

7.72 — plastyczność, lepko-plastyczność, reologia.

34/1982

Marian Grzymkowski

METODY ANALIZY PROCESÓW
OBROBKI PLASTYCZNEJ METALI

Część III

P-269a



WARSZAWA 1982

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 kwietnia 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 34/1982



57040



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd. 8,6. Ark.druk. 12 .

Oddano do druku w październiku 1982r.

Nr zamówienia 606/c/82/ Z - 86 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Sniadeckich 8

Rozdział X

METODY ANALIZY PROCESÓW OBRÓBKI

PLASTYCZNEJ METALI

10.1. Wstęp

Opracowanie technologiczne procesów obróbki plastycznej metali wymaga znajomości siły potrzebnej do przeprowadzenia danego procesu. Siła ta potrzebna jest do pokonania oporu odkształcenia plastycznego metalu i do pokonania tarcia występującego na styku odkształcanego metalu z narzędziem. Znajomość całkowitej siły konieczna jest do dobrania właściwego urządzenia pod względem wielkości nacisku i parametrów przestrzeni roboczej maszyny. W wielu przypadkach oprócz znajomości całkowitej siły potrzebnej do przeprowadzenia procesu konieczna jest również znajomość rozkładu naprężeń i rozkładu odkształceń w deformowanym metalu. Nierównomierność odkształcania metalu w danym procesie ma duży wpływ na plastyczność metalu, jakość wyrobu i na wielkość sił potrzebnych do odkształcenia metalu.

W procesie ciągnięcia i wyciskania wielkość odkształcenia limitowana jest wymiarami narzędzia. W procesie swobodnego spęcznienia odkształcenie w kierunku osi jest zadane, a w pozostałych dwóch głównych kierunkach są swobodne i równe sobie, ale różne wzdłuż wysokości odkształcanej próbki. Próbka cylindryczna przechodzi w próbkę beczkową. W procesie walcowania zadany odkształceniem jest odkształcenie wysokości, natomiast nieznanym jest wydłużenie i poszerzenie.

Znajomość naprężeń normalnych i stycznych w każdym punkcie odkształcanego metalu (również na styku metalu z narzędziem), a także kształtu i wymiarów wyrobu (występuje odkształcenie sprężyste) jest sprawą zasadniczą w analizie procesów obróbki plastycznej metali.

Przy stosowaniu do obliczeń pełnych równań różniczkowych cząstkowych napotyka się wiele trudności. Rozwiązania tych równań dokonuje się za pomocą metod aproksymacyjnych dających przybliżone rozwiązanie. Do przybliżonych metod rozwiązywania cząstkowych równań różniczkowych równowagi należy metoda całkowania numerycznego i metoda perturbacji ustalonego stanu naprężenia.

Metoda numerycznego rozwiązywania równań polega na zastąpieniu różniczek różnicami skończonymi i następnie rozwiązaniu równań algebraicznych. Do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego istnieje dobrze opracowana metoda Massau. Jest to metoda aproksymacyjna dająca przybliżone rozwiązanie i pozwala ona na zastosowanie maszyn cyfrowych.

Metoda perturbacji (metoda małego parametru np. $\epsilon = \frac{a}{b}$, gdzie a i b są wymiarami liniowymi deformowanego obszaru) jest matematyczną metodą rozwiązywania równań różniczkowych. Stosowana jest do rozwiązywania zagadnień brzegowych, dla których można podać przybliżone wyjściowe (znane) rozwiązanie. Perturbowaniu podlega to przyjęte wyjściowe rozwiązanie. Metoda perturbacji należy do metod przybliżonych, ale umożliwiającą rozwiązanie konkretnych problemów płaskiego lub osiowo-symetrycznego stanu odkształcenia czy też naprężenia (perturbacji podlegają charakterystyki wyjściowe).

W procesach obróbki plastycznej metali podstawowym zagadnieniem jest określenie nacisków pomiędzy narzędziem formującym a materiałem, energii zużytej w czasie procesu oraz mechanizmu płynięcia. Znajomość sił i naprężeń koniecznych do plastycznego odkształcenia oraz mechanizmu płynięcia plastycznego są niezbędne do prawidłowego opracowania procesu technologicznego, w celu uzyskaniażądanego kształtu i oczekiwanych własności fizycznych i mechanicznych wyrobu.

Współczesny inżynier musi znać prawa rządzące odkształceniami plastycznymi, znać metody analizy procesów obróbki plastycznej i musi umieć zaprojektować odpowiednie narzędzie oraz dobrać urządzenie do konkretnej operacji plastycznego kształtowania. Nie mniej ważnym zagadnieniem dla niego jest znajomość fizyki odkształceń plastycznych oraz zmian własności zachodzących pod wpływem odkształceń plastycznych.

Płaskie i osiowo-symetryczne zagadnienia obróbki plastycznej metali możemy rozwiązywać w sposób ścisły stosując metodę charakterystyk lub w sposób przybliżony opierając się na twierdzeniach o dolnej i górnej ocenie nośności granicznej. Do najbardziej rozpowszechnionych metod wyznaczania sił i naprężeń w procesach plastycznego kształtowania należą:

1. Metoda uproszczonych równań różniczkowych równowagi.

2. Metody energetyczne:

- bilansu prac,
- założenia funkcji rozkładu prędkości płynięcia i przemieszczenia,
- założenia schematu odkształcenia,
- założenia statycznie dopuszczalnego pola naprężeń.

3. Metoda równowagi sił.
4. Metoda charakterystyk.
5. Metoda elementów skończonych.
6. Metoda wariacji.

10.2. Metoda uproszczonych równań różniczkowych równowagi

Metoda uproszczonych równań różniczkowych równowagi stosowana do obliczania sił w procesie obróbki plastycznej metali polega na wyznaczeniu uproszczonego równania różniczkowego równowagi z nieskończenie małego elementu danego procesu i następnie obliczeniu z niego siły jednostkowej potrzebnej do realizacji tego procesu odkształcania plastycznego. Metoda ta jest uproszczona, gdyż zakłada, że stan naprężenia zależy tylko od jednej współrzędnej i tak np.: dla stanu płaskiego /operacje kucia swobodnego/ zależy tylko od współrzędnej x , nie zależy od współrzędnej z , dla stanu osiowej symetrii stan naprężenia zależy tylko od promienia r , a nie zależy od wysokości h .

Metoda uproszczonych równań różniczkowych równowagi do chwili obecnej, jest najczęściej stosowana i stosunkowo dobrze opisana w literaturze. Pozwala ona określić jedynie naprężenia i ich rozkład na powierzchni styku metalu odkształcanego z narzędziem.

10.2.1. Ściskanie cylindrycznych walców między płaskimi płytami

1. Wprowadzenie

Metoda uproszczona /przybliżona/ obliczania nacisku jednostkowego ściskania walców pomiędzy dwiema równoległymi i sztywnymi płytami z prędkością v_0^t opiera się na upraszczających założeniach, dotyczących stanu naprężenia i uproszczeniu kinematyki płynięcia. Stan naprężenia w ściskanym walcu zależy

jedynie od promienia r . Naprężenie w kierunku osi z , σ_z , jest na całej wysokości walca H stałe i równe naciskowi płyty. Pominęcie naprężeń stycznych $\tau_{rz} = 0$, powoduje pokrywanie się kierunków głównych naprężeń z osiami współrzędnych r, θ, z . A więc naprężenia $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ są główne.

Zagadnienie ściskania walca było rozważane przez wielu badaczy. Zakładali oni różne warunki tarcia na kontakcie materiału walca z narzędziem i przyjmowali, że stan naprężenia zależy tylko od promienia r . T. Kármán przyjął, że jednostkowa siła styczna na kontakcie $t = \mu \sigma_z$. E. Siebel natomiast przyjął, że $t = \mu \sigma_p$. W pracy [1] przyjęto, że $t = c \frac{\sigma_p}{2}$ ($0 < c < 1$). W. Schroeder i D.A. Webster przyjęli, że maksymalna wartość siły tarcia może równać się granicy plastyczności na ścinanie k . W związku z tym rozważali oni zagadnienie ściskania walca dla tarcia poślizgowego ($t = \mu \sigma_z$, $t < k$) i tarcia przylgowego ($t = k \sigma_p$) czyli dla małych i dla dużych współczynników tarcia. Obszar tarcia podzielili na strefę tarcia poślizgowego $t = \mu \sigma_z$, $\sigma_z = p$ i strefę tarcia przylgowego $t = k \sigma_p$, $k = 0,577$. W pracy [13] ściskanie walców rozwiązano metodą charakterystyk dla stałego współczynnika tarcia μ i dla współczynnika tarcia $\mu = \frac{\tau_{rz}}{\sigma_z}$, otrzymanego z podejścia ostatniej charakterystyki do kontaktu. Przy takim założeniu podano górną i dolną ocenę nośności. R.L. Carlson [2] podał przybliżone rozwiązanie ściskania walców, uwzględniając wpływ tarcia i lepkość materiału, przyjmując równanie konstytutywne Pragera dla ciała lepkoplastycznego

$$\eta \dot{\epsilon}_m = \sum \langle f_i \rangle \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_m}, \quad \langle f_i \rangle = f_i, \text{ gdy } f_i > 0, \quad (10.1)$$

$$\langle f_i \rangle = 0, \text{ gdy } f_i < 0, \quad f_i = \sigma_r - \sigma_z - \sigma_p, \quad \sigma_r = \sigma_\theta.$$

J.B. Haddow [10] rozwiązał zagadnienie ściskania walca z uwzględnieniem sił tarcia, lepkości materiału η i sił dynamicznych, przyjmując równanie konstytutywne dla ciała Bingham,

$S_{ij} = 2\left(\eta + \frac{k}{\dot{\epsilon}_i}\right) \dot{\epsilon}_{ij}$, które w układzie walcowym r, θ, z ma postać

$$\begin{bmatrix} S_r \\ S_\theta \\ S_z \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = 2\left(\eta + \frac{k}{\dot{\epsilon}_i}\right) \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_r \\ \dot{\epsilon}_\theta \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\epsilon}_{rz} \end{bmatrix}. \quad (10.2)$$

Uproszczoną analizę ściskania walca można przeprowadzać zakładając, że na całej powierzchni kontaktu materiału walca z narzędziem występuje tarcie poślizgowe Coulomba $t = \mu \sigma_z$. Można również założyć, że na powierzchni kontaktu występuje tarcie mieszane (na części kontaktu występuje tarcie poślizgowe, a na części - tarcie przylgowe) oraz tylko tarcie przylgowe $t \gg k$. Najbardziej fizycznym podejściem jest przyjęcie podziału powierzchni kontaktu na trzy strefy tarcia:

- I strefę tarcia poślizgowego,
- II strefę tarcia przylgowego,
- III strefę tarcia zmiennego.

2. Sposoby rozwiązania

Rozpatrując równowagę myślowo wyodrębnionego nieskończenie małego elementu walca (rys. 10.1) w kierunku osi r otrzymamy równanie równowagi

$$\sigma_r r d\theta H - (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\theta H + 2\sigma_\theta \sin \frac{d\theta}{2} dr H - 2t(r + \frac{dr}{2}) d\theta dr = 0,$$

które dla małych kątów $d\theta$ ($\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$), pominięciu małych wyższego rzędu oraz po redukcji i uporządkowaniu przyjmuje postać

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{2t}{H} = 0. \quad (10.3)$$

Następnym założeniem o stanie naprężenia w ściskany walcu jest przyjęcie hipotezy Haara-Káramána o pełnym uplastycznieniu materiału. Hipoteza ta mówi, że dla płynięcia materiału na zewnątrz walca

$$\sigma_\theta = \sigma_r. \quad (10.4)$$

Warunek (10.4) redukuje równanie równowagi (10.3) do postaci

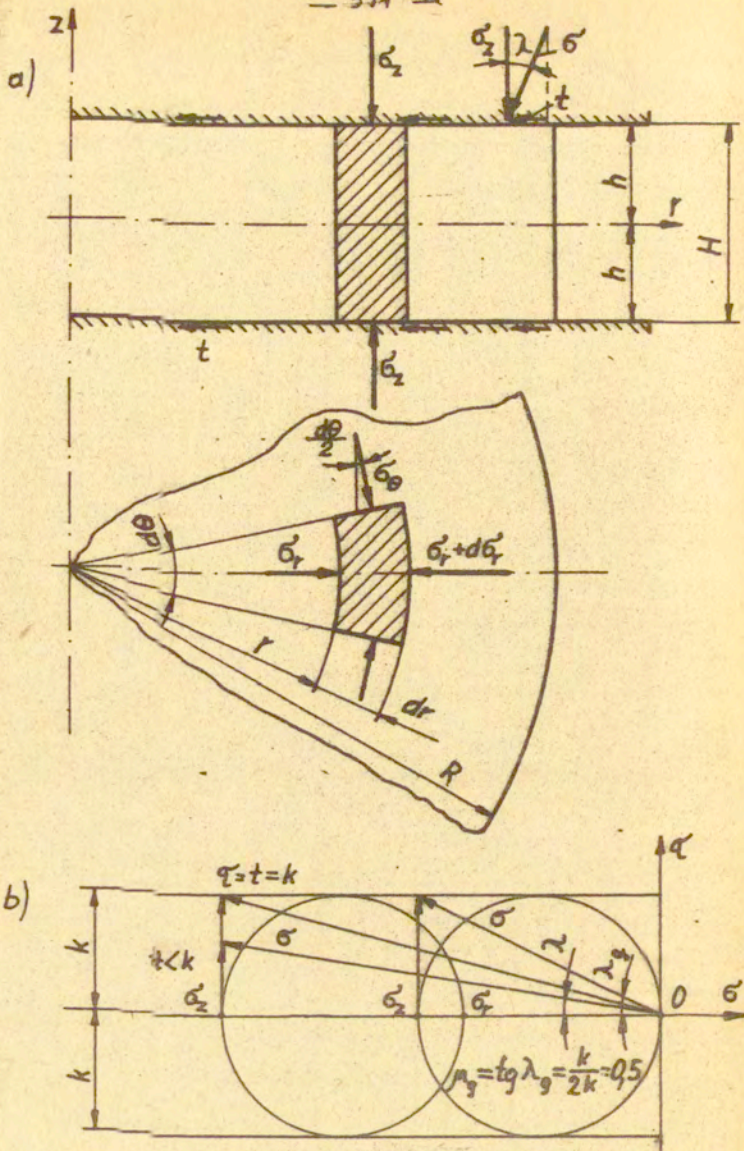
$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{2t}{H}. \quad (10.5)$$

Warunek plastyczności Treski dla kierunków głównych r , z ma postać

$$\sigma_r - \sigma_z = 2k = \sigma_p. \quad (10.6)$$

Przyjmując, że na powierzchni kontaktu materiału walca z narzędziem występuje tarcie poślizgowe Coulomba $t = \mu\sigma_z$ to równanie różniczkowe (10.5) wyrazi się

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{2\mu\sigma_z}{H}. \quad (10.7)$$



Rys.10.1.a/ Schemat obciążenia elementu walca, b/ Wektor naprężenia na kontakcie walca z narzędziem

Różniczkując warunek plastyczności (10.6) względem promienia r

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{d\sigma_z}{dr}, \quad d\sigma_r = d\sigma_z. \quad (10.8)$$

i wstawiając go do równania (10.7), otrzymamy równanie

$$\frac{d\sigma_z}{\sigma_z} = -\frac{2\mu dr}{H},$$

które po scałkowaniu ma postać

$$\ln \sigma_z = -\frac{2\mu}{H} r \ln e + \ln C$$

$$\sigma_z = C e^{-\frac{2\mu}{H} r}.$$

Stałą całkowania C obliczamy z warunku brzegowego, jeśli $r = R$,

to $\sigma_r = 0$, a $\sigma_z = -\sigma_p$

$$C = -\sigma_p e^{\frac{2\mu}{H} R}.$$

Ostatecznie naprężenie normalne do kontaktu jest określone równaniem

$$\sigma_z = -\sigma_p e^{\frac{2\mu}{H}(R-r)}, \quad (10.9)$$

a naprężenie promieniowe

$$\sigma_r = \sigma_p \left[1 - e^{\frac{2\mu}{H}(R-r)} \right]. \quad (10.10)$$

Naprężenie styczne τ na powierzchni kontaktu materiału walca z narzędziem, równe jednostkowej sile tarcia t , zgodnie z przyjętym prawem tarcia wynosi

$$\tau = t = -\mu \sigma_p e^{\frac{2\mu}{H}(R-r)}. \quad (10.11)$$

Naprężenie normalne σ_z (10.9), z którego obliczana jest siła P potrzebna do odkształcenia przyjmuje wartości graniczne: jeśli $r = R$, to $\sigma_z = \sigma_p$, a jeśli $r = 0$, to $\sigma_z = -\sigma_p e^{\frac{2\mu}{H} R}$.

Rozkład naprężenia σ_z na kontakcie pokazano na rysunku 10.2 .

Siłę P obliczamy ze wzoru

$$P = \int_0^R \sigma_z 2\pi r dr = -\sigma_p 2\pi e^{\frac{2\mu}{H}R} \int_0^R e^{-\frac{2\mu}{H}r} r dr .$$

Ostatecznie wzór na siłę P będzie miał postać

$$P = -\frac{\pi d^2}{4} \sigma_p \frac{2H^2}{\mu^2 d^2} \left[e^{\frac{\mu d}{H}} - \frac{\mu d}{H} - 1 \right] . \quad (10.12)$$

Znak minus we wzorze (10.12) znaczy, że siła jest przeciwnie skierowana do założonego kierunku osi z. Ze wzoru (10.12) bezpośrednio wynika średni nacisk jednostkowy

$$\bar{p} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \sigma_p} = -\frac{2H^2}{\mu^2 d^2} \left(e^{\frac{\mu d}{H}} - \frac{\mu d}{H} - 1 \right) . \quad (10.13)$$

Przedstawione wyżej podejście otrzymania naprężenia normalnego σ_z , siły odkształcającej P i nacisku jednostkowego \bar{p} pochodzi od węgierskiego badacza mechaniki T.Kármána, a które dokładnie rozpisał A.Nadai. Wzór (10.13) daje dobre wyniki dla próbek wysokich, dla niskich natomiast wyniki są nieprawdopodobnie wysokie.

Fakt dużego nacisku jednostkowego dla próbek niskich otrzymanych przez T.Kármána skłonił E.Siebela do wyprowadzenia nowych wzorów przy założeniu, że jednostkowa siła tarcia $t = -\mu \sigma_p$. Założenie to wraz z zależnością (10.8) doprowadza równanie (10.5) do postaci

$$d\sigma_z = \sigma_p \frac{2\mu}{H} dr ,$$

którego rozwiązanie przy takich samych warunkach brzegowych daje naprężenie normalne

$$\sigma_z = -\sigma_p \left[\frac{2\mu}{H} (R-r) + 1 \right] , \quad (10.14)$$

siłę potrzebną do spęczania

$$P = \int_0^R \sigma_z 2\pi r dr = -\frac{\pi d^2}{4} \sigma_p \left(\frac{\mu d}{3H} + 1 \right) \quad (10.15)$$

oraz średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy

$$\frac{\bar{p}}{\sigma_p} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \sigma_p} = -\left(\frac{\mu d}{3H} + 1 \right). \quad (10.16)$$

Wzory /10.13/ i /10.16/ dają różne wyniki średniego bezwymiarowego nacisku jednostkowego.

Rozwijając funkcję $e^{\frac{\mu d}{H}} = 1 + \frac{\mu d}{H} + \frac{\mu^2 d^2}{2H^2} + \frac{\mu^3 d^3}{6H^3} + \dots$ ze wzoru /10.13/ w szereg Maclaurina ($e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$)

i odrzucając wyrazy dalszego rzędu, wzór T.Kármána /10.13/ przyjmuje postać wzoru Siebela /10.16/. Znaczy to, że wzór Siebela /10.16/ jest wzorem przybliżonym /uproszczonym/ wzoru Kármána /10.13/.

2.1. Podział powierzchni kontaktu na dwie strefy tarcia

Równanie /10.9/ odzwierciedla dokładniej fizyczne warunki, zachodzące na powierzchni kontaktu, niż równanie /10.14/. Fakt, że rzeczywiste naciski są mniejsze, skłania do wniosku, że na całej powierzchni kontaktu nie występuje tarcie poślizgowe Coulomba. Na zewnętrznej części kontaktu wystąpi tarcie poślizgowe ($t = \mu \sigma_z, t < k, k = \frac{\sigma_c}{2}$), natomiast w części środkowej wystąpi tarcie przylgowe ($t \gg k$). Wzór /10.9/ na naprężenie normalne wartości obowiązuje tylko w zakresie promienia $r_p < r \leq R$. W zakresie promienia $0 < r \leq r_p$ będzie tarcie przylgowe ($t \gg k$) i wówczas będzie inne równanie na naprężenie normalne σ_z dla tego zakresu. O tym, który z powyższych przypadków tarcia wystąpi, decyduje warunek ograniczający naprężenie normalne σ_z i wartość współczy-

nnika tarcia μ . Aby na kontakcie zaistniało tarcie poślizgowe ($t < k$), to $\frac{\sigma_z}{\sigma_p} < \frac{1}{2\mu}$, a gdy $\frac{\sigma_z}{\sigma_p} \gg \frac{1}{2\mu}$, to już występuje tarcie przylgowe - poślizg następuje przez ścięcie w warstwie materiału przylegającej do narzędzia ($t = k$).

Wartość promienia r_p , oddzielającego strefę II tarcia przylgowego od strefy I tarcia poślizgowego, obliczamy z równości naprężeń stycznych na tej granicy (w strefie tarcia przylgowego $t = -\frac{\sigma_p}{2}$ - znany jest kierunek naprężenia stycznego i jego wartość, natomiast w strefie tarcia poślizgowego $t = \mu\sigma_z$)

$$\mu\sigma_p e^{\frac{2\mu}{H}(R-r_p)} = 0,5\sigma_p,$$

skąd otrzymujemy

$$r_p = \frac{H}{2\mu} \ln 2\mu + R. \quad (10.17)$$

Naprężenia normalne σ_z na granicy rozdziału stref tarcia przylgowego od poślizgowego (w miejscu r_p) osiągają wartość

$$\sigma_{z_p} = -\sigma_p e^{-\ln 2\mu} = -\frac{\sigma_p}{2\mu}. \quad (10.18)$$

Dla przypadku tarcia przylgowego ($t = -\frac{\sigma_p}{2}$) równanie równowagi (10.5) przyjmuje postać

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_p}{H}, \quad (10.19)$$

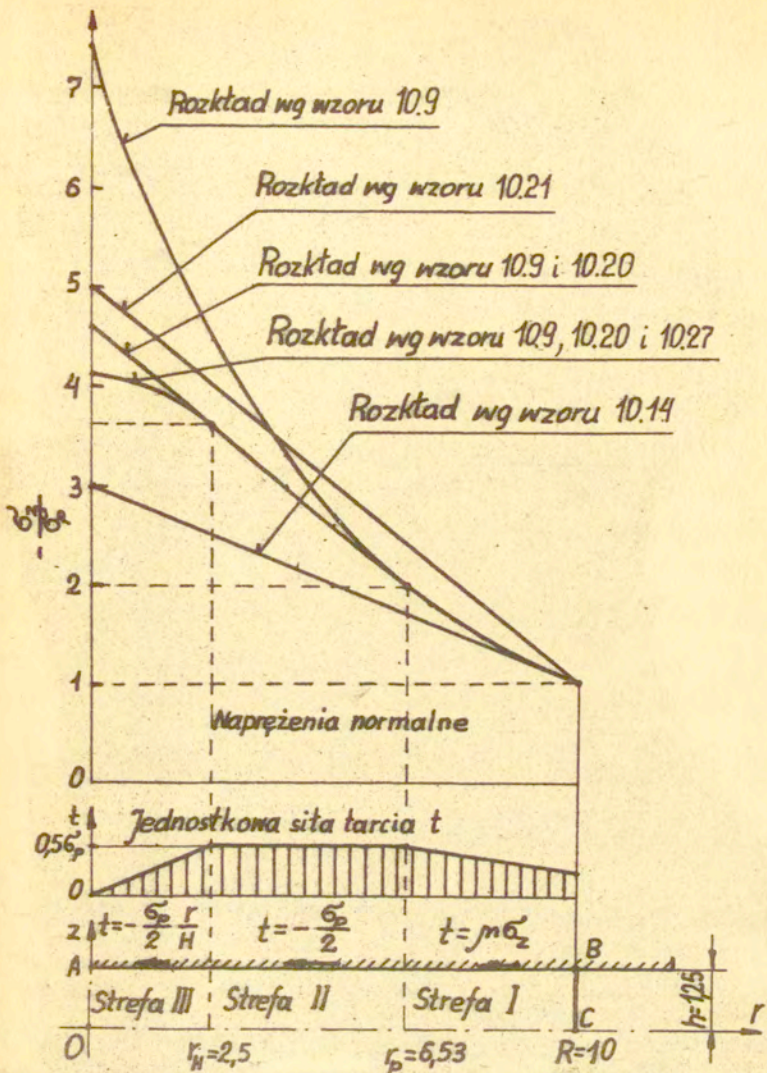
które po uwzględnieniu warunku plastyczności w postaci różniczkowej (10.8) i scałkowaniu wyrazi się

$$\sigma_z = \frac{\sigma_p}{H} r + C.$$

Stałą całkowania C obliczamy z warunku; jeśli $r = r_p$, to

$$\sigma_z = -\frac{\sigma_p}{2\mu} \quad \text{/równanie 10.18/ i wówczas}$$

$$C = -\frac{\sigma_p}{2\mu} - \frac{\sigma_p}{H} r_p.$$



Rys.10.2. Podział powierzchni kontaktu na strefy tarcia i rozkład naprężenia normalnego σ_2 i stycznego t na kontakcie: strefa I - obszar tarcia poślizgowego, strefa II - obszar tarcia przylgowego, strefa III - obszar tarcia zmiennego. Rozwiązanie dla $\mu = 0,25$

Ostatecznie naprężenie normalne σ_z dla strefy II /tarcia przylgowego/ wyrazi się wzorem

$$\sigma_{z_{II}} = -\frac{\sigma_p}{2\mu} - \frac{\sigma_p}{H} \left(\frac{H}{2\mu} \ln 2\mu + R - r \right). \quad (10.20)$$

Równanie /10.20/ spełnia warunek rozdziału stref tarcia przylgowego i poślizgowego w miejscu r_p . Dla małych wartości współczynnika tarcia μ na całej powierzchni kontaktu wystąpi tarcie poślizgowe, natomiast dla większych wartości μ wystąpi jednak obok tarcia poślizgowego i tarcie przylgowe.

Dla strefy tarcia przylgowego obowiązuje wzór /10.20/, a dla strefy tarcia poślizgowego obowiązuje wzór /10.9/. Rozkład naprężenia normalnego σ_z i stycznego $\tau = t$ na kontakcie walca z narzędziem pokazano na rysunku 10.2.

Gdy współczynnik tarcia $\mu \gg 0,5$, to na powierzchni kontaktu wystąpi tylko tarcie przylgowe i wówczas $r_p = R$ /rów.10.17/

$\sigma_{z_p} = -\sigma_p$ (rów. 10.18). Rozwiązaniem równania równowagi /10.19/ jest liniowe wyrażenie na naprężenie normalne

$$\sigma_z = -\sigma_p \left(1 + \frac{R-r}{H} \right). \quad (10.21)$$

2.2. Podział powierzchni kontaktu na trzy strefy tarcia

Załóży, że na powierzchni kontaktu materiału walca z narzędziem wzdłuż promienia r występują trzy strefy tarcia /rys. 10.2/. W strefie I zakładamy, że występuje tarcie poślizgowe i obowiązuje wzór /10.9/ na naprężenie normalne σ_z . W strefie II występuje tarcie przylgowe i obowiązuje wzór /10.20/. Pierwsza strefa odkształcenia kończy się w miejscu, w którym promień r_p przyjmuje wartość otrzymaną z równania /10.17/, a naprężenie normalne σ_{z_p} — z równania /10.18/. W strefie III

obowiązuje inna zależność na naprężenie normalne σ_z , ponieważ są inne warunki tarcia.

Na podstawie doświadczeń ustalono, że naprężenia styczne na powierzchni kontaktu spęczanego walca z narzędziem w trzeciej strefie odkształcenia zmieniają się liniowo wraz ze zmianą promienia r , osiągając w osi z wartość równą zeru

$$\tau = t = -\frac{\sigma_p}{2} \frac{r}{H}. \quad (10.22)$$

Druga strefa odkształcenia kończy się w punkcie, w którym promień r_H równy jest wysokości spęczanej próbki H , otrzymany z przyrównania naprężenia stycznego w strefie trzeciej i drugiej

$$-\frac{\sigma_p}{2} \frac{r_H}{H} = -\frac{\sigma_p}{2}.$$

Naprężenie σ_z w punkcie r_H osiąga wartość

$$\sigma_{z_H} = -\frac{\sigma_p}{2\mu} - \frac{\sigma_p}{H} \left(\frac{H}{2\mu} \ln 2\mu + R - H \right). \quad (10.23)$$

Równanie równowagi naprężeń w trzeciej strefie odkształcenia posiada analogiczną postać jak w dwóch pozostałych

$$d\sigma_z H + 2t dr = 0. \quad (10.24)$$

Uwzględniając zmianę naprężeń stycznych (10.22) i po uporządkowaniu otrzymamy równanie

$$d\sigma_z = \frac{\sigma_p}{H^2} r dr, \quad (10.25)$$

które po obustronnym scałkowaniu i podstawieniu granic całkowania

$$\sigma_z \Big|_{\sigma_{z_H}}^{\sigma_z} = \frac{\sigma_p}{H^2} \frac{r^2}{2} \Big|_H^r,$$

będzie miało rozwiązanie

$$\sigma_{z_{III}} = \sigma_{z_H} + \frac{\sigma_p}{2H^2} (r^2 - H^2). \quad (10.26)$$

Uwzględniając wyrażenie (10.23), otrzymamy równanie do określania naprężeń normalnych σ_z w trzeciej strefie odkształcenia

$$\sigma_{zIII} = -\sigma_p \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\ln 2\mu}{2\mu} + \frac{R}{H} - \frac{r^2 - H^2}{2H^2} - 1 \right). \quad (10.27)$$

W przypadku podziału powierzchni kontaktu materiału walca z narzędziem na trzy strefy tarcia krzywą rozkładu naprężenia normalnego należy wyznaczać z równań (10.9), (10.20) i (10.27) na naprężenia σ_z oraz z warunków (10.17), (10.18) i (10.23) rozdzielających strefy tarcia. Na rysunku 10.2 przedstawiono podział powierzchni kontaktu na strefy tarcia i rozkład naprężenia normalnego σ_z i stycznego t na kontakcie AB dla walca o stosunku $\frac{R}{H} = 8$.

Metoda podziału powierzchni kontaktu na trzy strefy tarcia jest najbardziej uzasadnioną z punktu fizycznego i będzie stosowana do obliczania średnich nacisków jednostkowych ściskania walców.

Silę P potrzebną do odkształcenia plastycznego walca obliczamy przez całkowanie naprężeń normalnych σ_{zI} , σ_{zII} , σ_{zIII} , w odpowiednich granicach, a średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy określamy z równania

$$\frac{\bar{P}}{\sigma_p} = \frac{P}{\sigma_p \pi R^2}. \quad (10.28)$$

Dla danej geometrii walca i przyjętego współczynnika tarcia μ należy sprawdzić, jakie strefy tarcia występują. Do tego celu służy warunek ograniczający naprężenie normalne

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_p} < \frac{1}{2\mu} \quad \text{dla tarcia poślizgowego,}$$

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_p} \gg \frac{1}{2\mu} \quad \text{dla tarcia przylgowego}$$

i równania (10.17) i (10.18). Dodatkowo należy sprawdzić naprężenie σ_z w miejscu r_p , r_H i w osi z , które muszą być wzrastające w miarę zbliżania się do osi z walca. Występowanie stref tarcia zależy od wysokości H , promienia R walca i od wartości współczynnika tarcia μ . Dla bardzo małych wartości μ i nawet dla małych wysokości H walca na całej powierzchni kontaktu występuje tarcie poślizgowe, natomiast dla większych wartości μ pojawia się już tarcie przylgowe i nawet mieszane. Przy analizowaniu walców wysokich nawet dla dużych wartości μ na całej powierzchni kontaktu występuje tylko tarcie poślizgowe. Dlatego konieczne jest każdorazowe sprawdzanie występowania stref tarcia.

W zależności od występowania stref tarcia średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy obliczamy z następujących wzorów:

1. gdy na całej powierzchni kontaktu występuje tarcie poślizgowe

$$\frac{\bar{p}}{\sigma_p} = -\frac{2H^2}{\mu^2 d^2} \left(e^{\frac{\mu d}{H}} - \frac{\mu d}{H} - 1 \right), \quad (10.29)$$

2. gdy na całej powierzchni kontaktu występuje tarcie przylgowe

$$\frac{\bar{p}}{\sigma_p} = -\left(1 + \frac{R}{3H} \right), \quad (10.30)$$

3. gdy na powierzchni kontaktu występuje tarcie poślizgowe i przylgowe

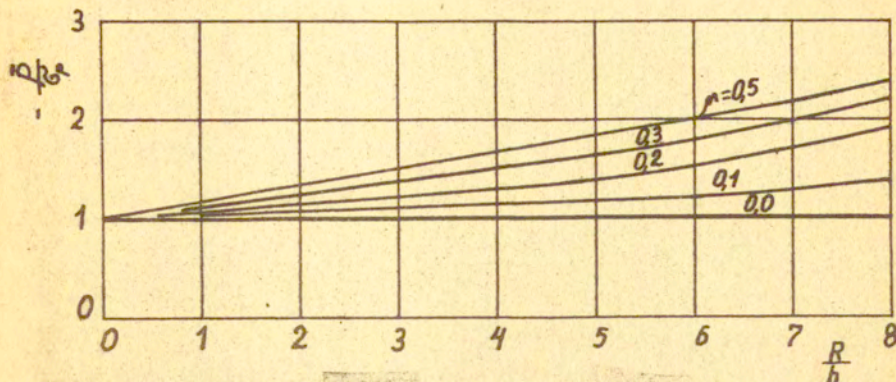
$$\frac{\bar{p}}{\zeta_p} = -\frac{2H^2}{\mu^2 d^2} \left\{ e^{\frac{2\mu}{H}(R-r_p)} \left[1 + \frac{2\mu r_p}{H} \right] - \frac{\mu d}{H} - 1 + \right. \\ \left. + \frac{\mu r_p^2}{H^2} \left(1 + \ln 2\mu + \frac{\mu d}{H} - \frac{4\mu r_p}{3H} \right) \right\}, \quad (10.31)$$

gdzie $r_p = \frac{H}{2\mu} \ln 2\mu + R$.

4. gdy na powierzchni kontaktu występują trzy strefy: strefa tarcia poślizgowego, strefa tarcia przylgowego i strefa tarcia zmiennego

$$\frac{\bar{p}}{\zeta_p} = -\frac{2H^2}{\mu^2 d^2} \left\{ e^{\frac{2\mu}{H}(R-r_p)} \left[1 + \frac{2\mu r_p}{H} \right] - \frac{\mu d}{H} - 1 + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{H^2} (r_p^2 - H^2) \left[1 + \ln 2\mu + \frac{\mu d}{H} \right] - \frac{4\mu^2}{3H^3} \cdot \right. \\ \left. \cdot (r_p^3 - H^3) + \mu(1 + \ln 2\mu) + \mu^2 \frac{3(d-H) - 2}{3H} \right\}, \quad (10.32)$$

gdzie $r_p = \frac{H}{2\mu} \ln 2\mu + R$.



Rys.10.3. Zależność średniego nacisku jednostkowego od geometrii walca i współczynnika tarcia μ ściskania walców

W celu wyznaczenia żądanego nacisku, za wielkości oznaczające geometrię walca d , R , H i współczynnik tarcia μ występujące we wzorach, należy podstawiać wartości po odkształceniu czyli końcowe.

Na rysunku 10.3 podano zależność średniego bezwymiarowego nacisku jednostkowego od geometrii walca i od współczynnika tarcia μ dla prasowania walców.

10.2.2. Ściskanie płaskowników i prostopadłościanów

1. Ściskanie płaskowników

W procesie kucia swobodnego często występuje operacja ściskania /nazywana inaczej prasowaniem lub spęczaniem/ płaskowników o wysokości $H = 2h$, szerokości $2b$ i nieograniczonej długości l . Proces spęczania między płaskimi płytami jest

procesem niestabilnym, gdyż w sposób ciągły zmieniają się wymiary metalu odkształcanego, zmieniają się również odkształcenia i naprężenia. A zatem analiza ściskania odnosi się do chwilowego stanu odkształcenia.

Na rysunku 10.4 pokazano schemat ściskania płaskownika i nieskończenie mały element objętościowy o wymiarach $2h$ i dx obciążony siłami $\sigma_x, \sigma_x + d\sigma_x, \sigma_z$ i $\tau = \mu \sigma_z$. Z powodu symetrii osiowej wystarczy rozważyć tylko jedną połowę płaskownika. Warunek równowagi ($\sum P_x = 0$) nieskończenie małego elementu prasowanego płaskownika można zapisać

$$\sigma_x H - (\sigma_x + d\sigma_x) H - 2\mu \sigma_z dx = 0,$$

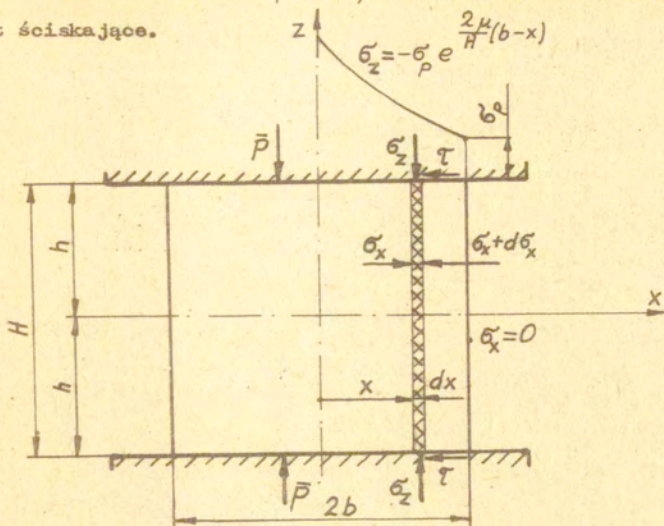
które po uporządkowaniu i wprowadzeniu warunku plastyczności ($\sigma_x - \sigma_z = \sigma_p$) w formie różniczkowej $d\sigma_x = d\sigma_z$ wyrazi się zależnością

$$\frac{d\sigma_z}{\sigma_z} = -\frac{2\mu}{H} dx. \quad (10.33)$$

Po scałkowaniu równania (10.33) ($\sigma_z = C e^{-\frac{2\mu}{H} x}$) i obliczeniu stałej C z warunku brzegowego: gdy $x = b$, to $\sigma_z = -\sigma_p, \sigma_x = 0$, otrzymujemy ostateczne równanie na naprężenie normalne σ_z w zależności od wymiarów końcowych odkształcanego płaskownika (H i b), współczynnika tarcia μ , naprężenia uplastyczniającego materiału odkształcanego σ_p i od zmiennej współrzędnej x

$$\sigma_z = -\sigma_p e^{\frac{2\mu}{H}(b-x)}. \quad (10.34)$$

Znak "minus" w równaniu (10.34) oznacza, że naprężenie σ_z jest ściskające.



Rys.10.4. Schemat prasowania płaskownika i obciążenia elementu

Siłę potrzebną do odkształcenia jednostki długości płaskownika oblicza się przez całkowanie zależności (10.34) w granicach od 0 do b

$$P = 2 \int_0^b \sigma_z dx = -2\sigma_p \int_0^b e^{\frac{2\mu}{H}(b-x)} dx = -\sigma_p \frac{H}{\mu} (e^{\frac{2\mu}{H}b} - 1).$$

Natomiast średni nacisk jednostkowy przypadający na jednostkę długości w procesie spęczania określony jest równaniem

$$\bar{p} = \frac{P}{2b} = -\sigma_p \frac{H}{2\mu b} (e^{\frac{2\mu}{H}b} - 1). \quad (10.35)$$

Średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy, co do wartości bezwzględnej, ściskania płaskownika wynosi

$$\frac{\bar{p}}{\sigma_p} = -\frac{H}{2\mu b} (e^{\frac{2\mu b}{H}} - 1). \quad (10.36)$$

W literaturze anglosaskiej spotyka się wprowadzenie do wzoru (10.36) zamiast naprężenia uplastyczniającego σ_p intensywności naprężenia σ_i dla płaskiego stanu odkształcenia

$$\left(\sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}\right) \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right]} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_x - \sigma_z),$$

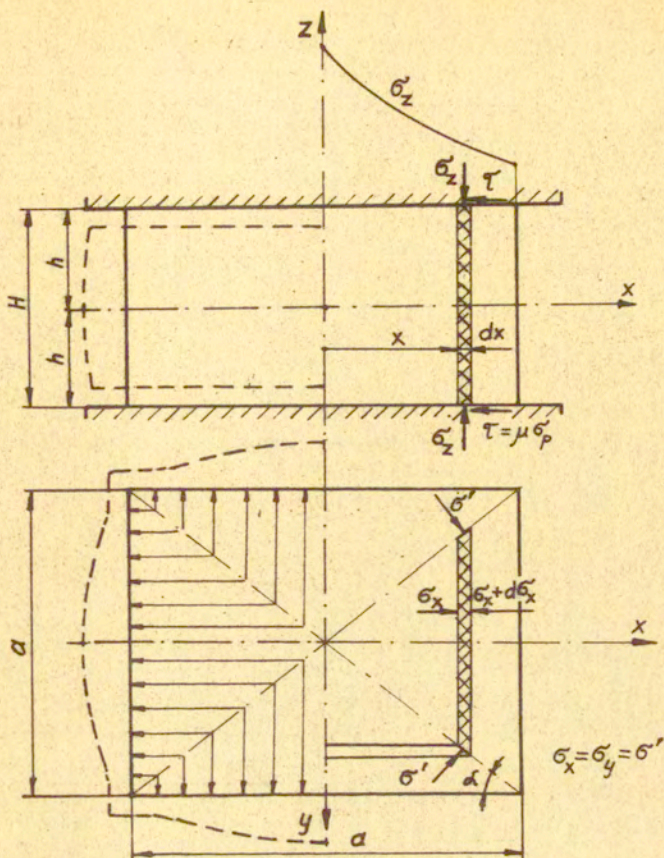
z którego oblicza się $\sigma_x = \sigma_z + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i$, $d\sigma_x = d\sigma_z$ i wprowadza do równania równowagi. Dla danego materiału naprężenie σ_p jest znane, gdyż określone jest z próby jednoosiowego rozciągania, natomiast intensywność naprężenia σ_i jest tutaj nieokreślona.

2. Ściskanie prostopadłościanów

Przy plastycznym kształtowaniu materiału każdy punkt odkształcanego ciała przemieszcza się w kierunku, w którym napotyka najmniejszy opór. Rządzi tutaj zasada najmniejszego oporu. Najmniejszy opór płynięcia wystąpi wzdłuż trajektorii określonej najkrótszą normalną do obwodu przekroju odkształcanego metalu. Przy ścisaniu prostopadłościanów (rys. 10.5 i 10.6), podstawę prostopadłościanu dzielimy na cztery części liniami równo odległymi od krawędzi. Linie te rozdzielają obszary płynięcia punktów metalu po najkrótszej normalnej zaznaczonej strzałką na rysunku 10.5.

Wyprowadźmy wzór na nacisk jednostkowy dla ściskania prostopadłościanów o podstawie kwadratowej (rys. 10.5). Równowaga nieskończenie małego elementu dla jednej ćwiartki przekroju prostopadłościanu ($\sum P_x = 0$) wyraża się

$$\sigma_x 2xH - (\sigma_x + d\sigma_x)(2x + 2dx)H + 2\sigma_x \cos \alpha \frac{dx}{\cos \alpha} H - 2\mu \sigma_p 2x dx = 0,$$



Rys. 10.5. Schemat ściskania prostopadłościanu o podstawie kwadratowej i schemat działania naprężeń na wyodrębniony element.

a po wymnożeniu i przeprowadzeniu redukcji równanie równowagi przyjmuje postać

$$d\sigma'_x = -\frac{2\mu}{H} \sigma'_p dx. \quad (10.37)$$

Po podstawieniu warunku plastyczności $\sigma_x - \sigma_z = \sigma_p$ w formie różniczkowej $d\sigma_x = d\sigma_z$ i scałkowaniu równania (10.37)

$$\sigma_z = -\sigma_p \frac{2\mu}{H} x + C$$

i obliczeniu stałej całkowania $C = \sigma_p \left(\frac{\mu a}{H} - 1 \right)$ z warunku brzegowego: gdy $x = \frac{a}{2}$, to $\sigma_x = 0$, $\sigma_z = -\sigma_p$, otrzymujemy zależność na naprężenie normalne σ_z ściskania prostopadłościaków

$$\sigma_z = -\sigma_p \left[1 + \frac{2\mu}{H} \left(\frac{a}{2} - x \right) \right]. \quad (10.38)$$

Znak "minus" oznacza, że naprężenie σ_z jest ściskające.

