{dla } i = 1, 2 \\ l_1 + l_2 &= 1 \end{aligned}$$

Równanie (6.6) stanowi związek między p i T . Podobnie jak w poprzedniej części (p, T) spełniająca (6.6) generuje jednoznacznie (A, B, r) spełniające równanie (6.3). Na podstawie analizy numerycznej równania (6.6) dla $m = 1$ i $q = 1$, gdy $x^2 = 2$, stwierdzono istnienie takiej wartości T_2^c , że

$$(6.8) \quad \frac{\pi}{2\alpha_2} < T_2^c < T_2^{\pi} = \frac{\pi}{\alpha_2},$$

oraz dla każdego $T \in (T_2^c, T_2^{\pi})$ istnieje jedno $p < 0$ takie, że (p, T) spełnia (6.6) i włącznie z generowanymi (A, B, r) tworzy rozwiązanie. Generowane przez T_2^c rozwiązanie nie spełnia warunku (2.6.3).

Związki (5.6) i (6.6) są podobne. Dla związku (5.6) $T_1^* = \frac{\pi}{\alpha_1}$,
 a dla (6.6) $T_2^* = \frac{\pi}{\alpha_2}$. Jednym z rozwiązań równania (5.6)
 jest para

$$(5.8) \quad p = 0, \quad T = T_1^*, \quad \text{dla której } |K_1 A \alpha_1| = 1 \text{ oraz } B=0.$$

Podobnie w przypadku (6.6)

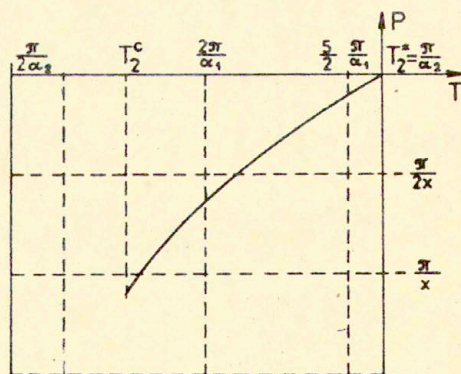
$$(6.8) \quad p = 0, \quad T = T_2^*,$$

dla której $A = 0; \quad |B \alpha_2| = 1$.

Generowane przez tę parę rozwiązanie jest granicznym przypadkiem drgań w fazie dyskutowanym w części 4 (tzn. $B \alpha_2 = 1$).

Rozwiązanie to otrzymujemy przy $d_2 = 0$.

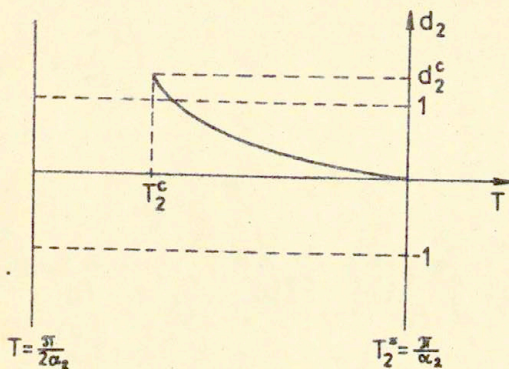
Na rysunku nr 9 przedstawiono zależność p od T dla równania (6.6)



Rys.9

Na rysunku nr 10 przedstawiono zależność parametru d_2 od
 T dla $T \in (T_2^c, T_2^*]$. Wartość d_2 otrzymano ze wzoru

$$d_2 = y_2^{(2)} - y_1^{(2)} = -\ddot{y}_2^{(2)} .$$



Rys.10

Z analizy równań (6.6) i (6.2) wynika, że dla $d_2 \in [0, d_2^c)$ istnieją rozwiązania okresowe równania (2.4) o cechach przedstawionych na Rys. 7, gdzie d_2^c jest wartością parametru d_2 dla rozwiązania generowanego przez T_2^c .

Rozwiązania te spełniają warunek

$$\text{sgn } y_1 = \text{sgn } y_2 .$$

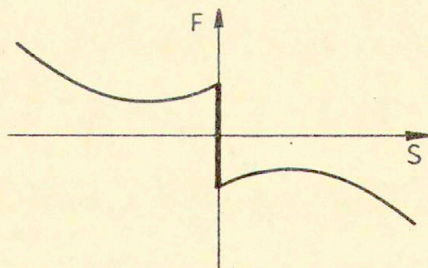
7. Zakończenie

Rozważania przedstawione w niniejszej pracy mają charakter wstępny. Celem ich jest wykazanie, że w przypadku dyskretyzacji strefy kontaktu możliwe są różne postacie ruchu. Warunki ich istnienia uzyskane dla układu o dwóch stopniach swobody można uogólnić na przypadek wielu stopni swobody, gdzie liczba form własnych będzie odpowiednio większa.

W pracy przedstawiono tylko pewną szczególną i łatwą do analizy analityczną klasę rozwiązań, ponieważ jest ona odpowiednią na konkretne i istotne pytania specjalistów od symulacji numerycznej zjawisk kontaktowych [4], [5]. Pełna analiza zachowania się badanego układu jest zagadnieniem trudniejszym i będzie przedmiotem dalszych badań.

Przyszłe badania dotyczyć będą również uogólnień modelu tarcia oraz zbadania zagadnień stateczności ruchu. Pozwoli to na symulację wielu zagadnień kontaktowych, w których poza określeniem naprężeń i deformacji plastycznych istotna jest również kwestia generacji hałasu, nierównomiernego zużycia na powierzchni kontaktu itp.

Uogólnienia modelu tarcia dążyć będą do modelu schematycznie przedstawionego na rysunku 11.



LITERATURA

1. Martins, J.A.C., Oden, J.T.; A Numerical Analysis of a Class of Problems in Elastodynamics with Friction. Comp.Appl.Mech.Eng. 40 1983 s. 327-360.
2. Mahrenholtz, O., Gaul, L.; Dämpfungsfragen. VDI-Bildungswerk 32-12-03.1977.
3. Bohlen, S.; Zur Berechnung und Messung Mechanischer Schwingungen in Strukturen mit Nichtlinearen Fügestellenverhalten VDI-Berichte, Schwingungstechnik Nr 91, 1987.
4. Gravert, P., Irretier, H.; Rechnerische Untersuchung von Stick-slip-Schwingungen an Systemen mit ein und zwei Freiheitsgraden. Diplomarbeit, Institut für Mechanik, Universität Hannover, 1982.
5. Irretier, H., Popp, K., Schneider, E.; Noise Generation in Railway Wheels due to Rail-Wheel Contact Forces. International Journal of Vehicle Mechanisms and Mobility 14, 1985, 189-193.
6. Drgania i fale w ciałach stałych - pod redakcją S.Kaliskiego, s.139, PWN Warszawa 1966