Całkowitą siłę potrzebną do ściskania prostopadłościaków obliczamy z równania

$$P = 4 \int_{x=0}^{x=\frac{a}{2}} \sigma_z 2x dx = \sigma_p a^2 \left(1 + \frac{\mu a}{3H} \right), \quad (10.39)$$

Średni nacisk jednostkowy wyznaczamy ze wzoru

$$\bar{p} = \frac{P}{a^2} = \sigma_p \left(1 + \frac{\mu a}{3H} \right). \quad (10.40)$$

Ściskanie prostopadłościaku o podstawie prostokąta a z b pokazano na rysunku 10.6.

Analizujemy tylko jeden pasek o szerokości $b-a$, gdyż dla pozostałego przekroju siła P jest obliczona. Siłę P_1 dla paska $b-a$ obliczamy z rozpatrzenia równania równowagi ($\sum P_x = 0$) pomyślanego nieskończenie małego elementu $(b-a) dx H$. Zatem mamy:

$$\sigma_x (b-a) H - (\sigma_x + d\sigma_x) (b-a) H - 2\mu \sigma_p (b-a) dx = 0,$$

$$d\sigma_x = -\sigma_p \frac{2\mu}{H} dx,$$

$$d\sigma_x = d\sigma_z,$$

$$\sigma_z = -\sigma_p \frac{2\mu}{H} x + C,$$

$$C = \sigma_p \left(1 + \frac{\mu a}{H}\right), \text{ gdy } x = \frac{a}{2}, \sigma_z = \sigma_p,$$

$$\sigma_z = \sigma_p \left[1 + \frac{2\mu}{H} \left(\frac{a}{2} - x\right)\right]. \quad (10.41)$$

Siła P_1 jest równa

$$P_1 = 2 \int_{x=0}^{x=\frac{a}{2}} \sigma_x (b-a) dx = \sigma_p a(b-a) \left(1 + \frac{\mu a}{H}\right),$$

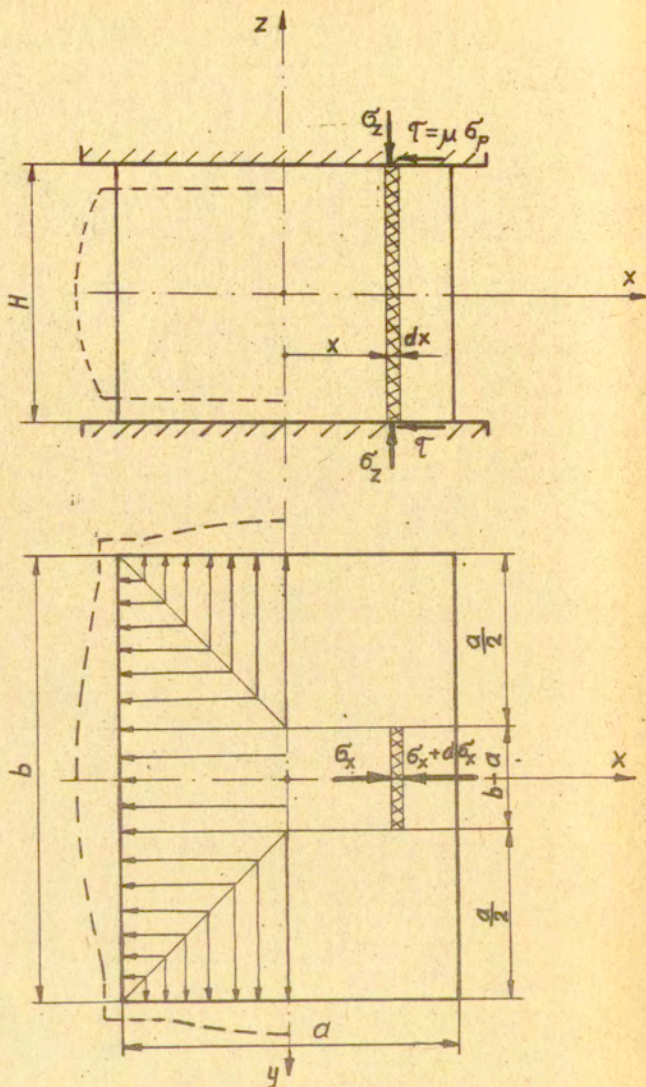
a siła całkowita ściskania prostopadłościanu wyraża się

$$P_c = P + P_1 = \sigma_p a^2 \left(1 + \frac{\mu a}{3H}\right) + \sigma_p a(b-a) \left(1 + \frac{\mu a}{H}\right),$$

$$P_c = ab \sigma_p \left(1 + \frac{3b-2a}{3b} \frac{\mu a}{H}\right). \quad (10.42)$$

Średni nacisk jednostkowy ściskania prostopadłościanów obliczamy z wzoru

$$\bar{p} = \frac{P_c}{ab} = \sigma_p \left(1 + \frac{3b-2a}{3b} \frac{\mu a}{H}\right). \quad (10.43)$$

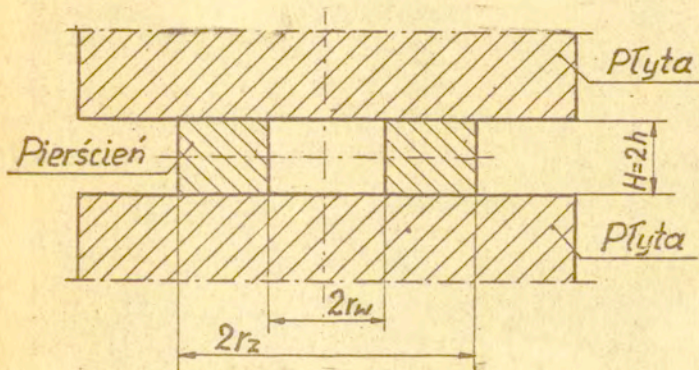


Rys.10.6. Schemat ściskania prostopadłościennu o podstawie prostokąta axb

10.2.3. Ściskanie pierścieni

Poniżej zostanie przedstawiona uproszczona (przybliżona) metoda obliczania nacisku jednostkowego ściskania pierścieni pomiędzy dwiema równoległymi i sztywnymi płytami (rys.10.7) z prędkością v_0 . Metoda ta opiera się na analogicznych upraszczających założeniach o stanie naprężenia, jakie przyjęli E.Siebel, W. Schroeder i D.A. Webster dla rozwiązania zagadnienia ściskania pełnego niskiego walca (krażka). Zakłada się, że stan naprężenia w ściskanym pierścieniu zależy jedynie od promienia r . Naprężenie w kierunku osi z , σ_z , jest na całej wysokości pierścienia H stałe i równe naciskowi jednostkowemu płyty. Pomińnięcie naprężeń stycznych, $\tau_{rz} = 0$, powoduje pokrywanie się kierunków głównych naprężeń z osiami układu współrzędnych r, θ, z , a więc naprężenia $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ są głównymi.

Na powierzchni kontaktu pierścienia z płytami występuje tarcie scharakteryzowane jednostkową siłą tarcia. Siła tarcia zmienia stan naprężenia na powierzchni styku i wpływa na wzrost całkowitej siły odkształcania pierścienia.



Rys.10.7. Schemat ściskania pierścienia między sztywnymi płytami

Na powierzchni kontaktu pierścienia z płytami może wystąpić tarcie poślizgowe ($t = \mu \sigma_z$, $t < k$), przylgowe ($t \geq k$) oraz tarcie mieszane (na części kontaktu występuje tarcie poślizgowe, a na części kontaktu - tarcie przylgowe).

Z doświadczeń ściskania pierścieni wiemy, że pewna część materiału płynie na zewnątrz (\mathcal{V}_{r1}) czyli zgodnie z dodatnim kierunkiem osi r , a pewna (wewnętrzna) część - płynie do środka (\mathcal{V}_{r2}) przyjętego układu osi współrzędnych r, z . Istnieje zatem promień neutralny r_n , rozdzielający wspomniane strefy ruchu materiału pierścienia. Ponieważ zwrot siły tarcia jest przeciwnie skierowany do kierunku ruchu materiału pierścienia, to siły tarcia t w obu strefach są różnie skierowane względem promienia r (rys.10.8). W konsekwencji prowadzi to do dwóch równań równowagi w kierunku osi r .

Zagadnienie ściskania pierścieni występuje w technice przy kuciu lub prasowaniu swobodnym wszelkiego rodzaju pierścieni, częściowo przy wyciskaniu na zimno pierścieni łożysk kulkowych wzdłużnych oraz przy ściskaniu pierścieni w celu wyznaczania własności smarnych smarów technologicznych.

1. Równania równowagi

Rozpatrując równowagę myślowo wyodrębnionego nieskończenie małego elementu (rys.10.8) w kierunku osi r otrzymamy następujące dwa równania równowagi:

a) dla płynięcia materiału na zewnątrz pierścienia

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta H - \sigma_r r d\theta H - 2\sigma_\theta \sin \frac{d\theta}{2} dr H + \\ - 2t(r + \frac{dr}{2})d\theta dr = 0,$$

b) dla płynięcia materiału do wewnątrz pierścienia

$$(\sigma'_r + d\sigma'_r)(r + dr)d\theta H - \sigma'_r r d\theta H - 2\sigma'_\theta \sin \frac{d\theta}{2} dr H + \\ + 2t(r + \frac{dr}{2})d\theta dr = 0.$$

Przyjmując, że dla małych kątów $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$ i pominięciu małych wyższego rzędu oraz uporządkowaniu równania równowagi pierścienia przyjmują postać:

a) dla płynięcia materiału na zewnątrz pierścienia

$$\frac{d\sigma'_r}{dr} + \frac{\sigma'_r - \sigma'_\theta}{r} - \frac{2t}{H} = 0, \quad (10.44)$$

b) dla płynięcia materiału do wewnątrz pierścienia

$$\frac{d\sigma'_r}{dr} + \frac{\sigma'_r - \sigma'_\theta}{r} + \frac{2t}{H} = 0. \quad (10.45)$$

Następnym założeniem o stanie naprężenia w ściskanym pierścieniu jest przyjęcie hipotezy Haara-Kármána o pełnym uplastycznieniu materiału. Hipoteza ta mówi, że przy płynięciu materiału na zewnątrz pierścienia

$$\sigma'_\theta = \sigma'_r, \quad (10.46)$$

a przy płynięciu materiału do środka pierścienia

$$\sigma'_\theta = \sigma'_z. \quad (10.47)$$

Warunek plastyczności Treski dla kierunków głównych r, z ma postać

$$\sigma'_r - \sigma'_z = 2k. \quad (10.48)$$

Stan naprężenia na kontakcie reprezentowany jest wektorem naprężenia σ o składowej normalnej $\sigma_z = -\sigma_{zn}$ i składowej stycznej t (rys.10.8a). Wektor ten jest nachylony do normalnej do kontaktu σ_{zn} pod kątem tarcia λ . Na płaszczyźnie naprężeń σ, τ (rys.10.8b) wektor ten ma początek w punkcie 0, a koniec na płaszczyźnie σ, τ ograniczonej obwiedniami kół Mohra o promieniu k .

Jeśli koniec wektora znajduje się wewnątrz obszaru ograniczonego obwiedniami z ich wyłączeniem, to składowa styczna t wyraża się związkiem

$$t = \mu \sigma_{zn} = -\mu \sigma_z, \quad (10.49)$$

gdzie $\mu = \operatorname{tg} \lambda = \frac{t}{\sigma_{zn}}$ jest współczynnikiem tarcia. Jeśli natomiast koniec wektora znajduje się na obwiedni, to składowa styczna jest równa wytrzymałości materiału na ścięcie

$$t = k. \quad (10.50)$$

Z rysunku 10.8b widać, że o tym, który z powyższych przypadków wystąpi, decyduje wartość μ . Przypadek opisany równaniem (10.49) oznacza, że poślizg materiału pierścienia po sztywnych płytach odbywa się przy istnieniu tarcia suchego (Coulomba). Warunek (10.50) mówi, że poślizg nastąpi przez ścięcie w warstwie przylegającej do płyty. Z równania (10.49) i (10.50) wynika warunek ograniczający naprężenie normalne σ_z , aby na kontakcie istniało tarcie poślizgowe Coulomba. Ponieważ $t < k$, to warunek ma postać

$$\frac{\sigma_z}{2k} < \frac{1}{2\mu}. \quad (10.51)$$

Gdy $\frac{\sigma_z}{2k} \geq \frac{1}{2\mu}$, to już występuje tarcie przylgowe.

Podstawiając równanie (10.46) i (10.49) oraz drugi raz równanie (10.46) i (10.50) do równania (10.44) otrzymamy dwa rów-

nania równowagi dla płynięcia materiału na zewnątrz pierścienia:

a/ dla tarcia poślizgowego Coulomba

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\mu\sigma_z}{H} = 0, \quad (10.52)$$

b/ dla tarcia przylgowego

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2k}{H} = 0. \quad (10.53)$$

Jeśli natomiast równania (10.47), (10.48) i (10.49) oraz drugi raz równanie (10.47), (10.48) i (10.50) podstawimy do równania (10.45), to również otrzymamy dwa równania równowagi dla płynięcia materiału do wewnątrz pierścienia:

a/ dla tarcia poślizgowego Coulomba

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2k}{r} - \frac{2\mu\sigma_z}{H} = 0, \quad (10.54)$$

b/ dla tarcia przylgowego

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2k}{r} + \frac{2k}{H} = 0. \quad (10.55)$$

2. Rozwiązanie równań

2.1. Równania naprężeń przy wypływie materiału na zewnątrz pierścienia

Równanie (10.52) po podstawieniu zależności $\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{d\sigma_z}{dr}$ i scałkowaniu daje związek

$$\sigma_z = C e^{-\frac{2\mu}{H}r}.$$

Stałą całkowania C znajdujemy z warunku brzegowego; jeśli $r = r_z$, to $\sigma_r = 0$, a $\sigma_z = -2k$

$$C = -2k e^{\frac{2\mu}{H} r_2}$$

Ostatecznie naprężenie normalne jest określone równaniem

$$\sigma_{z_1} = -2k e^{\frac{2\mu}{H}(r_2 - r)}, \quad (10.56)$$

a naprężenie promieniowe

$$\sigma_{r_1} = -2k \left[e^{\frac{2\mu}{H}(r_2 - r)} - 1 \right]. \quad (10.57)$$

Promień $r_n \leq r \leq r_z$, gdy na całej powierzchni kontaktu występuje tarcie poślizgowe Coulomba lub $r_m \leq r < r_z$ — gdy występuje tarcie mieszane (poślizgowe i przylgowe). Naprężenia σ_r ,

σ_z są przeciwnie skierowane do założonych kierunków, a więc są ściskające. Równania (10.56) i (10.57) są ważne, jeśli jest spełniony warunek (10.51).

Gdy $\left| \frac{\sigma_z}{2k} \right| \geq \frac{1}{2\mu}$, wtedy występuje tarcie przylgowe, ponieważ siła tarcia $t = k$. Wówczas równanie (10.53) po scałkowaniu ma postać

$$\sigma_r = \frac{2k}{H} r + C.$$

Stałą całkowania C wyznacza się z warunku równości naprężeń promieniowych σ_r w miejscu r_{mz} , gdzie $\sigma_z = -\frac{k}{\mu}$, a $\sigma_r = -\frac{k}{\mu} + 2k$, wówczas $C = -\frac{k}{\mu} - \frac{2k}{H} r_{mz} + 2k$. Na części kontaktu, gdzie występuje tarcie przylgowe, naprężenie promieniowe wyraża się równaniem

$$\sigma_{r_3} = -\frac{k}{\mu} - \frac{2k}{H} (r_{mz} - r) + 2k, \quad (10.58)$$

a naprężenie wzdłuż osi z równaniem

$$\sigma_{z_3} = -\frac{k}{\mu} - \frac{2k}{H}(r_{mz} - r) \quad (10.59)$$

dla $r_n \leq r \leq r_{mz}$.

Jeśli na całej powierzchni kontaktu materiału pierścienia z narzędziem, w strefie płynięcia na zewnątrz, występuje tarcie przylgowe (warunek brzegowy wyznaczenia stałej całkowania C jest $r = r_z$, $\sigma_z = 0$), to równania naprężeń mają postać

$$\sigma_{r_5} = -\frac{2k}{H}(r_z - r), \quad (10.60)$$

$$\sigma_{z_5} = -2k\left(1 + \frac{r_z - r}{H}\right), \quad (10.61)$$

gdzie $r_n \leq r \leq r_z$.

2.2. Równania naprężeń przy wpływie materiału do wnętrza pierścienia

Równanie (10.54) po uwzględnieniu zależności $\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{d\sigma_z}{dr}$ (z równania 10.48) rozwiązujemy metodą uzmiennienia stałej C całki szczególnej równania uproszczonego o postaci

$$\sigma_z = C e^{\frac{2\mu}{H}r}. \quad (10.62)$$

Stała całkowania równania uproszczonego wyraża się równaniem

$$C = -2k \int \frac{1}{r} e^{-\frac{2\mu}{H}r} dr + A, \quad (10.63)$$

$$C = -2k \left(\ln r - \frac{2\mu r}{H} + \frac{\mu^2 r^2}{H^2} - \frac{4\mu^3 r^3}{9H^3} + \frac{\mu^4 r^4}{6H^4} \right) + A.$$

Stałą A wyznaczamy z warunku brzegowego $r = r_w$, $\sigma_r = 0$ i warunku plastyczności, z którego wynika $\sigma_z = -2k$, po wstawieniu zależności (10.63) do równania (10.62). Stała A wyraża się wzorem

$$A = -2k e^{-\frac{2\mu}{H}r_w} + 2k \left(\ln r_w - \frac{2\mu r_w}{H} + \frac{\mu^2 r_w^2}{H^2} - \frac{4\mu^3 r_w^3}{9H^3} + \frac{\mu^4 r_w^4}{6H^4} \right). \quad (10.64)$$

Ostatecznie równania naprężeń wyrażą się w postaci

$$\sigma_{z_2} = -2k \left\{ e^{-\frac{2\mu}{H}(r-r_w)} - e^{\frac{2\mu}{H}r} \left[\ln \frac{r_w}{r} + \frac{2\mu}{H}(r-r_w) + \frac{\mu^2}{H^2}(r_w^2-r^2) + \frac{4\mu^3}{9H^3}(r^3-r_w^3) + \frac{\mu^4}{6H^4}(r_w^4-r^4) \right] \right\}, \quad (10.65)$$

$$\sigma_{r_2} = -2k \left\{ e^{\frac{2\mu}{H}(r-r_w)} - e^{\frac{2\mu}{H}r} \left[\ln \frac{r_w}{r} + \frac{2\mu}{H}(r-r_w) + \frac{\mu^2}{H^2}(r_w^2-r^2) + \frac{4\mu^3}{9H^3}(r^3-r_w^3) + \frac{\mu^4}{6H^4}(r_w^4-r^4) \right] - 1 \right\}. \quad (10.66)$$

Promień $r_w \leq r \leq r_n$, gdy na całej powierzchni kontaktu występuje tarcie poślizgowe lub $r_w \leq r \leq r_{mw}$ — gdy występuje tarcie mieszane. Tarcie poślizgowe Coulomba będzie zachodziło wtedy, gdy zostanie spełniony warunek (10.51). W przypadku, gdy $\left| \frac{\sigma_z}{2k} \right| \geq \frac{1}{2\mu}$, występuje tarcie przylgowe. Wówczas naprężenia obliczamy z równania (10.55), którego rozwiązaniem jest

$$\sigma_r = -2k \left(\frac{r}{H} + \ln Hr \right) + C.$$

Stałą C znajdujemy z warunku: gdy $\sigma_z = -\frac{k}{\mu}$, to $r = r_{mw}$, a $\sigma_r = -\frac{k}{\mu} + 2k$, wówczas

$$C = -\frac{k}{\mu} + 2k + 2k \left(\frac{r_{mw}}{H} + \ln H r_{mw} \right).$$

Naprężenia wyrażają się równaniami:

$$\sigma_{r_2} = -\frac{k}{\mu} + 2k - 2k \left(\frac{r-r_{mw}}{H} + \ln \frac{r}{r_{mw}} \right), \quad (10.67)$$

$$\sigma_{z_4} = -\frac{k}{\mu} - 2k \left(\frac{r - r_{mw}}{H} + \ln \frac{r}{r_{mw}} \right) \quad (10.68)$$

dla $r_{mw} \leq r \leq r_n$.

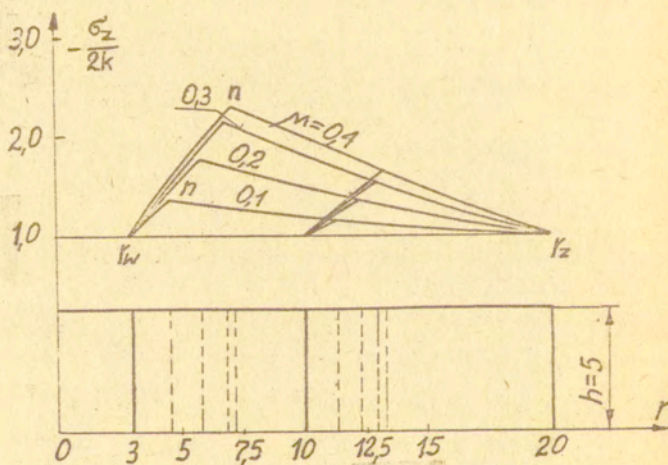
Jeśli na całej powierzchni kontaktu materiału pierścienia z narzędziem w strefie płynięcia materiału do wewnątrz pierścienia występuje tarcie przylgowe (stałą C wyznaczamy z warunku $r=r_w$,

$\sigma_r = 0$), to równania naprężeń mają postać

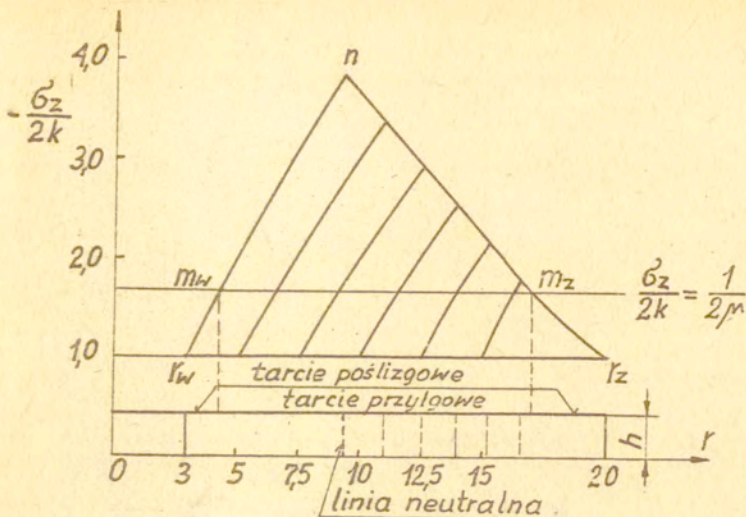
$$\sigma_{r_6} = -2k \left(\frac{r - r_w}{H} + \ln \frac{r}{r_w} \right), \quad (10.69)$$

$$\sigma_{z_6} = -2k \left(\frac{r - r_w}{H} + \ln \frac{r}{r_w} + 1 \right) \quad (10.70)$$

dla $r_w \leq r \leq r_n$.



Rys.10.9. Zależność naprężenia $\frac{\sigma_z}{2k}$ od promienia r pierścienia i współczynnika tarcia μ dla $\frac{r_n}{h} = 4$, $\frac{r_w}{h} = 6,66$ i 2



Rys.10.10. Zależność naprężenia $\frac{\sigma_z}{2k}$ od promienia r pierścienia dla $\mu = 0,3$ (tarcie mieszane) i $\frac{r_z}{h} = 11,43$.

Na rysunku 10.9 pokazano zależność naprężenia normalnego od promienia r i współczynnika tarcia μ przy stałym stosunku $\frac{r_z}{h} = 4$ dla $\frac{r_z}{r_w} = 6,66$ i 2 . Dla $\mu = 0,1$ i $0,2$ występuje tarcie poślizgowe, a dla $\mu = 0,3$ i $0,4$ — tarcie mieszane. Gdy $\mu = 0,5$, to na całej powierzchni kontaktu występuje tarcie przyślizgowe. Wierzchołek n , przecięcia się krzywej r_{zn} i r_{wn} oznacza jednocześnie, że w tym miejscu występuje równość naprężeń promieniowych, $\sigma_{r1} = \sigma_{r2}$ i jednocześnie $\sigma_{z1} = \sigma_{z2}$. Promień, przy którym zachodzi równość naprężeń, nazywamy promieniem neutralnym r_n ($\sigma_{rn} = 0$). Na rysunku 10.10 pokazano zależność naprężenia normalnego od promienia r dla $\mu = 0,3$ i $\frac{r_z}{h} = 11,43$. Linia $m_w m_z$ rozdziela naprężenia wpływające na występowanie dwóch stref tarcia, przyślizgowego i poślizgowego, które zaznaczono na powierzchni pierścienia. Pokazano również linię neutralną, rozdziela-

jącą strefę płynięcia na zewnątrz pierścienia (po prawej stronie) oraz strefę płynięcia materiału do środka pierścienia (po lewej stronie linii neutralnej).

Średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy obliczamy z równania

$$\frac{\bar{P}}{2k} = \frac{P}{2k\pi(r_z^2 - r_w^2)} \quad (10.71)$$

Siłę P , ściskającą pierścień, obliczamy przez całkowanie odpowiednich równań naprężeń σ_z , działających na powierzchnię kontaktu pierścienia z narzędziem. Całkowita siła P jest sumą sił działających na odcinek kontaktu płynięcia materiału na zewnątrz i do wewnątrz pierścienia. Na każdym takim odcinku występuje strefa tarcia poślizgowego, przylgowego bądź mieszanego (poślizgowe i przylgowe). Jeśli na całej powierzchni kontaktu pierścienia z narzędziem występuje tarcie poślizgowe Coulomba, to siła P ściskająca pierścień wyraża się równaniem

$$P = 2\pi \left(\int_{r_w}^{r_n} \sigma_{z2} r dr + \int_{r_n}^{r_z} \sigma_{z1} r dr \right). \quad (10.72)$$

Gdy na całej powierzchni kontaktu występuje tarcie przylgowe, to siłę P oblicza się z równania

$$P = 2\pi \left(\int_{r_w}^{r_n} \sigma_{z6} r dr + \int_{r_n}^{r_z} \sigma_{z5} r dr \right). \quad (10.73)$$

W przypadku, gdy na powierzchni kontaktu występuje tarcie mieszane, to siłę P oblicza się z równania

$$P = 2\pi \left(\int_{r_w}^{r_{mw}} \sigma_{z2} r dr + \int_{r_{mw}}^{r_n} \sigma_{z4} r dr + \int_{r_n}^{r_{mz}} \sigma_{z3} r dr + \int_{r_{mz}}^{r_z} \sigma_{z1} r dr \right). \quad (10.74)$$

Przy występowaniu tarcia poślizgowego na całej powierzchni oraz tarcia mieszanego scałkowanie naprężeń σ_{z1} , σ_{z2} , σ_{z3} i

σ_{z4} w oznaczonych granicach nie następuje większych trudności, ale otrzymuje się wyrażenie bardzo długie i absolutnie nieprzydatne. Nie można określić granic całkowania r_n , r_{mw} , r_{mz} w postaci zamkniętej. Granice te można określić z równań przestępnych. Średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy dla tych przypadków najprościej jest przedstawić przy pomocy równań (10.71), (10.72) i (10.74). Dla przypadku, gdy na całej powierzchni kontaktu występuje tarcie przylgowe, wówczas bezwymiarowy jednostkowy nacisk (zgodnie z równaniem (10.71) i (10.73)) wyrazić można w postaci funkcji

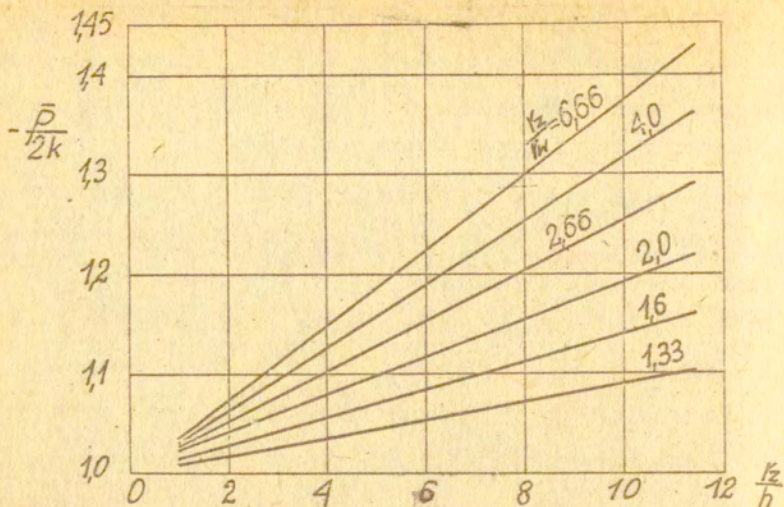
$$-\frac{\bar{p}}{2k} = 1 + \frac{4r_n^3}{3H(r_z^2 - r_w^2)} - \frac{2(r_z^2 - r_z r_w + r_w^2)}{3H(r_z - r_w)} + \frac{r_z^2 - r_z r_w + r_w^2}{H(r_z - r_w)} + \frac{r_n^2 \ln \frac{r_n}{r_w}}{r_z^2 - r_w^2} - \frac{r_n^2}{H(r_z - r_w)} + \frac{r_w^2 - r_n^2}{2(r_z^2 - r_w^2)}, \quad (10.75)$$

gdzie $r_n = f(r_z, r_w, H, \ln r_n)$.

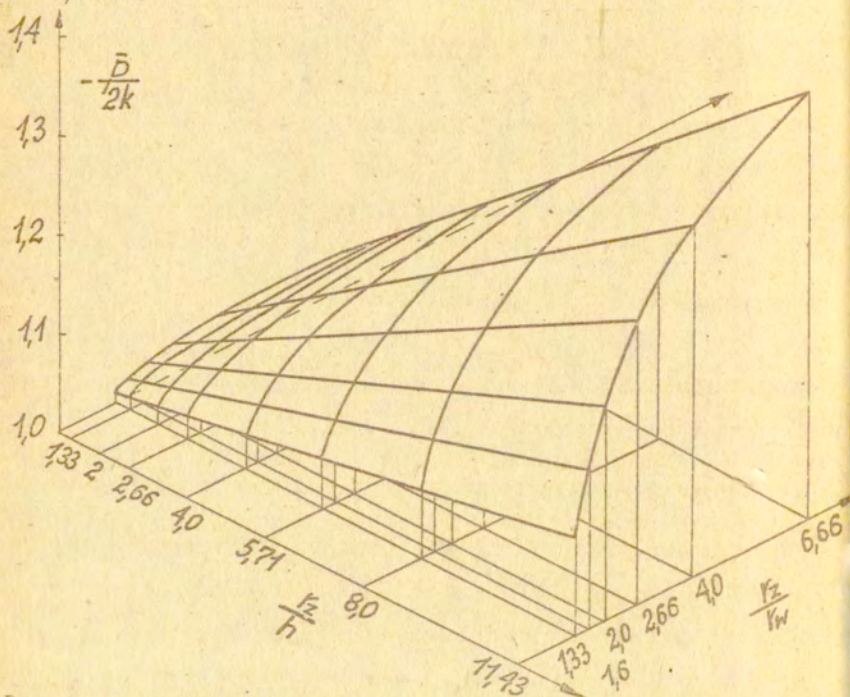
Zależność średniego nacisku jednostkowego od wymiarów pierścienia dla tarcia $\mu = 0,1$ (poślizgowe) pokazano na rysunku 10.11 i 10.12. Rysunek 10.13 pokazuje zależność średniego nacisku jednostkowego od wymiarów pierścienia dla $\mu = 0,3$. Natomiast w jaki sposób zmienia się nacisk w zależności od współczynnika tarcia μ i promieni pierścienia przy stałej jego wysokości pokazano na rysunku 10.14.

2.3. Obliczenie promienia neutralnego

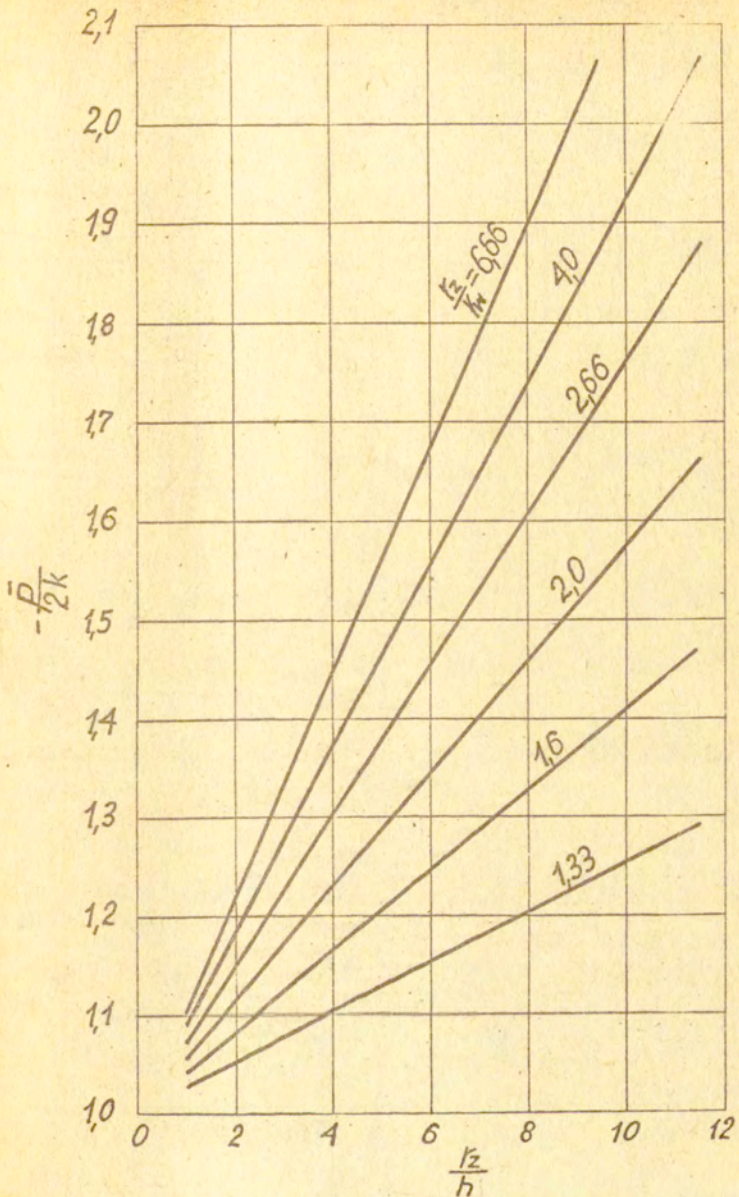
Wraz ze zmianą geometrii pierścienia i współczynnika tarcia μ zmienia się wielkość promienia neutralnego r_n . Promień neutralny r_n oblicza się z warunku równości naprężeń promieniowych σ_r przy wypływie materiału na zewnątrz pierścienia i przy wy-



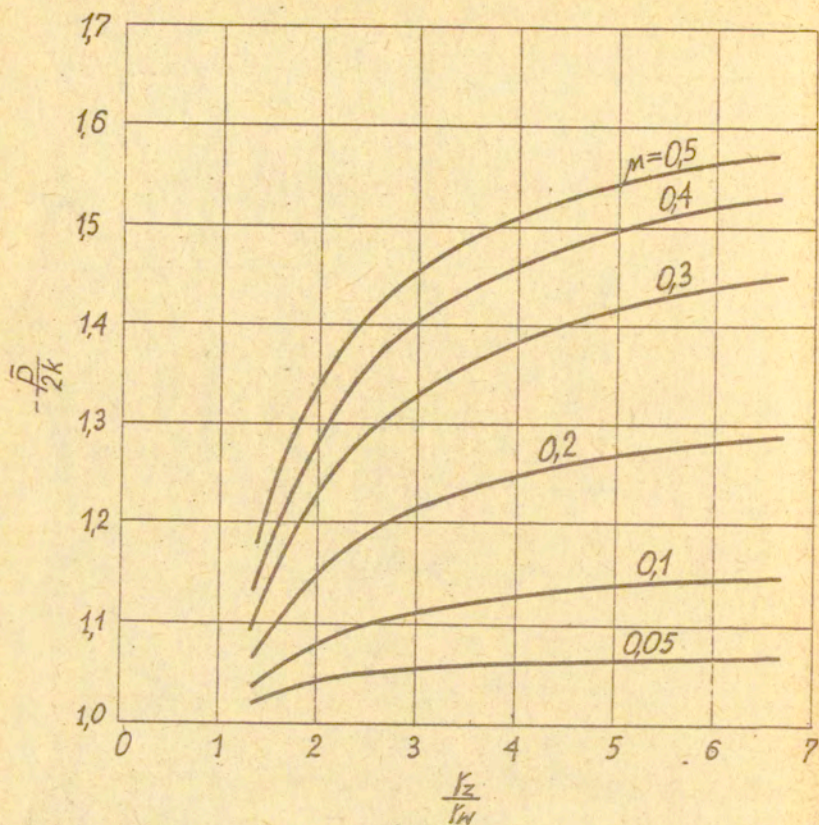
Rys.10.11. Zależność nacisku $\frac{\bar{p}}{2k}$ od wymiarów pierścienia dla $\mu = 0,1$.



Rys.10.12. Powierzchnia nacisku jednostkowego ściskania pierścieni dla $\mu = 0,1$.



Rys.10.13. Zależność średniego nacisku jednostkowego od wymiarów pierścienia $(\frac{r_2}{h}, \frac{r_1}{r_2})$ dla $\mu = 0,3$.



Rys. 10.14. Zależność średniego nacisku jednostkowego od współczynnika tarcia μ i stosunku promieni pierścienia $\frac{r_2}{r_1}$ dla $\frac{r_2}{h} = 4$

plywie materiału do środka pierścienia przy znanych lub założonych warunkach tarcia na kontakcie. Wyraźnej postaci równania na promień neutralny r_n nie można podać, gdyż równania, z których się go oblicza są bardzo uwikłane. Ogólnie można napisać:

a/ dla tarcia poślizgowego

$$\sigma_{r_4} = \sigma_{r_2}, \quad (10.76)$$

b/ dla tarcia mieszanego

$$\sigma_{r_3} = \sigma_{r_4}, \quad (10.77)$$

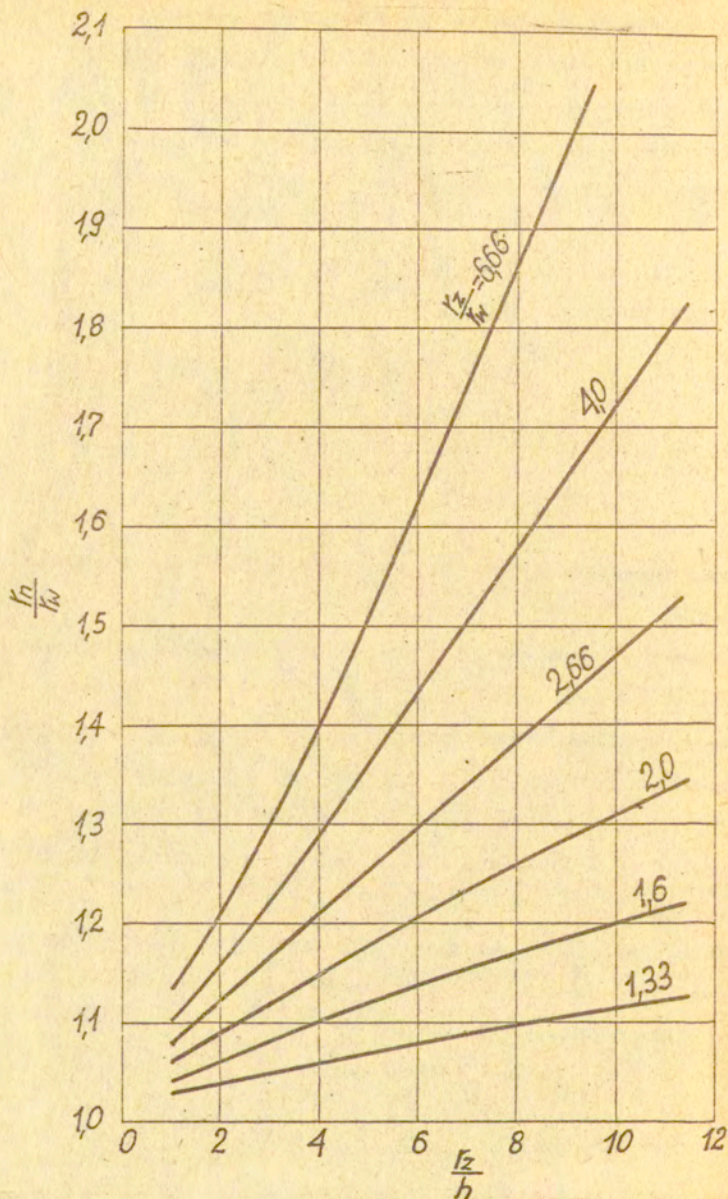
c/ dla tarcia przylgowego

$$\sigma_{r_5} = \sigma_{r_6}. \quad (10.78)$$

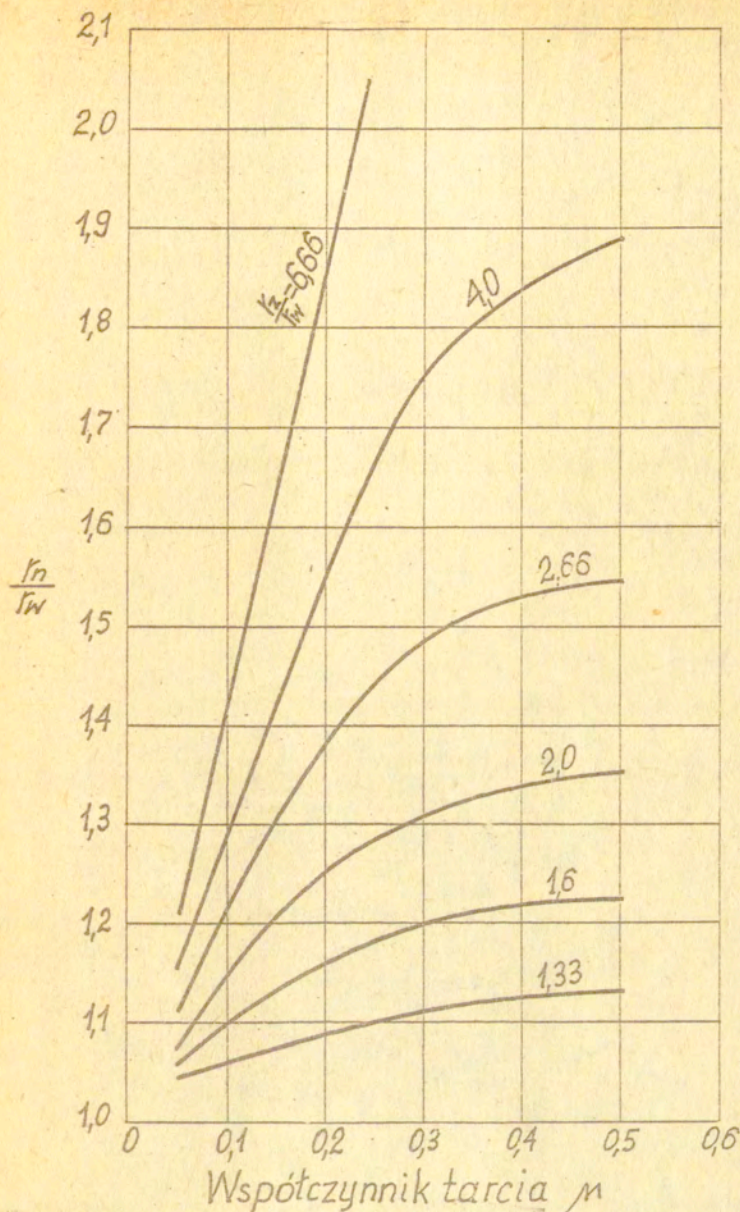
Promień neutralny r_n ma taką wartość, że dla danej geometrii pierścienia (r_z , r_w , H) oraz współczynnika tarcia μ odpowiednie równanie z równań (10.76), (10.77) i (10.78) jest spełnione. Oczywiście przyjmujemy, że $r = r_n$.

Na rysunku 10.15 pokazano zależność promienia neutralnego $\frac{r_n}{r_w}$ od wymiarów pierścienia dla tarcia $\mu = 0,1$. Natomiast na rysunku 10.16 pokazano jak wpływa współczynnik tarcia μ na promień neutralny r_n przy stałej wysokości pierścienia h i różnych stosunkach jego promieni $\frac{r_z}{r_w}$.

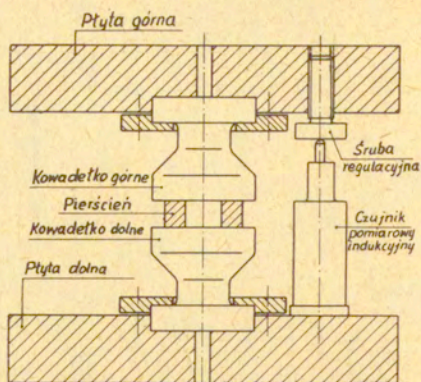
Na rysunku 10.17 pokazano przyrząd do ściskania pierścieni (rys.10.18). Wyniki doświadczalne ściskania pierścieni przykładowo pokazane na rysunku 10.19.



rys.10.15. Zależność promienia neutralnego od wymiarów pierścienia $(\frac{r_2}{h}, \frac{r_2}{r_w})$ dla $\mu = 0,1$.



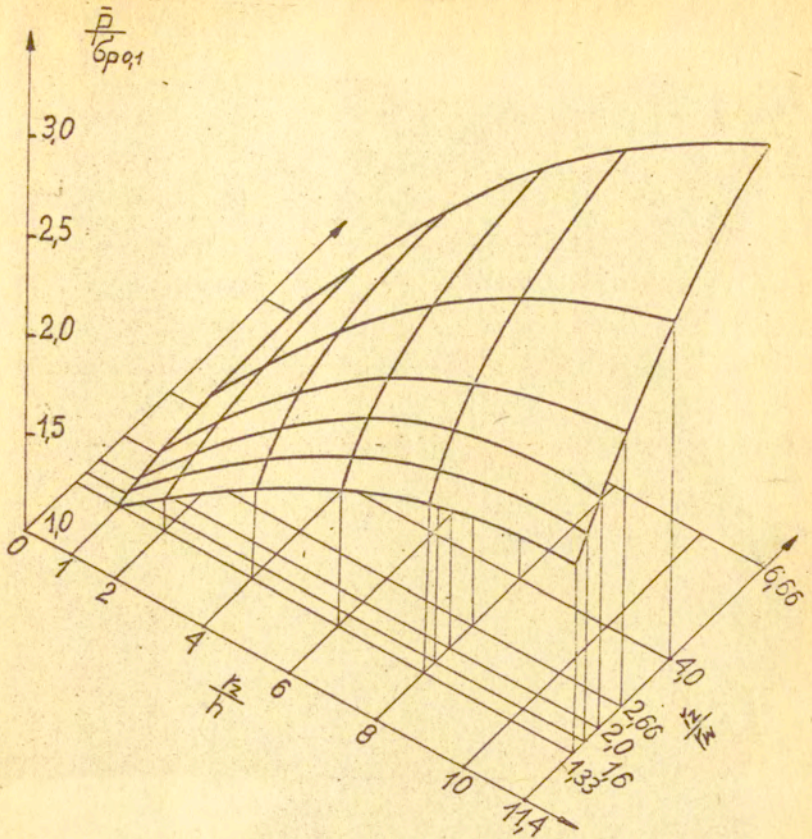
Rys.10.16. Zależność promienia neutralnego od współczynnika tarcia μ i stosunku promieni pierścienia $\frac{r_2}{r_w}$ dla $\frac{r_2}{h} = 4$



Rys.10.17. Szkic przyrządu do ściskania pierścieni



Rys.10.18. Pierścienie z naniesioną siatką kwadratową po odkształceniu $\varepsilon_{sr} = 0,35$ (ołów Pb2)



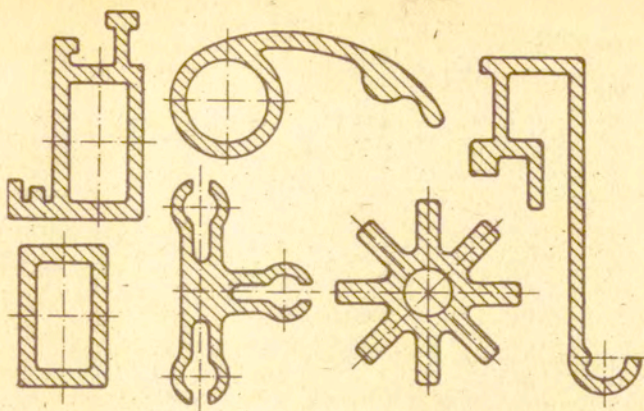
Rys.10.19. Doświadczalna powierzchnia plastycznego płynięcia pierścieni z ołowiu Pb2 ($\bar{p} = \frac{P}{F_0} [\text{MN/m}^2]$)

10.2.4. Wyciskanie metali

1. Ogólne wiadomości o wyciskaniu

Wyciskanie jest procesem obróbki plastycznej metali i polega na wypływananiu metalu przez otwór matrycy lub szczelinę między stemplem a matrycą pod wpływem działania nacisku stempla. Wyciskanie jest nowoczesnym procesem technologicznym umożliwiającym uzyskanie wyrobów wymagających bardzo dużych odkształceń w jednej operacji, wyrobów o dużej dokładności kształtowej i wymiarowej. Wyciskanie może odbywać się na zimno i na gorąco /metal nagrany do temperatury powyżej rekrytalizacji/. Na zimno można wyciskać metale posiadające dużą plastyczność np. ołów, cynę, cynk, aluminium, stopy aluminium, miedź, niektóre mosiądze oraz miękką stal. W Stanach Zjednoczonych dla przemysłu raketowego wyciskano rury i pręty z molibdenu, wanadu, berylu, tantalu, niobu, cyrkonu, stopy tych metali, stal chromowo-molibdenową. Zaletą wyciskania na zimno jest przede wszystkim wysoka dokładność wymiarowa i gładka powierzchnia wyrobu. Wymaga ono jednak pras o dużym nacisku.

Przy wyciskaniu na gorąco metal posiada znacznie większą plastyczność i mniejsze naprężenia uplastyczniające, dzięki czemu można stosować prasy o mniejszym nacisku nominalnym. Wadą wyciskania na gorąco jest utlenianie powierzchni metalu wyciskanego, wyrobu oraz skurcz. Prowadzi to do zmniejszenia dokładności wymiarowej i pogorszenia powierzchni wyrobów. Na gorąco wyciska się głównie wyroby hutnicze — pręty, rury i kształtowniki o kształcie wydłużonym i stałym przekroju poprzecznym, które są surowcem dla przemysłu elektromaszynowego.

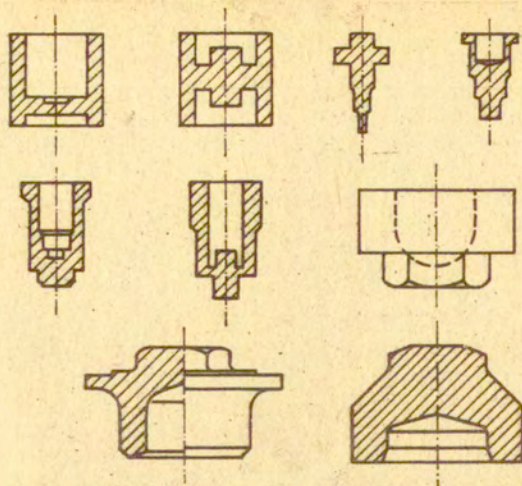


Rys.10.20. Przykłady wyrobów wyciskanych

Profile z otworem kształtowym wyciska się przez metryce z mostkiem. Materiałem do wyciskania musi być taki materiał, który spaja się przy dużym nacisku np. stal niskowęglowa nieuspokojo-
na, aluminium.

Wyciskanie stali na zimno jest zagadnieniem trudnym i dlatego stosunkowo mało rozpowszechnionym. Trudności polegają szczególnie na braku wysokowytrzymałej stali narzędziowej, która musi przenosić wysokie naciski jednostkowe odkształcające metal. Na zimno wyciska się wyroby na gotowo uzyskując dużą oszczędność materiału, niską pracochłonność wykonania, dużą dokładność wymiarową, zwiększoną ich wytrzymałość z powodu umocnienia i korzystane ułożenia włókien.

Stal do wyciskania na zimno powinna posiadać niską granicę plastyczności przy wysokiej granicy wytrzymałości, zawierać węgla do 0,15%, mało Si, Mn i Al, mieć strukturę droбноziarnistą /ziarno 0,03 mm/ i posiadać twardość 80 + 120 HB. Zbyt drobne ziarna powodują wzrost pracy odkształcenia plastycznego.



Rys.10.21. Przykłady wyprasek wyciskanych na zimno

duże natomiast — powodują zwiększoną kruchość. Najkorzystniejszą strukturą stali jest struktura cementytu kulkowego równomiernie rozłożonego na tle ferrytu. Taką strukturę uzyskuje się przez wyżarzanie zmiękczające.

Stal niskowęglowa nieuspokojona dobrze się odkształca przy stosunkowo niskim nacisku. Stal uspokojona z powodu zawartości Mn, Si i Al posiada skłonność do starzenia /wydziela się cementyt i azotki/ i z tego powodu posiada większy opór odkształcenia plastycznego. Dobrymi własnościami plastycznymi charakteryzuje się stal wytapiana w próżni.

W zależności od ruchu wyciskanego metalu względem ruchu stempla rozróżnia się następujące sposoby wyciskania:

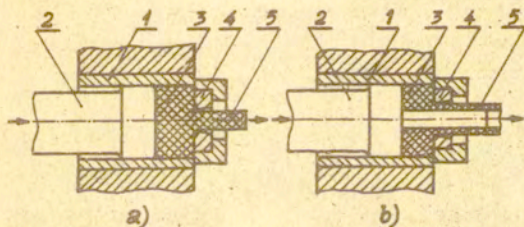
1. współbieżne /rys.10.22/, jeśli kierunek wypływu metalu jest zgodny z kierunkiem ruchu stempla,
2. przeciwbieżne /rys.10.23/, gdy materiał wypływa w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu stempla,

3. złożone /rys.10.24 i 10.26/, gdy materiał wypływa w kierunku zgodnym i przeciwnym do kierunku ruchu stempla,

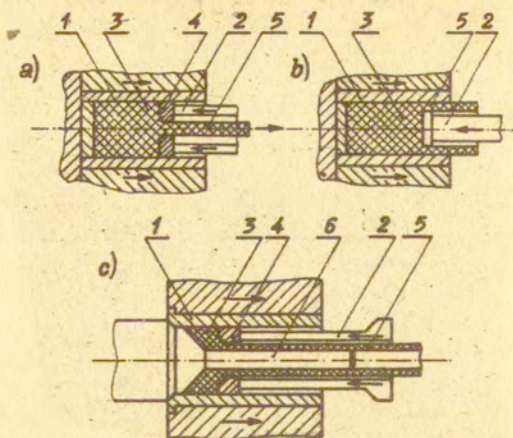
4. z bocznym wypływem materiału /rys.10.25/, jeśli materiał wypływa w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu stempla.

W ten sposób pokrywa się kabel powłoką ołowianą.

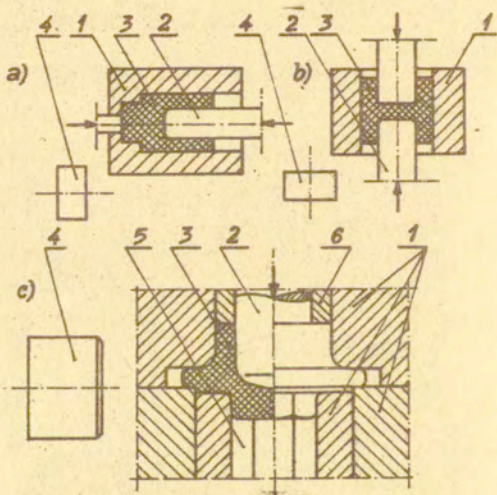
W zależności od budowy tłoczniaka, a w szczególności od kształtu matrycy lub szczeliny między matrycą a stemplem różni się wyciskanie prętów, rur i profili o różnej długości. Istota procesu wyciskania jest taka sama ale technika wykonywania, rodzaje i wielkości pras są różne. Wyciskanie długich prętów, rur i profili przeprowadza się na prasach hydraulicznych poziomych o dużym skoku, natomiast wyciskanie drobnych, krótkich wyrobów przeprowadza się na prasach mechanicznych pionowych szybkobieżnych.



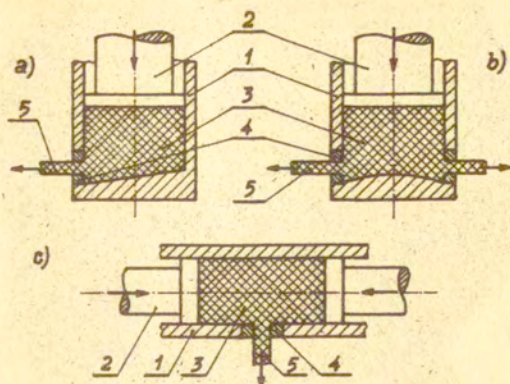
Rys.10.22. Schemat wyciskania współbieżnego: a/ profilu pełnego; b/ profilu rurowego; 1 - cylinder, 2 - stempel, 3 - metal wyciskany, 4 - matryca, 5 - wyrób wyciśnięty



Rys.10.23. Schematy wyciskania przeciwbieżnego: a) profili pełnych, b i c) profili drążonych; 1-cylinder, 2-stempel, 3-metal wyciskany, 4-matryca, 5-wyrób wyciśnięty, 6-trzpień

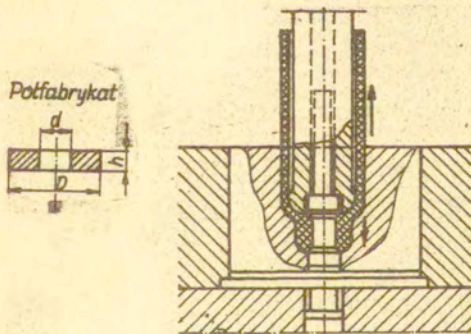


Rys.10.24. Schemat wyciskania złożonego: 1-matryca, 2-stempel, 3-wyrób, 4-materiał wyjściowy, 5-wyrzutnik, 6-spychacz



Rys.10.25. Schematy wyciskania z wyływem bocznym: a i c - z wpływem jednostronnym, b - z wpływem dwustronnym; 1-cylinder, 2-stempel, 3-metale wyciskany, 4-matryca, 5-wyrób wyciśnięty

Ze względu na sposób wywierania siły na materiał, wyciskanie można podzielić na statyczne i na udarowe. Przy wyciskaniu statycznym siła działająca na materiał wzrasta stopniowo /wyciskanie na prasach hydraulicznych/ przy wyciskaniu udarowym siła wzrasta gwałtownie. Udarowo wyciska się elementy cienkościenne z ołowiu, cyny, aluminium i cynku. Materiałem wyjściowym są krążki i pierścienie.



Rys.10.26. Schemat wyciskania udarowego złożonego.

Obróbka plastyczna przez wyciskanie posiada następujące zalety:

1. pozwala na osiągnięcie wysokiego stopnia odkształcenia /występuje trójosiowe ściskanie/,
2. możliwość otrzymania profili o różnym przekroju poprzecznym i dużej dokładności wymiarowej w jednej operacji,
3. dobre wykorzystanie materiału,
4. możliwość łatwej zmiany asortymentu wyrobu poprzez wymianę matrycy,
5. pozwala uzyskiwać wydłużenia dochodzące do wartości $\lambda = 50$, a nawet dla czystego Al $\lambda = 1000$.

Do wad technologicznych należą:

1. ograniczona długość wyrobów,
2. ograniczona prędkość wyciskania /przy dużych prędkościach zostaje naruszona spójność gotowego wyrobu/,
3. konieczność pozostawienia w matrycy materiału — denka wynoszącego 10 + 15% ciężaru wsadu.

Do najważniejszych czynników wpływających na przebieg wyciskania należą:

- prędkość,
- temperatura,
- geometria narzędzia,
- wielkość odkształcenia,
- smarowanie.

Siła potrzebna do wyciskania zależy od:

- rodzaju materiału,
- kształtu gotowego wyrobu,
- sposobu wyciskania,
- wymiarów materiału wyjściowego,

- stopnia odkształcenia,
- rodzaju narzędzia,
- gładkości powierzchni roboczych narzędzia,
- smarowania.

Wyciskanie metali jest bardzo obszernym działem technologii wykonywania wyrobów. Nie będą tu omówione wszystkie zagadnienia związane z wyciskaniem metali, a jedynie zostaną wyprowadzone równania służące do obliczenia siły potrzebnej do wyciskania.

2. Siła wyciskania

Siłę potrzebną do wyciskania można określić doświadczalnie przez pomiar jej wielkości lub obliczyć teoretycznie z równania. Znajomość siły wyciskania potrzebna jest technologowi do wytypowania właściwej prasy, a konstruktorowi narzędzi do zaprojektowania odpowiednio wytrzymałego stempla, matrycy i cylindra.

Siła wyciskania jest funkcją wielu parametrów wpływających na proces wyciskania. W ogólnym przypadku siła wyciskania P_w jest sumą siły odkształcenia plastycznego P_p i siły tarcia P_t

$$P_w = P_p + P_t.$$

Siła odkształcenia plastycznego P_p jest funkcją stałej A charakteryzującej dany materiał, temperatury T , prędkości odkształcenia $\dot{\varphi}$ i współczynnika odkształcenia λ

$$P_p = f(A, T, \dot{\varphi}, \lambda).$$

W innym podejściu równania na siłę wyciskającą P_w otrzymuje się z rozwiązania układu równań obejmujących równania równowagi, warunek plastyczności i pewne warunki brzegowe. Wzorów, z któ-

rych obliczamy siłę wyciskania literatura podaje bardzo dużo. Znane są wzory Portevina, Siebela, Gubkina, Eisbeina, Geleji, Unksowa, Billigmana, Pierlina, Tychowskiego, Pełczyńskiego i innych. Siły obliczone z wyprowadzonych wzorów dają niejednokrotnie dość rozbieżne wyniki. Poniżej zostanie wyprowadzony wzór na siłę P_w potrzebną do wyciskania w oparciu o założenia Gubkina.

Do obliczenia nacisku jednostkowego \bar{p} przyjmuje się następujące założenia:

1. warunek plastyczności Treski

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_p, \quad (10.79)$$

gdzie σ_1 jest głównym naprężeniem wzdłużnym, σ_3 jest głównym naprężeniem obwodowym, σ_p jest naprężeniem uplastyczniającym materiał,

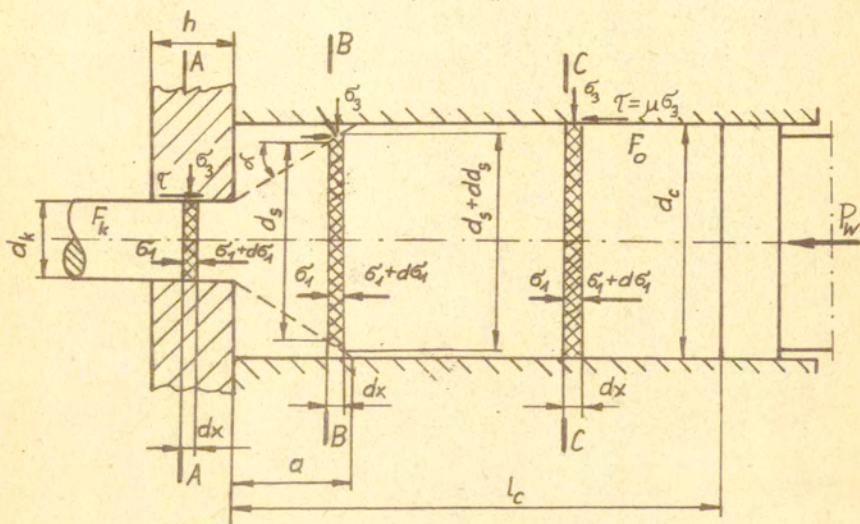
2. w całym przekroju poprzecznym materiału wyciskanego występuje jednakowy stan naprężenia, ale różny w różnych miejscach wzdłuż osi wyciskania,
3. kierunek płynięcia materiału jest jednym z kierunków głównych,
4. u wylotu materiału z matrycy naprężenie główne σ_1 skierowane wzdłuż osi płynięcia materiału jest równe zero, $\sigma_1 = 0$.
Aby wyznaczyć główne naprężenie osiowe na stemplu σ_{1s} należy rozpatrzyć warunki równowagi sił działających na elementarną warstewkę materiału o grubości dx w przekrojach A-A, B-B i C-C /rys.10.27/.

Warunek równowagi sił ($\sum P_1 = 0$) w przekroju A-A wyraża się

$$\frac{\pi d_k^2}{4} \sigma_1 - \frac{\pi d_k^2}{4} (\sigma_1 + d\sigma_1) + \pi d_k dx \mu \sigma_3 = 0,$$

a po podstawieniu warunku plastyczności (10.79) przyjmuje postać

$$\frac{d\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_p} = \frac{4\mu}{d_k} dx. \quad (10.80)$$



Rys.10.27. Rozkład naprężeń przy wyciskaniu współbieżnym prętów (wg. Gubkina)

Całkując równanie (10.80)

$$\ln(\sigma_1 + \sigma_p) = \frac{4\mu}{d_k} x + \ln C_1$$

i obliczając stałą całkowania C_1 z warunku brzegowego, gdy $x=0$, to $\sigma_1 = 0$, $C_1 = \sigma_p$, - otrzymamy równanie na naprężenia główne σ_1 w postaci

$$\sigma_1 = \sigma_p \left(\exp 4 \frac{\mu}{d_k} x - 1 \right). \quad (10.81)$$

Jeśli oczko matrycy ma wysokość h , to naprężenie na wejściu materiału do matrycy wyraża się wzorem

$$\sigma_{1h} = \sigma_p (\exp 4 \frac{\mu}{d_k} h - 1). \quad (10.82)$$

Warunek równowagi sił ($\Sigma P_1 = 0$) działających na elementarną warstewkę o grubości dx w przekroju B-B /występuje martwy stózek/ wyraża się

$$\frac{\pi d_s^2}{4} \sigma_1 - \frac{\pi (d_s + dd_s)^2}{4} (\sigma_1 + d\sigma_1) + \sigma_3 \operatorname{tg} \alpha \pi (d_s + \frac{dd_s}{2}) \frac{dx}{\cos \alpha} = 0,$$

a po wprowadzeniu pewnego uproszczenia przyjmie postać

$$\frac{\pi d_s^2}{4} \sigma_1 - \left(\frac{\pi d_s^2}{4} + \frac{\pi d_s dd_s}{2} \right) (\sigma_1 + d\sigma_1) + \sigma_3 \operatorname{tg} \alpha \pi d_s \frac{dd_s}{2 \operatorname{tg} \alpha} = 0,$$

która następnie po uporządkowaniu i pominięciu małych wyższego rzędu wyrazi się zależnością

$$-d_s d\sigma_1 - 2 dd_s \sigma_1 + 2 \sigma_3 dd_s = 0,$$

a po wprowadzeniu warunku plastyczności (10.79), $\sigma_3 = \sigma_p + \sigma_1$, uprości się do równania

$$d\sigma_1 = 2 \sigma_p \frac{dd_s}{d_s}. \quad (10.83)$$

Całkując równanie (10.83)

$$\sigma_1 = 2 \sigma_p \ln d_s + C_2$$

i obliczając stałą całkowania C_2 z warunku: gdy $d_s = d_k$, to

$$\sigma_1 = \sigma_{1h} = \sigma_p (\exp 4 \frac{\mu}{d_k} h - 1)$$

$$C_2 = \sigma_p \left(\exp 4 \frac{\mu}{d_k} h - 1 \right) - 2 \sigma_p \ln d_k ,$$

otrzymamy zależność na naprężenie osiowe główne σ_1 w obszarze stożka martwego

$$\sigma_1 = 2 \sigma_p \ln \frac{d_s}{d_k} + \sigma_p \left(\exp 4 \frac{\mu}{d_k} h - 1 \right) . \quad (10.84)$$

U podstawy stożka, gdzie średnica stożka d_s równa się średnicy cylindra d_c , naprężenie główne w kierunku osi wyrazi się zależnością

$$\sigma_{1c} = \sigma_p \left(2 \ln \frac{d_c}{d_k} + \exp \frac{4\mu}{d_k} h - 1 \right) . \quad (10.85)$$

W przekroju C-C występuje siła tarcia $\tau = \mu \sigma_3$ materiału o ścianki cylindra powodująca zwiększenie naprężenia głównego σ_1 . Naprężenie główne σ_1 w cylindrze oblicza się z warunku równowagi elementu o grubości dx i średnicy d_c . Warunek ten jest analogiczny do warunku równowagi w matrycy. Po podstawieniu za d_k średnicę cylindra d_c , przekształceniu i scałkowaniu otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_1 + \sigma_p) &= \frac{4\mu}{d_c} x + \ln C_3 , \\ \sigma_1 &= C_3 \exp \frac{4\mu}{d_c} x - \sigma_p . \end{aligned} \quad (10.86)$$

Stałą całkowania C_3 oblicza się z warunku brzegowego: gdy $x = 0$, odpowiada to podstawie stożka martwego, to $\sigma_1 = \sigma_{1c}$ (10.85), wówczas

$$C_3 = \sigma_{1c} + \sigma_p .$$

Wstawiając stałą całkowania C_3 do równania (10.86) otrzymujemy równanie

$$\sigma_1 = (\sigma'_c + \sigma'_p) \exp \frac{4\mu}{d_c} x - \sigma'_p. \quad (10.87)$$

Jeśli za x podstawimy długość części walcowej cylindra l_c pomniejszoną o długość stożka martwego a , to otrzymamy wyrażenie na naprężenie działające na stempel

$$\sigma'_{1s} = \sigma'_p \left[\left(2 \ln \frac{d_c}{d_k} + \exp \frac{4\mu}{d_k} h \right) \exp \frac{4\mu}{d_c} (l_c - a) - 1 \right]. \quad (10.88)$$

W materiale wyciskanym występuje nierównomierne wszechstronne ściskanie. Warstwy wewnętrzne materiału przesuwają się szybciej niż warstwy zewnętrzne materiału wyciskanego. Z tych powodów Gubkin wprowadza współczynnik $n = 1,5 \div 1,8$ zwiększający naprężenia na stemplu. Nacisk jednostkowy stempla działającego na materiał wsadowy obliczamy ze wzoru

$$\bar{p} = n \sigma'_{1s}. \quad (10.89)$$

Siłę potrzebną do wyciskania współbieżnego pręta obliczamy ze wzoru $\left(2 \ln \frac{d_c}{d_k} = \ln \frac{F_0}{F_k} \right)$

$$P_w = \bar{p} F_0 = n \sigma'_p F_0 \left[\left(\ln \frac{F_0}{F_k} + \exp \frac{4\mu}{d_k} h \right) \cdot \exp \frac{4\mu}{d_c} (l_c - a) - 1 \right]. \quad (10.90)$$

10.2.5. Ciągnięcie metali

Ciągnięcie jest procesem obróbki plastycznej metali na zimno. Proces ciągnięcia stosuje się do wykonywania drutu o średnicy poniżej 5 mm, rur o cienkich ściankach i małych średnicach, oraz do wykonywania wyrobów okrągłych i kształtowych o dużych przekrojach poprzecznych wymagających dokładnych kształtów, wymiarów i wysokich własności mechanicznych oraz gładkiej powierzchni. Ciągnięcie jest procesem bardzo wydajnym i ekonomicznym np. w porównaniu z obróbką skrawaniem.

Proces ciągnięcia jest przedmiotem badań wielu autorów i jest dość dobrze opisany w literaturze [18]. Rozważania teoretyczne dotyczą przede wszystkim analizy naprężeń w strefie odkształcenia i sił występujących w procesie ciągnięcia. Zagadnienie ciągnięcia można rozwiązywać przyjmując jako proces ciągnięcia bez tarcia lub też z uwzględnieniem tarcia. Analiza ciągnięcia prętów płaskich lub okrągłych bez uwzględnienia tarcia jest czysto teoretyczna i nie mająca zastosowania praktycznego.

W procesie ciągnięcia występuje tarcie, które wpływa nie tylko na zwiększenie sił ciągnięcia, ale i na nierównomierność odkształcenia i występowanie naprężeń własnych. Według wielu autorów, 40 + 50% siły potrzebnej do odkształcenia plastycznego idzie na pokonanie siły tarcia. Udział siły tarcia w całkowitej sile ciągnięcia zależy od zgniotu $(Z = 1 - \frac{d^2}{D^2})$ i jest tym mniejszy im większa jest wartość stosowanego zgniotu. W celu zmniejszenia siły tarcia stosuje się hydrostatyczne lub hydrodynamiczne smarowanie.

Z uwagi na to, że proces ciągnięcia w literaturze naukowej i technicznej jest opisany wystarczająco dokładnie, to poniżej zo-

stanie podane jedynie równanie na naprężenie ciągnięcia wyprowadzone z równowagi nieskończenie małego elementu objętościowego.

1. Równania równowagi

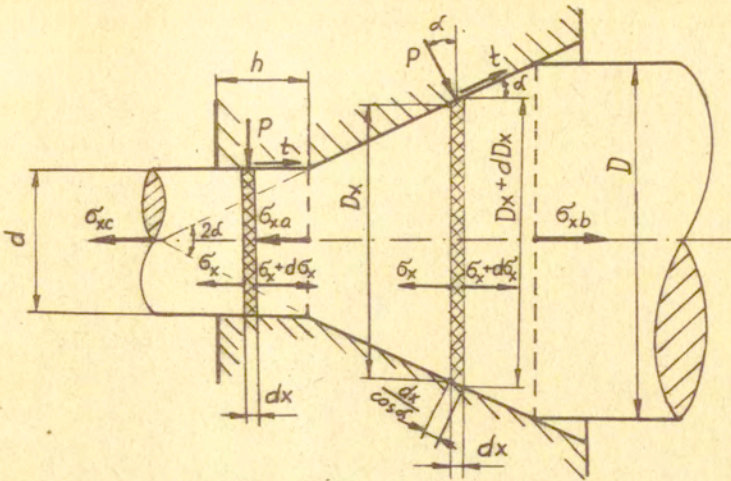
Przy analitycznym określaniu wartości naprężeń w procesie ciągnięcia przyjmujemy następujące założenia:

1. naprężenia promieniowe σ_r , a zatem i wzdłużne σ_x (związane są warunkiem plastyczności $\sigma_x - \sigma_r = \sigma_p$) są stałe w każdym miejscu przekroju poprzecznego,
2. naprężenia obwodowe σ_θ są równe naprężeniom promieniowym σ_r ,
 $\sigma_\theta = \sigma_r$,
3. naprężenia σ_r , σ_θ i σ_x są naprężeniami głównymi,
4. normalne naprężenie na powierzchni styku p przyjmuje się, że jest równe w przybliżeniu naprężeniu promieniowemu σ_r ,
 $\sigma_r \cong -p$,
5. współczynnik tarcia μ jest stały wzdłuż całej kotliny odkształcenia plastycznego,
6. przyjmujemy, że materiał umacnia się izotropowo.

W celu wyznaczenia wzoru na naprężenie ciągnięcia wydzielimy myślowo elementarną objętość materiału (rys.10.28) i rozpatrzmy jej równowagę ($\Sigma P_x = 0$). Różniczkowe równanie równowagi sił działających na elementarną objętość obszaru odkształcenia plastycznego posiada postać

$$(\sigma_x + d\sigma_x)(D_x + dD_x)^2 \frac{\pi}{4} - \sigma_x \frac{\pi D_x^2}{4} + \frac{P\pi}{2} D_x dD_x + \frac{\pi t D_x}{2 \operatorname{tg} \alpha} dD_x = 0,$$

a po pominięciu wielkości nieskończenie małych wyższego rzędu otrzymujemy równanie równowagi



Rys.10.28. Schemat działania naprężeń na elementarną objętość metalu przy ciągnięciu

$$\frac{\pi D_x}{4} (D_x d\sigma_x + 2\sigma_x dD_x) + \frac{\pi p}{2} D_x dD_x + \frac{\pi \mu p D_x}{2 \operatorname{tg} \alpha} dD_x = 0,$$

a po uproszczeniu mamy równanie różniczkowe równowagi

$$D_x d\sigma_x + 2\sigma_x dD_x + 2p dD_x \left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = 0. \quad (10.91)$$

Człon siły normalnej $\frac{\pi p}{2} D_x dD_x$ w równaniu równowagi otrzymujemy z działania nacisku normalnego p na pochyłą powierzchnię elementu dx , $\left(p \frac{dx}{\cos \alpha}\right) \left(\frac{D_x}{2} d\theta\right)$, o składowej osiowej

$$\left(p \frac{dx}{\cos \alpha}\right) \left(\frac{D_x}{2} d\theta\right) \sin \alpha = p \frac{D_x}{2} \operatorname{tg} \alpha dx d\theta,$$

która po scałkowaniu w granicach od $\theta = 0$ do $\theta = 2\pi$ ($d\theta$ jest

kątem promieniowego wycinka powierzchni elementu/ daje osiową siłę

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} P \frac{D_x}{2} \operatorname{tg} \alpha \, dx \, d\theta = \frac{P\pi}{2} D_x \, dD_x .$$

Człon siły tarcia $\frac{t\pi D_x}{2 \operatorname{tg} \alpha} dD_x$ otrzymuje się podobnie:

$$\left(t \frac{dx}{\cos \alpha} \right) \left(\frac{D_x}{2} d\theta \right) \cos \alpha = t \frac{D_x}{2} dx \, d\theta ,$$

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} t \frac{D_x}{2} dx \, d\theta = \frac{t\pi D_x}{2 \operatorname{tg} \alpha} dD_x .$$

Przyjmując warunek plastyczności $\sigma'_x - \sigma'_r = \sigma'_p$, $\sigma'_r \cong -p$, $\sigma'_x + p = \sigma'_p$ (σ'_x jest głównym naprężeniem osiowym, σ'_r jest głównym naprężeniem promieniowym ($\sigma'_r = \sigma'_\theta$ - obwod), p jest naciskiem jednostkowym na kontakcie) i wstawiając go do równania równowagi (10.91) otrzymujemy równanie równowagi w postaci

$$\frac{d\sigma'_x}{\sigma'_x B - \sigma'_p(1+B)} = \frac{2 dD_x}{D_x} , \quad (10.92)$$

gdzie $B = \frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha}$.

Całkując równanie (10.92) i obliczając stałą całkowania z warunku: gdy $D_x = D$, to $\sigma'_x = \sigma'_{xb}$ [17,18], otrzymujemy następujące równania na stosunki naprężeń:

$$\frac{\sigma'_x}{\sigma'_p} = \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{D_x^2}{D^2} \right)^B \right] + \frac{\sigma'_{xb}}{\sigma'_p} \left(\frac{D_x^2}{D^2} \right)^B ,$$

$$\frac{P}{\sigma_p} = 1 - \frac{\sigma_x}{\sigma_p} = \frac{1}{B} \left[1 + (1+B) \left(\frac{D_x^2}{D^2} \right)^B \right] - \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_p} \left(\frac{D_x^2}{D^2} \right)^B.$$

Naprężenie odkształcenia pręta jest równe naprężeniu osiowemu $\sigma_{x\alpha}$ przy wyjściu pręta ze stożka ciągadła, gdzie $D_x = d$ i wyraża się stosunkiem

$$\frac{\sigma_{x\alpha}}{\sigma_p} = \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{d^2}{D^2} \right)^B \right] + \frac{\sigma_{xb}}{\sigma_p} \left(\frac{d^2}{D^2} \right)^B. \quad (10.93)$$

Przy zerowym przeciwciągu ($\sigma_{xb} = 0$) równanie (10.93) sprowadza się do zależności

$$\frac{\sigma_{x\alpha}}{\sigma_p} = \frac{1+B}{B} \left[1 - \left(\frac{d^2}{D^2} \right)^B \right]. \quad (10.94)$$

Jeśli przyjmiemy, że materiał ciągniony umacnia się, to możemy przyjąć naprężenie uplastyczniające σ_p w postaci funkcji

$$\sigma_p = \sigma_{po} + K \ln \left(\frac{D}{d} \right)^2 \quad \text{lub} \quad \sigma_p = \sigma_{po} + \varphi \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right], \quad (10.95)$$

gdzie K i φ są stałymi mającymi wymiar naprężenia, σ_{po} jest naprężeniem uplastyczniającym materiał, $1 - \frac{d^2}{D^2} = Z$ jest mierzniotą lub ubytkiem względnym przekroju.

Jeśli w ciągadle istnieje część kalibrująca, a w rzeczywistości (w praktyce) zawsze istnieje /rys.10.28/, to należy określić wpływ części kalibrującej ciągadła na naprężenie ciągnięcia. W strefie kalibrowania materiał nie doznaje odkształceń plastycznych, a jedynie ugruntowują się odkształcenia i występuje tarcie na powierzchni kontaktu materiału z ciągadłem.

Rzutuując wszystkie siły działające na elementarną objętość ($\Sigma P_x = 0$) na kierunku ciągnięcia obszaru kalibrowania znajdziemy różniczkowe równanie równowagi ($t = \mu p$)

$$(\sigma_x + d\sigma_x) \frac{\pi d^2}{4} - \sigma_x \frac{\pi d^2}{4} + t dx \pi d = 0,$$

$$\frac{d\sigma_x}{p} = - \frac{4\mu}{d} dx. \quad (10.96)$$

Przyjmując warunek plastyczności $\sigma_x + p = \sigma_p$ i wprowadzając go do równania (10.96) i następnie całkując go, otrzymujemy prostą zależność

$$-\ln(\sigma_p - \sigma_x) = - \frac{4\mu}{d} x + \ln C,$$

$$C(\sigma_p - \sigma_x) = e^{\frac{4\mu}{d} x}. \quad (10.97)$$

Stałą całkowania C obliczamy z warunku brzegowego: gdy $x = 0$, to $\sigma_x = \sigma_{xa}$, $C = \frac{1}{\sigma_p - \sigma_{xa}}$.

Jeśli do równania (10.97) wstawimy wartość za stałą C , a za zmienną x długość części walcowej ciągnięcia h , to otrzymamy wzór na naprężenie ciągnięcia σ_{xc}

$$\frac{\sigma_p - \sigma_{xa}}{\sigma_p - \sigma_{xa}} = e^{\frac{4\mu}{d} h},$$

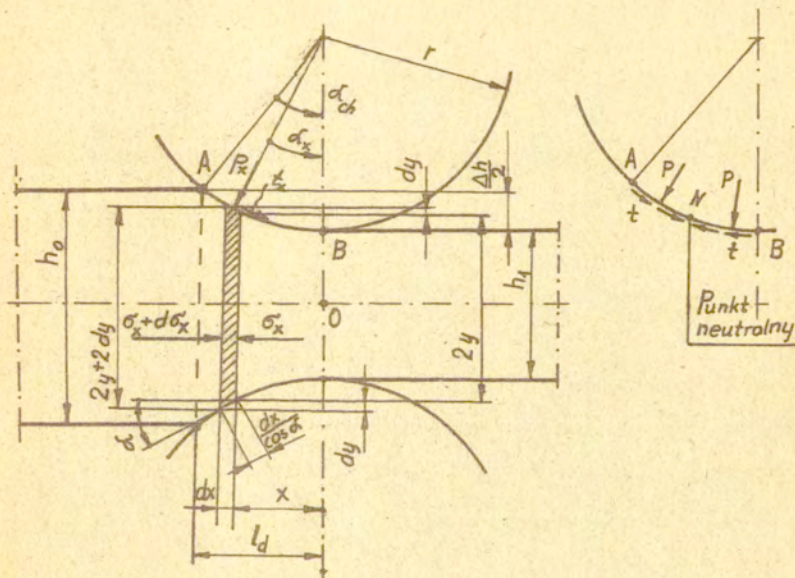
$$\sigma_{xc} = \sigma_p \left(1 - e^{-\frac{4\mu}{d} h}\right) + \sigma_{xa} e^{-\frac{4\mu}{d} h}. \quad (10.98)$$

Za naprężenie σ_p podstawiamy zależność (10.95), a za σ_{xa} zależność (10.93) lub (10.94) w zależności od tego czy chcemy uwzględnić przeciwiąg, czy też nie.

10.2.6. Walcowanie metali

Walcowanie metali jest w zasadzie hutniczym procesem przeróbki plastycznej metali. Jest ważną dziedziną techniki i dobrze opracowaną technicznie i teoretycznie. Podstawy teoretyczne walcowania podał w 1925r. T. von Kármán; Rozwiązanie teoretyczne procesu walcowania polega w zasadzie na wyznaczeniu rozkładu nacisku jednostkowego na walce w kotlinie odkształcenia. Do tego celu najczęściej stosowana jest metoda uproszczonych różniczkowych równań równowagi wydzielonego elementu w strefie odkształcenia plastycznego.

Poniżej zostaną wyprowadzone tylko równania na nacisk jednostkowy na walce w oparciu o równowagę wydzielonego elementu przedstawionego na rysunku 10.29.



Rys.10.29. Schemat działania naprężeń na elementarną objętość. Szerokość elementu płaskiego pasma wynosi $b = 1 / \sqrt{g}$ Kármána/

Bzując wszystkie siły działające na elementarną objętość na kierunek walcowania (oś x) otrzymamy równanie równowagi

$$2(\sigma_x + d\sigma_x)(y + dy) - 2\sigma_x y + 2t \frac{dx}{\cos\alpha} - 2p_x \frac{dx}{\cos\alpha} = 0.$$

Po wymnożeniu, pominięciu małych wyższego rzędu i uporządkowaniu otrzymamy różniczkowe równanie równowagi w strefie opóźnienia

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{\sigma_x - p_x}{y} \frac{dy}{dx} + \frac{t}{y} = 0. \quad (10.99)$$

Jeśli do równania równowagi weźmiemy siłę tarcia t ze strefy wyprzedzania, to otrzymamy różniczkowe równanie równowagi w strefie wyprzedzania

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{\sigma_x - p_x}{y} \frac{dy}{dx} - \frac{t}{y} = 0. \quad (10.100)$$

Nacisk walców p_x z naprężeniem poziomym σ_x wiążemy warunkiem plastyczności

$$p_x - \sigma_x = \sigma_p, \quad (10.101a)$$

który po zróżniczkowaniu ma postać

$$dp_x = d\sigma_x. \quad (10.101b)$$

Siły tarcia wzdłuż łuku styku zmieniają się według prawa

$$t = \mu p_x. \quad (10.102)$$

Po wstawieniu zależności (10.101 i 10.102) do równania (10.99 i 10.100) otrzymamy różniczkowe równanie równowagi

$$\frac{dP_x}{dx} - \frac{\sigma_p}{y} \frac{dy}{dx} + \frac{\mu P_x}{y} = 0. \quad (10.103)$$

Znak plus odnosi się do strefy opóźniania, a znak minus — do strefy wyprzedzania.

Całką ogólną równania (10.103) jest wyrażenie

$$P_x = e^{\mp \int \frac{\mu}{y} dx} \left(C + \int \frac{k}{y} e^{\mp \int \frac{\mu}{y} dx} dy \right). \quad (10.104)$$

Przyjmując zależność między x i y w postaci prostej będącej cięciwą kąta chwytu α_{ch} /rys.10.29/ w postaci

$$y = \frac{\Delta h}{2l_d} x + \frac{h_1}{2}$$

i po zróżniczkowaniu

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\Delta h}{2l_d}, \\ dx &= \frac{2l_d}{\Delta h} dy. \end{aligned} \quad (10.105)$$

Wprowadzając do wyrażenia (10.104) zależność (10.105) i oznaczenie

$$\delta = \frac{2\mu l_d}{\Delta h},$$

otrzymamy równanie na nacisk jednostkowy w postaci

$$P_x = e^{\mp \int \frac{\delta}{y} dy} \left(C + \int \frac{\sigma_p}{y} e^{\mp \int \frac{\delta}{y} dy} dy \right). \quad (10.106)$$

Wyliczając całki

$$\mp \int \frac{\delta}{y} dy = \mp (\delta \ln y + C_1),$$

$$\int \frac{\sigma_p}{y} e^{\pm(\delta \ln y + C_1)} dy = \sigma_p e^{\pm C_1} \left(\frac{y^{\pm \delta}}{\pm \delta} + C_2 \right)$$

i wprowadzając do równania (10.106) i wykonując niezbędne przekształcenia otrzymamy

$$P_x = y^{\mp \delta} C_3 + \frac{\sigma_p}{\pm \delta} + \sigma_p y^{\mp \delta} C_2$$

oraz ostatecznie

$$P_x = y^{\mp \delta} C \pm \frac{\sigma_p}{\delta}. \quad (10.107)$$

Znaki górne odnoszą się do strefy opóźnienia, a znaki dolne — do strefy wyprzedzania.

Po przyjęciu odpowiednich warunków brzegowych i obliczeniu stałej całkowania C dla strefy wyprzedzania i strefy opóźnienia, Celikow [18] podaje ostateczne wzory na obliczenie nacisku jednostkowego walców:

- dla strefy wyprzedzania

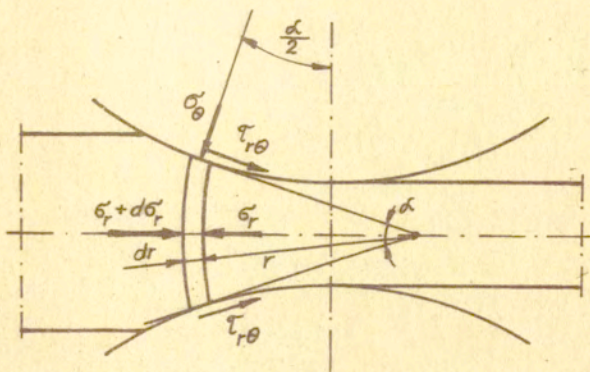
$$P_x = \frac{\sigma_p}{\delta} \left[(\delta + 1) \left(\frac{h_x}{h_y} \right)^{\delta} - 1 \right], \quad (10.108)$$

- dla strefy opóźnienia

$$P_x = \frac{\sigma_p}{\delta} \left[(\delta + 1) \left(\frac{h_o}{h_x} \right)^{\delta} + 1 \right]. \quad (10.109)$$

Jeśli przyjmiemy, że element objętościowy ograniczony jest dwoma powierzchniami walcowymi o promieniu r i r + dr oraz powierzchniami walców /rys.10.30/, to przy znacznie prostszej

analizie matematycznej otrzymamy takie same wzory końcowe na nacisk jednostkowy procesu walcowania blach, taśm i płaskowników.



Rys.10.30. Schemat działania naprężeń na elementarną objętość.

Na wydzieloną elementarną objętość (rys.10.30) działają ścisnąjące naprężenia promieniowe σ_r , ścisnąjące naprężenia obwodowe σ_θ i ścisnąjące naprężenia w kierunku szerokości $b = 1$ walcowanego pasma σ_z . Rzutując wszystkie siły na kierunek walcowania otrzymamy równanie równowagi dla strefy opóźnienia

$$-(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)\alpha + \sigma_r r \alpha - 2\tau_{r\theta} dr \cos \frac{\alpha}{2} + 2\sigma_\theta dr \sin \frac{\alpha}{2} = 0.$$

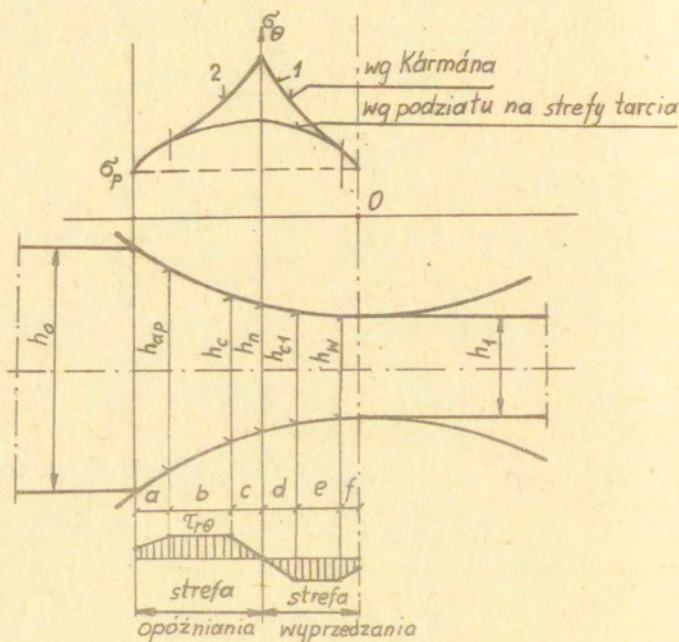
Odrzucając małe wyższego rzędu i przyjmując, że dla małych kątów $\cos \frac{\alpha}{2} = 1$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ otrzymamy różniczkowe równanie równowagi dla strefy opóźnienia

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{\alpha r} = 0. \quad (10.110)$$

Dla strefy wyprzedzania (naprężenia styczne $\tau_{r\theta}$ na powierzchni kontaktu materiału z walcami mają kierunek odwrotny/ różniczkowe równanie równowagi ma postać

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} - \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0. \quad (10.111)$$

Na podstawie doświadczeń ustalono, że w procesie walcowania występują trzy podstrefy tarcia, a mianowicie podstrefa tarcia poślizgowego $\tau = \mu \sigma_\theta$, podstrefa tarcia przylgowego $\tau = 0,5\sigma_p$ oraz podstrefa tarcia zmniejszającego się do zera w linii neutralnej (rys.10.31/).



Rys.10.31. Podział obszaru odkształcenia plastycznego i rozkład sił tarcia oraz rozkład nacisków przy walcowaniu: a,f-podstrefy poślizgu, b,e-podstrefy przylegania, c,d-podstrefy martwe

Przyjmując wysokość pasma $h \cong r \alpha$, naprężenie styczne $\tau_{r\theta} = \mu \sigma_\theta$, warunek plastyczności $\sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_p$ ($d\sigma_r = d\sigma_\theta$), to równanie równowagi (10.110) przyjmie postać

$$\frac{d\sigma_\theta}{dh} + \frac{\sigma_p}{h} + \frac{2\mu}{\alpha} \frac{\sigma_\theta}{h} = 0,$$

a po rozdzieleniu zmiennych ($c = \frac{2\mu}{\alpha}$)

$$\frac{d\sigma_\theta}{c\sigma_\theta + \sigma_p} = -\frac{dh}{h}. \quad (10.112)$$

Całkując obustronnie równanie (10.112)

$$\frac{1}{c} \ln(c\sigma_\theta + \sigma_p) = -\ln h + \ln C,$$

$$(c\sigma_\theta + \sigma_p)^{\frac{1}{c}} = \frac{C}{h}$$

i obliczając stałą całkowania C z warunku brzegowego: gdy $h = h_0$, to $\sigma_r = 0$ i $\sigma_\theta = -\sigma_p$

$$C = h_0 (-c\sigma_p + \sigma_p)^{\frac{1}{c}},$$

to wyznaczmy wzór na rozkład nacisku na metal w podstrefie tarcia poślizgowego strefy opóźniania

$$\sigma_\theta = -\frac{\sigma_p}{c} \left[(c-1) \left(\frac{h_0}{h} \right)^c + 1 \right]. \quad (10.113)$$

W strefie wyprzedzania dla tarcia poślizgowego, gdzie warunek

brzegowy $-h = h_1$, $\sigma_r = 0$, $\sigma_\theta = -\sigma_p$, to obowiązuje wzór na nacisk jednostkowy /wyprowadzony analogicznie/ w postaci

$$\sigma_\theta = -\frac{\sigma_p}{c} \left[(c+1) \left(\frac{h}{h_1} \right)^c - 1 \right]. \quad (10.114)$$

Kierunek naprężenia σ_θ jest odwrotny do założonego na rysunku 10.30, gdyż naprężenie to pochodzi od materiału odkształconego i działa na walce, o czym świadczy znak minus przed całą prawą stroną równania (10.113) i (10.114).

W podstrefie przylegania obszaru opóźniania, gdzie naprężenie styczne $\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_p}{2}$ /ma kierunek odwrotny do przyjętego układu współrzędnych r, θ , dla tarcia poślizgowego $\tau_{r\theta} = \mu \sigma_\theta$, ale $\sigma_\theta < 0$), naprężenie obwodowe jest równe naprężeniu promieniowemu, $\sigma_\theta = \sigma_r$ /na powierzchni kontaktu obowiązuje warunek plastyczności $(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2$, $k = -\frac{\sigma_p}{2}$ / równanie równowagi (10.110) przybierze postać

$$\frac{d\sigma_r}{dh} - \frac{\sigma_p}{\alpha h} = 0,$$

a po wprowadzeniu poprzednich założeń będzie

$$d\sigma_\theta = \frac{\sigma_p}{\alpha} \frac{dh}{h}. \quad (10.115)$$

Całkując obustronnie równanie równowagi (10.115)

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_p}{\alpha} \ln h + C$$

i obliczając stałą całkowania C z warunku brzegowego w miejscu rozdziału strefy poślizgu i przylegania, gdzie $\mu \sigma_\theta = -0,5 \sigma_p$, $h = h_{op}$, $\sigma_\theta = -\frac{\sigma_p}{2\mu}$:

$$C = -\frac{\sigma_p}{2\mu} - \frac{\sigma_p}{\alpha} \ln h_{op}.$$

Ostatecznie w podstrefie przylegania strefy opóźniania rozkład nacisku na walce będzie się kształtował według równania

$$\sigma'_\theta = -\frac{\sigma_p}{2\mu} \left[\frac{2\mu}{\alpha} \ln \frac{h_{op}}{h} + 1 \right]. \quad (10.116)$$

Rozkład nacisków jednostkowych w podstrefie przylegania strefy wyprzedzania /od strony wyjścia materiału z obszaru odkształcenia plastycznego/, gdzie równanie równowagi ma postać

$$\frac{d\sigma'_r}{dh} + \frac{\sigma'_p}{\alpha h} = 0,$$

a warunki brzegowe: $-\mu\sigma'_\theta = 0,5\sigma'_p$, $h = h_w$, $\sigma'_\theta = -\frac{\sigma'_p}{2\mu}$,
wyznaczany jest z równania

$$\sigma'_\theta = -\frac{\sigma'_p}{2\mu} \left[1 + \frac{2\mu}{\alpha} \ln \frac{h}{h_w} \right]. \quad (10.117)$$

.W podstrefach martwych, gdzie jednostkowe siły tarcia zmieniają się liniowo od wartości maksymalnej do zera w płaszczyźnie neutralnej, następnie zmieniają kierunek i ponownie rosną do wartości maksymalnej. Jednostkowa siła tarcia w podstrefie martwej strefy opóźniania zmienia się według równania

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_p}{2} \frac{x}{h_c}, \quad (10.118)$$

a w podstrefie martwej strefy wyprzedzania

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_p}{2} \frac{x}{h_{c1}}. \quad (10.119)$$

Postępując analogicznie jak poprzednio otrzymamy następujące równania na rozkład nacisków jednostkowych w podstrefie martwej:

- strefy opóźniania

$$\sigma_{\theta} = \sigma_c - \frac{\sigma_p}{\alpha^2} \left[\frac{h_c - h}{h_c} - \frac{h_n}{h_c} \ln \frac{h_c}{h} \right], \quad (10.120)$$

- strefy wyprzedzania

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{c_1} - \frac{\sigma_p}{\alpha^2} \left[\frac{h_{c_1} - h}{h_{c_1}} - \frac{h_n}{h_{c_1}} \ln \frac{h_{c_1}}{h} \right]. \quad (10.121)$$

Rozkład nacisków przy walcowaniu i rozkład sił tarcia w obszarze odkształcenia plastycznego pokazano na rysunku 10.31.

10.2.7. Tłoczenie blach

Tłoczenie jest procesem obróbki plastycznej na zimno lub gorąco obejmującym operacje cięcia i kształtowania blach, folii oraz płyt niemetalowych. Jedną z wielu operacji kształtowania jest operacja ciągnięcia z płytki wyjściowej czyli wytłaczanie miseczek. Jest to operacja wykonywania wyrobów z blachy, najbardziej rozpowszechniona i najlepiej teoretycznie opracowana ze względu na swoją osiową symetrię. Do obliczenia siły potrzebnej do wytłaczania miseczki /wytłoczki/ zostanie zastosowana metoda równowagi nieskończenie małego elementu /rys.10.32/.

Pod działaniem siły P_w stempla środkowa część płaskiego krążka wciskana jest w okrągły otwór matrycy. Zewnętrzna część krążka /kołnierza/ odkształca się plastycznie na skutek występowania w niej naprężeń promieniowych σ_r i obwodowych σ_θ . Z powodu osiowej symetrii ($\tau_{r\theta} = 0$) naprężenia σ_r , σ_θ są naprężeniami głównymi. W kołnierzu wytłoczki występuje złożony stan naprężenia, a zatem występują naprężenia rozciągające σ_r i naprężenia ściskające σ_θ . Naprężenia te dają warunek plastyczności Hubera-Misesa w postaci

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \beta \sigma_{ps} \quad (10.122)$$

gdzie $\beta = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,55$ i jest współczynnikiem zwiększającym średnie naprężenia uplastyczniające $\sigma_{ps} = \frac{\sigma_{pp} + \sigma_{pk}}{2}$.

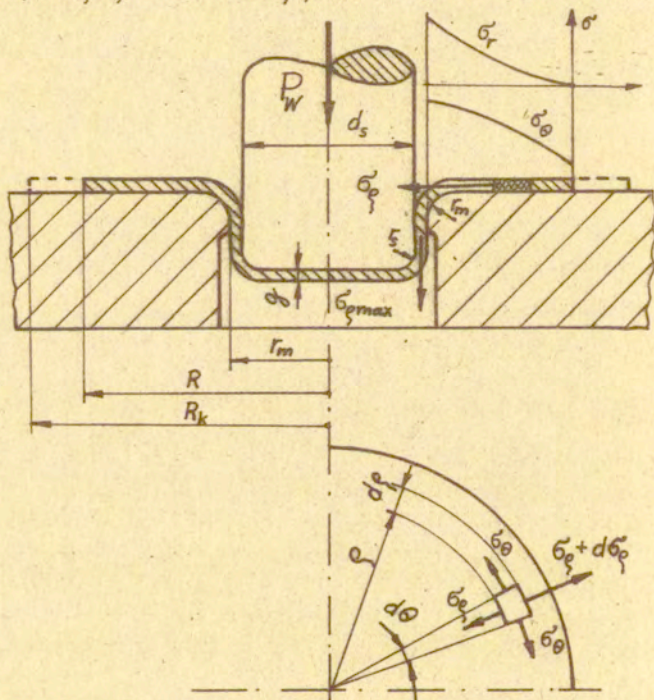
W ściance wytłoczki występuje liniowy stan naprężenia, a w płaskim dnie wytłoczki - płaski stan naprężenia.

Wytłaczanie miseczki będzie odbywało się wtedy, gdy naprężenie wytłaczania σ_w będzie mniejsze od naprężenia uplastyczniającego ściankę wytłoczki σ_{ps} , $\sigma_w < \sigma_{ps}$ (bo wytłoczka

by się zerwała/. W praktyce inżynierskiej przyjmuje się $\sigma_{ps} = R_m$. Jednak poniżej naprężenie wytlaczania σ_w (naprężenie w poboczniczy wylłoczki/ zostanie obliczone dokładnie w oparciu o równanie równowagi nieskończenie małego elementu. Zostanie rozważony przypadek wytlaczania miseczki bez dociskacza i drugi raz z dociskaczem.

Na rysunku 10.32 pokazano schemat wytlaczania bez dociskacza i schemat działania naprężeń na element i na ściankę wylłoczki w trakcie wytlaczania. Rzutując wszystkie siły działające na element na kierunek promienia otrzymamy równanie równowagi

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta g - \sigma_\theta r d\theta g - 2\sigma_\theta dr g \sin \frac{d\theta}{2} = 0,$$



Rys.10.32. Schemat wytlaczania bez dociskacza i działania naprężeń na element.

które po wymnożeniu, pominięciu małych wyższego rzędu i uporządkowaniu ($\sin \frac{d\theta}{2} \cong \frac{d\theta}{2}$) będzie miało postać

$$\frac{d\sigma_{\varphi}'}{d\varphi} + \frac{\sigma_{\varphi}' - \sigma_{\theta}'}{\varphi} = 0. \quad (10.123)$$

Wstawiając warunek plastyczności (10.122) i rozdzielając zmienne

$$d\sigma_{\varphi}' = -\beta \sigma_{ps}' \frac{d\varphi}{\varphi},$$

całkując

$$\sigma_{\varphi}' = -\beta \sigma_{ps}' \ln \varphi + C$$

i następnie obliczając stałą całkowania C /warunek brzegowy — gdy $\varphi = R$, to $\sigma_{\varphi}' = 0$ /

$$C = \beta \sigma_{ps}' \ln R,$$

otrzymamy równanie na naprężenie promieniowe działające w kołnierzu wytłoczki

$$\sigma_{\varphi}' = \beta \sigma_{ps}' \ln \frac{R}{\varphi}. \quad (10.124)$$

Naprężenie obwodowe otrzymujemy z warunku plastyczności (10.122) i jest ono równe

$$\sigma_{\theta}' = \beta \sigma_{ps}' \left(\ln \frac{R}{\varphi} - 1 \right). \quad (10.125)$$

Na promieniu ciągowym matrycy r_m występuje gięcie blachy, a po zejściu jej z promienia zachodzi prostowanie, poza tym występuje tarcie blachy o promień matrycy r_m . Gięcie, prostowanie i tarcie na promieniu matrycy stwarzają opór przy wytłaczaniu

niu miseczki i muszą być uwzględnione w analizie siły wytłaczania.

Naprężenie gięcia σ_g wyznaczamy z sumy momentów działających na zaokrągloną część wytłoczki /między płaską częścią kołnierza, a kołową częścią wytłoczki — rysunek 10.33a/

$$\frac{\beta \sigma_{ps} g^2}{4} d\alpha = \sigma_g g \left(r_m + \frac{g}{2} \right) d\alpha,$$

$$\sigma_g = \frac{\beta \sigma_{ps} g}{4 \left(r_m + \frac{g}{2} \right)}, \quad (10.126)$$

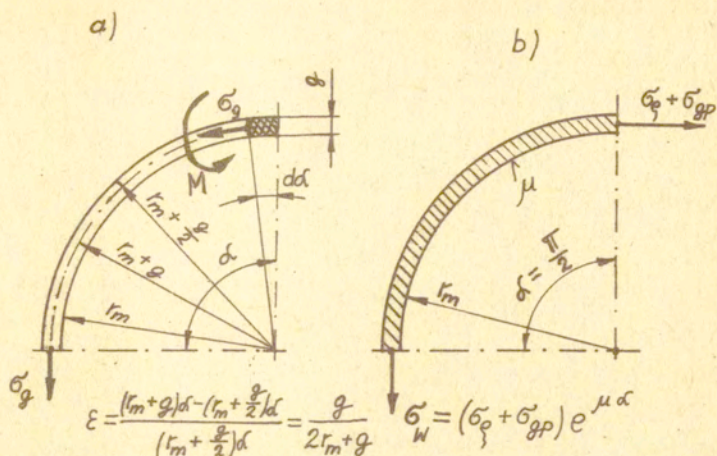
gdzie $\frac{\sigma_p g^2}{4} = M$ jest momentem plastycznym zginania w odniesieniu do jednostki szerokości. Naprężenie σ_g powoduje wyginanie blachy na promieniu matrycy r_m . Przy zejściu blachy z promienia matrycy r_m blacha musi być prostowana, do którego potrzebne są naprężenia $\sigma_p = \sigma_g$. A zatem do gięcia i prostowania blachy na promieniu matrycy r_m potrzebne są naprężenia

$$\sigma_{gp} = \sigma_g + \sigma_p = \beta \sigma_{ps} \frac{g}{2 r_m + g}. \quad (10.127)$$

Na promieniu matrycy r_m występuje tarcie. Tarcie to uwzględnimy, jeśli pomnożymy całkowite naprężenie $(\sigma_g + \sigma_{gp})$ przez mnożnik $e^{\mu\alpha}$ (rys.10.33b), otrzymamy wówczas naprężenie wytłaczania bez dociskacza

$$\sigma_w = (\sigma_g + \sigma_{gp}) e^{\mu\alpha}. \quad (10.128)$$

Jeśli wytłaczanie odbywa się z dociskaniem kołnierza wytłoczki $((D-d) > (18 \div 22) g)$, to na kontakcie blachy z dociskaczem i z matrycą wystąpi tarcie /rys.10.33b/. Tarcie to charakteryzujemy jednostkową siłą tarcia



Rys.10.33. Schemat naprężeń na promieniu matrycy r_m : a-naprężenia gnące σ_g , b-tarcie na promieniu r_m .

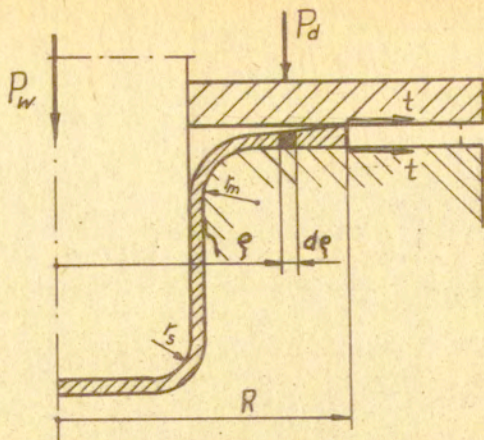
$$t = \mu p, \quad (10.129)$$

gdzie p jest naciskiem jednostkowym dociskacza ($p \approx (1,5 \div 3) \text{ N/mm}^2$). Z powodu spęczania kołnierza wytłoczki zakłada się, że dociskacz naciska tylko na obrzeże kołnierza wytłoczki /rys.10.34/. Siłę tarcia t dociskacza uwzględniamy przy obliczeniu stałej całkowania C z równania (10.123), bo jeśli $\xi = R$, to $\sigma_p = 2t$ i wówczas

$$C = \beta \sigma_{ps} \ln R + 2t.$$

Naprężenie promieniowe działające w kołnierzu wytłoczki będzie równe

$$\sigma_p = \beta \sigma_{ps} \ln \frac{R}{\xi} + 2t. \quad (10.130)$$



Rys.10.34. Schemat wytłaczania z dociskaczem.

Biorąc pod uwagę naprężenie promieniowe σ_r (10.130), naprężenie gięcia σ_g i prostowania σ_{gp} (10.127) oraz tarcie na promieniu matrycy r_m otrzymamy naprężenie wytłaczania σ_w z zastosowaniem dociskacza

$$\sigma_w = \beta \sigma_{ps} \left(\ln \frac{R}{r} + \frac{2t}{\beta \sigma_{ps}} + \frac{g}{2r_m + g} \right) e^{\mu \frac{\pi}{2}}. \quad (10.131)$$

Jeśli mnożnik $e^{\mu \frac{\pi}{2}}$ rozłożymy w szereg i weźmiemy dwa jego pierwsze składniki

$$e^{\mu \frac{\pi}{2}} \cong 1 + \mu \frac{\pi}{2} \cong 1 + 1,6\mu,$$

to wzór (10.131) będzie miał postać

$$\sigma_w = \beta \sigma_{ps} \left(\ln \frac{R}{r} + \frac{2t}{\beta \sigma_{ps}} + \frac{g}{2r_m + g} \right) (1 + 1,6\mu). \quad (10.132)$$

Siłę potrzebną do wytłaczania miseczki oblicza się ze wzoru

$$P = 2\pi r g \sigma_w. \quad (10.133)$$

10.3. Metody energetyczne obliczania sił i naprężeń

Metody energetyczne opierają się na prawie zachowania energii. Prawo to można sformułować następująco: praca sił zewnętrznych L_z na odpowiadających im przemieszczeniach jest równa pracy sił wewnętrznych L_w . Na pracę sił wewnętrznych L_w składa się praca odkształcenia plastycznego L_p i praca sił tarcia L_t występująca w procesie odkształcenia. Siłę zewnętrzną powodującą odkształcenie materiału wyznaczamy z pracy wewnętrznej.

Przy obliczaniu nacisków jednostkowych często posługujemy się mocą sił zewnętrznych i mocą sił wewnętrznych. Istota tego podejścia oparta jest na twierdzeniach o dolnej i górnej ocenie nośności granicznej.

Twierdzenie o dolnej ocenie wartości nośności mówi, że moc sił zewnętrznych rzeczywistych P_1 , powodujących uplastycznienie, jest większa lub co najniżej równa mocy sił wewnętrznych P_1^S wynikających z przyjętego statycznie dopuszczalnego obciążenia ciała na tych samych prędkościach. Twierdzenie o górnej ocenie wartości nośności mówi, że moc rzeczywistych sił zewnętrznych (powierzchniowych) na prędkościach również rzeczywistych jest zawsze mniejsza od mocy sił wewnętrznych fikcyjnie (dowolnie) przyjętego kinematycznie dopuszczalnego schematu odkształcenia.

10.3.1. Uproszczona metoda bilansu prac

Naciski potrzebne do odkształcenia plastycznego materiału można obliczyć metodą bilansu prac. Metoda ta opiera się na zasadzie zachowania energii. Zasadę tę można sformułować następująco: w procesach obróbki plastycznej metali praca wykonana przez siły zewnętrzne L_z na odpowiadających im przemieszczeniach u jest równa pracy sił wewnętrznych L_w , $L_z = L_w$. Na pracę sił wewnętrznych L_w

składa się praca odkształcenia plastycznego metalu L_p i praca idąca na pokonanie sił tarcia L_t

$$L_w = L_p + L_t. \quad (10.134)$$

Praca sił tarcia w procesie plastycznego odkształcenia występuje na styku metalu z narzędziem i zamieniana jest na ciepło. Zatem bilans energetyczny procesu odkształcenia plastycznego można napisać

$$L_z = L_p + L_t. \quad (10.135)$$

Jednostkowy przyrost pracy odkształcenia plastycznego wyraża się zależnością

$$dL_p = \sigma'_i d\varepsilon_i,$$

a praca na jednostkę objętości jest równa

$$L_p = \sigma'_i \int_0^{\varepsilon_i} d\varepsilon_i = \sigma'_i \varepsilon_i,$$

gdzie $\sigma'_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + (\sigma'_y - \sigma'_z)^2 + (\sigma'_z - \sigma'_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$

jest intensywnością naprężenia,

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(d_{xy}^2 + d_{yz}^2 + d_{zx}^2)}$$

jest intensywnością odkształcenia. Natomiast całkowita praca odkształcenia plastycznego jest równa

$$L_p^c = \int_V \sigma'_i \varepsilon_i dV. \quad (10.136)$$

Zamiast intensywności naprężenia σ'_i często przyjmuje się naprężenie uplastyczniające σ_p , które nie ulega zmianie w danym procesie.

Pracę idącą na pokonanie sił tarcia obliczyć można ze wzoru

$$L_t = -\tau_s \int_S \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} dS, \quad (10.137)$$

gdzie $\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = u$ jest całkowitym przemieszczeniem punktu na styku metalu z narzędziem, τ_s jest naprężeniem stycznym na kontakcie metalu z narzędziem.

Pracę sił zewnętrznych L_z potrzebną do przeprowadzenia operacji odkształcenia plastycznego można zapisać

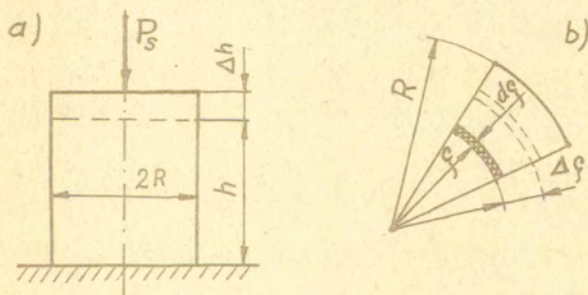
$$L_z = \int_S (P_x u_x + P_y u_y + P_z u_z) dS, \quad (10.138)$$

gdzie P_x, P_y, P_z są składowymi siły działającej na element powierzchni dS , u_x, u_y, u_z są składowymi przemieszczenia w kierunku osi x, y, z . Dla procesu spęczania pracę sił zewnętrznych obliczamy ze wzoru

$$L_z = P_s \Delta h. \quad (10.139)$$

Przykład 1

Obliczyć nacisk potrzebny do spęczania na gorąco próbki cylindrycznej (rys.10.35).



Rys.10.35. a) Schemat spęczania próbki (odkuwki); b) Schemat przemieszczania elementarnego pierścienia o promieniu ρ

Rozwiązanie

W kierunku wysokości h odkuwka dozna odkształcenia względnego

$$\varepsilon_h = - \frac{\Delta h}{h} \quad (10.140a)$$

lub odkształcenia logarytmicznego

$$\varphi_h = \ln \frac{h + \Delta h}{h} = \ln(1 + \varepsilon_h) \quad (10.140b)$$

Ponieważ w metodzie bilansu prac bierzemy małe przesunięcia, czyli Δh jest małe w porównaniu do h , to odkształcenie względne ε_h jest równe w przybliżeniu odkształceniu logarytmicznemu φ_h , $\varepsilon_h \cong \varphi_h$. Odkształcenia w kierunku promieniowym ε_r i obwodowym ε_θ są równe

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = - \frac{\varepsilon_h}{2} \quad (10.140c)$$

W przypadku spęczania praca sił zewnętrznych jest równa

$$L_z = P_s \Delta h = P_s \varepsilon_h h, \quad (10.141)$$

a praca odkształcenia plastycznego

$$L_p = \sigma'_p V \varphi_h = \sigma'_p \varepsilon_h \pi R^2 h. \quad (10.142)$$

Pracę idącą na pokonanie oporów tarcia wyznaczmy z rozpatrzenia elementarnego pierścienia o promieniu ξ pokazanego na rysunku 10.35b. Praca zużyta na przesunięcie elementarnego pierścienia o odcinek $\Delta \xi$ dla obu czołowych powierzchni wynosi

$$dL_t = 2\tau 2\pi \xi d\xi \Delta \xi.$$

Ponieważ

$$\Delta \xi = \varepsilon_r \xi = \frac{1}{2} \varepsilon_h \xi,$$

to przyrost pracy tarcia

$$dL_t = 2\pi r \tau \varepsilon_h \left. \varepsilon^2 \right\} d\varphi,$$

a całkowita praca tarcia ostatecznie jest równa

$$L_t = \frac{2}{3} \pi r \tau \varepsilon_h R^3. \quad (10.143)$$

Wartość siły spęczania P_s obliczymy z równania ($L_z = L_p + L_t$)

$$P_s \varepsilon_h h = \sigma_p \varepsilon_h \pi R^2 h + \frac{2}{3} \pi r \tau \varepsilon_h R^3,$$

stąd

$$P_s = \pi R^2 \left(\sigma_p + \frac{2}{3} \tau \frac{R}{h} \right). \quad (10.144)$$

Nacisk jednostkowy potrzebny do spęczania (odkształcenia) odkuwki obliczymy z równania

$$\bar{p} = \frac{P_s}{\pi R^2} = \sigma_p + \frac{2}{3} \tau \frac{R}{h}.$$

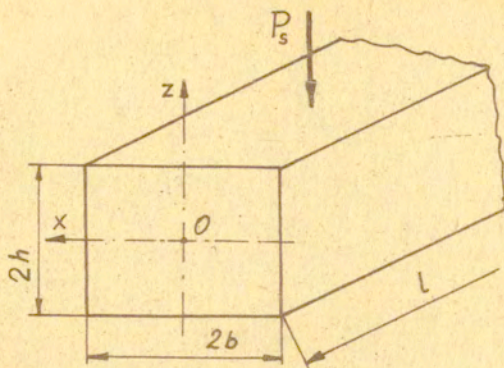
Jeśli przyjmiemy $\tau = \mu \sigma_p$, $D = 2R$, to nacisk jednostkowy spęczania wyznaczmy ze wzoru

$$\bar{p} = \sigma_p \left(1 + \frac{\mu}{3} \frac{D}{h} \right), \quad (10.145)$$

gdzie D i h są wymiarami odkuwki w końcowej fazie spęczania.

Przykład 2

Obliczyć nacisk potrzebny do spęczania płaskownika o wysokości $2h$, szerokości $2b$ i długości l znacznie większej niż szerokość b (rys.10.36).



Rys.10.36. Schemat spęczania płaskownika

Rozwiązanie

Przyjęcie dużej długości płaskownika implikuje w nim płaski stan odkształcenia, a zatem odkształcenia

$$\varepsilon_z = \varepsilon_3 = -\frac{\Delta h}{2h}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_1 = \frac{\Delta h}{2h}, \quad (10.146)$$

które dają intensywność odkształcenia

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2},$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_1^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_1 = \frac{\Delta h}{\sqrt{3} h}. \quad (10.147)$$

Pracę odkształcenia plastycznego płaskownika wyrazić można równaniem

$$L_P = 2 \cdot 2 \sigma_P \frac{\Delta h}{\sqrt{3} h} l \int_0^b dx \int_0^h dz = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_P l \Delta h b. \quad (10.148)$$

Pracę sił tarcia dla przypadku płaskiego odkształcenia (przemieszczanie metalu na powierzchni styku zachodzi tylko wzdłuż

osi x i na dwóch powierzchniach styku metalu z narzędziem) zgodnie z równaniem (10.137) da się wyrazić zależnością

$$L_t = -2 \cdot 2 \tau_s l \int_0^b u dx. \quad (10.149)$$

Przemieszczanie cząstek materiału u na powierzchni styku znajdujemy z równania

$$u = \int \varepsilon_x dx,$$

które po scałkowaniu

$$u = \varepsilon_x x + C$$

i obliczeniu stałej C z warunku brzegowego: gdy $x = 0$, to $u = 0$, stąd $C = 0$, wyraża się zależnością

$$u = \varepsilon_x x.$$

Wstawiając $u = \varepsilon_x \cdot x$ do równania (10.149) otrzymamy pracę idącą na pokonanie oporów tarcia

$$L_t = -2 \cdot 2 \tau_s l \int_0^b \varepsilon_x x dx = -4 \tau_s l \frac{\Delta h}{2h} \int_0^b x dx = -\tau_s l \frac{\Delta h}{h} b^2. \quad (10.150)$$

Aby pokonać siłę tarcia, to należy wykonać pracę tarcia ze znakiem dodatnim.

Przyrównując pracę zewnętrzną $L_z = P \Delta h$ do pracy plastycznej L_p i pracy tarcia L_t ($L_z = L_p + L_t$) otrzymamy siłę spęczania

$$P \Delta h = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_p l \Delta h b + \tau_s l \frac{\Delta h}{h} b^2,$$

$$P = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_p l b + \tau_s l \frac{b^2}{h}. \quad (10.151)$$

Przyjmując powierzchnię nacisku $S = 2bl$ i naprężenie styczne $\tau_s = \mu 2k = \mu \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_p$ ($k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$) wyznaczmy nacisk jednostkowy spęczania płaskownika

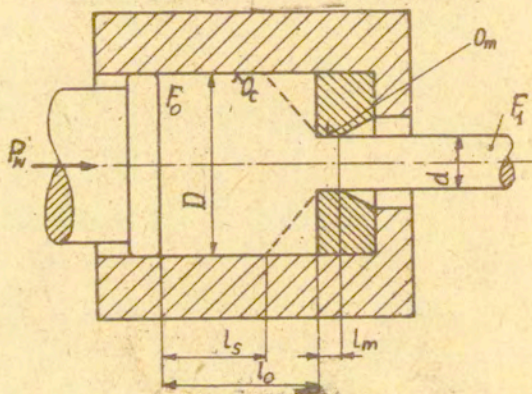
$$\bar{P} = \frac{P_s}{S} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_p \left(1 + \frac{\mu b}{2h}\right). \quad (10.152)$$

Przykład 3

Siłę potrzebną do wyciskania współbieżnego pręta w matrycy kątownej (rys.10.37) można obliczyć wychodząc z założenia, że jest ona równa sile odkształcenia plastycznego P_p , sile tarcia metalu o cylinder P_{tc} i sile tarcia metalu o matrycę P_{tm}

$$P_w = P_p + P_{tc} + P_{tm}. \quad (10.153)$$

Takie podejście zastosował Siebel i Fangmeier.



Rys.10.37. Schemat wyciskania i oznaczeń do wyprowadzenia wzoru (10.157).

Siłę odkształcenia plastycznego P_p otrzymali oni z przyrównania pracy odkształcenia plastycznego $L_p = \sigma_{ps} V \ln \frac{F_0}{F_1}$ ($V = F_0 L_s$)

do pracy zewnętrznej stempla $L_z = \frac{P}{p} l_s$ i uwzględnieniu sprawności wyciskania

$$\frac{P}{p} = \frac{\sigma_{ps}}{\eta_p} F_0 \ln \frac{F_0}{F_1} \quad (10.154)$$

Przyjęli oni siłę tarcia w cylindrze

$$P_{tc} = \sigma_{ps} \mu Q_c l_o, \quad (10.155)$$

a w otworze matrycy

$$P_{tm} = \sigma_{ps} \mu Q_m l_m. \quad (10.156)$$

Całkowita siła wyciskania wyrazi się wzorem

$$P_w = \frac{\sigma_{ps}}{\eta_p} \left(F_0 \ln \frac{F_0}{F_1} + \mu Q_c l_o + \mu Q_m l_m \right), \quad (10.157)$$

gdzie F_0 jest przekrojem materiału wyjściowego, F_1 jest końcowym przekrojem wyciskania, Q_c jest obwodem wewnętrznym cylindra, Q_m jest obwodem otworu matrycy, l_o jest długością drogi tarcia materiału w cylindrze, l_m jest długością otworu matrycy, μ jest współczynnikiem tarcia, η_p jest współczynnikiem sprawności procesu wyciskania ($\eta_p = 0,75 + 0,34$), σ_{ps} jest średnim naprężeniem uplastyczniającym (tablica 1).

Tablica 1

Średnie naprężenie uplastyczniające $\sigma_{ps} = \frac{\sigma_{pp} + \sigma_{pk}}{2}$

Materiał	Tempera- tura °K	σ_{ps} w MN/m ²		
		$\varphi = 0,5$	$\varphi = 1,5$	$\varphi = 2,5$
Pb = 99,985	293	20 - 40	20 - 40	20 - 40
Sn = 99,99	293	30 - 50	30 - 50	30 - 60
Zn - 99,975E	293	100 - 140	120 - 160	140 - 180
ZnAl 4	473	70 - 110	70 - 110	80 - 120
Al - 99,9	293	70 - 80	70 - 90	80 - 120
Al - 99,5	293	90 - 110	110 - 130	120 - 140
Cu 1-E	293	200 - 240	240 - 270	250 - 280
CuZn37	293	260 - 320	-	-
CuZn40Pb2	923	40 - 70	40 - 70	40 - 70
10	293	350 - 380	440 - 480	-
45	293	660 - 720	-	-
Stal węglowa	1423-1523	30 - 60	30 - 70	40 - 70

10.3.2. Metoda założenia funkcji rozkładu prędkości płynięcia i przemieszczenia

10.3.2.1. Równania podstawowe

Jeśli pole prędkości odkształcenia (np. $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$) odpowiadające danemu punktowi na płaszczyźnie fizycznej nie leży w tym samym narożniku lub na tym samym boku sześciokąta Treski (rys.6.10) co i pole naprężeń (np. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) dla tego samego punktu na płaszczyźnie fizycznej, to dla takiego stanu fizycznego możemy określić tylko górną granicę średniego nacisku wynikającą z kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości odkształcenia. Pole to musi spełniać następujące warunki:

- musi być możliwy wypływ materiału spod stempla,
- musi być zachowana nieściśliwość materiału

$$\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0, \quad (10.158)$$

- moc sił wewnętrznych D_w musi być nie większa od mocy sił zewnętrznych $D_z = P \mathcal{V}_0 = \bar{p} F_0 \mathcal{V}_0$

$$D_w \leq P \mathcal{V}_0 = \int_{\bar{F}} \bar{p} \mathcal{V}_0 dF. \quad (10.159)$$

Moc sił wewnętrznych czyli energia dysypacji w ciele obliczana jest z równania

$$D_w = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{\bar{F}_s} \tau_s \mathcal{V}_s dF_s, \quad (10.160)$$

gdzie $\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = D_o$ jest dysypacją energii w objętości ciała odkształcanego, $\int_{\bar{F}_s} \tau_s \mathcal{V}_s dF_s = D_n$ jest dysypacją energii na powierzchniach nieciągłości występujących w metalu odkształcanym i dysypacją energii na kontakcie metalu z narzędziem, \mathcal{V}_s jest prędkością względną ślizgania cząstek metalu na powierzchniach

nieciągłości lub prędkością ślizgania na kontakcie, τ_s jest naprężeniem stycznym na powierzchniach (liniach) nieciągłości i na kontakcie metalu z narzędziem. Na liniach nieciągłości τ_s jest naprężeniem stycznym równym granicy plastyczności na ścinanie $\tau_s = k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$. Na kontakcie materiału z narzędziem $\sqrt{0} \leq \tau_s \leq k$. Gdy $\tau_s = 0$, to nie ma tarcia w ogóle, a gdy $\tau_s = k$, to występuje tarcie przylgowe. Przyjęcie pośrednich wartości między zero i k oznacza uwzględnienie tarcia poślizgowego na kontakcie. Jeśli $\tau_s = ck$, to $0 \leq c \leq 1$ jest współczynnikiem zmniejszającym naprężenie k . Równanie bilansu energii możemy napisać

$$\bar{p} \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{F_s} \tau_s v_s^2 dF_s \quad (10.161)$$

Dla warunku plastyczności Hubera-Misesa ($S_{1j} S_{1j} = 2k^2$) i prawa plastycznego płynięcia Levy-Misesa ($\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda S_{ij}$, $\lambda^2 = \frac{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}{2k^2}$) równanie dysypacji wewnętrznej w elementach objętości wyraża się w postaci

$$D_0 = \int_V \sigma_p \dot{\epsilon}_i dV, \quad (10.162)$$

gdzie $\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}$ jest granicą plastyczności na rozciąganie, $\dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3} [(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + (\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x)^2 + \frac{3}{2} (d_{xy}^2 + d_{yz}^2 + d_{zx}^2)]}$ jest intensywnością prędkości odkształcenia. Dla osiowej symetrii czyli w układzie współrzędnych walcowych r, θ, z mamy

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 3\tau_{rz}^2]},$$

$$\dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3} [\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_\theta^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + 2\dot{\epsilon}_{rz}^2]},$$

$$\int_V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^h d\theta r dr dz \quad \text{— objętość ciała,}$$

$$\int_{F_s} dF_s = \int_0^{2\pi} \int_0^r d\theta r dr \quad \text{— powierzchnia kontaktu.}$$

Dysypację wewnętrzną w obszarze plastycznym można wyrazić równaniem ogólnym w postaci

$$D_w = \int_V \sigma_p \dot{\epsilon}_i dV + \int_{F_s} \tau_s v_s dF_s \quad (10.163)$$

Średni bezwymiarowy jednostkowy nacisk narzędzia na materiał, będący górną oceną nośności, obliczamy z równania

$$\bar{P} = \frac{D_w}{\sigma_p v_o^0 F_o} \quad (10.164)$$

W wielu pracach przyjmowano przemieszczenia punktów materiału \bar{u} zamiast prędkości płynięcia \bar{v} . Wówczas przyrównywano pracę sił wewnętrznych L_w do pracy sił zewnętrznych L_z i obliczano średni nacisk jednostkowy odkształcenia materiału w danym procesie technologicznym.

Praca sił wewnętrznych L_w jest równa sumie pracy odkształcenia plastycznego L_p , pracy sił stycznych na powierzchni ścinania (nieciągłości przemieszczenia punktów) L_n i pracy sił tarcia L_t na powierzchni kontaktu materiału odkształcanego z narzędziem ($L_w = L_p + L_n + L_t$)

$$L_w = \int_V \sigma_p \epsilon_i dV + \int_{F_s} \tau_s u_s dF_s + \int_{F_t} \tau_t u_t dF_t, \quad (10.165)$$

gdzie $\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2} + \frac{3}{2} (d_{xy}^2 + d_{yz}^2 + d_{zx}^2)$

jest intensywnością odkształcenia, $\tau_s = k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$ jest granicą plastyczności na ścinanie, u_s jest różnicą przemieszczenia (skokiem) punktów po obu stronach powierzchni nieciągłości, $\tau_t = c k = c \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}}$ jest jednostkową siłą tarcia, u_t jest przemieszczeniem punktów na powierzchni tarcia.

Praca sił zewnętrznych L_z jest równa

$$L_z = \int_{F_0} \bar{p} u_o dF_o = \bar{p} u_o F_o, \quad (10.166)$$

gdzie \bar{p} jest średnim naciskiem jednostkowym, $u_o = \Delta h$ jest przemieszczeniem narzędzia, F_o jest powierzchnią stępła.

Zgodnie z zasadą zachowania energii czyli równości pracy sił zewnętrznych L_z i pracy sił wewnętrznych L_w ($L_z = L_w$), otrzymujemy jednostkowy bezwymiarowy nacisk stępła narzędzia na materiał

$$\frac{\bar{p}}{\sigma_p} = \frac{L_w}{\sigma_p u_o F_o}. \quad (10.167)$$

W celu znalezienia intensywności prędkości odkształcenia $\dot{\varepsilon}_i$ (lub intensywności odkształcenia ε_i), prędkości na powierzchni nieciągłości v_s^t (lub przemieszczenia u_s) i prędkości na styku metalu z narzędziem v_t^t (lub przemieszczenia u_t) należy przyjąć pewną funkcję rozkładu prędkości w materiale odkształcanym. Funkcji rozkładu prędkości lub przemieszczenia jest wiele, można przyjmować różne funkcje.

10.3.2.2. Wybór funkcji

Do rozwiązania zagadnienia plastycznego płynięcia można przyjmować różne funkcje rozkładu prędkości płynięcia v^e lub przemieszczenia u wzdłuż osi pionowej z (y) lub też w kierunku osi poziomej r (x).

I. Dla zagadnień osiowo-symetrycznych (układ osi r, θ, z przyjmowane są funkcje:

A. Prędkości płynięcia w kierunku osi z :

$$1. \quad v_z^e = -v_0^e \frac{z}{h},$$

$$2. \quad v_z^e = -\dot{\epsilon}_z z, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{v_0^e}{H}, \quad H = 2h, \quad (10.168)$$

$$3. \quad v_z^e = -[\dot{\epsilon}_z z + a z (1 - \frac{z}{h})], \quad a - \text{parametr},$$

$$4. \quad v_z^e = -[\dot{\epsilon}_z z + a_1 z (1 - \frac{z^3}{h^3}) + a_2 z \frac{r^2}{R^2} (1 - \frac{z^3}{h^3})],$$

gdzie R jest promieniem przygotówki, $2h$ -wysokość walca, r, z -współrzędne w układzie walcowym, a_1, a_2 -parametry,

$$5. \quad v_z^e = v_0^e \frac{z}{l}, \quad (v_x^e = -v_0^e \frac{x}{2l}, \quad v_y^e = -v_0^e \frac{y}{2l}) \quad \text{—}$$

dla rozciągania próbek płaskich.

B. Prędkości płynięcia w kierunku osi r :

$$1. \quad v_r^e = v_0^e \frac{r}{2h},$$

$$2. \quad v_r^e = \frac{1}{2} \dot{\epsilon} r, \quad \dot{\epsilon} = \frac{v_0^e}{h} \quad \text{— dla przeciwbieżnego wyciskania tulejek,} \quad (10.169)$$

$$3. \quad v_r^e = C r (1 - \frac{z^2}{2h^2}).$$

C. Przemieszczenia w kierunku osi r :

$$1. u_r = \frac{1}{2} \varepsilon_z r, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta h}{H}, \quad H = 2h,$$

$$2. u_r = \frac{1}{2} \varepsilon_z \left(\frac{R^2}{r} - r \right) \quad \text{— dla przeciwbieżnego wyciskania tulejek,}$$

$$3. u_r = Ar \left(1 - \lambda \frac{z^2}{a^2} \right) \quad \text{— dla ściskania walców,}$$

gdzie $a = \frac{h}{r}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ - współczynnik,

$$A - \text{stała } \left(A = \frac{3}{2a(3-\lambda)} \text{ gdy } \nu_z^e = -\nu_0^e = -1, z = a \right),$$

$$4. u_r = \frac{1}{2} \varepsilon_z r \left(1 - \frac{r_n^2}{r^2} \right) \quad \text{— dla pierścieni,}$$

$$r_n - \text{promień neutralny,} \quad (10.170)$$

$$5. u_r = a_1 r \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) + a_2 r, \quad a_1, a_2 - \text{parametry,}$$

$$6. u_r = r \left(\frac{1}{2} \varepsilon_z - a \right) + \frac{3}{2} a r \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right), \quad a - \text{parametr.}$$

D. Przesunięcia w kierunku osi z:

$$1. U_z = az, \quad a - \text{względna zmiana wysokości.} (10.171)$$

II. Dla zagadnień płaskich np. ściskania pasma (układ osi y,x):

A. Prędkości płynięcia w kierunku osi y:

$$1. v_y^e = -\nu_0^e \frac{y}{h},$$

$$2. v_y^e = -\left[\dot{\varepsilon} y + ay \left(1 - \frac{y}{h} \right) \right], \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\nu^e}{H},$$

a - parametr, (10.172)

$$3. v_y^e = -\nu_0^e \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad \text{— dla wciskania płaskiego stempla w półprzestrzeń.}$$

B. Przemieszczenia w kierunku osi y:

1. $u_y = -\varepsilon y, \quad \varepsilon = \frac{\Delta h}{H},$

2. $u_{y_a} = -\varepsilon_a y + h_b (\varepsilon_a - \varepsilon_b), \quad u_{y_b} = -\varepsilon_b y$ —
dla ściskania bimetalu. (10.173)

C. Przemieszczenia w kierunku osi x:

1. $u_x = a x, \quad a - \text{parametr}$

2. $u_x = \varepsilon x, \quad \varepsilon = \frac{\Delta h}{H},$

3. $u_x = \varepsilon x + a x \left(1 + 3 \frac{y^2}{h^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3} \frac{x^2}{b^2}\right)$ (10.174)

a-współczynnik, 2b-szerokość pasma ściskanego,

4. $u_x = \varepsilon x + a x \left(1 - 3 \frac{y^2}{h^2}\right).$

10.3.2.3. Ściskanie walca

Średnie naciski jednostkowe ściskania walca oraz rozkład prędkości płynięcia materiału można znaleźć, odgadując składową prędkości płynięcia w kierunku osi z , v_z^e , bądź w kierunku promienia r , v_r^e .

1. Założenie składowej prędkości płynięcia wzdłuż osi z

Przyjmijmy liniową zmianę prędkości płynięcia wzdłuż osi z w postaci

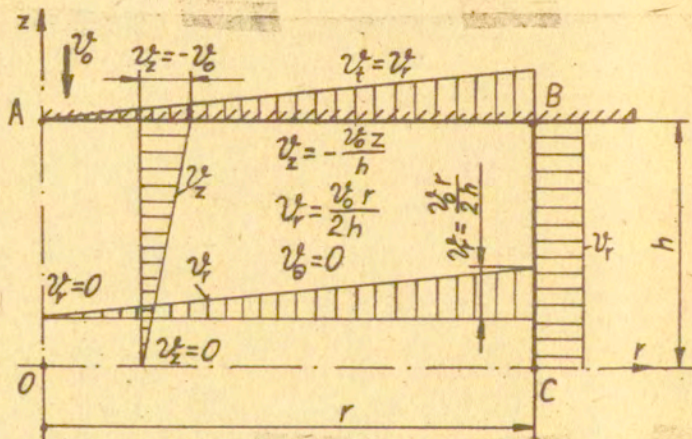
$$v_z^e = -\frac{v_0^e}{h} z \quad (10.175)$$

Funkcja (10.175) spełnia następujące warunki brzegowe:

- na kontakcie materiału z narzędziem ($z = h$)

$$v_z^e = -v_0^e, \text{ gdy } z = -h, \text{ to } v_z^e = v_0^e,$$

- na osi r ($z = 0$) $v_z^e = 0$.



Rys.10.38. Rozkład prędkości płynięcia dla założonej osiowej składowej prędkości v_z^e

Wychodząc z warunku nieściśliwości (4.90), znajdziemy składową prędkości płynięcia w kierunku promienia r . Ponieważ $\dot{\epsilon}_z = -\frac{v_0}{h}$, to warunek nieściśliwości będzie

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v_r r) = \frac{v_0}{h},$$

a po scałkowaniu mamy

$$v_r r = \frac{v_0}{h} \frac{r^2}{2} + C.$$

Z warunku brzegowego, gdy $r = 0$, to $v_r = 0$ wyznaczamy stałą całkowania $C = 0$ i wówczas prędkość płynięcia w kierunku promienia r wyrazi się

$$v_r = \frac{v_0}{2h} r. \quad (10.176)$$

Rozkład prędkości. v_r i v_z pokazano na rysunku (10.38). Prędkość $v_\theta = 0$.

Z równań (10.175) i (10.176) obliczamy prędkości odkształceń

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{v_0}{2h}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{v_0}{2h}, \quad \dot{\epsilon}_z = -\frac{v_0}{h}, \quad \dot{\epsilon}_{rz} = 0. \quad (10.177)$$

Intensywność prędkości odkształcenia dla osiowej symetrii wynosi

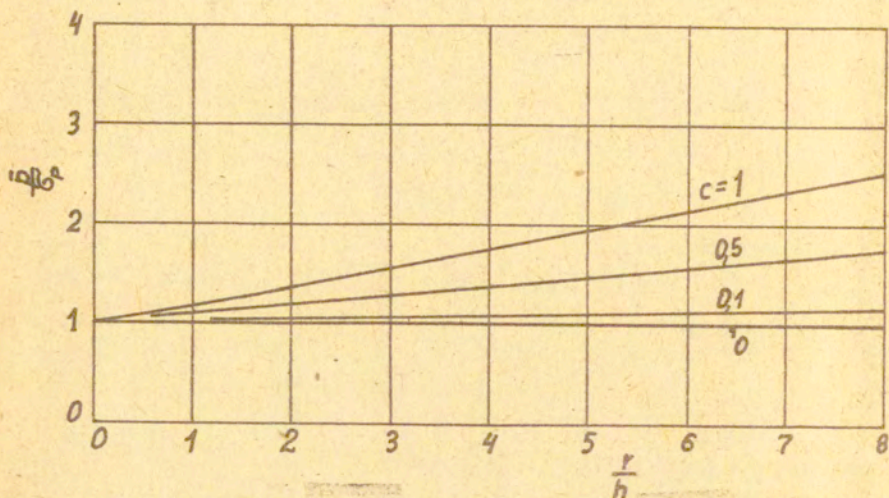
$$\dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{v_0^2}{4h^2} + \frac{v_0^2}{4h^2} + \frac{v_0^2}{h^2}} = \frac{v_0}{h}. \quad (10.178)$$

Dysypację energii wewnątrz próbki i na kontakcie obliczamy z równania (10.163)

$$D_w = \int_0^r \int_0^h \sigma_p \frac{v_0}{h} 2\pi r dr dz + \int_0^r \frac{c \sigma_p}{\sqrt{3}} \frac{v_0}{2h} 2\pi r dr,$$

$$D_w = \pi r^2 \sigma_p v_0 + \frac{\pi c \sigma_p v_0^2 r^3}{3h\sqrt{3}}, \quad (10.179)$$

gdzie $0 \leq c \leq 1$ jest współczynnikiem zmniejszającym granicę plastyczności na ścinanie k ($\tau_s = ck$).



Rys.10.39. Zależność średniego nacisku jednostkowego od geometrii walca i warunków tarcia uzyskana z założenia funkcji $\frac{p}{p_0}$

Średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy narzędzia na materiał odkształcany, zależny od geometrii walca i tarcia na kontakcie, obliczamy z równania (10.164)

$$\frac{\bar{p}}{p_0} = 1 + \frac{cr}{3h\sqrt{3}} \quad (10.180)$$

Krzywe nacisku jednostkowego obliczonego z równania (10.180) przedstawiono na rysunku 10.39. Z rysunku 10.39 widać, że dla walców bardzo wysokich tarcie na kontakcie nieznacznie wpływa na nacisk jednostkowy odkształcenia plastycznego, co jest faktem znanym.

2. Założenie prędkości płynięcia w kierunku promienia r

Przyjmijmy zmianę składowej prędkości płynięcia w kierunku promienia r w postaci funkcji

$$v_r^z = C r \left(1 - \frac{z^2}{2h^2} \right). \quad (10.181)$$

Z warunku nieściśliwości (4.90) wyznaczmy składową prędkości płynięcia wzdłuż osi z . Składowa obwodowa prędkości płynięcia

$v_\theta^z = 0$. Ponieważ prędkość odkształcenia w kierunku promienia r i w kierunku obwodowym θ $\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_\theta = C \left(1 - \frac{z^2}{2h^2} \right)$, to prędkość płynięcia wzdłuż osi z będzie wyrażona wzorem

$$\frac{\partial v_z^z}{\partial z} = -2C \left(1 - \frac{z^2}{2h^2} \right),$$

$$v_z^z = -2C \left(z - \frac{z^3}{6h^2} \right).$$

Stałą C obliczymy z warunku brzegowego, gdy $z = h$, to $v_z^z = -v_\theta^z$ (gdy $z = 0$, to $v_z^z = 0$) i wówczas

$$C = \frac{3}{5} \frac{v_\theta^z}{h}.$$

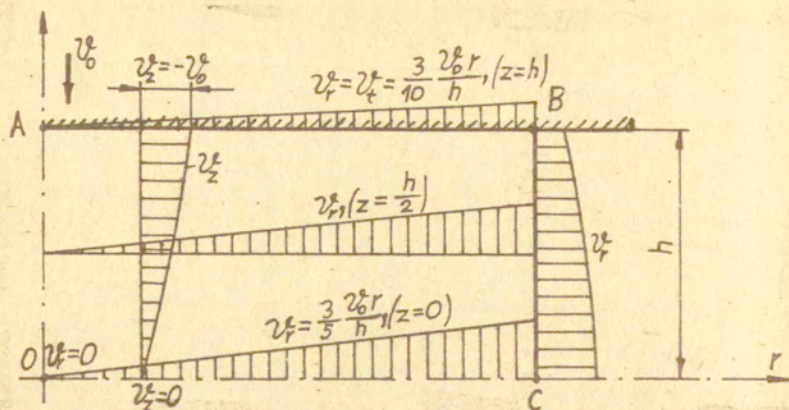
Ostatecznie prędkości płynięcia wzdłuż osi z i osi r wyrażą się następującymi zależnościami:

$$v_r^z = \frac{3}{5} \frac{v_\theta^z r}{h} \left(1 - \frac{z^2}{2h^2} \right), \quad (10.182)$$

$$v_z^z = -\frac{6}{5} \frac{v_\theta^z z}{h} \left(1 - \frac{z^2}{6h^2} \right).$$

Rozkład prędkości płynięcia w walcu przedstawiono na rysunku 10.40. Na kontakcie ($z = h$) prędkość w kierunku promienia wynosi

$$v_r^z = \frac{3}{10} \frac{v_\theta^z r}{h}. \quad (10.183)$$



Rys.10.40. Rozkład prędkości płynięcia dla założonej promieniowej składowej prędkości v_r^*

Prędkości odkształcenia obliczone z równań (10.182) mają postać

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \frac{3}{5} \frac{v_0^*}{h} \left(1 - \frac{z^2}{2h^2}\right), \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \frac{3}{5} \frac{v_0^*}{h} \left(1 - \frac{z^2}{2h^2}\right), \\ \dot{\epsilon}_z &= -\frac{6}{5} \frac{v_0^*}{h} \left(1 - \frac{z^2}{2h^2}\right), \\ \dot{\epsilon}_{rz} &= -\frac{5}{10} \frac{v_0^* r \cdot z}{h^3}. \end{aligned} \quad (10.184)$$

Z zależności (10.184) otrzymujemy intensywność prędkości odkształcenia

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{\sqrt{3}}{5} \frac{v_0^* z}{h^3} \sqrt{3\left(\frac{2h^2}{z} - z\right)^2 + r^2}. \quad (10.185)$$

Energię dysypacji w objętości walca i na kontakcie obliczamy z równania (10.163)

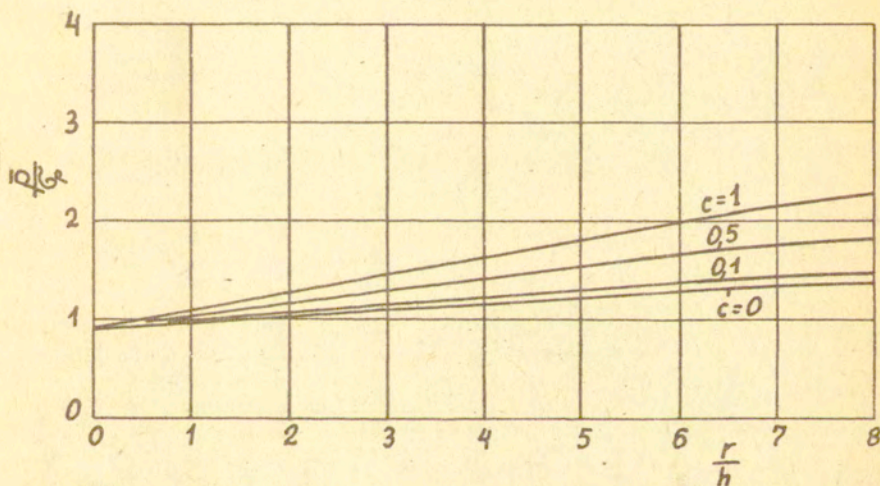
$$\begin{aligned} D_w &= \int_0^h \int_0^r \sigma_p \frac{\sqrt{3}}{5} \frac{v_0^* z}{h^3} \sqrt{3\left(\frac{2h^2}{z} - z\right)^2 + r^2} 2\pi r dr dz + \\ &+ \int_0^r \frac{c \sigma_p}{\sqrt{3}} \frac{3}{10} \frac{v_0^* r}{h} 2\pi r dr, \end{aligned}$$

$$D_w = \frac{2\sqrt{3} \pi \sigma_p \nu_0^2}{15 h^3} \left(\int_0^h \sqrt{[3(\frac{2h^2}{z} - z)^2 + r^2]}^3 + \right. \\ \left. - \int_0^h \sqrt{[3(\frac{2h^2}{z} - z)^2]}^3 \right) z dz + \frac{c \pi \sigma_p \nu_0^2 r^3}{5\sqrt{3} h}, \quad (10.186)$$

a średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy prasowania walców wyznaczamy ze wzoru (10.164)

$$\bar{p} = \frac{D_w}{\sigma_p \nu_0^2 \pi r^2}. \quad (10.187)$$

Na rysunku 10.41 przedstawiono zależność średniego nacisku jednostkowego od geometrii i warunków tarcia, uzyskaną z założenia rozkładu funkcji ν_r^2 .



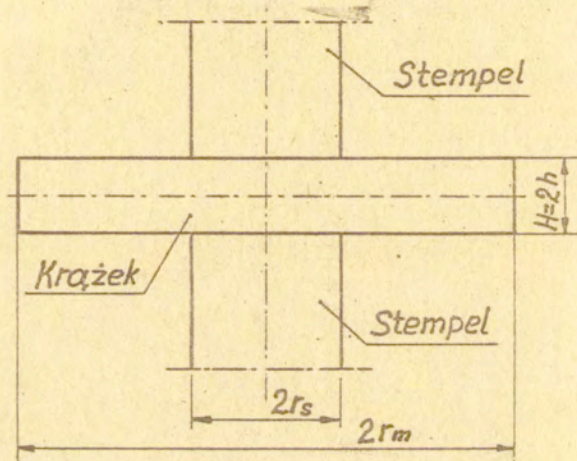
Rys. 10.41. Zależność średniego nacisku jednostkowego od geometrii walca i warunków tarcia uzyskana z założenia funkcji ν_r^2

10.3.2.4. Wciskanie dwóch przeciwległych stempli w krążek

Górną ocenę nośności granicznej dla wciskania dwóch przeciwległych stempli w krążek (rys.10.42) można znaleźć z kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości utworzonego z przyjęcia funkcji opisującej promieniową v_r^0 lub osiową v_z^0 składową prędkości płynięcia.

Do obliczenia górnej oceny nacisku jednostkowego wciskania dwóch przeciwległych stempli w krążek przyjmijmy liniową zmianę prędkości płynięcia wzdłuż osi z w postaci

$$v_z^0 = -\frac{v_0^0 z}{h} \quad (10.188)$$



Rys.10.42. Schemat wciskania dwóm przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek

Funkcja (10.188) spełnia następujące warunki:

- na kontakcie materiału ze stemplem ($z = h$) $v_z^0 = -v_0^0$,
- na osi r ($z = 0$) $v_z^0 = 0$.

Wychodząc z warunku nieściśliwości (4.90) znaleźliśmy składową prędkości płynięcia w kierunku promienia r . Ponieważ $\dot{\xi}_z = -\frac{v_0^2}{h}$, to warunek nieściśliwości będzie

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v_r^2 r) = \frac{v_0^2}{h},$$

a po scałkowaniu mamy

$$v_r^2 r = \frac{v_0^2}{h} \frac{r^2}{2} + C.$$

Z warunku brzegowego, gdy $r = 0$, to $v_r^2 = 0$ określamy stałą całkowania $C = 0$ i wówczas prędkość płynięcia w kierunku promienia wyrazi się

$$v_r^2 = \frac{v_0^2 r}{2h}. \quad (10.189)$$

Rozkład prędkości v_r^2 i v_z^2 pokazano na rysunku 10.43 (prędkość obwodowa $v_\theta^2 = 0$). Z równań (10.188) i (10.189) obliczamy składowe prędkości odkształcenia

$$\dot{\xi}_r = \frac{v_0^2}{2h}, \quad \dot{\xi}_\theta = \frac{v_0^2}{2h}, \quad \dot{\xi}_z = -\frac{v_0^2}{h}, \quad \dot{\xi}_{rz} = 0. \quad (10.190)$$

Wychodząc z warunku równości prędkości v_r^2 na linii OA (rys.10.43) w pierścieniu $r_m \gg r \gg r_s$ mamy prędkość promieniową

$$v_r^2 = \frac{v_0^2 r_s^2}{2hr}, \quad (10.191)$$

a z warunku nieściśliwości (4.90) otrzymamy $\frac{\partial v_z^2}{\partial z} = 0$ to i

$$v_z^2 = 0. \quad (10.192)$$

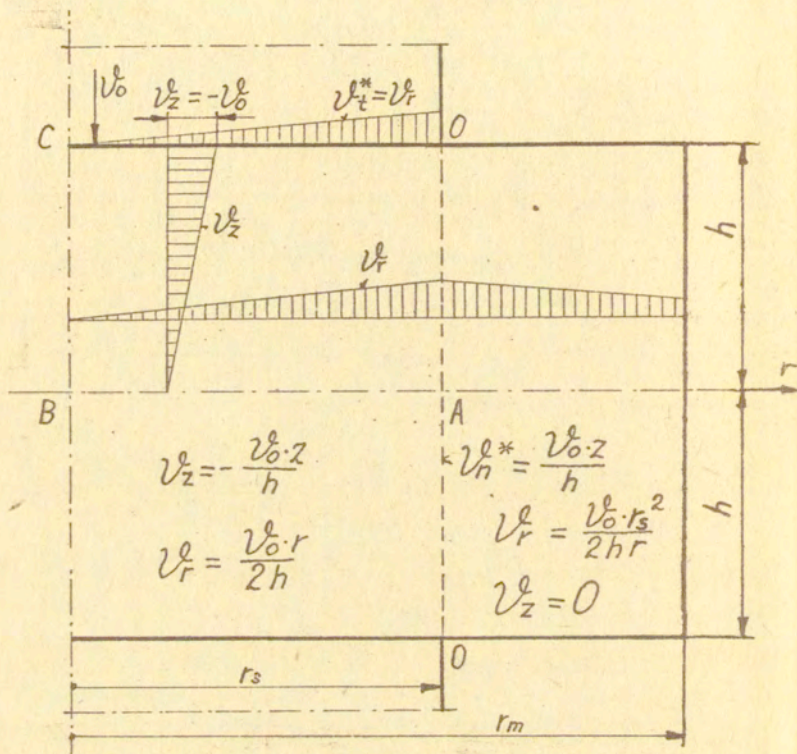
Następnie z równań (10.191) i (10.192) otrzymamy składowe prędkości odkształcenia

$$\dot{\xi}_r = -\frac{v_0^2 r_s^2}{2hr^2}, \quad \dot{\xi}_\theta = \frac{v_0^2 r_s^2}{2hr^2}, \quad \dot{\xi}_z = 0. \quad (10.193)$$

Z równań (10.188) i (10.192) bezpośrednio wynika, że na linii OA nieciągłość prędkości jest

$$v_n^e = \frac{v_0^e z}{h} . \quad (10.194)$$

Na kontakcie materiału ze stemplami mamy prędkość płynięcia materiału



Rys.10.43. Rozkład prędkości płynięcia w krążku

$$v_t^e = v_r^e = \frac{v_0^e r}{2h} . \quad (10.195)$$

Prędkość ta wskazuje na występowanie na kontakcie stempli z krążkiem siły tarcia.

Podstawiając zależności (10.190) do równania (10.162 - $\dot{\xi}_1$) otrzymamy intensywność prędkości odkształcenia pod stemplami

$$\dot{\xi}_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{v_0^2}{4h^2} + \frac{v_0^2}{4h^2} + \frac{v_0^2}{h^2}} = \frac{v_0}{h}, \quad (10.196)$$

a przy podstawieniu zależności (10.193) otrzymamy intensywność prędkości odkształcenia w pierścieniu

$$\dot{\xi}_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{v_0^2 r_s^4}{4h^2 r^4} + \frac{v_0^2 r_s^4}{4h^2 r^4}} = \frac{v_0^2 r_s^2}{r^2 h} \sqrt{\frac{1}{3}}. \quad (10.197)$$

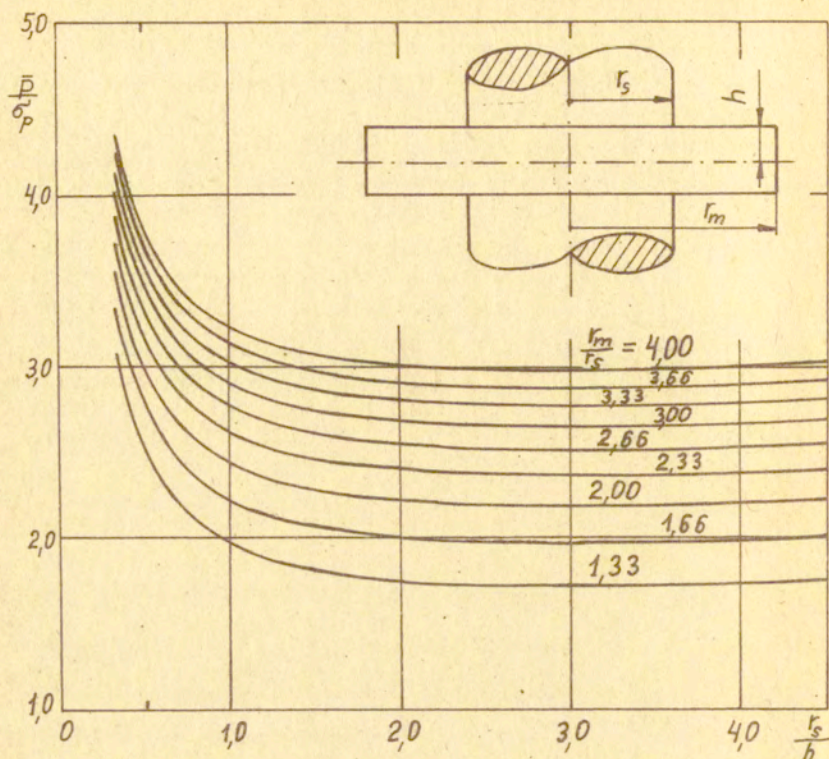
Podstawiając zależności (10.196), (10.197) oraz (10.194) i (10.195) do równania (10.163) otrzymamy równanie dysypacji wewnętrznej w całym krążku

$$D_w = \int_0^s \int_0^h \sigma_p \frac{v_0}{h} 2\pi r dr dz + \int_{r_s}^{r_m} \int_0^h \sigma_p \frac{v_0^2 r_s^2}{h r^2} \sqrt{\frac{1}{3}} 2\pi r dr dz + \\ + \int_0^h \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}} \frac{v_0^2 z}{h} 2\pi r_s dz + \int_0^s \frac{c \sigma_p v_0^2 r}{\sqrt{3} 2h} 2\pi r dr. \quad (10.198)$$

Uwzględniając równanie (10.198) w równaniu (10.164) i wykonując całkowanie otrzymamy ostateczną zależność bezwymiarowego nacisku jednostkowego od geometrii krążka, promienia stempli r_s i współczynnika c zmniejszającego siłę tarcia na kontakcie

$$\frac{\bar{P}}{\sigma_p} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{r_m}{r_s} + \frac{h}{\sqrt{3} r_s} + \frac{c r_s}{3h\sqrt{3}}. \quad (10.199)$$

Na rysunku 10.44 pokazano krzywe nacisków jednostkowych wyznaczone z równania (10.199) dla różnych stosunków $\frac{r_m}{r_s}$, $\frac{r_s}{h}$ i przykładowego współczynnika $c = 0,35$.



Rys.10.44. Zależność średniego nacisku jednostkowego od wymiarów krążka i średnicy stępła dla tarcia suchego ($c = 0,35$)

Jeśli przyjmiemy rozkład prędkości promieniowej w postaci funkcji

$$v_r^e = Cr \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right), \quad (10.200)$$

to otrzymamy wzór na dysypację wewnętrzną bardzo złożony.

10.3.2.5. Ściskanie pierścieni

Górną ocenę nacisku jednostkowego oraz wartość promienia neutralnego ściskania pierścieni między dwiema sztywnymi płytami można obliczyć przyjmując funkcję rozkładu prędkości płynięcia wzdłuż osi z , v_z . Schemat ściskania pierścieni pokazano na rysunku 10.7.

Przyjmijmy liniową zmianę prędkości płynięcia wzdłuż osi z w postaci funkcji

$$v_z = -\frac{v_0 z}{h} \quad (10.201)$$

Prędkość ta spełnia warunki:

- na kontakcie materiału ze stemplem ($z = h$) $v_z = -v_0$,
- na osi r ($z = 0$) $v_z = 0$.

Wychodząc z warunku nieściśliwości (4.90) znajdziemy składową prędkości płynięcia w kierunku promienia r . Ponieważ $\dot{\epsilon}_z = -\frac{v_0}{h}$, to z warunku nieściśliwości otrzymamy równanie

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (v_r r) \right] = \frac{v_0}{h},$$

które po scałkowaniu daje zależność na prędkość promieniową

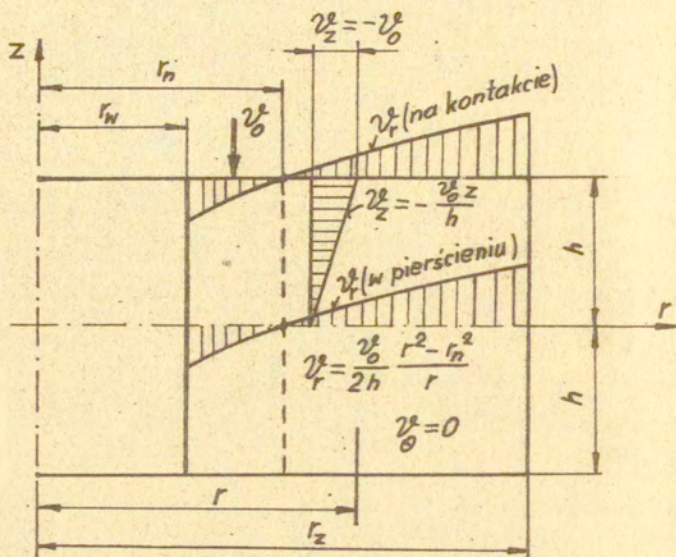
$$v_r = \frac{1}{2} \frac{v_0}{h} r + \frac{C}{r}.$$

Z warunku brzegowego, gdy $r = r_n$, to $v_r = 0$ (prędkość przemieszczania cząstek na promieniu neutralnym r_n jest równa zeru), określamy stałą całkowania $C = -\frac{v_0 r_n^2}{2h}$ i wówczas prędkość płynięcia w kierunku promienia wyrazi się równaniem

$$v_r = \frac{v_0}{2h} \left(\frac{r^2 - r_n^2}{r} \right), \quad (10.202)$$

$$v_0 = 0.$$

Rozkład prędkości płynięcia v_r^z i v_z^z w całym pierścieniu pokazano na rysunku 10.45. Z równania (10.202) wynika, że jeśli promień bieżący $r < r_n$, to $v_r^z < 0$, a gdy $r > r_n$, to wówczas $v_r^z > 0$.



Rys.10.45. Rozkład prędkości płynięcia w pierścieniu

Z równania (10.201) i (10.202) obliczamy składowe prędkości odkształcenia

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \frac{v_0^z}{2h} \left[1 + \left(\frac{r_n}{r} \right)^2 \right], \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \frac{v_0^z}{2h} \left[1 - \left(\frac{r_n}{r} \right)^2 \right], \\ \dot{\epsilon}_z &= -\frac{v_0^z}{h}, \\ \dot{\epsilon}_{rz} &= 0. \end{aligned} \tag{10.203}$$

Podstawiając zależności (10.203) do równania (10.162 - $\dot{\varepsilon}_1$)
otrzymamy intensywność prędkości odkształcenia w pierścieniu

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{v_0^2}{h} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{r_n}{r}\right)^4} \quad (10.204)$$

Po podstawieniu zależności (10.204) i (10.202) do równania
(10.163) otrzymamy dysypację wewnętrzną w pierścieniu w postaci
ogólnej

$$\begin{aligned} D_w = & \int_0^h \int_{r_n}^{r_z} \sigma_p \frac{v_0^2}{h} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{r_n}{r}\right)^4} 2\pi r dr dz + \\ & + \int_{r_n}^{r_z} \frac{c \sigma_p v_0^2}{2\sqrt{3} h} \left(\frac{r^2 - r_n^2}{r}\right) 2\pi r dr + \\ & - \int_{r_w}^{r_n} \frac{c \sigma_p v_0^2}{2\sqrt{3} h} \left(\frac{r^2 - r_n^2}{r}\right) 2\pi r dr. \end{aligned} \quad (10.205)$$

Po redukcji i scałkowaniu równanie dysypacji ma postać

$$\begin{aligned} D_w = & \pi \sigma_p v_0^2 r_w^2 \left\{ \sqrt{\left(\frac{r_z}{r_w}\right)^4 + \frac{1}{3} \left(\frac{r_n}{r_w}\right)^4} + \right. \\ & \left. - \sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{r_n}{r_w}\right)^4} - \frac{1}{3} \left(\frac{r_n}{r_w}\right)^2 \right. \\ & \cdot \ln \frac{\left(\frac{r_n}{r_z}\right)^2 \left[\left(\frac{r_n}{r_w}\right)^2 + \sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{r_z}{r_w}\right)^4 + \frac{1}{3} \left(\frac{r_n}{r_w}\right)^4} \right]}{\left(\frac{r_n}{r_w}\right)^2 + \sqrt{3} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{r_n}{r_w}\right)^4}} + \\ & \left. + \frac{c r_w}{3\sqrt{3} h} \left[1 + 4 \left(\frac{r_n}{r_w}\right)^3 + \left(\frac{r_z}{r_w}\right)^3 - 3 \left(\frac{r_n}{r_w}\right)^2 \left(\frac{r_z}{r_w}\right) - 3 \left(\frac{r_n}{r_w}\right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.206)$$

W równaniu dysypacji wewnętrznej (10.206) występuje nieznaną promień neutralny r_n , który musi być obliczony z warunku najmniejszej mocy dysypowanej w pierścieniu.

Promień neutralny r_n oddzielający strefy plastycznego płynięcia w pierścieniu podczas ściskania oblicza się z mocy dysypowanej w tym pierścieniu. Najmniejszą moc dysypowaną w pierścieniu znajduje się przez zróżniczkowanie równania dysypacji wewnętrznej D_w (10.206) względem promienia neutralnego r_n i przyrównaniu tej pochodnej do zera

$$\frac{\partial D_w}{\partial r_n} = 0. \quad (10.207)$$

Po wykonaniu różniczkowania i uproszczeniu pochodna ta ma następującą postać:

$$\begin{aligned} & \sqrt{3} a^2 \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{S} \right) - 3 \ln \frac{a^2 + \sqrt{3} P}{b^2 (a^2 + \sqrt{3} S)} + \\ & - \frac{3P + \sqrt{3} a^2}{P + \sqrt{3} P^2 \frac{1}{a^2}} + \frac{3S + \sqrt{3} a^2}{S + \sqrt{3} S^2 \frac{1}{a^2}} + \quad (10.208) \\ & + \frac{3c r_w}{h} (2a - b - 1) = 0, \end{aligned}$$

gdzie $a = \frac{r_n}{r_w}$, $b = \frac{r_z}{r_w}$, $P = \sqrt{b^4 + \frac{1}{3} a^4}$, $S = \sqrt{1 + \frac{1}{3} a^4}$.

Z równania (10.208) dla danych wartości b, c, h, r_w znajdujemy wartość a czyli promień neutralny r_n , który daje najmniejszą moc odkształcenia plastycznego po podstawieniu do równania (10.206).

Wartość promienia neutralnego r_n dla różnych geometrii pierścienia i różnych warunków tarcia na kontakcie narzędzia z pier-

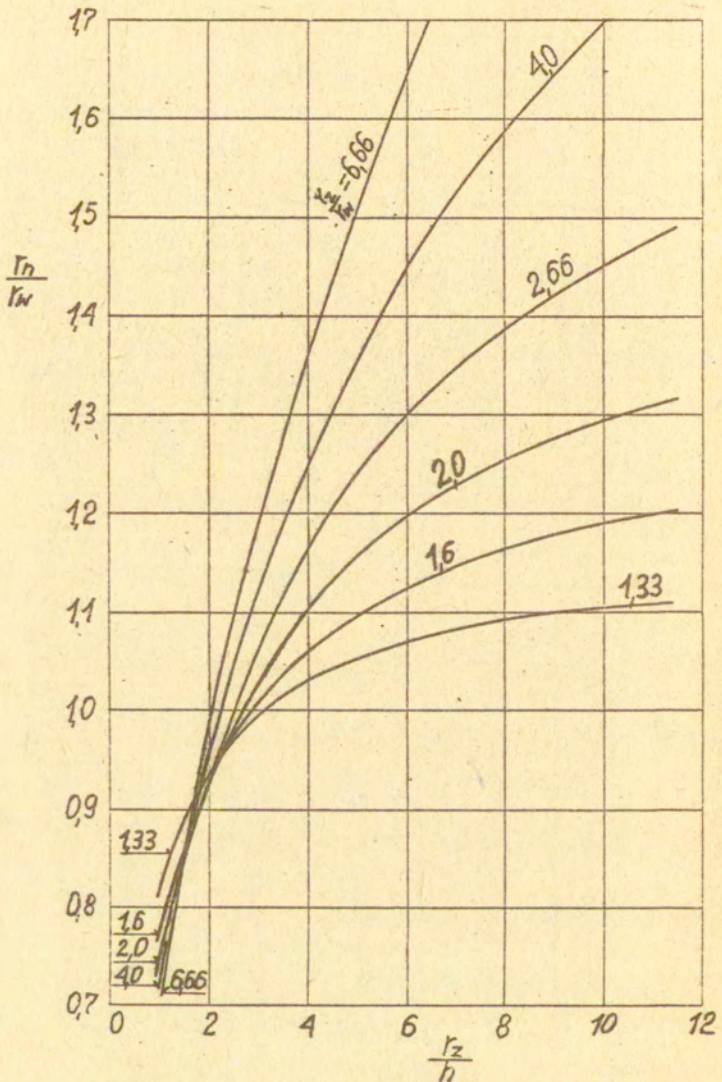
ścieniem obliczamy z równania (10.208). Niewiadomą jest stosunek promienia neutralnego do promienia wewnętrznego ($\frac{r_n}{r_w} = a$), którą dla danych wartości b, c, h, r_w obliczano na maszynie cyfrowej "Odra 1204", ponieważ równanie (10.208) jest mocno uwikłane. Na rysunku 10.46 pokazano wpływ geometrii pierścienia r_z/h i r_z/r_w oraz tarcia (współczynnik c) na kontakcie na wartość promienia neutralnego wyrażonego stosunkiem $\frac{r_n}{r_w}$.

Średni nacisk jednostkowy, będący górną oceną nośności ściskania pierścieni obliczamy z równania (10.164), które po uwzględnieniu zależności (10.206) przyjmuje postać

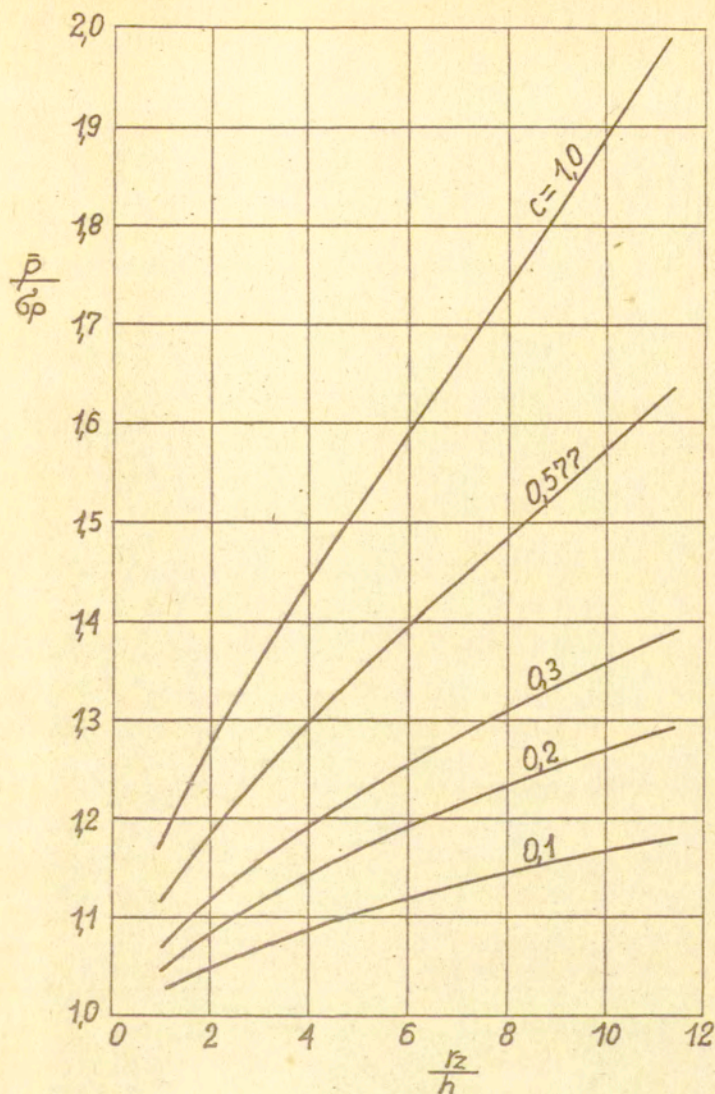
$$\begin{aligned} \frac{\bar{P}}{\sigma_p} = & \frac{r_w^2}{r_z^2 - r_w^2} \left[P - S - \frac{1}{\sqrt{3}} a^2 \ln \frac{a^2 + \sqrt{3} P}{b^2 (a^2 + \sqrt{3} S)} + \right. \\ & \left. + \frac{c r_w}{3\sqrt{3} h} (1 + 4a^3 + b^3 - 3a^2 b - 3a^2) \right], \end{aligned} \quad (10.209)$$

gdzie $a = \frac{r_n}{r_w}$, $b = \frac{r_z}{r_w}$, $P = \sqrt{b^4 + \frac{1}{3} a^4}$, $S = \sqrt{1 + \frac{1}{3} a^4}$.

Na rysunku 10.47 przykładowo pokazano zależność nacisku jednostkowego $\frac{\bar{P}}{\sigma_p}$ od $\frac{r_z}{h}$ i współczynnika c dla $\frac{r_z}{r_w} = 2,0$.



Rys.10.46. Zależność $\frac{r_n}{r_w}$ od $\frac{r_z}{h}$ i $\frac{r_z}{r_w}$ dla współczynnika $c = 0,3$



Rys.10.47. Zależność nacisku jednostkowego $\frac{\bar{p}}{6p}$ od $\frac{r_z}{h}$ i współczynnika c dla $\frac{r_z}{r_w} = 2,0$

10.3.2.6. Wyciskanie przeciwbieżne tulei

W procesie przeciwbieżnego wyciskania tulei płaskim stemplem w zamkniętej matrycy można wyodrębnić trzy charakterystyczne stadia procesu:

1. Stadium nieustalonego procesu, podczas którego występuje wzrost siły wyciskania w miarę zagłębiania się stempla w materiał.
2. Stadium ustalonego procesu, podczas którego siła wyciskania praktycznie nie ulega zmianie.
3. Stadium intensywnego wzrostu siły. Wzrost siły związany jest ze zmniejszaniem wysokości h_z metalu pod stemplem i zwiększonego udziału sił tarcia.

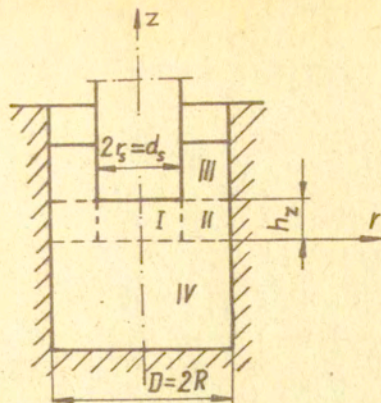
Największe znaczenie praktyczne posiada stadium drugie procesu wyciskania.

W stadium ustalonego procesu wyciskania przeciwbieżnego tulei wysokość h_z obszaru plastycznego pod stemplem (rys.10.48) wg Geleji wynosi $h_z > 0,5 d$, a wg Storożewa dla tulei o bardzo cienkich ściankach — wynosi $h_z = (0,1 + 0,2)d$. Podział obszaru odkształcenia plastycznego przy przeciwbieżnym wyciskaniu tulei na strefy odkształcenia i na powierzchnie nieciągłości prędkości (przemieszczeń) stycznych (powierzchnie ścinania) pokazano na rysunku 10.48.

W strefie I przyjmujemy zależność między przemieszczeniami a odkształceniami w postaci $(\epsilon_z = \frac{\Delta h}{h_z})$

$$u_{r_1} = \frac{1}{2} \epsilon_z r_1, \quad (10.210)$$

z której obliczamy przemieszczenie w kierunku osi z



Rys.10.48. Schemat stref odkształcenia przy wyciskaniu przeciwbieżnym tulei

$$u_{z_I} = -\varepsilon_z z$$

i następnie odkształcenia

$$\varepsilon_{r_I} = \frac{1}{2} \varepsilon_z, \quad \varepsilon_{\theta_I} = \frac{1}{2} \varepsilon_z, \quad \varepsilon_{z_I} = -\varepsilon_z. \quad (10.211)$$

Intensywność odkształcenia dla osiowo-symetrycznego stanu odkształcenia jest równa

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2} = \varepsilon_z. \quad (10.212)$$

Praca odkształcenia plastycznego w strefie pierwszej jest równa

$$L_{P_I} = \sigma_P \int_0^{2\pi} \int_0^{r_s} \int_0^{h_z} \varepsilon_z d\theta r dr dz = \pi \sigma_P \varepsilon_z h_z r_s^2. \quad (10.213)$$

Praca sił tarcia na kontakcie stempla ze strefą I jest równa

$$L_{t_I} = ck \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_s} u_r r dr = c \frac{\sigma_p'}{\sqrt{3}} 2\pi \int_0^{r_s} \frac{1}{2} \varepsilon_z r^2 dr =$$

$$= \frac{c \sigma_p'}{\sqrt{3}} 2\pi \frac{1}{2} \varepsilon_z \frac{r_s^3}{3} = \frac{c \sigma_p'}{\sqrt{27}} \pi \varepsilon_z r_s^3. \quad (10.214)$$

Praca sił ścinania na powierzchni $z = 0$ między strefami I i IV

$$L_{n_I} = k \int_0^{2\pi} \int_0^{r_s} u_r r dr d\theta = \frac{1}{3} \pi k \varepsilon_z r_s^3 = \frac{\sigma_p'}{\sqrt{27}} \pi \varepsilon_z r_s^3. \quad (10.215)$$

W strefie II przyjmujemy przemieszczenie promieniowe określone zależnością

$$u_{r_{II}} = \frac{1}{2} \varepsilon' \frac{R^2 - r^2}{r}, \quad (10.216)$$

gdzie $\varepsilon' = \varepsilon_z \frac{r_s^2}{R^2 - r_s^2}$ jest względną zmianą wysokości h_z w strefie drugiej. Składowe stanu odkształcenia wynoszą

$$\varepsilon_{r_{II}} = -\frac{1}{2} \varepsilon' \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right),$$

$$\varepsilon_{\theta_{II}} = -\frac{1}{2} \varepsilon' \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right), \quad (10.217)$$

$$\varepsilon_{z_{II}} = \varepsilon',$$

intensywność odkształcenia jest równa

$$\varepsilon_{i_{II}} = \varepsilon' \sqrt{1 + \frac{R^4}{3r^4}} = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{3}} \sqrt{3 + \frac{R^4}{r^4}}. \quad (10.218)$$

Praca odkształcenia plastycznego w strefie drugiej jest równa

$$L_{P_{II}} = \sigma_p' \int_0^{2\pi} \int_0^{h_z} \int_{r_s}^R \frac{\varepsilon'}{\sqrt{3}} \sqrt{3 + \frac{R^4}{r^4}} r dr d\theta dz = \frac{\sigma_p'}{\sqrt{3}} \pi \varepsilon' h_z r_s B, \quad (10.219)$$

gdzie

$$B = \frac{\ln\left[\frac{1}{3} \frac{R^2}{r_s^2} + \sqrt{3 + \frac{R^4}{r_s^4}}\right] - \sqrt{1 + 3 \frac{r_s^4}{R^4}} + 2}{1 - \frac{r_s^2}{R^2}}.$$

Praca sił tarcia na pionowej powierzchni

$$L_{t_{II}} = ck \int_0^{2\pi} \int_0^{h_z} u_{z_{II}} R d\theta dz = ck\pi R \varepsilon' h_z^2. \quad (10.220)$$

Praca sił ścinania na pionowej powierzchni rozdzielającej strefę II od strefy I jest równa ($u_{z_{(II-I)}} = u_{z_{II}} + u_{z_I}$)

$$\begin{aligned} L_{n_{II}} &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{h_z} r_s d\theta u_{z_{II-I}} dz = k \int_0^{2\pi} \int_0^{h_z} r_s d\theta (\varepsilon' + \varepsilon_z) z dz = \\ &= \pi k r_s (\varepsilon' + \varepsilon_z) h_z^2. \end{aligned} \quad (10.221)$$

Praca sił ścinania między strefą II i III oraz między strefą II i IV jest równa

$$\begin{aligned} L_{n_{III-IV}} &= 2k \int_0^{2\pi} \int_0^R r d\theta dr u_{r_{II}} = 2k \int_0^{2\pi} \int_0^R r d\theta dr \frac{1}{2} \varepsilon' \frac{R^2 - r^2}{r} = \\ &= 2\pi k \varepsilon' \left(\frac{2}{3} R^3 + \frac{1}{3} r_s^3 - R^2 r_s \right). \end{aligned} \quad (10.222)$$

Całkowita praca wewnętrzna L_w wyciskania tulei jest równa sumie poszczególnych prac

$$L_w = L_{P_I} + L_{t_I} + L_{n_I} + L_{P_{II}} + L_{t_{II}} + L_{n_{II}} + L_{n_{III}iW},$$

$$L_w = \pi r_s^2 \varepsilon_z h_z \sigma_p \left[1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{r_s}{h_z} (1+c) + \frac{B}{\sqrt{3}} + 1,15 \frac{r_s}{h_z} \cdot \right.$$

$$\left. \frac{\frac{2}{3} \frac{R}{r_s} + \frac{1}{3} \frac{r_s^2}{R^2} - 1 + \frac{1}{2} \frac{h_z^2}{r_s^2} (c \frac{r_s}{R} + 1)}{1 - (\frac{r_s}{R})^2} \right]. \quad (10.223)$$

Uwzględniając pracę zewnętrzną wyciskania tulei

$$L_z = P \Delta h = \bar{p} \pi r_s^2 \Delta h,$$

otrzymamy średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy

$$\frac{\bar{p}}{\sigma_p} = 1 + \frac{B}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{r_s}{h_z} (1+c) + 1,15 \frac{r_s}{h_z} \cdot$$

$$\cdot \frac{\frac{2}{3} \frac{R}{r_s} + \frac{1}{3} \frac{r_s^2}{R^2} - 1 + \frac{1}{2} \frac{h_z^2}{r_s^2} (1+c \frac{r_s}{R})}{1 - (\frac{r_s}{R})^2}. \quad (10.224)$$

W zależności od wartości wysokości h_z będzie się zmieniała praca wewnętrzna L_w wyciskania tulei. Dla przyjętego schematu odkształcenia (rys.10.48) wysokość h_z musi być taka, aby całkowita praca wewnętrzna na kinematycznie dopuszczalnych przemieszczeniach była najmniejsza. Zatem musi być spełniony warunek

$$\frac{\partial L_w}{\partial h_z} = 0,$$

z którego obliczymy stosunek

$$\frac{h_z}{d_s} = \sqrt{\frac{1+c \left(1 - \frac{d_s^2}{D^2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \frac{D}{d_s} + \frac{1}{3} \frac{d_s^2}{D^2} - 1\right)}{1 + c \frac{d_s}{D}}}. \quad (10.225)$$

Obliczając wartości $\frac{h_z}{d_s}$ z zależności (10.225) i wstawiając je $\left(\frac{h_z}{d_s} = \frac{h_z}{2r_s}, \quad \frac{h_z}{r_s} = 2 \frac{h_z}{d_s}\right)$ do wzoru (10.224) otrzymamy najmniejszy bezwymiarowy nacisk jednostkowy potrzebny do wyciskania przeciwbieżnego tulei. Wymiary $D = 2R$, $d_s = 2r_s$ są znane z żądanej geometrii tulei (rys.10.48). Współczynnik c charakteryzujący tarcie na kontakcie materiału ze stemplem w procesie wyciskania tulei jest przyjmowany w granicach od 0 do 1, $0 \leq c \leq 1$.

10.3.3. Metoda założonego schematu odkształcenia

Metoda założonego schematu odkształcenia metalu w danym procesie technologicznym polega na zamianie pełnego, rzeczywistego pola linii płynięcia metalu na bardziej proste kinematycznie dopuszczalne pole składające się ze sztywnych bloków ślizgających się po sobie i po powierzchniach narzędzia. Moc określona z takiego schematu odkształcenia jest większa od mocy sił wewnętrznych rzeczywiście występujących przy plastycznym kształtowaniu. Zatem nacisk jednostkowy obliczony tą metodą jest górną oceną nośności. Jest to przybliżona energetyczna metoda obliczania nacisków przy plastycznym kształtowaniu metali.

Moc sił wewnętrznych D_w obliczona z przyjętego schematu odkształcenia kinematycznie dopuszczalnego składającego się ze sztywnych bloków, równa jest sumie mocy rozwijanej na powierzchniach bloków $D_b = k \int_{F_b} v_b^2 dF_b$ i mocy idącej na pokonanie oporów tarcia na powierzchni styku bloków z narzędziem

$$D_t = 2 \int_{F_t} \tau_t v_t^2 dF_t = 2ck \int_{F_t} v_t^2 dF_t$$

$$D_w = D_b + D_t = k \int_{F_b} v_b^2 dF_b + 2ck \int_{F_t} v_t^2 dF_t. \quad (10.226)$$

Moc sił zewnętrznych jest równa

$$D_z = \int_{F_0} \bar{p} dF_0 v_0 = \bar{p} F_0 v_0, \quad (10.227)$$

gdzie \bar{p} jest naciskiem jednostkowym narzędzia działającego na powierzchnię F_0 , v_0^z jest prędkością ruchu narzędzia.

Z równości mocy sił zewnętrznych D_z z mocą sił wewnętrznych D_w , otrzymujemy bezwymiarowy nacisk jednostkowy narzędzia na materiał będący górną oceną nośności

$$\bar{p} F_0 v_0^z = k \int_{F_b} v_b^z dF_b + 2ck \int_{F_t} v_t^z dF_t ,$$

$$\frac{\bar{p}}{2k} = \frac{\int_{F_b} v_b^z dF_b + 2c \int_{F_t} v_t^z dF_t}{2 F_0 v_0^z} , \quad (10.228)$$

gdzie F_b jest powierzchnią styku bloków, F_t jest powierzchnią styku materiału z narzędziem, v_b^z jest prędkością względną ślizgania bloków, v_t^z jest prędkością względną ślizgania bloków po narzędziu, k jest granicą plastyczności na ścinanie, $0 \leq c \leq 1$ jest współczynnikiem zmniejszającym k .

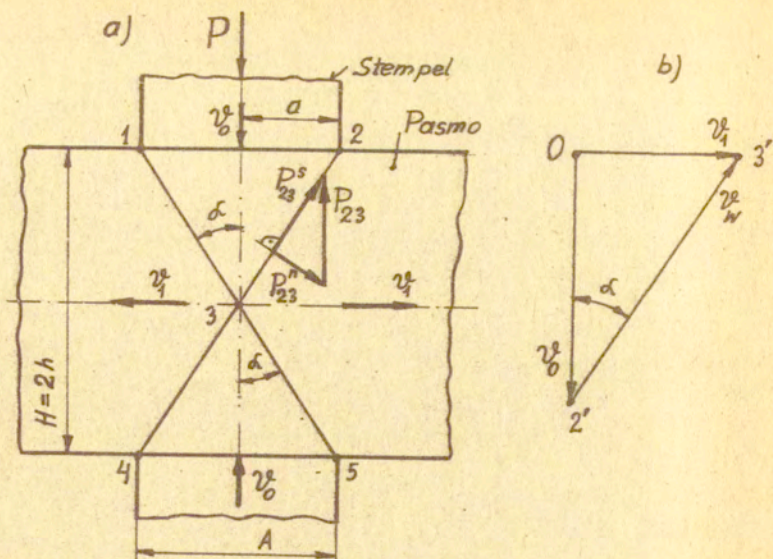
Twierdzenie o górnej ocenie wartości nośności dokładnie jest opisane w rozdziale VIII.

10.3.3.1. Przecinanie pasma

Ściskanie pasma cienkimi stemplami nosi nazwę przecinania pasma. Przecinanie to odbywa się w płaskim stanie odkształcenia i jest przedstawione na rysunku 10.49.

Prędkość rozsuwania się sztywnych bloków obliczamy z warunku stałej objętości, $v_0^z A = v_1^z H$ (szerokość pasma $b = 1$)

$$v_1^z = v_0^z \frac{A}{H} ,$$



Rys.10.49. a) Schemat przecinania pasma; b) Hodograf prędkości a prędkość względna na powierzchni (linii) nieciągłości 2-3 jest równa

$$v_w = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \frac{v_0}{H} \sqrt{H^2 + A^2} = \frac{v_0}{h} \sqrt{h^2 + a^2}.$$

Siła styczna na linii nieciągłości 2-3

$$P_{23}^s = k l_{23}, \quad l_{23} = \sqrt{a^2 + h^2},$$

a siła normalna P_{23}^n (obliczona z podobieństwa trójkątów — $a:h = P_{23}^n : P_{23}^s$)

$$P_{23}^n = \frac{P_{23}^s a}{h}.$$

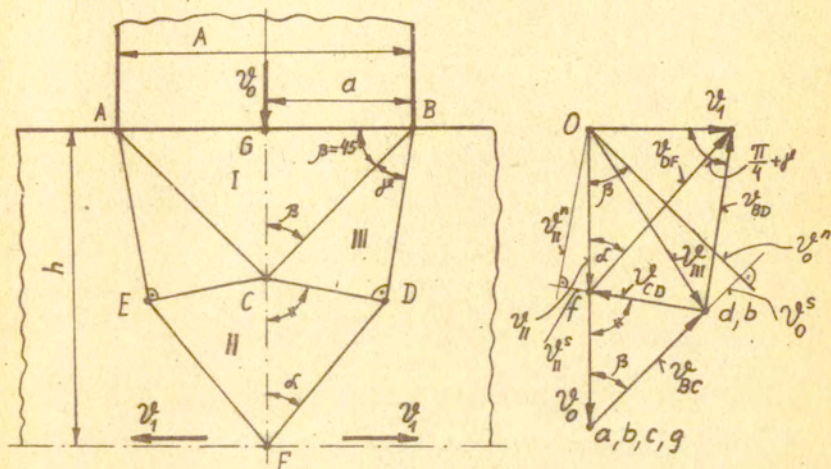
Siła P potrzebna do przecięcia pasma wyraża się zależnością

$$P = 2P_{23} = 2\sqrt{(P_{23}^s)^2 + (P_{23}^n)^2} = \frac{2k}{h}(a^2 + h^2),$$

a średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy obliczamy ze wzoru

$$\bar{p} = \frac{P}{2k} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{h} + \frac{h}{a} \right). \quad (10.229)$$

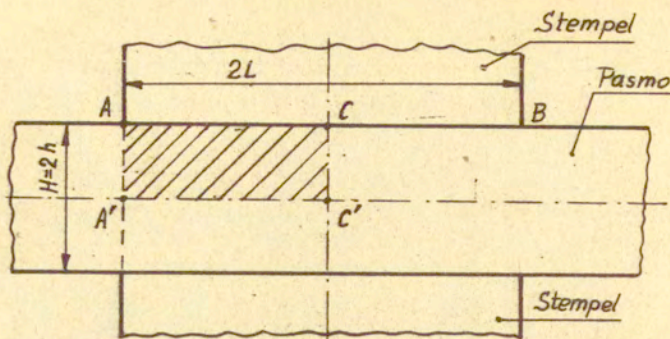
Do obliczenia siły przecięcia pasma można założyć inny mechanizm zniszczenia jak np. na rysunku 10.50.



Rys.10.50. a) Schemat przecinania pasma; b) Hodograf prędkości.

10.3.3.2. Ściskanie pasma między dwiema płytami

Gdy mamy pasmo o wysokości $H = 2h$ i ścisamy go dwiema płytami o szerokości $2L$ (rys.10.51), to ze względu na symetrię można rozważać tylko $\frac{1}{4}$ pasma $ACC'A'$. Długość AC należy podzielić na kilka równych odcinków, tak aby linie nieciągłości (rys.10.52) przebiegały w przybliżeniu pod kątem 45° . W zależności od długości AC będziemy mieć parzystą lub nieparzystą ilość odcinków (bloków).



Rys.10.51. Schemat ściskania pasma

Ściskanie pasma przebiega w płaskim stanie odkształcenia i może być analizowane jako zagadnienie bez tarcia, z tarcieciem poślizgowym lub z tarcieciem przylgowym. Poniżej będą rozważone te trzy przypadki *ściskania pasma*.

1. Ściskanie pasma bez tarcia

Rozważaną część pasma dzielimy na bloki I + V i oznaczamy linie nieciągłości A-E, B-E, B-F, F-C i konstruujemy wykres prędkości — hodograf prędkości (rys.10.52). Zasada budowy hodografu prędkości dokładnie opisana jest w rozdziale VIII p. 7.1.

Średni nacisk jednostkowy działania narzędzia na pasmo obliczamy ze wzoru

$$P\bar{v}_0^v = k l_{CF} v_{cf}^v + k l_{BF} v_{bf}^v + k l_{BE} v_{be}^v + k l_{AE} v_{ae}^v,$$

gdzie wszystkie długości $l = h\sqrt{2}$, wszystkie prędkości względne $v^v = v_0^v\sqrt{2}$,

$$\bar{P}L\bar{v}_0^v = 42khv_0^v,$$

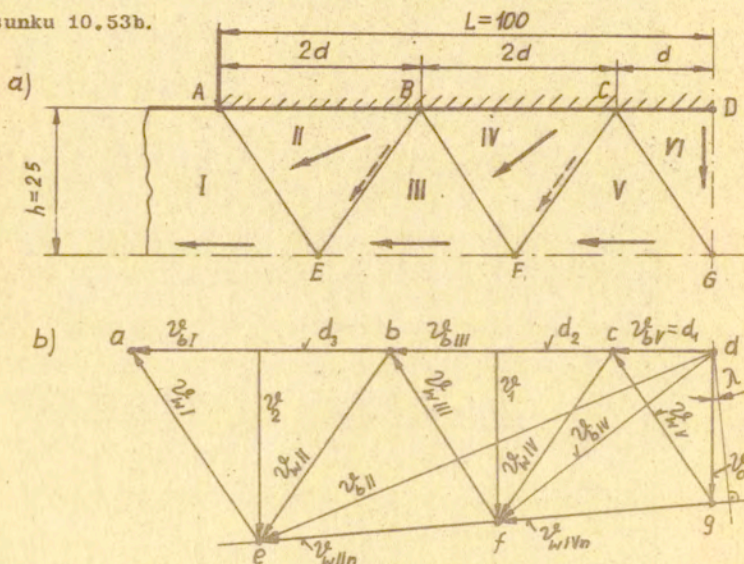
$$\frac{\bar{p}}{2k} = \frac{8h\vartheta_0^2}{L\vartheta_0^2} = 2. \quad (10.231a)$$

Gdy długość L zostanie podzielona na 5 odcinków d (rys.10.53a), to średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy będzie równy

$$\frac{\bar{p}}{2k} = 1,985. \quad (10.231b)$$

2. Ściskanie pasma z tarciem poślizgowym

Rozpatrzmy przypadek ściskania pasma o podziale na bloki jak na rysunku 10.53a z założeniem występowania tarcia poślizgowego na kontakcie materiału z płytami. Hodograf prędkości dla ściskania pasma z tarciem przylgowym jest przedstawiony na rysunku 10.53b.



Rys.10.53. Ściskanie pasma z tarciem poślizgowym: a-podział na bloki, b-hodograf prędkości. Blok VI nie przemieszcza się

Wszystkie linie nieciągłości ($b = 1$) mają długość

$$l = \sqrt{h^2 + d^2},$$

a prędkości względne ślizgania bloków są następujące

$$v_{gc}^e = \frac{v_0^e}{h} \sqrt{h^2 + d^2},$$

$$v_{cf}^e = v_{fb}^e = \frac{v_1^e}{h} \sqrt{h^2 + d^2} = \frac{\sqrt{v_0^e}}{h} \sqrt{h^2 + d^2},$$

$$v_{be}^e = v_{ea}^e = \frac{v_2^e}{h} \sqrt{h^2 + d^2} = \frac{\sqrt[2]{v_0^e}}{h} \sqrt{h^2 + d^2},$$

gdzie $v_1^e = \sqrt{v_0^e}$, $v_2^e = \sqrt[2]{v_0^e}$ są prędkościami ściskania,

$\gamma = \frac{v_1^e}{v_0^e} = (1 + \mu \frac{d}{h}) / (1 - \mu \frac{d}{h})$ otrzymuje się z proporcji odcinków

hodografu ($\frac{v_0^e}{\mu} : v_0^e = (\frac{v_0^e}{\mu} + \frac{d v_0^e}{h} + \frac{d v_1^e}{h}) : v_1^e$, $\mu = \operatorname{tg} \lambda$),

$d_1 = \frac{d v_0^e}{h}$, $d_2 = \frac{d v_1^e}{h}$, $d_3 = \frac{d v_2^e}{h}$ są długościami

otrzymanymi z podobieństwa trójkątów hodografu i sztywnych bloków.

Z bilansu mocy otrzymujemy średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy

$$P v_0^e = k l_{GC} v_{gc}^e + k l_{CF} v_{cf}^e + k l_{FB} v_{fb}^e + k l_{BE} v_{be}^e + k l_{EA} v_{ea}^e,$$

$$\bar{p} L v_0^e = 2k v_0^e \frac{h^2 + d^2}{h} \left(\frac{1}{2} + \gamma + \gamma^2 \right),$$

$$\frac{\bar{p}}{2k} = \frac{h^2 + d^2}{L h} \left(\frac{1}{2} + \gamma + \gamma^2 \right). \quad (10.232)$$

Dla $\mu = 0,15$, $\gamma \approx 1,273$ i wymiarów pasma jak na rysunku 10.53 średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy jest równy

$$\frac{\bar{P}}{2k} = 1,392 .$$

W zależności od wymiarów L , h pasma ściskanego (dla pasm cienkich) mamy różną ilość sztywnych bloków n i różną ilość linii nieciągłości m . Sposób postępowania w znalezieniu nacisku jest identyczny do opisanego. Można również przyjmować, że na części kontaktu występuje tarcie poślizgowe, a na części kontaktu tarcie przylgowe. Wówczas hodograf prędkości składa się z części hodografu prędkości ściskania pasma bez tarcia (rys. 10.52b) i z części hodografu prędkości ściskania pasma z tarcie poślizgowym (rys. 10.53b).

10.3.3.3. Wyciskanie przez matrycę klinową

Górną ocenę wartości nośności wyciskania metalu można obliczyć przyjmując określony schemat odkształcenia w postaci sztywnych bloków. Zagadnienie wyciskania można rozwiązywać przyjmując, że na kontakcie materiału z matrycą nie ma tarcia i następnie, że jest tarcie przylgowe lub tarcie poślizgowe. Zakładamy, że wyciskanie odbywa się w warunkach płaskiego stanu odkształcenia.

Wyciskanie przez matrycę klinową bez uwzględnienia tarcia pokazano na rysunku 10.54. Redukcję przekroju w procesie wyciskania oblicza się ze wzoru

$$r = \frac{H-h}{H} = 1 - \frac{h}{H} .$$

Długości linii nieciągłości założonego schematu odkształcenia (rys. 10.54a) wynoszą

$$l_{BC} = \frac{H}{\sin \varphi},$$

$$l_{AC} = \frac{h}{\sin \theta} = \frac{(1-r)H}{\sin \theta},$$

$$l_{AB} = \frac{H-h}{\sin \alpha} = \frac{Hr}{\sin \alpha}.$$

Wartości prędkości względnych na liniach nieciągłości oblicza się z hodografu prędkości (rys.10.54c)

$$v_{bc}^e = \frac{v_0^e \sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)},$$

$$v_{ac}^e = \frac{v_0^e \sin \alpha \sin \varphi}{\sin \theta \sin(\varphi - \alpha)},$$

$$v_{oc}^e = \frac{v_0^e \sin \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)}.$$

Moc sił wewnętrznych rozwijana na założonych liniach nieciągłości (przyjmujemy szerokość $b = 1$) procesu wyciskania jest równa

$$D_w = k l_{AB} v_{oc}^e + k l_{BC} v_{bc}^e + k l_{CA} v_{ca}^e.$$

Składnik mocy na powierzchni kontaktu materiału z matrycą AB,

$$k l_{AB} v_{oc}^e = 0, \quad \text{gdyż zakładamy, że nie ma tarcia.}$$

Moc sił zewnętrznych określamy z zależności sił na powierzchni AB matrycy (rys.10.54b) i prędkości ruchu stempla v_0^e

$$dD_z = v_0^e dP_n dS,$$

$$dS = \frac{dX}{\sin \alpha},$$

który po podstawieniu zależności geometrycznych za l i v przybiera postać

$$\frac{\bar{p}}{2k} = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \sin(\varphi - \alpha)} \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{(1-r) \sin \varphi}{\sin^2 \theta} \right). \quad (10.233)$$

Z geometrii trójkąta ABC (rys. 10.54a) otrzymujemy zależność między kątami θ , α , φ i redukcją r

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{r \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \varphi}{1-r},$$

która po uwzględnieniu zależności trygonometrycznej

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}.$$

przyjmuje postać (można również otrzymać z tw. Carnota)

$$\sin^2 \theta = \frac{(1-r^2) \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}{r^2 \sin^2 \varphi + \sin^2 \alpha - 2r \sin \alpha \sin \varphi \cos(\varphi - \alpha)}. \quad (10.234)$$

Po podstawieniu zależności (10.234) do równania (10.233) otrzymujemy równanie w postaci

$$\frac{\bar{p}}{2k} = \frac{\sin^2 \alpha}{2(1-r) \sin^2 \alpha} \left[\frac{(1-r) \sin^2 \alpha}{\sin \varphi \sin(\varphi - \alpha)} + \frac{r^2 \sin \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)} + \frac{2r \sin \alpha \cos(\varphi - \alpha)}{\sin(\varphi - \alpha)} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \varphi \sin(\varphi - \alpha)} \right]. \quad (10.235)$$

Różniczkując równanie (10.235) względem kąta φ i przyrównując tę pochodną do zera, otrzymamy zależność między znanym kątem matrycy α , znaną redukcją przekroju r i poszukiwanym kątem φ

$$\frac{\sin(2\varphi - \alpha)}{\sin^2 \varphi} = \frac{r}{\sin \alpha} \quad (10.236)$$

Obliczony z równania (10.236) dla danej geometrii matrycy kąt φ i wstawiony do równania (10.235) pozwala wyznaczyć najmniejszy nacisk jednostkowy wyciskania w matrycy klinowej.

Przy obliczaniu średniego nacisku jednostkowego wyciskania przez matrycę klinową przy założeniu istnienia tarcia przyłogowego na powierzchni AB matrycy (rys.10.54a) postępujemy w sposób wyżej opisany z tym, że uwzględniamy człon pierwszy, $kl_{AB} v_{oc}^2$, mówiący o tarcia. Hodograf prędkości jest taki sam jak przy braku tarcia (rys.10.54c).

Przy założeniu istnienia tarcia poślizgowego na kontakcie materiału z matrycą schemat odkształcenia jest taki sam jak i bez tarcia (rys.10.54a), ale wykres (hodograf) prędkości jest inny (rys.10.54c), gdyż tarcie poślizgowe wyrażone jest po przez kąt tarcia λ ($\operatorname{tg} \lambda = \mu$).

Moc sił wewnętrznych wyraża się zależnością

$$D_w = ckl_{AB} v_{oc}^2 + kl_{BC} v_{bc}^2 + kl_{AC} v_{ac}^2,$$

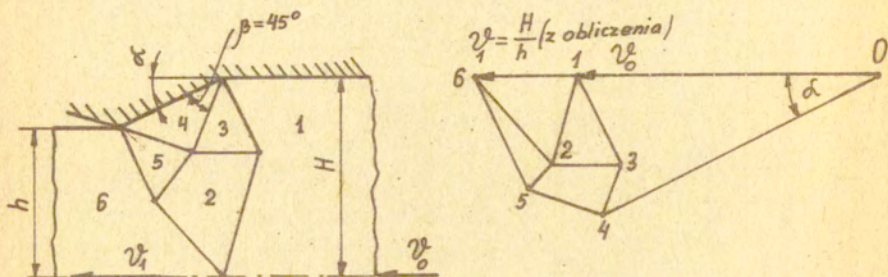
a moc sił zewnętrznych jest równa

$$D_z = P \frac{v_o^2}{\sin \alpha} = \bar{p} H \frac{v_o^2}{\sin \alpha},$$

gdzie $0 \leq c \leq 1$ jest współczynnikiem zmniejszającym naprężenia ścinające k . Średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy wyciskania

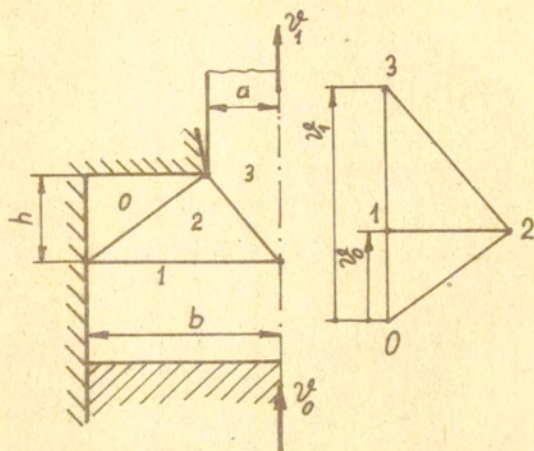
10.3.3.4. Inne schematy płaskiego odkształcenia

W celu wyznaczenia nacisku jednostkowego wyciskania pasma w matrycy klinowej można założyć schemat odkształcenia jak na rysunku 10.56.

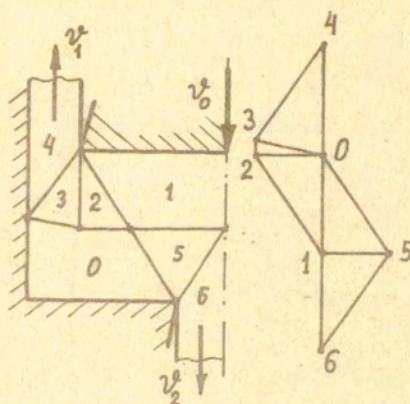


Rys.10.56. Schemat odkształcenia (6 bloków) i hodograf prędkości wyciskania pasma przez matrycę klinową

Na rysunku 10.57. pokazano schemat odkształcenia i hodograf prędkości wyciskania płaskiego pręta przez matrycę kątową, a na rysunku 10.58. pokazano schemat odkształcenia i hodograf prędkości dla wyciskania mieszanego.



Rys.10.57. Schemat odkształcenia (a) i hodograf prędkości (b) wyciskania pasma przez matrycę kątową



Rys.10.58. Schemat odkształcenia (a) i hodograf prędkości (b) wyciskania mieszanego (współbieżnego i przeciwbieżnego)

10.3.3.5. Wyciskanie prętów cylindrycznych

Przy wyciskaniu prętów cylindrycznych w matrycy stożkowej zachodzi osiowo-symetryczne płynięcie plastyczne. Górną ocenę nośności wyciskania prętów znajdujemy z dowolnie przyjętego mechanizmu płynięcia kinematycznie dopuszczalnego złożonego ze ślizgających się po sobie bloków oddzielonych liniami nieciągłości. Pole odkształcenia może składać się z jednego lub kilku bloków plastycznych.

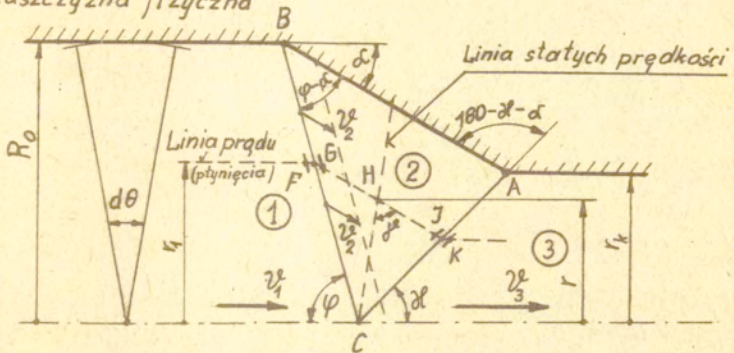
Podstawą znalezienia górnej oceny nośności jest równość energii włożonej D_z z energią dysypowaną w objętości odkształcanej D_o , na liniach nieciągłości D_n i na kontakcie materiału z narzędziem D_t . Zagadnienie to może być rozwiązane przy założeniu braku tarcia jak i z uwzględnieniem tarcia materiału wyciskanego o ścianki matrycy.

Do przeanalizowania procesu wyciskania prętów cylindrycznych przyjmijmy najprostszy mechanizm odkształcenia, czyli mechanizm złożony z jednego bloku plastycznego (rys.10.59). Linie AB, AC, BC są liniami nieciągłości dla prędkości, to znaczy, że po obu stronach linii składowe styczne prędkości są różne, składowe normalne prędkości są jednakowe. Zakładamy, że bloki 1 i 3 są sztywne, a blok 2 jest plastyczny (istnieje odkształcenie obwodowe $\dot{\epsilon}_\theta = \frac{v_r^e}{r}$). Blok 1 porusza się ze znaną prędkością v_1^e równą prędkości ruchu stempla v_0^e . Blok 3 porusza się z prędkością v_3^e , którą obliczamy z warunku stałej objętości ($v_1^e V_1 = v_3^e V_3$, $V_1 = F_1 \cdot l = \frac{\pi R_o^2}{4} l$, $V_3 = \frac{\pi r_k^2}{4} l$)

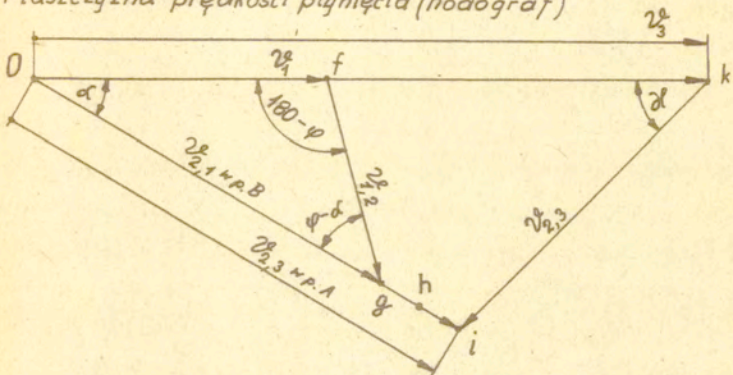
$$v_3^e = v_1^e \frac{R_o^2}{r_k^2}$$

Prędkość wypływania materiału z matrycy v_3^e potrzebna jest do skonstruowania hodografu prędkości.

a) Płaszczyzna fizyczna



b) Płaszczyzna prędkości płynięcia (hodograf)



Rys.10.59. Schemat odkształcenia (a) i hodograf prędkości (b) dla wyciskania prętów cylindrycznych pełnych

Na dowolnej linii CL na płaszczyźnie fizycznej obszaru plastycznego 2 prędkość płynięcia v_2^e jest stała co do wielkości i kierunku i równa jest iloczynowi prędkości względnej obszaru 2 względem matrycy 4 w punkcie B $v_{2,1}^e$ i stosunkowi promieni $\frac{r_0}{R_0}$

(jest stały na danej linii CL)

$$v_2^e = v_{2,1}^e \frac{r_1}{r}$$

Na linii płynięcia (prądu) F-K w punkcie F mamy prędkość v_1^e , w punkcie G — $v_{2,1}^e$, w punkcie J — $v_{2,3}^e$, a w punkcie K mamy prędkość obszaru 3, v_3^e . Zatem prędkości na linii prądu G-J są różne i zależą od stosunku $\frac{r_1}{r}$, a wartości ich znajdujemy z hodografu prędkości (są to punkty między g-1 — rys.10.59b). Dla kąta $\mu = \varphi - \alpha$ (punkt G) stosunek $\frac{r_1}{r} = 1$, a dla kąta $\mu = 180 - \alpha - \alpha$ (punkt J) stosunek $\frac{r_1}{r} = \frac{R_0}{r}$. Linia GJ jest zawsze równoległa do powierzchni BA matrycy. Prędkość płynięcia v_2^e w obszarze 2 otrzymujemy z warunku stałej objętości jednostkowej, $v_2^e r = v_{2,1}^e r_1$.

W celu przeprowadzenia analizy prędkości płynięcia v^e i prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}$ w obszarze 2 należy, dla ułatwienia, przyjąć układ współrzędnych xy jak na rysunku 10.60.

Wzdłuż przyjętej osi x mamy $v_x^e = 0$, gdyż v_2^e ma kierunek linii prądu, czyli osi y. Zatem mamy

$$v_x^e = 0, \quad \frac{\partial v_x^e}{\partial x} = \dot{\epsilon}_x = 0, \quad \frac{\partial v_x^e}{\partial y} = 0,$$

$$v_y^e = v_2^e.$$

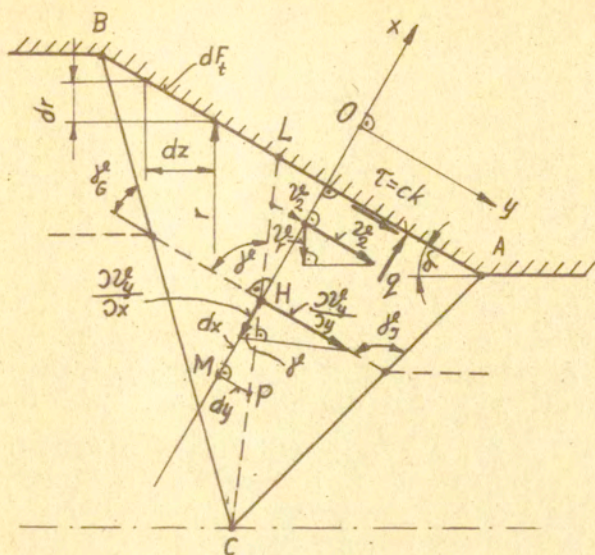
W trójkącie ABC prędkość odkształcenia obwodowego $\dot{\epsilon}_\theta$ jest prędkością główną, $\dot{\epsilon}_\theta = \dot{\epsilon}_3$, a ponieważ materiał płynie do środka

$v_r^e < 0$, to

$$\dot{\epsilon}_\theta = \dot{\epsilon}_3 = \frac{v_r^e}{r} < 0,$$

gdzie $v_r^e = -v_2^e \sin \alpha$. Na całej linii CL v_r^e jest stałe, to

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial v_r^e}{\partial r} = 0.$$



Rys.10.60. Oznaczenia, $\mu = \frac{\tau}{q} = \frac{ck}{q}$

Z warunku stałej objętości ($\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_\theta = 0$) mamy

$$\dot{\epsilon}_y = -\dot{\epsilon}_\theta = -\dot{\epsilon}_x = -\frac{v_2 \sin \alpha}{r},$$

$$\dot{\epsilon}_x = 0,$$

$$j_{xy}^e = \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi^e}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \phi^e}{\partial y^2} \operatorname{ctg} \alpha^e,$$

gdzie $\frac{\partial^2 \phi^e}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \phi^e}{\partial y^2} \operatorname{ctg} \alpha^e$ (rys.10.60).

Zależność między głównymi prędkościami odkształceń a osiowymi prędkościami odkształceń (np. $\dot{\epsilon}_1 = \frac{\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y)^2 + j_{xy}^e{}^2}$)

jest następująca:

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{\dot{\epsilon}_y}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha^e} \right),$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{\varepsilon}_y}{2} \left(1 - \frac{1}{\sin \varphi} \right),$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = -\dot{\varepsilon}_y,$$

a wyrażona w przyrostach jest równa:

$$d\varepsilon_1 = \frac{d\varepsilon_y}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \varphi} \right),$$

$$d\varepsilon_2 = \frac{d\varepsilon_y}{2} \left(1 - \frac{1}{\sin \varphi} \right),$$

$$d\varepsilon_3 = -d\varepsilon_y.$$

Ponieważ przyrost odkształcenia w kierunku osi y jest

$$d\varepsilon_y = \frac{dr}{r},$$

a z geometrii zadania mamy

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \varphi)},$$

to przyrosty odkształceń głównych będą

$$d\varepsilon_1 = \frac{1 + \frac{1}{\sin \varphi}}{2 \sin^2 \varphi (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \varphi)} d\varphi$$

$$d\varepsilon_2 = \frac{1 - \frac{1}{\sin \varphi}}{2 \sin^2 \varphi (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \varphi)} d\varphi$$

$$d\varepsilon_3 = - \frac{1}{\sin^2 \varphi (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \varphi)} d\varphi.$$

Przyrost intensywności odkształceń głównych wyraża się zależnością

$$d\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2},$$

a przyrost pracy plastycznej na jednostkę objętości w obszarze 2 jest równy

$$dL_p = \sigma_p d\varepsilon_i = \sqrt{3} k d\varepsilon_i.$$

Praca plastyczna w obszarze 2 wyrazi się zależnością

$$dL_p = k \frac{\sqrt{3 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta}}}{\sin^2 \vartheta (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \vartheta)} d\vartheta$$

$$L_p = k \int_{\vartheta_6}^{\vartheta_7} \frac{\sqrt{3 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta}}}{\sin^2 \vartheta (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \vartheta)} d\vartheta, \quad (10.238)$$

gdzie $\vartheta_6 = \varphi - \alpha$, $\vartheta_7 = 180 - \alpha - \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{r_d \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \varphi}{1 - r_d}$,
 $r_d = \frac{R_o - r_k}{R_o}$ jest redukcją przekroju.

Do wyznaczenia energii występującej na powierzchniach nieciągłości i energii idącej na pokonanie tarcia należy przyjąć, że odkształcanie zachodzi w jednostce czasu. Założenie to prowadzi do wniosku: prędkość względna v^e jest równa przemieszczeniu du ($v_i^e = \frac{du_i}{dt}$).

Na liniach (powierzchniach) nieciągłości zachodzi dysypacja energii ($L_n = L_{nBC} + L_{nCA}$)

$$L_n = k F_{BC} v_{1,2}^e + k F_{CA} v_{2,3}^e, \quad (10.239)$$

gdzie $v_{1,2}^e$ i $v_{2,3}^e$ są prędkościami względnymi otrzymanymi z hodo-
grafu prędkości (rys.10.59b). Element powierzchni dF (na kącie
 $d\theta$) na linii BC (rys.10.59a) wyrazi się zależnością

$$dF_{BC} = \frac{dF_1}{\sin \varphi} = \frac{R_0^2 d\theta}{2 \sin \varphi},$$

a na linii CA

$$dF_{CA} = \frac{dF_k}{\sin \alpha} = \frac{r_k^2 d\theta}{2 \sin \alpha}.$$

Dysypacja na jednostkę objętości na linii BC ($dF_1 \cdot v_1^e = \frac{R_0^2 d\theta}{2}$)

$v_1^e = V_{obj} = 1$) jest równa

$$L_{nBC} = \frac{k v_{1,2}^e}{v_1^e \sin \varphi},$$

a na linii CA ($dF_k v_3^e = \frac{r_k^2 d\theta}{2} v_3^e = V_{obj} = 1$)

$$L_{nCA} = \frac{k v_{2,3}^e}{v_3^e \sin \alpha} = \frac{k r_k^2 v_{2,3}^e}{v_3^e R_0^2 \sin \alpha}.$$

Na pokonanie oporu tarcia na elemencie powierzchni dF_t po-
wierzchni matrycy AB (rys.10.59a) potrzebna jest energia

$$dL_t = \tau dF_t v_2^e,$$

gdzie $\tau = ck$, $0 \leq c \leq 1$, $dF_t = \frac{dF}{\cos \alpha} = \frac{2\pi r dr}{\sin \alpha}$
($dF = 2\pi r dz$, $dz = \frac{dr}{\tan \alpha}$ — oznaczenia na rys.10.60),
 $v_2^e = v_{2,1}^e \frac{R_0}{r}$. Dysypacja energii na jednostkę objętości na

elemencie powierzchni dF_t powierzchni matrycy AB jest równa

$$dL_{tAB} = \frac{ck 2\pi r \frac{dr}{\sin \alpha} v_{2,1}^e \frac{R_0}{r}}{\pi R_0^2 v_1^e}.$$

Całkowita dysypacja na jednostkę objętości na powierzchni AB jest równa całce w granicach od r_k do R_0

$$L_{tAB} = \int_{r_k}^{R_0} \frac{2ck v_{2,1}^2}{R_0 v_1^2 \sin \alpha} dr = \frac{2ck}{\sin \alpha} \frac{v_{2,1}^2}{v_1^2} r_d,$$

gdzie $r_d = \frac{R_0 - r_k}{R_0}$ jest redukcją przekroju. Z geometrii hodo-
grafu prędkości (rys. 10.59b) otrzymujemy stosunek prędkości

$$\frac{v_1^2}{\sin(\varphi - \alpha)} = \frac{v_{2,1}^2}{\sin(180 - \varphi)} = \frac{v_{2,1}^2}{\sin \varphi},$$

$$\frac{v_{2,1}^2}{v_1^2} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)},$$

który redukuje dysypację idącą na tarcie do postaci

$$L_{tAB} = \frac{2ck}{\sin \alpha} \frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)} r_d. \quad (10.240)$$

W procesie wyciskania prętów można uwzględnić odkształceniowe wzmocnienie materiału. Wówczas z zależności

$$\sigma_p = C(\varepsilon_0 + \varepsilon)^n$$

obliczamy granicę plastyczności na ścinanie

$$k = \frac{\sigma_p}{\sqrt{3}},$$

której średnia wartość wyrazi się zależnością

$$k_s = \frac{C}{\sqrt{3}} \frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon_2)^n - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)^n}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}.$$

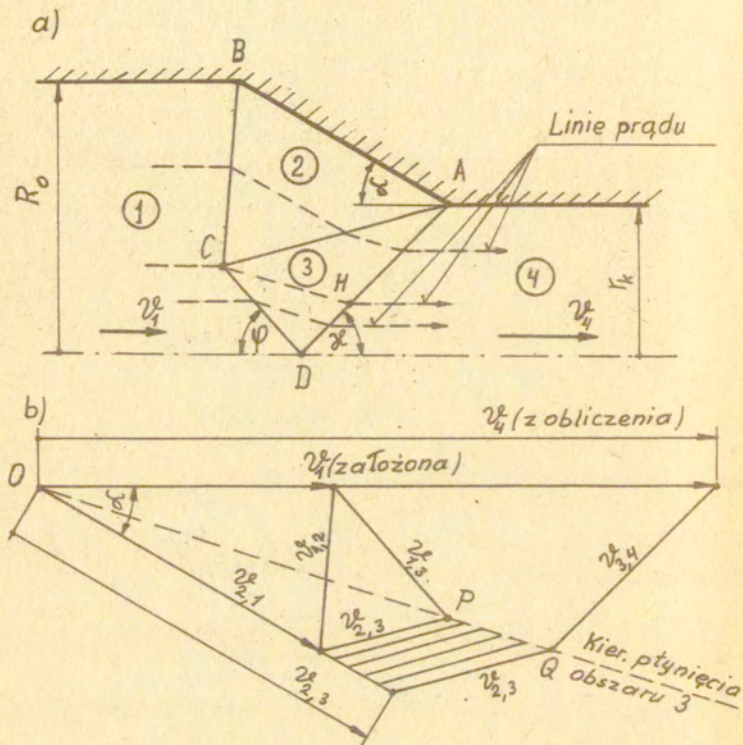
Wychodząc z równości jednostkowej pracy zewnętrznej

$$L_z = \bar{p} \pi R_0^2 v_1^2 \quad \text{z jednostkową pracą wewnętrzną} \quad L_w = L_p + L_n + L_t$$

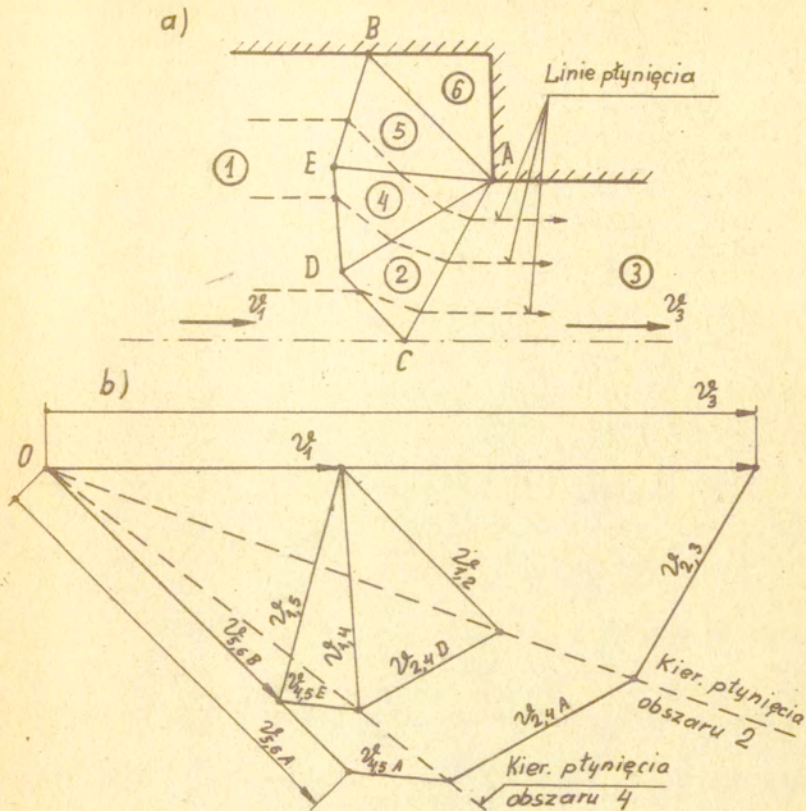
otrzymamy wzór na bezwymiarowy nacisk jednostkowy w postaci

$$\frac{\bar{p}}{k} = \frac{L_w}{k \pi R_0^2 v_1^2}. \quad (10.241)$$

Na rysunku 10.61 pokazano wyciskanie pręta cylindrycznego przez matrycę stożkową przy przyjęciu dwóch bloków plastycznych. Natomiast na rysunku 10.62 przedstawiono wyciskanie pręta cylindrycznego przez matrycę kątową.

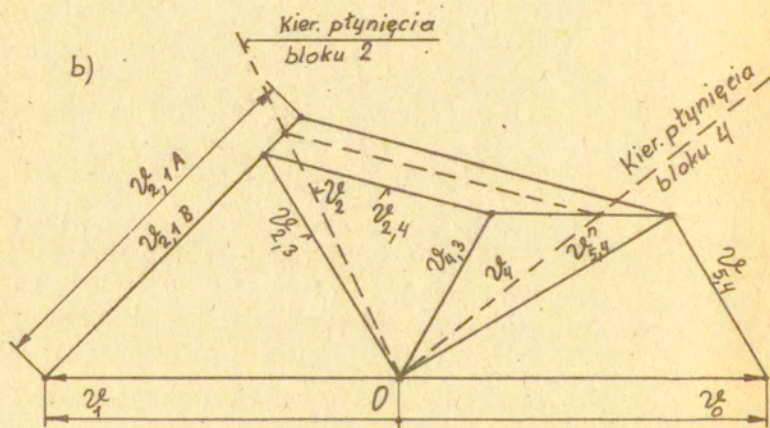
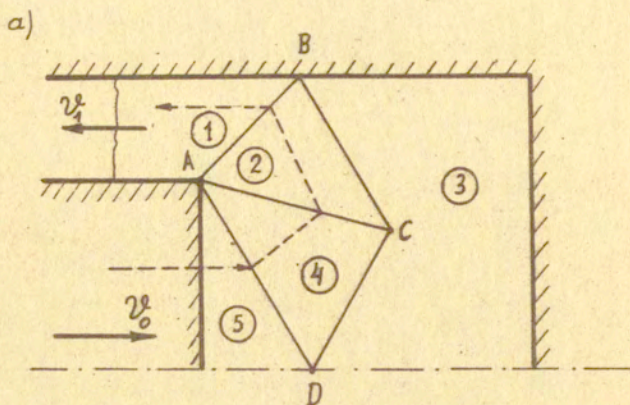


Rys.10.61. Wyciskanie pręta cylindrycznego przez matrycę stożkową: a - schemat odkształcenia złożony z dwóch (2 i 3) bloków plastycznych, b - hodograf prędkości dla płynięcia osiowo-symetrycznego. Wektor $\vec{OP} = v_{2,3}$, $\vec{OQ} = v_{3,4}$



Rys.10.62. Wyciskanie pręta w matrycy kątovej osiowo-symetrycznej:
 a - schemat powierzchni nieciągłości, b - hodograf prędkości.
 Prędkość: v_1^0 - założona, v_3^0 - obliczona

Na rysunku 10.63 pokazano schemat odkształcenia i hodograf prędkości dla wyciskania tulei osiowo-symetrycznej, a na rysunku 10.64 dla wyciskania mieszanego korka osiowo-symetrycznego.



Rys.10.63. Wyciskanie tulei osiowo-symetrycznej: a - schemat powierzchni nieciągłości, b - hodograf prędkości, v_0^l - prędkość założona stempla, v_1^l - prędkość obliczona z warunku stałej objętości.

10.3.4. Metoda założenia statycznie dopuszczalnego pola naprężeń

Za pomocą metody statycznie dopuszczalnego dowolnego pola naprężeń wyznaczamy dolną ocenę rzeczywistych sił wewnętrznych wywołujących plastyczne płynięcie materiału. To statycznie dopuszczalne pole naprężeń może być skonstruowane przez:

- rozwiązanie równań równowagi,
- założenie analitycznego rozkładu naprężeń,
- założenie schematu odkształcenia i określenia stanu naprężeń w poszczególnych polach przy pomocy kół Mohra,
- pola charakterystyk.

Pole naprężeń jest statycznie dopuszczalne, jeśli w każdym punkcie zadania spełnione są:

- warunki równowagi wewnętrznej ($\sigma_{ij,j} + X_i = 0$),
- w każdym punkcie obszaru plastycznego warunek plastyczności nie może być przekroczony $f(\sigma_{ij}^s) = 0$, a w obszarach sztywnych $f(\sigma_{ij}^s) \leq 0$,
- warunki brzegowe dla naprężeń na powierzchniach nieobciążonych $\sigma_{ij}^s n_j = P_i^s$,
- warunki tarcia na kontakcie.

Oczywiście takich statycznie dopuszczalnych stanów naprężenia dla konkretnych przypadków można dobrać wiele i każdy z nich da inną ocenę dolną nieznaney rzeczywistej wartości nośności granicznej. Najlepszą czyli najbliższą rzeczywistej nośności będzie największa z tak otrzymanych ocen dolnych.

W metodzie tej stwierdzamy, że moc sił zewnętrznych P_1 , powodujących uplastycznienie materiału, jest większa lub co najwyżej równa mocy sił P_1^s dających statyczne obciążenie ciała

$$\int_{S_u} P_i \varphi_i^e dS \gg \int_{S_u} P_i^s \varphi_i^e dS.$$

Dla procesów obróbki plastycznej metali dolna ocena wartości nośności nie przedstawia większego znaczenia, gdyż jej wartość nie może być wzięta do ustalenia wielkości prasy, ani być podstawą do wytrzymałościowego obliczenia narzędzia, ponieważ nie wiemy ile jest ona mniejsza od ścisłej oceny nośności. Natomiast górna ocena nośności pozwala na właściwe dobranie maszyny i bezpieczne określenie wymiarów narzędzia.

10.3.4.1. Metoda uproszczonych równań równowagi

Statycznie dopuszczalne pole naprężeń określone za pomocą rozwiązania uproszczonego równania równowagi daje dolną ocenę nośności. Zagadnienie to najlepiej wyjaśnić na przykładach.

Przykład 1.

Znaleźć wartość ciśnienia wewnętrznego p , przy którym korpus rozdzielacza hydraulicznego ulegnie zniszczeniu. Wyznaczyć dolną ocenę nośności.

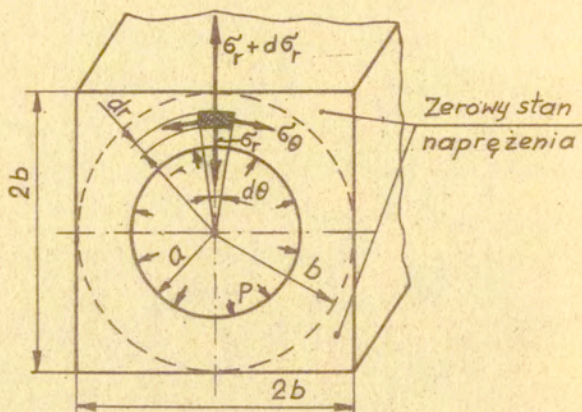
Rozwiązanie.

Jest to płaskie osiowo-symetryczne zadanie. Przyjmujemy równanie równowagi dla osiowo-symetrycznego zadania płaskiego

$$-\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

i warunek plastyczności Treski w postaci

$$\sigma'_\theta - \sigma'_r = \sigma'_p$$



Rys.10.65. Szkic rozdzielacza hydraulicznego

oraz stosując warunek brzegowy: gdy $r = b$, to $\sigma_r = 0$, otrzymamy równanie na naprężenie promieniowe ($\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_p}{r}$, $\sigma_r = \sigma_p \ln r + C$, $C = -\sigma_p \ln b$)

$$\sigma_r = \sigma_p \ln \frac{r}{b} ,$$

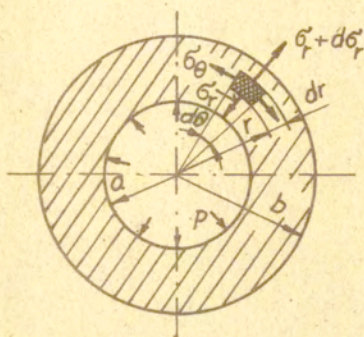
które na wewnętrznej powierzchni (gdy $r = a$, to $\sigma_r = -p$) przechodzi w równanie na poszukiwane ciśnienie wewnętrzne powodujące rozciąganie rozdzielacza

$$p = \sigma_p \ln \frac{b}{a} . \quad (10.242)$$

W sposób identyczny do opisanego wyznacza się dolną ocenę nośności rury grubościennej obciążonej wewnętrznym ciśnieniem p . Zależność ciśnienia wewnętrznego p od promieni rury a i b oraz granicy plastyczności materiału rury σ_p wyraża się równaniem (10.242).

Przykład 2.

Znaleźć dolną ocenę obciążenia ciśnieniem wewnętrznym p powłoki kulistej jak na rysunku 10.66.



Rys.10.66. Powłoka kulista obciążona ciśnieniem wewnętrznym p

Rozwiązanie

Biorąc równanie różniczkowe zwyczajne równowagi powłoki kulistej (σ_r zależy tylko od promienia r)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

i warunek plastyczności

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_p,$$

wyznamy naprężenie promieniowe w powłoce kulistej ($\sigma_r = 2\sigma_p \ln r + C$,
warunek brzegowy: gdy $r = b$, to $\sigma_r = 0$, $C = -2\sigma_p \ln b$) wyrażone zależnością

$$\sigma_r = 2\sigma_p \ln \frac{r}{b}.$$

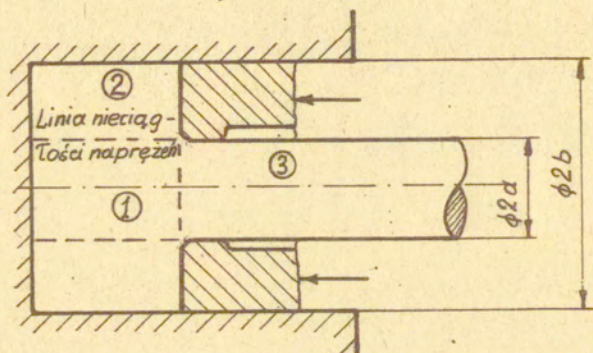
Wychodząc z warunku brzegowego na powierzchni wewnętrznej powłoki kulistej, gdy $r = a$, to $\sigma_r = -p$, wyznaczmy ciśnienie wewnętrzne p będące dolną oceną nośności powłoki kulistej

$$p = 2\sigma_p \ln \frac{b}{a} \quad (10.243)$$

Ciśnienie $p > 2 \sigma_p \ln \frac{b}{a}$ powoduje uplastycznienie powłoki kulistej.

Przykład 3.

Wyznaczyć dolną ocenę nośności procesu przeciwbieżnego wyciskania pręta w matrycy kątowej:



Rys.10.67. Schemat przeciwbieżnego wyciskania pręta

Rozwiązanie

Zakładamy, że w obszarze 1 występuje pole naprężeń

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0,$$

$$\sigma_z - \sigma_r = \sigma_p,$$

$$\sigma_r = -\sigma_p = \sigma_\theta,$$

w obszarze 2 mamy

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_p,$$

$$\sigma_z = \sigma_\theta < 0 \quad (\text{są ściskające}),$$

$$\tau_{rz} = 0,$$

a w obszarze 3 mamy zerowy stan naprężenia

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad \sigma_\theta = 0.$$

Przyjmując równanie równowagi w obszarze 2

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

i rozwiązując je otrzymamy równanie

$$d\sigma_r = -\sigma_p \frac{dr}{r},$$

$$\sigma_r = -\sigma_p \ln r + C.$$

Stałą całkowania C obliczamy z warunku brzegowego:

gdy $r = a$, to $\sigma_r = -\sigma_p$, wówczas

$$C = -\sigma_p + \sigma_p \ln a.$$

Zatem w obszarze 2 naprężenie promieniowe wyraża się zależnością

$$\sigma_r = -\sigma_p \left(1 + \ln \frac{r}{a}\right),$$

a naprężenie osiowe σ_z , wyznaczone z warunku plastyczności

Treski $\sigma_r - \sigma_z = \sigma_p$, przyjmuje postać

$$\sigma_z = -\sigma_p \left(2 + \ln \frac{r}{a}\right).$$

Siłę potrzebną do przeciwbieżnego wyciskania pręta obliczamy ze wzoru

$$P_w = \int_a^b 2\pi r dz dr = \pi \sigma_p \left[\frac{3}{2} (b^2 - a^2) + b^2 \ln \frac{b}{a} \right],$$

a średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy, będący dolną oceną, wyznacza się z zależności

$$\frac{\bar{P}}{\sigma_p} = \frac{P_w}{\pi (b^2 - a^2) \sigma_p} = \frac{3}{2} + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (10.244)$$

10.3.4.2. Metoda założonego schematu odkształcenia i określenia stanu naprężenia przy pomocy kół naprężeń Mohra

Dolną ocenę nośności można wyznaczyć z założonego schematu odkształcenia w postaci sztywnych bloków (obszarów, pól) i określenia stanu naprężenia w tych obszarach oddzielonych liniami nieciągłości naprężeń przy pomocy kół Mohra. Nacisk potrzebny do odkształcenia określamy z położenia kół Mohra. Zagadnienie to najlepiej omówić na przykładach.

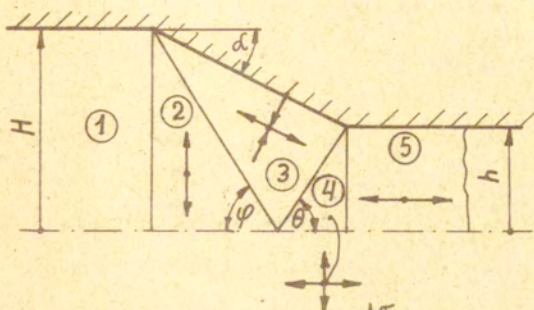
Przykład 1.

Wyznaczyć dolną ocenę przeciągania pasma przez matrycę klinową (rys.10.68a) metodą założenia schematu odkształcenia i określenia stanu naprężenia w poszczególnych polach przy pomocy kół Mohra (rys.10.68b).

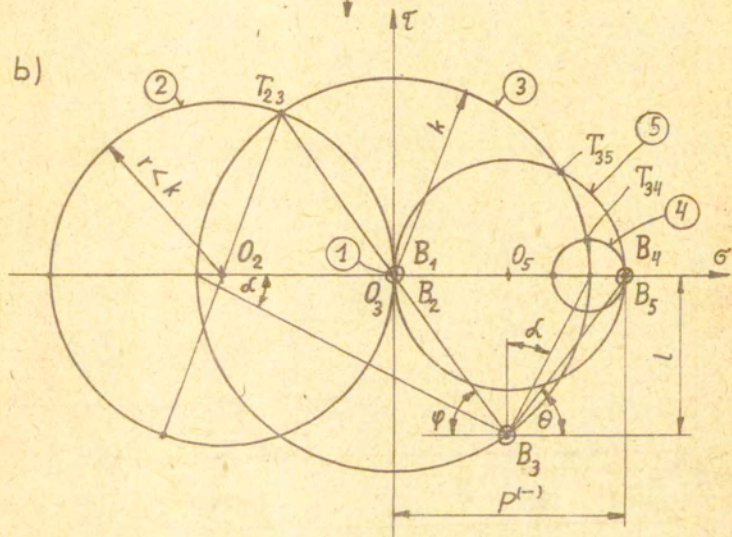
Rozwiązanie

Na rysunku 10.68 pokazano jedno z możliwych statycznie dopuszczalnych pól naprężeń wpisanych w matrycę klinową. Zakładamy że w polach (obszarach) 1,2,3,4,5 panują jednorodne stany naprężenia określone kołami naprężeń Mohra (rys.10.68b). Pola te od-

a)



b)



Rys.10.68. a) Jedno z możliwych statycznie dopuszczalnych pól naprężeń wpisanych w matrycę ciągową, b) Odzwierciedlenie stanu naprężenia na płaszczyźnie kół Mohra

dzielone są od siebie liniami nieciągłości naprężeń. Przyjmijmy, że w obszarze 3 materiał jest plastyczny (koło Mohra o promieniu k) i występuje w nim stan naprężenia czystego ścinania (koło naprężeń 3) i od niego zaczynamy określać stan naprężenia we wszystkich polach.

W obszarze 2 występuje stan jednoosiowego ściskania o nieprzekraczalnym warunku plastyczności. W obszarze 1 mamy zerowy stan naprężenia. W obszarze 4 występuje płaskie rozciąganie, a w obszarze 5 jednoosiowy stan naprężenia wywołany ciągnięciem pasma przez matrycę klinową. Sposób wyznaczenia naprężeń w poszczególnych polach (obszarach) za pomocą odwzorowania Mohra przedstawiono na rysunku 10.68b. Szczegółowy opis określania nieciągłości naprężeń na liniach nieciągłości podano w rozdziale VIII w punkcie 8.5.1.

Wartość dolnej oceny przeciągania pasma przez matrycę klinową określamy bezpośrednio z położenia koła Mohra obszaru 5 (przyłożenia siły zewnętrznej)

$$p^{(-)} = l(\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \theta).$$

Po wprowadzeniu zależności między kątami α , φ , θ i redukcją $r = \frac{H-h}{H}$

$$\operatorname{ctg} \varphi = r(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \theta) - \operatorname{ctg} \theta$$

i zależności $l = k \sin 2\alpha$ równanie na dolną ocenę nośności przyjmuje postać

$$p^{(-)} = kr \sin 2\alpha (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \theta). \quad (10.245a)$$

Jeśli przyjmiemy kąt $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, to nacisk wynosi

$$p^{(-)} = 2kr, \quad (10.245b)$$

a gdy $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$, to wzór na nacisk sprowadza się do postaci

$$p^{(-)} = 2kr(1 + \sin \alpha). \quad (10.245c)$$

Przykład 2.

Wyznaczyć dolną ocenę wyciskania materiału z płaskiej matrycy klinowej (rys.10.69a).

Rozwiązanie

Stan naprężenia w poszczególnych obszarach określamy przy pomocy kół Mohra (rys.10.69b). Określenie wielkości naprężeń w poszczególnych polach zaczynamy od pola 2, w którym zakładamy istnienie stanu granicznego. Zatem koło naprężeń 2 o promieniu k określa stan naprężenia w obszarze 2 procesu wyciskania. Następnie z odpowiedniości kątów na płaszczyźnie naprężeń z kątami na płaszczyźnie fizycznej wynikają położenia kół naprężeń 1, 3 i 4 i początek układu osi współrzędnych $\sigma - \tau$.

Dolną ocenę wyciskania materiału przez płaską klinową matrycę wyznacza się z położenia koła naprężeń 1, przedstawiającego stan naprężenia w obrzarze 1. Z rysunku 10.69b bezpośrednio wynika dolna ocena nośności

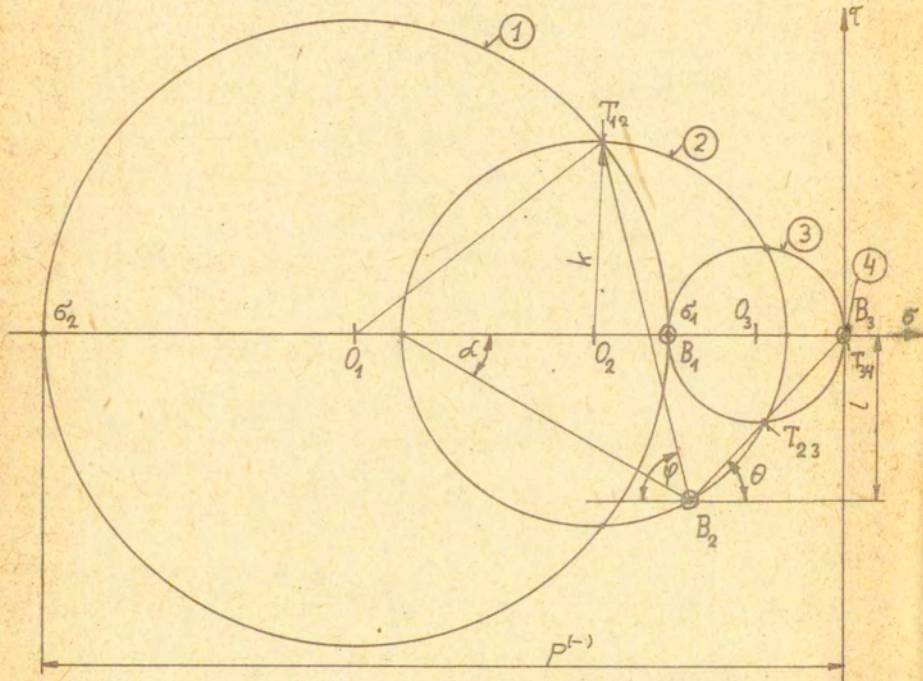
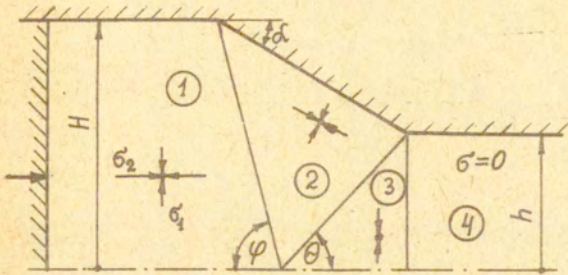
$$p^{(-)} = 2R^1 + l(\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \theta),$$

która przy zależnościach

$$R^1 = \frac{k \sin 2(\varphi - \alpha)}{\sin 2\varphi}, \quad l = k \sin 2\alpha, \quad r = \frac{H-h}{H}, \quad \operatorname{ctg} \theta = \frac{r \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \varphi}{1-r}$$

przyjmuje ostateczną postać

$$p^{(-)} = 2k \left[\frac{\sin 2(\varphi - \alpha)}{\sin 2\varphi} + \left(1 + \frac{H}{h}\right) \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} \cos \alpha \cos \varphi + \left(\frac{H}{h} - 1\right) \cos^2 \alpha \right].$$



Rys.10.69. Wyciskanie w matrycy klinowej: a - płaszczyzna fizyczna, b - płaszczyzna naprężeń

Przykład 3.

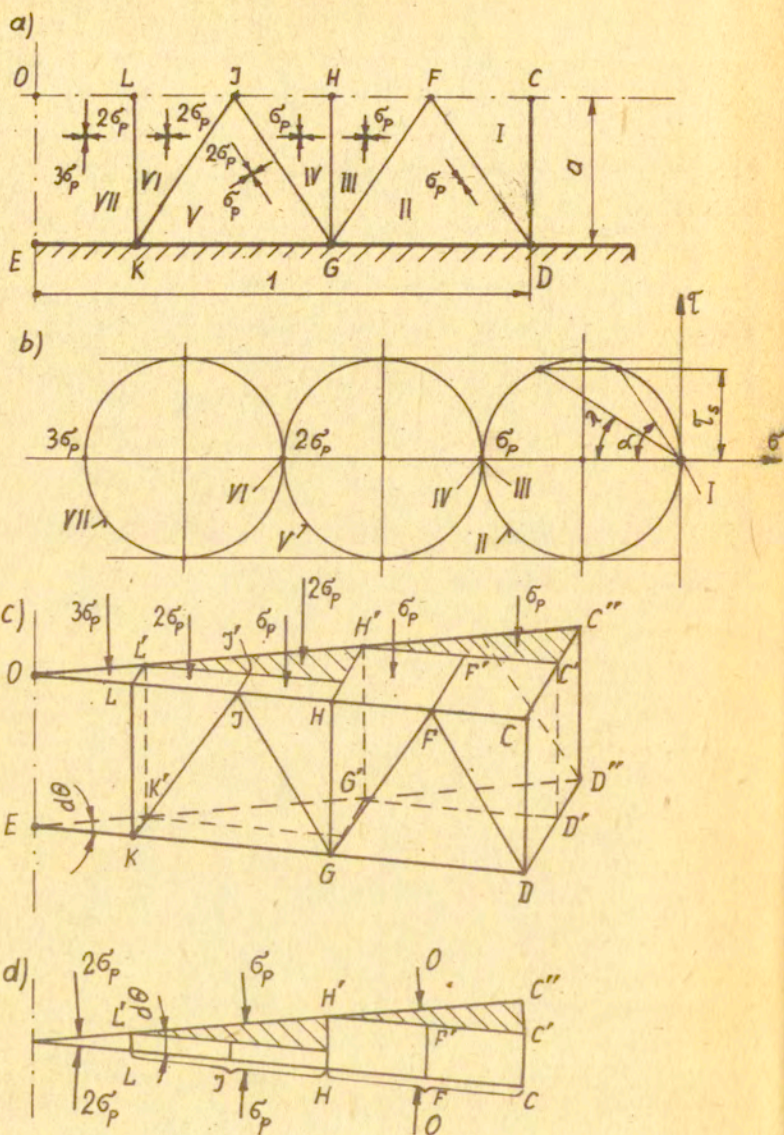
Wyznaczyć nośność graniczną ściskania walców kołowych metodą założonego schematu odkształcenia i określenia stanu naprężenia przy pomocy kół naprężeń Mohra (rys. 10.70).

Rozwiązanie

Dolną ocenę nośności ściskania walców kołowych z założonego przestrzennego statycznie dopuszczalnego pola naprężeń obliczono w pracy [9]. Nośność ta zależy od wymiarów geometrycznych i warunków tarcia na kontakcie ściskania walca. Poniżej krótko zostanie omówione wyznaczenie dolnej oceny nośności ściskania walca (rys. 10.70a).

Na rysunku 10.70a pokazano układ obszarów jednorodnych stanów naprężeń oddzielonych liniami nieciągłości naprężeń w płaszczyźnie osiowej. Założono, że obszar CDF jest wolny od naprężeń. W obszar DFG wpisano jest stan jednoosiowego ściskania naprężeniami równoległymi do DF i równymi σ_p . W pole FGH i HGJ wpisano stan dwuosiowego ściskania naprężeniami σ_p . Podobnie w następne obszary V ÷ VII wpisano stany naprężenia, które przedstawiono na płaszczyźnie naprężeń (rys. 10.70b) za pomocą kół Mohra. Naprężenie styczne τ_s na kontakcie DE może powodować tarcie poślizgowe $\tau_s < k$ lub przylgowe $\tau_s = k$. Warunek ten spełnimy, gdy kąt α na płaszczyźnie fizycznej (rys. 10.70a) będzie taki sam jak na płaszczyźnie naprężeń (rys. 10.70b). Kąt λ jest kątem tarcia. Naprężenia działające na elementarny klin przedstawiono na rysunku 10.70c,d.

Siłę działającą na wycinek o kącie $d\theta = \frac{2\pi}{m}$ (rys. 10.70c) obliczyć można, dla przypadku ogólnego, ze wzoru



Rys.10.70. Przestrzenne statycznie dopuszczalne pole naprężeń: a) płaszczyzna fizyczna, b) płaszczyzna naprężeń, c i d) wycinek walca

$$dP_w = \sum_{i=1}^n a(1-2ia)[(i-1)\sigma_p + i\sigma_p] \operatorname{tg} d\theta + \\ + (1-2na)^2(n+1)\sigma_p \frac{\operatorname{tg} d\theta}{2} + \sum_{i=1}^n (2a)^2 i \sigma_p \frac{\operatorname{tg} d\theta}{2}, \quad (10.247)$$

gdzie m jest liczbą podziału walca na wycinki. Całkowita siła nacisku $P = m dP_w$, gdy $m \rightarrow \infty$.

Z równania (10.247) otrzymujemy średni nacisk jednostkowy będący dolną oceną nośności granicznej

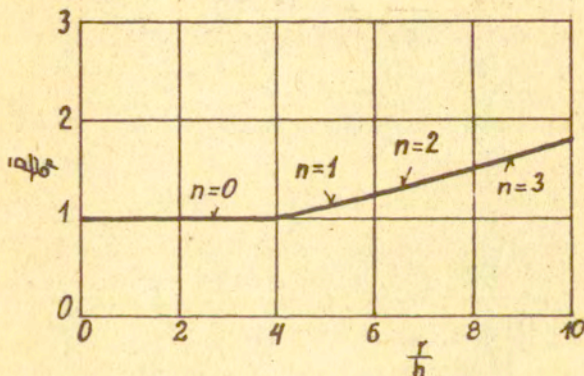
$$\frac{\bar{P}}{\sigma_p} = (1+n) - 2n(2+n)a + \frac{4}{3}n(n+1)(n+2)a^2. \quad (10.248)$$

W równaniu (10.248) n jest liczbą mającą wartość $0 \leq n < \frac{1}{2a}$,

$$a = \frac{h}{r}, \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 3\tau_{rz}^2 \right]}$$

jest naprężeniem uplastyczniającym.

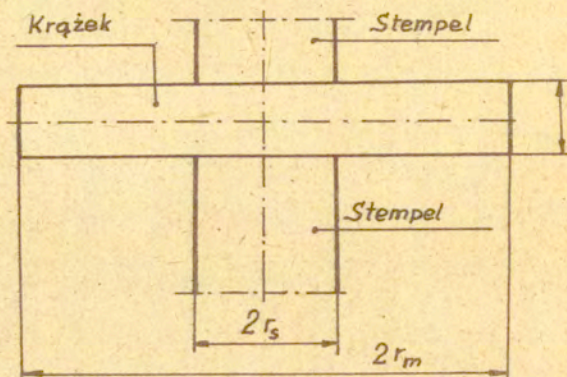
Na rysunku 10.71 przedstawiono nacisk jednostkowy obliczony metodą statycznie dopuszczalnego pola naprężeń.



Rys.10.71. Dolna ocena ściskania walców obliczona z założonego statycznie dopuszczalnego pola naprężeń

10.3.4.3. Metoda pola charakterystyk

Sposób wyznaczenia dolnej oceny nośności za pomocą pola charakterystyk zostanie przedstawiony na przykładzie wciskania dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek (rys.10.72).



Rys.10.72. Schemat wciskania dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek

Zagadnienie wciskania dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek występuje w procesie kucia odkuwek swobodnie kutech z otworem w środku oraz w pierwszej fazie kucia matrycowego wszelkiego rodzaju kół, pierścieni i krążków również z otworem w środku. Dalsze fazy kucia matrycowego odkuwek osiowo-symetrycznych odbywają się już w innych warunkach niż założono w zadaniu, ponieważ już wtedy zaczynają naciskać na krążek inne części matrycy formującej odkawkę. W celu wykorzystania teoretycznej analizy tego zagadnienia w praktyce rozważania zostaną ograniczone do przypadku tarcia poślizgowego i występujących w praktyce stosunków wymiarów: $\frac{r_s}{h} = 1+7$ i $\frac{r_m}{r_s} = 1,33+4,0$. Większe lub mniejsze stosunki wymiarów krążków i stempli w praktyce nie występują na ogół nigdy.

Zadanie wciskania dwóch przeciwnych cylindrycznych stempli w krążek można rozwiązać (znaleźć dolną ocenę) metodą charakterystyk przez rozbitcie go na dwa zagadnienia:

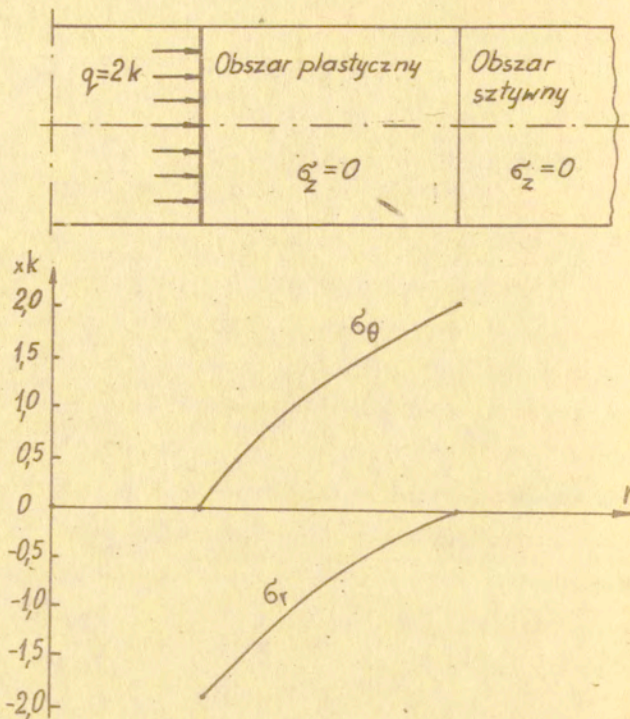
- 1) rozciąganie pierścienia o promieniu $r_s \leq r \leq r_m$ ciśnieniem q wynikającym ze ściskania walca o promieniu r_s stemplami ($\mathcal{V}_r > 0$, $\dot{\epsilon}_\theta > 0$, $\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta = 0$),
- 2) ściskanie walca o średnicy $2r_s$ między stemplami z uwzględnieniem działania bocznego ciśnienia q .

Rozbitcie zadania na dwa zagadnienia wynika z niemożliwości znalezienia statycznie dopuszczalnego pola naprężeń metodą charakterystyk dla krążków niskich $H < 3,65 \cdot 2r_s$. Dopiero w krążki o wysokości $H \geq 3,65 \cdot 2r_s$ można wpisać wachlarz o kącie 90° , który będzie obracał naprężenia na kontakcie na fizycznie możliwe.

Najpierw należy określić wielkość ciśnienia q , przy którym nastąpi rozciąganie pierścienia oraz rozkład naprężeń w pierścieniu (rys.10.73). Następnie ciśnienie q , przy którym występuje uplastycznienie pierścienia należy przyjąć do znalezienia charakterystyk w walcu i obliczyć dolną ocenę nośności krążka przez scałkowanie stanu naprężenia na ostatniej charakterystyce.

Ciśnienie wewnętrzne q rozciągania pierścienia o średnicy wewnętrznej $2r_s$ wyznaczmy z rozwiązania różniczkowego równania równowagi elementu pierścienia. Zakładamy, że pierścień znajduje się w płaskim stanie naprężenia ($\sigma_z = 0$), czyli stan naprężenia nie zależy od współrzędnej z . Biorąc równanie równowagi elementu pierścienia

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$



Rys.10.73. Rozkład naprężenia σ_r i σ_θ w pierścieniu przy ciśnieniu $q = 2k$

i warunek plastyczności w postaci

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k,$$

znajdujemy stan naprężenia w pierścieniu określony równaniem (warunek brzegowy; gdy $r = r_m$, to $\sigma_r = 0$)

$$\sigma_r = -2k \ln \frac{r_m}{r}. \quad (10.249)$$

Jeśli do równania (10.249) podstawimy $r = r_s$, $\sigma_r = -q$, to otrzymamy równanie na zależność ciśnienia wewnętrznego q od geometrii pierścienia przy jego całkowitym uplastycznieniu

$$q = 2k \ln \frac{r_m}{r_s}.$$

Ciśnienie q może przyjmować wartości od zera do $2k$. Jeśli $q = 0$, to $\frac{r_m}{r_s} = 1$, a gdy $q = 2k$, to promień maksymalny krążka (pierścienia) obliczamy z równania

$$r_m = r_s e^{\frac{q}{2k}} = 2,718 r_s.$$

Pierścienie o promieniu $r_m > 2,718 \cdot r_s$ będą posiadały obszar sztywny. Na rysunku 10.73 pokazano rozkład naprężeń w pierścieniu przy maksymalnym ciśnieniu wewnętrznym $q = 2k$. Naprężenia promieniowe obliczamy z równania

$$\sigma_r = -2k \ln \frac{2,718 r_s}{r}, \quad (10.250a)$$

a naprężenia obwodowe z równania

$$\sigma_\theta = 2k \left(1 - \ln \frac{2,718 r_s}{r} \right). \quad (10.250b)$$

Jeśli przyjmiemy, że ciśnienie q rozciągania pierścienia działa na pobocznice walca ściskanego stemplami ($q = -\sigma_r$), to wówczas na brzegu walca mamy jednorodny stan naprężenia; $\sigma_r = -q$, $\sigma_z = -(2k + q)$. Przyjmując taki stan naprężenia zamiast stanu naprężenia dla ściskania walca $\sigma_r = 0$, $\sigma_z = -2k$ uwzględnimy oddziaływanie pierścienia na walec, a tym samym rozwiążemy zadanie wciskania stempli w krążek.

Dla walca ściskanego między stemplami należy znaleźć pole naprężeń czyli znaleźć rozwiązanie statyczne metodą charakterystyk. Ze względu na osiową symetrię zadania (geometrii i warunków brzegowych) poszukiwane pole naprężeń jest symetryczne względem osi z oraz płaszczyzny środkowej krążka. Wystarczy więc rozważyć tylko jedną czwartą część przekroju krążka płaszczyzną r, z . Budowę rozwiązania oraz analizę poszczególnych obszarów wygodnie jest

przedstawić na konkretnym przykładzie (rys.10.74).

Na poboczniczy walca OA jest dany stan naprężenia: $\sigma_r = -q$,
 $\sigma_z = -(2k + q)$ i $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = -(q+k)$ oraz kąt $\nu = \frac{3}{4}\pi$.

Dane te wystarczą do znalezienia stanu naprężenia w całym obszarze OAB. W obszarze tym jest jednorodny stan naprężenia.

Punkty charakterystyk leżące w pobliżu brzoego OA wyznaczamy z zagadnienia Cauchy'ego, a w pobliżu osi AB z zagadnienia mieszanego. Pozostałe punkty znajdujemy z zagadnienia charakterystycznego. Linie nachylone pod kątem $\nu = \frac{3}{4}\pi$ do osi r są charakterystykami α , a ortogonalne do nich charakterystykami β

(linia O_1B). Obie charakterystyki są prostoliniowe. W obszarze $O_{1\div 4}$ mamy zdegenerowane zagadnienie charakterystyczne. Na charakterystyce O_1B mamy dane wszystkie wartości r, z, p, ν .

W punkcie O charakterystyka α redukuje się do punktu (zera), stałe są współrzędne r, z , a zmienia się kąt ν i ciśnienie p .

Dane w punkcie O i na charakterystyce OB pozwalają wyznaczyć charakterystyki w całym obszarze OBCD. Najpierw wyznacza się charakterystykę α (linię 56) w pobliżu punktu O. Charakterystyka α (linia 56) z charakterystyką β (linia 5B) tworzą zagadnienie charakterystyczne w całym obszarze 5BD6. W obszarze BDC mamy zagadnienie mieszane. Na brzegu BC dany jest kąt

$\nu = \frac{3}{4}\pi$ i współrzędna $z = 0$, a na linii BD będącej charakterystyką α dane są r, z, p, ν . Dane te wystarczą do wyznaczenia rozwiązania w całym obszarze BDC.

W punkcie $O_{1\div 4}$ charakterystyki β wyprowadzone są pod kątem

$$\nu_M = \nu_0 - \Delta\nu = \frac{3}{4}\pi - n3^\circ, \quad (10.251)$$

$n = 0_1, 0_2, 0_3, 0_4, \dots, 0_4$

tak, aby ostatnia charakterystyka O_4DC wpadła w punkt C będący

przecięciem osi z (linia GC) z płaszczyzną poziomą krążka AC.
Stan naprężenia w punkcie O oblicza się z równania

$$P_M = P_N + 2k(\sqrt{J}_M^2 - \sqrt{J}_N^2) \quad (10.252)$$

powstałego ze związku po charakterystyce α przy przyjęciu $d_z = d_r = 0$. Kąt \sqrt{J}_M jest obliczony z równania (10.251).

Na osi r (linia AC) współrzędną r obliczamy z równania charakterystyki β , a naprężenie p ze związku po charakterystyce β . Ponieważ na osi r współrzędna $z_M = 0$, kąt $\sqrt{J}_M = \frac{3}{4}\pi$, to równania po rozpisaniu na różnice skończone będą miały postać

$$\begin{aligned} r_M &= r_N + tg\,0,5\left(\frac{3}{4}\pi + \sqrt{J}_N\right) z_N, \\ P_M &= P_N - 2k\left(\frac{3}{4}\pi - \sqrt{J}_N\right) - \frac{k}{r_n}(\Delta z_n - \Delta r_n). \end{aligned} \quad (10.253)$$

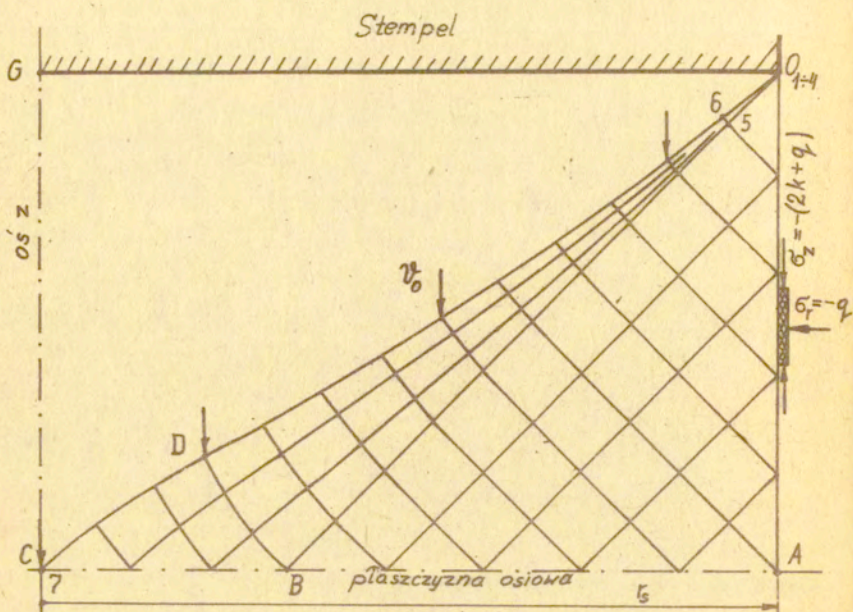
W zagadnieniu charakterystycznym współrzędne r, z obliczamy z równań po rozpisaniu ich na różnice skończone

$$r_M = \frac{z_N - z_S + r_S tg\,0,5(\sqrt{J}_{MS} + \sqrt{J}_S) + \frac{r_N}{tg\,0,5(\sqrt{J}_{MN} + \sqrt{J}_S)}}{tg\,0,5(\sqrt{J}_{MS} + \sqrt{J}_S) + \frac{1}{tg\,0,5(\sqrt{J}_{MN} + \sqrt{J}_S)}}, \quad (10.254)$$

$$z_M = z_S + (r_M - r_S) tg\,0,5(\sqrt{J}_{MS} + \sqrt{J}_S).$$

Kąty $\sqrt{J}_{MN} = \sqrt{J}_N$, $\sqrt{J}_{MS} = \sqrt{J}_S$ są pierwszymi przybliżeniami wartości kątów. Naprężenie p oraz kąt \sqrt{J} w punkcie poszukiwanym znajdziemy ze związków po charakterystyce α i β rozpisanych na różnice skończone

$$\begin{aligned} P_M &= 0,5\left[P_S + P_N + \frac{k}{s}(\Delta z_s + \Delta r_s) - \frac{k}{r_n}(\Delta z_n - \Delta r_n)\right] + k(\sqrt{J}_N^2 - \sqrt{J}_S^2), \\ \sqrt{J}_M &= \sqrt{J}_S + 0,5\left(\frac{P_M + P_S}{k} - \frac{\Delta z_s + \Delta r_s}{s}\right). \end{aligned} \quad (10.255)$$



Rys.10.74. Pole naprężeń ściskania walca stemplami

Dokładny opis równań i wyznaczania charakterystyk pola naprężeń zostanie przedstawiony przy omawianiu metody charakterystyk.

Siłę wciskania dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek będącą dolną oceną nośności obliczymy z ostatniej charakterystyki ODC (rys.10.74). Tę siłę obliczamy z równania

$$P = \int 2\pi(\sigma_z r_s dr - \tau_{rz} r_s dz), \quad (10.256)$$

gdzie r_s jest średnim promieniem między dwoma punktami na tej charakterystyce β , dr i dz są odległościami między dwoma punktami mierzonymi w kierunku promienia r i osi z , natomiast σ_z i τ_{rz} są naprężeniami obliczonymi z równań

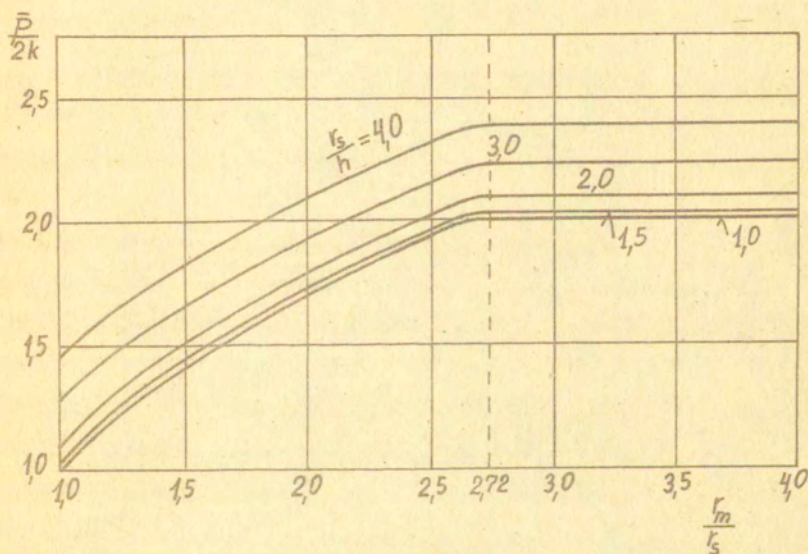
$$\sigma_z = p + k \sin 2\varphi,$$

$$\tau_{rz} = k \cos 2\varphi,$$

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

$$k = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Na rysunku 10.75 podano dolną ocenę wciskania stempli w krążek ($\bar{p} = \frac{P}{F}$) w zależności od geometrii zadania ($\frac{r_m}{r_s}$ i $\frac{r_s}{h}$). Jak wynika z wykresu, oddziaływanie pierścienia ($\frac{r_m}{r_s}$) na walec pod stemplami istnieje i przejawia się wzrostem nacisku $\frac{\bar{P}}{2k}$. Dla krążków o stosunku $\frac{r_m}{r_s} \geq 2,72$ otrzymujemy stały nacisk dlatego, że pierścień o promieniu $r_m \geq 2,72$ jest sztywny i nie bierze udziału w procesie odkształcania.



Rys.10.75. Dolna ocena nośności krążków

10.4. Metoda równowagi sił

10.4.1. Wstęp

Metoda równowagi sił opiera się na pojęciu pola sił stowarzyszonego z założonym mechanizmem płynięcia i wykorzystaniu równowagi tego pola sił. Metoda ta znajduje zastosowanie w płaskich zagadnieniach obróbki plastycznej. Mechanizm płynięcia tworzymy z układu sztywnych bloków ślizgających się po narzędziu i po sobie wzdłuż ograniczających je linii nieciągłości. W tych założonych mechanizmach płynięcia dysypacja plastyczna zachodzi jedynie wzdłuż linii nieciągłości oraz na linii kontaktu narzędzia z materiałem. Równanie bilansu mocy dysypowanej będące jednocześnie równaniem pracy wirtualnej przyjmuje postać

$$\sum_{MN} k v_{MN} l_{MN} + \sum_{RS} \tau_{RS}^t v_{RS}^t l_{RS}^t = P v_0^t \quad (10.257)$$

gdzie k jest granicą plastyczności materiału na ścinanie, v_{MN} jest prędkością względnego przeslizgu sąsiadujących bloków wzdłuż linii nieciągłości MN , l_{MN} jest długością tej linii, τ_{RS} jest naprężeniem stycznym wzdłuż narzędzia na odcinku l_{RS} , v_{RS} jest prędkością przeslizgu na tym odcinku. Sumowanie należy przeprowadzić po wszystkich odpowiednio ponumerowanych liniach nieciągłości $MN = 1, 2, 3, \dots, n$ i liniach kontaktu z narzędziem $RS = 1, 3, 5, \dots, s$. Siłę działającą na narzędzie oznaczamy przez P , a jej górną ocenę przez P_g , v_0^t jest prędkością ruchu narzędzia.

Równanie (10.257) wyraża warunek globalnej równowagi układu. W przypadku mechanizmu płynięcia złożonego ze sztywnych bloków zachodzi również równowaga lokalna każdego bloku sztywnego, jeśli naprężenie styczne osiąga wartość k , a na kontakcie materiału z

narzędziem spełnione jest prawo tarcia kontaktowego w postaci

$$\begin{aligned} \tau_t &= b + \mu \sigma_n < k, \\ \tau_t &= k, \text{ gdy } b + \mu \sigma_n \geq k, \end{aligned} \quad (10.258)$$

gdzie $\mu = \operatorname{tg} \lambda$ jest współczynnikiem tarcia równym tangensowi kąta tarcia λ . Powstaje zatem układ statycznie wyznaczalny i rozkład sił łatwo można wyznaczyć budując plan sił w sposób podobny do hodografu prędkości.

Metoda równowagi sił w stosunku do metody bilansu mocy dysypowanej ma następujące zalety:

- dostarcza więcej informacji o rozkładzie naprężeń wewnątrz materiału i rozkładzie nacisków na narzędzie,
- uwzględnia tarcie na kontakcie i pozwala ustalić rodzaj tarcia na danej części powierzchni kontaktu.

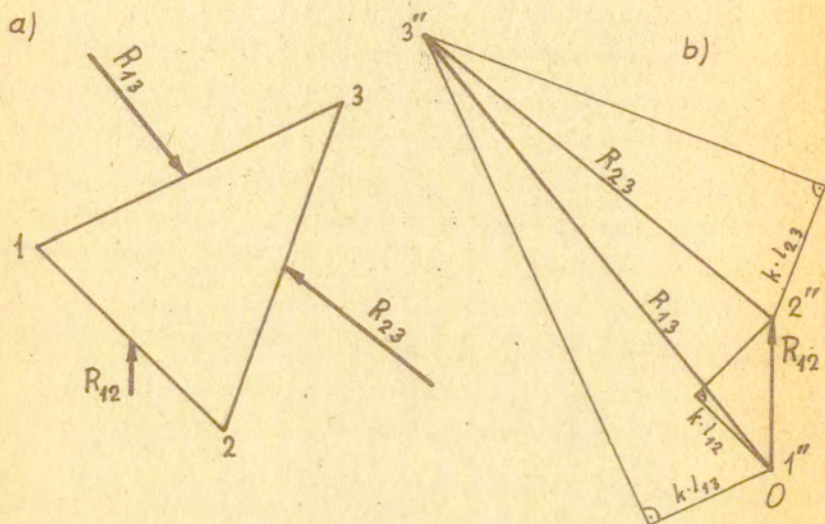
Obie metody prowadzą do tej samej wartości nacisku średniego narzędzia na materiał.

Metoda równowagi sił jest szeroko stosowana przy obliczaniu nośności granicznej płyt.

10.4.2. Zasada budowy planu sił

Rozpatrzmy najpierw typowy obszar sztywny (element) 1-2-3 ograniczony liniami nieciągłości 1-2, 2-3, 3-1, z których jedna np. 1-3 może być linią kontaktu z narzędziem (rys.10.76a). Załóżmy, że znamy kierunek siły wypadkowej działającej na element wzdłuż linii 1-2. Ponieważ wartość siły stycznej wzdłuż 1-2 wynosi $k \cdot l_{12}$, określić możemy graficznie lub analitycznie wartość siły wypadkowej. Na planie sił (rys.10.76b) przedstawia ją odcinek 1'' - 2''. Ponieważ siły styczne wzdłuż linii 2-3 i 3-1 wy-

noszą odpowiednio $k \cdot l_{23}$ i $k \cdot l_{31}$, możemy łatwo skonstruować trójkąt sił i określić siły wypadkowe działające wzdłuż 2-3 i 3-1. Konstrukcja jego jest przedstawiona na rysunku 10.76b. Gdy linia 3-1 jest linią kontaktową, to znamy na niej kierunek siły wypadkowej w przypadku tarcia poślizgowego lub wartość siły stycznej w przypadku tarcia przylegania. Mając określone siły dla danego obszaru sztywnego możemy przejść do obszarów przylegających, przy których będziemy mieli podobną sytuację.



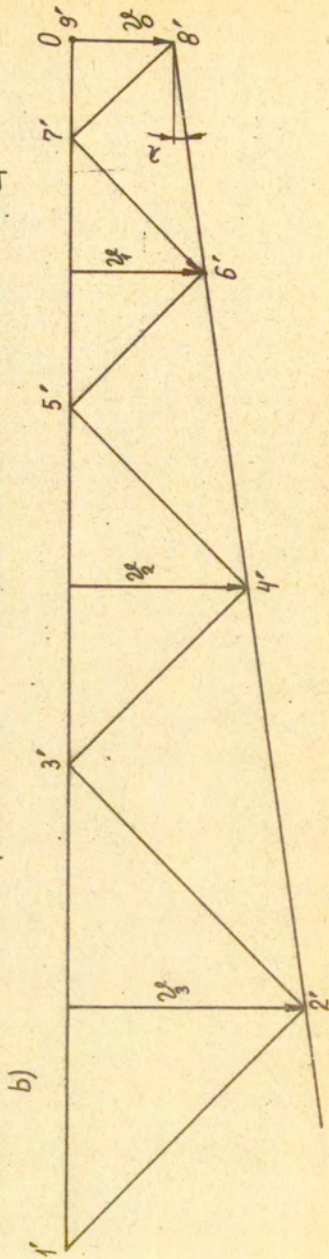
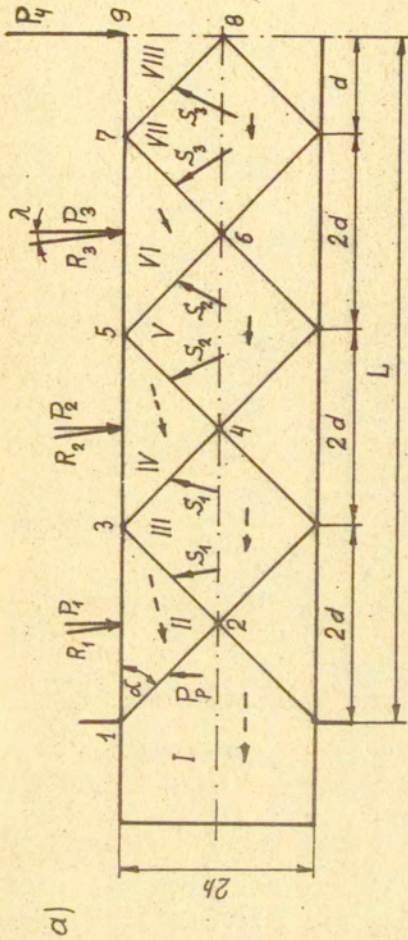
Rys.10.76. Zasada budowy planu sił

Pole sił możemy określić bez znajomości pola prędkości, musimy jednak znać kierunki wzajemnego przesuwania się obszarów sztywnych. Siły styczne działające na liniach nieciągłości są przeciwnie skierowane do kierunku prędkości względnych przylegających obszarów sztywnych. W większości zadań kierunek prędkości

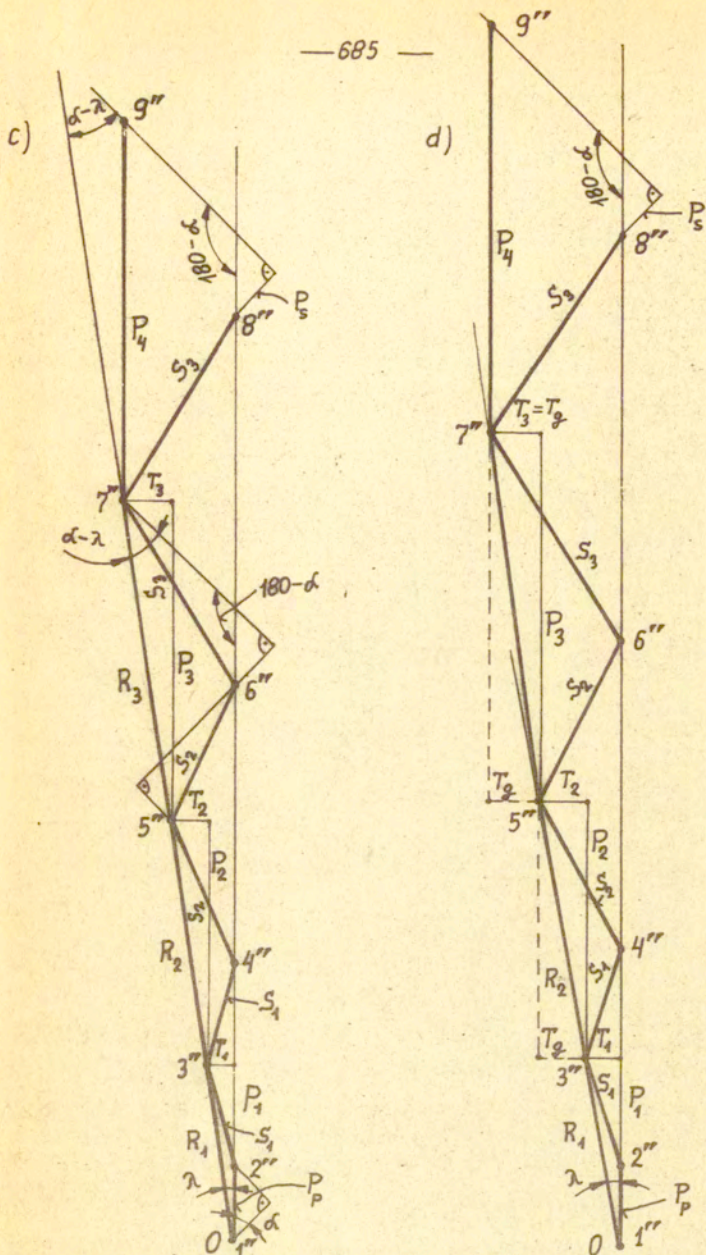
względnej można ustalić bez konstruowania hodografu prędkości.

10.4.3. Prasowanie płaskiego bloku materiału pomiędzy sztywnymi płytami

Rozpatrzmy prasowanie bloku materiału o grubości $2h$ pomiędzy sztywnymi płytami o szerokości $2L$ i długości zapewniającej płaski stan odkształcenia. Na rysunku 10.77 podano schemat prasowania połowy bloku, położenie linii nieciągłości oraz układ sił działających na poszczególne obszary sztywne I + VIII. Ze względu na symetrię wystarczy rozważyć $1/4$ część bloku o wymiarach $h \times L$. Kinematycznie dopuszczalny mechanizm płynięcia dobieramy tak, aby wymiary sztywnych obszarów były jednakowe; uzyskujemy to dzieląc odcinek L na parzystą lub nieparzystą ilość jednakowych części o długości d i łącząc liniami nieciągłości punkty podziału (minimum nacisku uzyskujemy, gdy kąt α nachylenia linii nieciągłości jest bliski $\pi/4$, co widać na rysunku 10.78). Aby zastosować równanie (10.257) należy skonstruować plan prędkości (hodograf), przyjmując, że względne prędkości ślizgania obszarów sztywnych po płycie odchylone są o kąt λ od linii kontaktu. Na rysunku 10.77b punkt O jest początkiem układu na płaszczyźnie hodografu, zaś prędkości względne wzdłuż linii nieciągłości 8-7, 7-6, 6-5, ..., 2-1 przedstawiają odcinki $8' - 7'$, $7' - 6'$, $6' - 5'$, ..., $2' - 1'$. Prędkości bezwzględne mierzymy od punktu O . Możemy zatem z bilansu mocy dysypowanej (10.257) określić nacisk płyty na prasowany materiał.



Rys. 77. Prasowanie bloku materiału pomiędzy sztywnymi płytami: a/ schemat podziału bloku, działania sił oraz prędkości przesuwania sztywnych obszarów; b/ hodograt prędkości



Rys.10.77. c/ plan sił przy tarcju poślizgowym; d/ plan sił przy tarcju mieszany

Rozpatrzmy obecnie pole sił związane z powyższym mechanizmem płynięcia. Podobnie jak w przypadku prędkości rozpatrzmy odwzorowanie z płaszczyzny fizycznej do płaszczyzny sił, które nazywać będziemy planem sił (rys.10.77c). Wykorzystujemy tu fakt że na liniach nieciągłości siła styczna jest określona, ponieważ naprężenie styczne na tych liniach osiąga wartość graniczną $\tau = k$. Konstrukcję planu sił rozpoczynamy od obszaru I, który jest w równowadze pod działaniem dwóch sił pionowych działających wzdłuż linii nieciągłości 1-2 i symetrycznej do niej linii w dolnej części bloku. Wartość siły P_p określamy ze wzoru

$$P_p = P_s \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}, \quad (10.259)$$

gdzie $P_s = k \cdot l_{12}$ jest składową styczną wzdłuż linii 1-2, której długość wynosi l_{12} , α jest kątem nachylenia tej linii do poziomej osi symetrii, Rozpatrując równowagę obszaru 1-2-3, wykorzystujemy fakt, że siła styczna wzdłuż linii nieciągłości 2-3 ma wartość $k \cdot l_{23}$, zaś siła oddziaływania płyty na blok wzdłuż 1-3 jest odchylna o kąt tarcia λ . Równowaga obszaru III wymaga, aby wszystkie 4 siły działające na ten obszar były jednakowe i równe sile działającej wzdłuż linii 2-3. Postępując podobnie wyznaczmy wszystkie siły działające pomiędzy sztywnymi obszarami oraz siły kontaktowe R_n między płytą a materiałem. Składowe normalne sił kontaktowych wynoszą $P_n = R_n \cdot \cos \lambda$.

Odcinki 1'' - 3'', 3'' - 5'', ... na planie sił przedstawiają siły kontaktowe na częściach 1-3, 3-5, ... linii kontaktu, natomiast odcinki 1'' - 2'', 2'' - 3'', ... przedstawiają siły działające na liniach nieciągłości 1-2, 2-3, ... itp. W przypadku podziału linii kontaktu o długości 2L na nieparzystą ilość części 2d, siła kontaktowa działająca na element 7-9-8 jest pionowa,

natomiast przy podziale na parzystą ilość części wszystkie siły kontaktowe mają ten sam kierunek i odchylone są o kąt λ od normalnej do linii kontaktu.

Z planu sił możemy również określić wielkość siły tarcia oraz nacisk normalny na poszczególnych częściach linii kontaktu. Mając reakcję na danym odcinku $P_n = R_n \cdot \cos \lambda$ obliczamy siłę tarcia $T_n = P_n \operatorname{tg} \lambda = P_n \mu$. W przypadku przyjęcia większego kąta tarcia λ_1 siły tarcia proporcjonalnie wzrastają do jego wielkości. Gdy siła tarcia T_n osiągnie wartość graniczną $T_g = k \cdot l_{RS}$, gdzie l_{RS} jest długością odcinka kontaktu, wówczas już występuje tarcie przylgowe zamiast tarcia poślizgowego Coulomba. W tym przypadku zawsze obowiązuje wzór (10.258)₂, a siła kontaktowa ma zawsze składową styczną $T_g = k \cdot l_{RS}$. Fakt ten uwzględniamy w konstrukcji planu sił, co jest przedstawione na rysunku 10.77d.

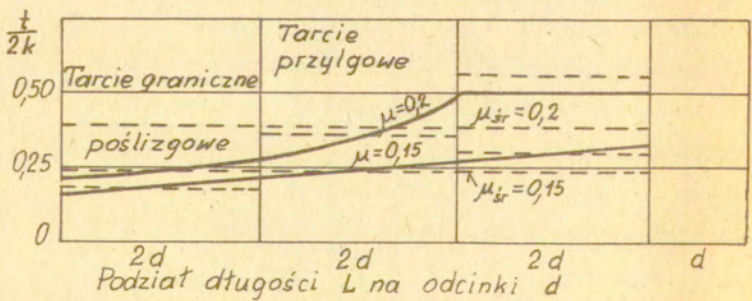
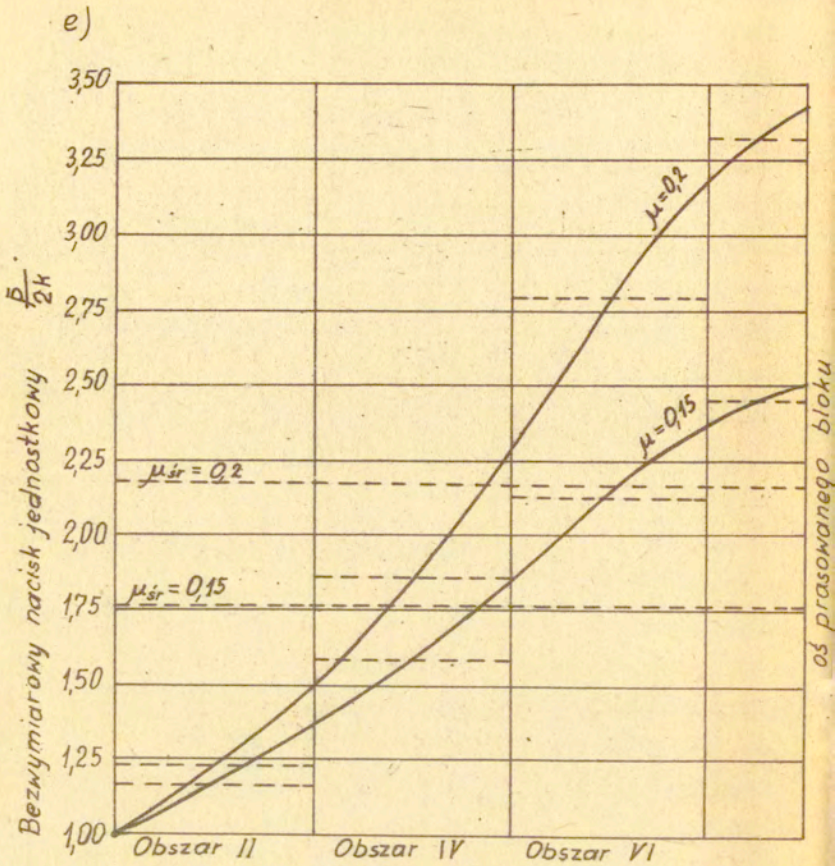
Na rysunku 10.77e pokazano całkowity średni nacisk normalny, całkowite średnie jednostkowe tarcie oraz średnie naciski normalne i średnie tarcia dla obszarów sztywnych II, IV, VI dla współczynników tarcia $\mu = 0,15$ i $\mu = 0,20$.

Siłę potrzebną do prasowania bloku materiału pomiędzy sztywnymi płytami można wyznaczyć graficznie wykonując plan sił (rys.10.77c) lub obliczyć analitycznie. Nacisk normalny płyty, w przypadku podziału odcinka L na parzystą ilość jednakowych długości d , całkowicie obliczamy ze wzoru

$$P_n = P_p \frac{\alpha(\alpha-1)^{n-1}}{\alpha}, \quad (10.260)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin(\alpha - \lambda)}$$



Rys.10.77. e. Naciski jednostkowe dla stosunku $\frac{L}{h} = 7$

Natomiast w przypadku podziału odcinka L na nieparzystą ilość jednakowych długości d, siłę P_{n-1} obliczamy ze wzoru (10.260), a siłę ostatnią P_{no} , która jest pionowa na planie sił, obliczamy ze wzoru

$$P_{no} = 2P_p (\lambda - 1)^{n-1} \quad (10.261)$$

Siła P_{no} działa na sztywny obszar 7-8-9, który przemieszcza się tylko w dół. Równania (10.260) i (10.261) zostały wyprowadzone przy wykorzystaniu oznaczeń podanych na rysunku 10.77c.

Średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy na poszczególnych obszarach sztywnych obliczamy z równania

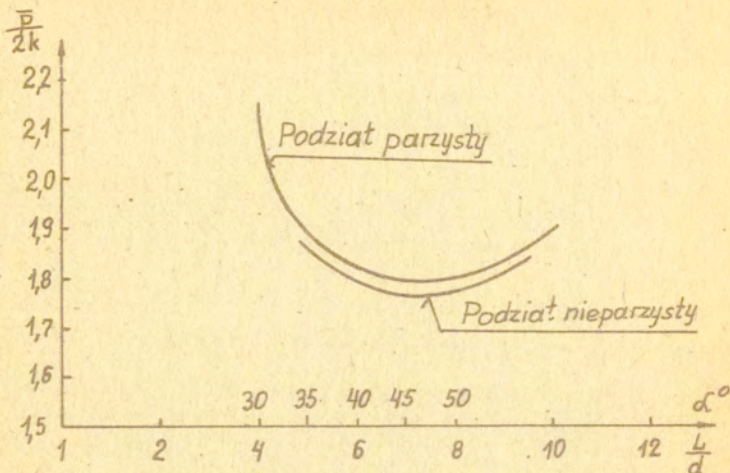
$$\frac{\bar{P}}{2k} = \frac{1}{2k} \frac{P_n}{l_{RS}} \quad (10.262)$$

a całkowity średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy z równania

$$\frac{\bar{P}}{2k} = \frac{1}{2k} \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_n}{l_{13} + l_{35} + l_{57} + \dots} \quad (10.263)$$

Podobnie obliczamy średnie tarcia jednostkowe.

Jak widać z rysunku 10.78 średni nacisk jednostkowy dla parzystego podziału odcinka L jest nieco większy niż dla podziału nieparzystego. Różnica ta wynika z przyjętego kierunku ostatniej siły kontaktowej P_{no} .



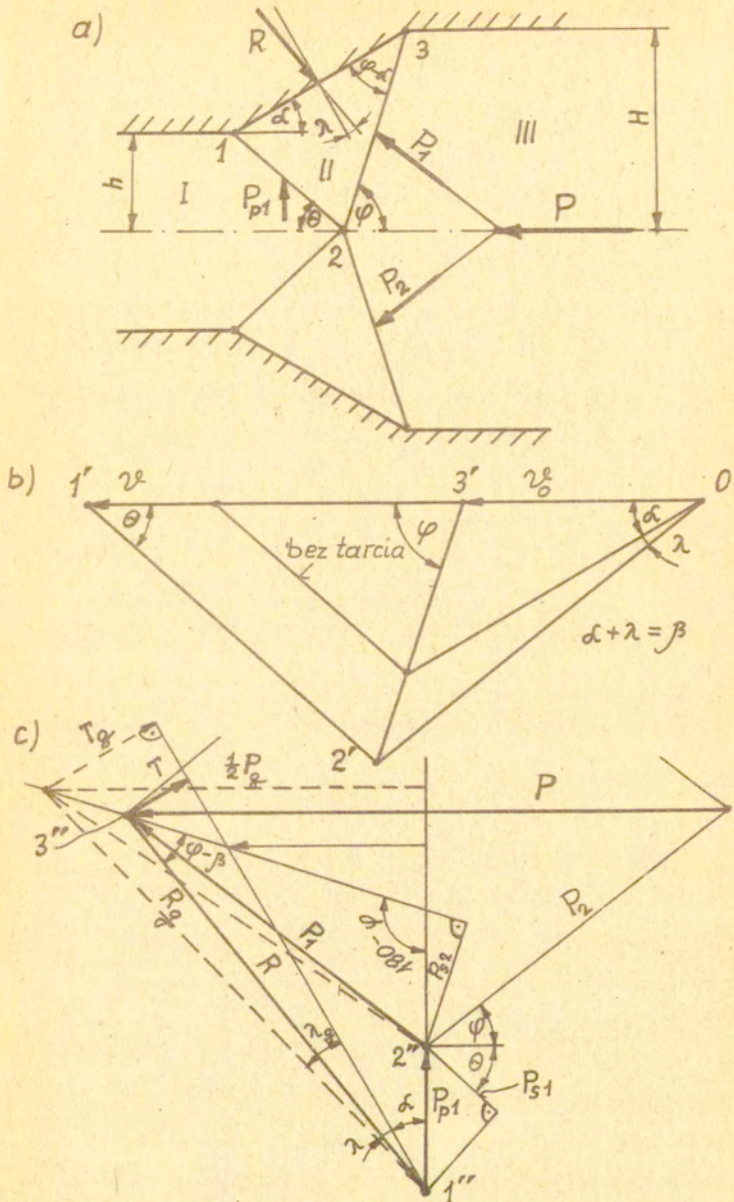
Rys.10.78. Wpływ kąta α (lub stosunku $\frac{L}{d}$) na średni nacisk dla stosunku $\frac{L}{d} = 7$ i $\mu = 0,15$

10.4.4. Wyciskanie współbieżne w matrycy klinowej

Metodę równowagi można zastosować do obliczania nacisków potrzebnych do wywołania plastycznego płynięcia przy wyciskaniu współbieżnym w matrycy klinowej (rys.10.79). Na rysunku 10.79a pokazano schemat matrycy klinowej, położenie linii nieciągłości l_{12} i l_{23} oraz działanie sił kontaktowych na sztywny obszar II. Położenie punktu 2 na osi matrycy zależy od wielkości kąta φ , który w przypadku tarcia poślizgowego obliczamy z równania

$$\frac{\sin(2\varphi - \beta)}{\sin^2 \varphi} = \frac{r}{(r-2)\sin\alpha} \left[\frac{r \sin\beta}{\sin\alpha} - 2\cos\lambda \right], \quad (10.264)$$

Kąt ten zapewnia najmniejszą siłę nacisku. Na rysunku 10.80 przedstawiono wpływ kąta φ , redukcji $r = \frac{H-h}{H}$ oraz współczynnika tarcia μ na wielkość średniego nacisku. Wartość kąta φ wyznaczona z krzywej w punkcie najniższym położonym całkowicie pokrywa się z obliczoną wartością kąta φ z równania (10.264).



Rys.10.79. Wyciskanie w matrycy klinowej: a/ schemat matrycy klinowej, linii nieciągłości i działania sił; b/ hodograf prędkości; c/ plan sił

Średni nacisk jednostkowy pokazany na rysunku 10.80 możemy również obliczyć z równania bilansu mocy dysypowanej (10.257) przy wykorzystaniu hodografu prędkości (rys.10.79b).

Rysunek 10.79c przedstawia plan sił. Plan sił zaczynamy konstruować od siły kontaktowej P_{p1} obliczonej z równania

$$\frac{P_{p1}}{P_{s1}} = \frac{P_{s1}}{P_{s1}} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \theta} \quad (10.265)$$

Siła $P_{s1} = k \cdot l_{12}$ jest znaną co do wielkości i kierunku składową styczną siły P_{p1} powodującej równowagę obszaru sztywnego I. Wychodząc z zależności geometrycznych można wyprowadzić równanie

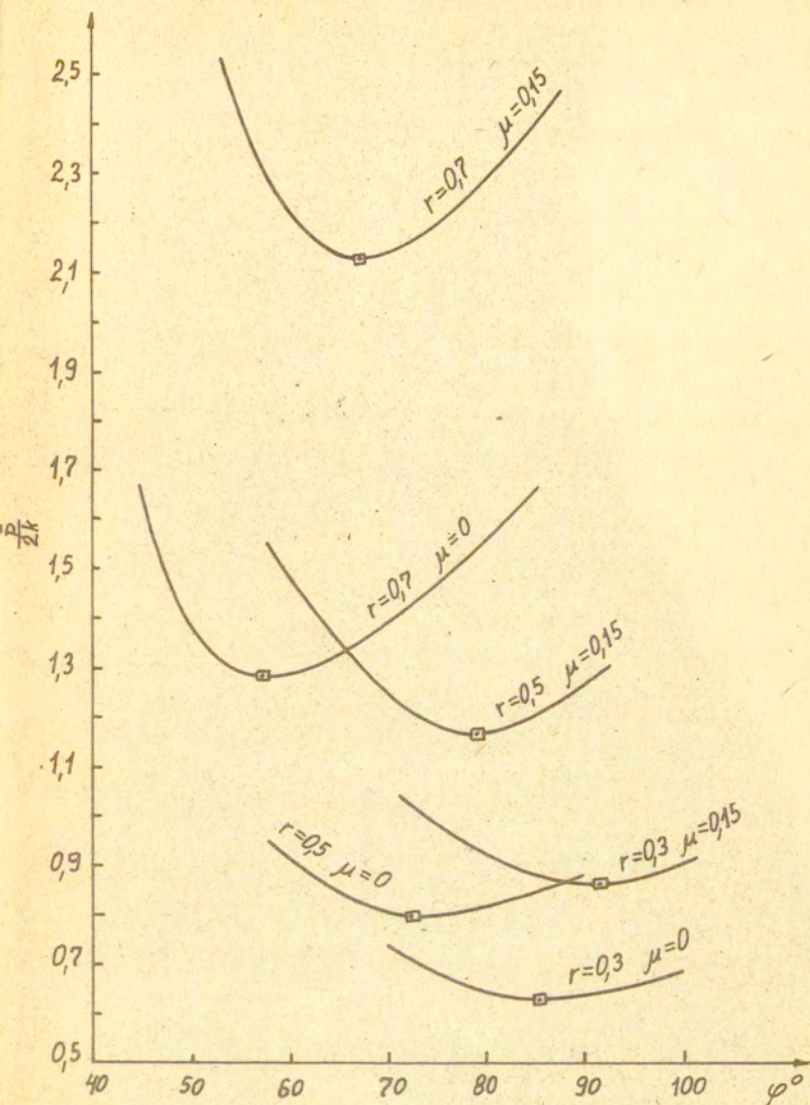
$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{r \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \varphi}{1 - r}, \quad (10.266)$$

w którym $r = \frac{H-h}{H}$ oznacza redukcję przekroju, α - kąt pochylenia matrycy, a φ - kąt pochylenia linii nieciągłości. Następnie wychodząc ze znanego kierunku siły kontaktowej R (odchylony od pionu o kąt $\beta = \alpha + \lambda$) i znanej składowej stycznej ($P_{s2} = k \cdot l_{23}$) na linii nieciągłości 2-3 znajdziemy kierunek i wielkość siły P_1 oraz wielkość siły kontaktowej R . Siły P_{p1} , R , P_1 powodują równowagę obszaru sztywnego II. Mając siłę P_1 i symetryczną siłę P_2 geometrycznie wyznaczamy siłę P potrzebną do realizacji procesu wyciskania.

Siłę tarcia obliczamy ze wzoru

$$T = R \operatorname{tg} \lambda = R \mu \quad (10.267)$$

Gdy siła tarcia T osiągnie wartość graniczną $T_g = k \cdot l_{13}$ wówczas już występuje tarcie przylgowe zamiast tarcia poślizgowego Coulomba. Wtedy siła kontaktowa R_g ma zawsze taką samą składową styczną T_g . Z planu sił przedstawionego na rysunku 10.79c można również znaleźć siłę potrzebną do wyciskania w przypadku zupełnego braku tarcia ($\lambda = 0$).



Rys.10.80. Zależność nacisku jednostkowego od kąta φ pochyle-
nia linii nieciągłości, redukcji r i współczynnika tarcia μ
dla matrycy klinowej o kącie $\alpha = 30^\circ$. \square — najmniejszy nacisk
dla określonego kąta φ

Siłę potrzebną do wyciskania w matrycy klinowej możemy również obliczyć z równania

$$P = \frac{2P_{pc} \sin \varphi \sin \beta}{\sin(\varphi - \beta)} \quad (10.268)$$

Nieznana wielkością w równaniu (10.268) jest $P_{pc} = P_{p1} + P_{p2}$, którą obliczamy z równania

$$\frac{P}{P_{pc}} = k \left(l_{12} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \theta} + l_{23} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} \right) \quad (10.269)$$

Kąt φ wyznaczamy z równania (10.264), a kąt θ z równania (10.266).

Średni bezwymiarowy nacisk jednostkowy obliczamy z równania

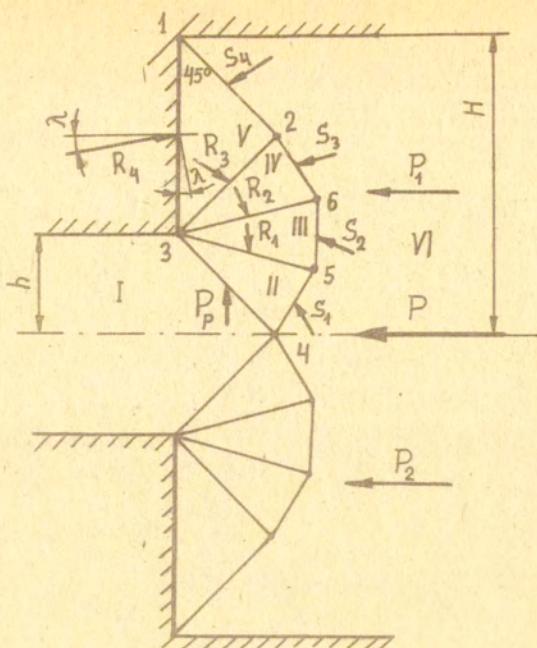
$$\frac{\bar{P}}{2k} = \frac{1}{2k} \frac{P}{2H} \quad (10.270)$$

który całkowicie pokrywa się z naciskiem obliczonym z równania bilansu energii dysypowanej (10.257). Nacisk jednostkowy wyciskania pasma w matrycy klinowej przedstawiono na rysunku 10.80.

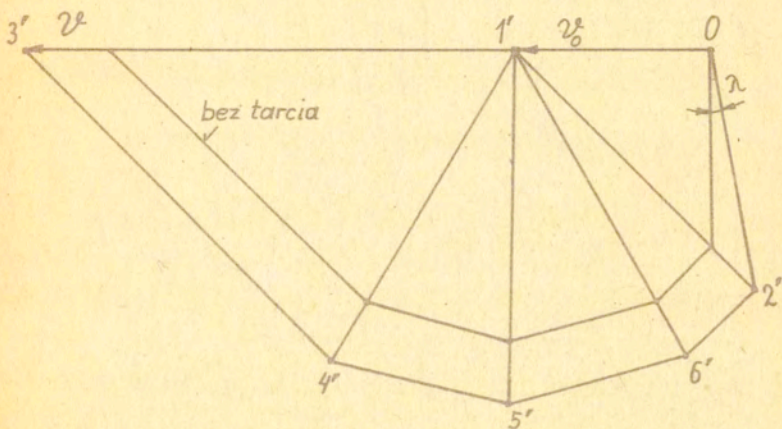
10.4.5. Wyciskanie współbieżne w matrycy kątowej

Siłę potrzebną do wyciskania współbieżnego materiału w matrycy kątowej można wyznaczyć metodą planu sił opartego na założonym kinematycznie dopuszczalnym mechanizmie płynięcia (rys. 10.81a). Mechanizm ten zaczynamy konstruować od trójkąta 1-2-3, który musi ślizgać się po boku matrycy 1-3. Pozostałe linie nieciągłości rysujemy tak, aby zamykały się w punkcie 4, a ruch sztywnych obszarów II - V był możliwy. Prędkości sztywnych obszarów I - VI pokazano na rysunku 10.81b. Względna prędkość ślizgania obszaru V po boku matrycy 1-3 jest odchylona od niego o kąt λ . Punkt O jest początkiem układu hodografu, od którego mierzymy prędkości bezwzględne, natomiast prędkości względne

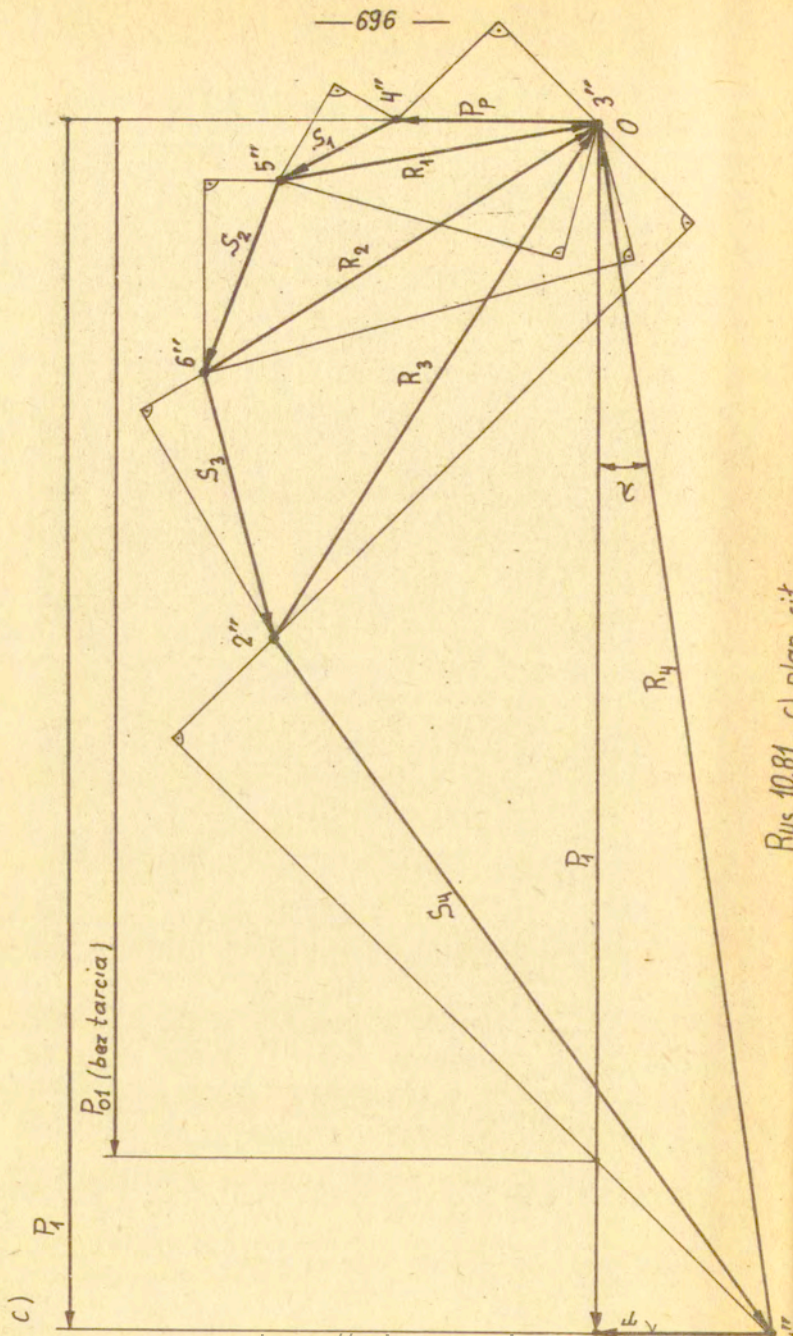
a)



b)



Fys.10.81. Wyciskanie w matrycy kątowej: a/ schemat matrycy kątowej, linii nieciągłości i działania sił, b/ hodograf prędkości.



Rys. 10.81. c) plan sit

wzdłuż linii nieciągłości odpowiednio odwzorowane są z płaszczyzny fizycznej do płaszczyzny hodografu, co przedstawione jest na rysunku 10.81b.

Na rysunku 10.81c podano plan sił. Konstrukcję planu sił zaczynamy od obszaru I, który jest w równowadze pod działaniem dwóch sił pionowych P_p . Rozpatrując równowagę każdego z ^{osobna}obszaru sztywnego II ÷ V wyznaczymy wszystkie siły kontaktowe S_n i R_n . Sposób wyznaczania tych sił jest podany na rysunku 10.76b. Siły R_n oraz siła P_p wychodzą z punktu O, który jest początkiem planu sił. Siła kontaktowa R_4 jest odchylona od normalnej do boku 1-3 matrycy o kąt tarcia λ i jest sumą geometryczną wszystkich sił. Rzutując siłę R_4 na kierunek wyciskania znajdziemy siłę $P_1 = R_4 \cos \lambda$, która jest połową siły P potrzebnej do realizacji procesu wyciskania.

Siłę tarcia T działającą na boku 1-3 matrycy obliczamy ze wzoru $T = P_1 \cdot \operatorname{tg} \lambda = P_1 \mu$, a siłę tarcia granicznego ze wzoru $T_g = k \cdot L_3$.

Średni nacisk jednostkowy w przypadku istnienia tarcia obliczamy z równania

$$\frac{\bar{P}}{2k} = \frac{1}{2k} \frac{P}{H}, \quad (10.271)$$

a w przypadku braku tarcia z równania

$$\frac{\bar{P}_0}{2k} = \frac{1}{2k} \frac{P_0}{H}. \quad (10.272)$$

Nacisk jednostkowy obliczony z równań (10.271) i (10.272) całkowicie pokrywa się z naciskiem obliczonym metodą dysypacji opartej na tym samym mechanizmie płynięcia.

Metoda równowagi sił może być stosowana do wyznaczania sił i obliczania nacisków jednostkowych potrzebnych do wywołania odkształceń plastycznych dla różnych procesów obróbki plastycznej metali w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Jej zaletą jest fakt, że możemy w prosty sposób uwzględnić różne warunki tarcia oraz uzyskać dodatkowe informacje o lokalnych wartościach nacisków w poszczególnych miejscach na kontakcie narzędzia z materiałem.