

PRACA DOKTORSKA

Włodzimierz Abramowicz

MECHANIKA ZGNIATANIA
KONSTRUKCJI CIENKOŚCIENNYCH

35 / 1981

P. 269



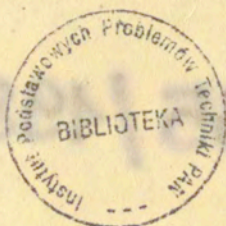
WARSZAWA 1981

Praca doktorska

Promoter: Doc.dr hab. Tomasz Wierzbicki

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 października 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 35/1981



57078



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.druk.8,75. Ark. wyd.6,2.

Oddano do drukarni w październiku 1981

Nr zamówienia Z - 97 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

I. WPROWADZENIE

W wielu działach współczesnej nauki i techniki występuje konieczność rozpatrywania dużych i bardzo dużych odkształceń plastycznych konstrukcji cienkościennych, poddanych obciążeniom ściskającym. Potrzeby te wynikają między innymi z coraz ostrzejszych wymagań dotyczących minimalizacji skutków wszelkiego rodzaju kolizji komunikacyjnych, takich jak zderzenia statków, samochodów i pociągów, czy też kolizji samolotów i śmigłowców ze stałymi przeszkodami, szczególnie w ostatniej fazie lądowania, jak również z wymogami bezpieczeństwa niezbędnymi przy projektowaniu dużych tankowców czy morskich platform wiertniczych. Nie bez znaczenia jest też problem otrzymania odpowiednio energochłonnych struktur przy zapewnieniu minimum materiałochłonności oraz przy minimalnym ciężarze. Wydaje się, że ten kierunek badań będzie szczególnie szybko rozwijany w najbliższych latach.

Przy projektowaniu energochłonnych struktur konieczna jest umiejętność określania obciążeń towarzyszących bardzo dużym deformacjom prostych elementów konstrukcyjnych takich jak belki i kolumny cienkościenne, panele i powłoki cylindryczne itp.

Obserwacje doświadczalne pokazują, że dla zaawansowanych procesów zgniatania konstrukcji cienkościennych (daleko poza zakresem pokrytycznym), w pewnych obszarach deformowanych powłok pojawiają się skoncentrowane strefy plastycznego płynięcia. Charakteryzują się one bardzo dużymi zmianami krzywizny powierzchni środkowej oraz bardzo dużymi rozciągnięciami tej powierzchni. Skoncentrowane strefy plastycznego płynięcia, zwane dalej przegubami plastycznymi, w miarę postępu procesu zgniatania konstrukcji pozostają nieruchome względem powierzchni środkowej powłoki/ lub poruszają się względem niej pozos-

tawiając za sobą zdeformowane, sztywne płyty powierzchniowe o zróżnicowanych i skomplikowanych końcowych kształtach fałd i zagięć (Rys. 2.1 - 2.24). Problem wyznaczania obciążeń zewnętrznych towarzyszących procesowi zginięcia wymaga więc rozwiązania problemu bardzo dużych zmian geometrii deformowanych powłok plastycznych.

Wydaje się, że w obecnej chwili mało przydatne są tu metody numeryczne, głównie ze względu na występowanie bardzo dużych lokalnych zmian krzywizn i rozciągnięć powierzchni środkowej powłoki (promienie krzywizn głównych są porównywalne z grubością powłoki), co pociąga za sobą konieczność skonstruowania odpowiednich do badanych zjawisk skończonych elementów powłokowych. Pewne zachęcające wyniki w tym kierunku uzyskał ostatnio E.Haug /87/.

W prezentowanej pracy podjęto próbę analitycznego opisu bardzo dużych deformacji powłok. Badania w tym kierunku oparte zostały częściowo na ciekawych wynikach uzyskanych w geometrycznej analizie sprężystych stanów pokrywicznych powłok /31; 56 ÷ 59/. Wspomniana analiza dostarczyła podstawowych informacji o modelowaniu kształtu zdeformowanej powłoki przy pomocy izometrycznych odwzorowań jej powierzchni środkowej. Specyfiką materiału sprężystego jest, że stan naprężenia a zatem i siły zewnętrznych zależy jedynie od konfiguracji końcowej zdeformowanej powłoki. Dla powłok plastycznych natomiast konieczne jest rozpatrywanie całego procesu deformacji, co w sposób zasadniczy komplikuje zagadnienie.

Celem prezentowanej pracy jest zbadanie własności ścisanych powłok plastycznych w stanie pokrywicznym poddanych bardzo dużym deformacjom, oraz próba analitycznego ujęcia tych zjawisk. Od strony opisu formalnego wykorzystano tu analizę warunków zgodności na liniach osobliwych (liniach przegubów plastycznych) oraz podstawowe wyniki geometrii wewnętrznej powierzchni.

Występowanie bardzo dużych zmian krzywizn i rozciągnięć powierzchni środkowej w zginiętych powłokach wymaga rozważania skończonych odkształceń materiału.

W pracy przyjęto sztywno - idealnie plastyczny model materiału, który jest szczególnie wygodny przy zastosowaniu opisu przestrzennego. Opis ten jest konsekwentnie stosowany w dalszej części pracy.

W pracy wyodrębniono i opisano (Rozdz. 2 i 3) szereg podstawowych mechanizmów deformacji plastycznej, zaproponowano również pewne uproszczenia co umożliwiło podanie przybliżonych wyrażeń na wewnętrzną moc dysypowaną w procesie zgniatania (obciążenia zewnętrzne wyznaczono z postulatu równości mocy sił wewnętrznych i zewnętrznych).

W części pracy poświęconej zastosowaniom położono szczególny nacisk na uzyskanie jak najprostszycch, użytecznych w praktyce inżynierskiej wzorów końcowych, dla prostych konstrukcji cienkościennych oraz na zweryfikowanie istniejących rozwiązań z punktu widzenia poprawności przyjętych założeń upraszczających. Dokonano również porównań z dostępnymi wynikami badań doświadczalnych. Otrzymane wyniki wykazują dobrą zgodność, co stanowi zachętę do kontynuowania badań w tym kierunku.

1.2. Przegląd literatury

Prezentowany przegląd literatury podzielony został na dwie części. W pierwszej z nich omówiono prace o nastawieniu czysto empirycznym. W części drugiej przedstawiono natomiast rozwój koncepcji postulowania kinematyki procesu zgniatania oraz postulowania pewnej zasady zachowania, z której następnie wyznacza się obciążenia zewnętrzne. Wyznaczenie statycznych i dynamicznych charakterystyk zgniatania konstrukcji cienkościennych miało i ma olbrzymie znaczenie w praktyce inżynierskiej a szczególnie w tych działach, które zajmują się projektowaniem struktur energochłonnych. Nic więc dziwnego, że tu właśnie pojawiły się pierwsze praktyczne próby rozwiązania problemu. Wspomniane prace musiały dać konkretne wyniki, które od razu nadawałyby się do zastosowań, ponadto musiały one uwzględniać wpływ wielu czynników takich jak imperfekcje początkowe, temperatura środowiska, rodzaj materiału, sposób obróbki cieplnej, rodzaj i rozmieszczenie spoin itp. Wymagania te miały decydujący wpływ

na sposób przeprowadzania badań, który bazował głównie na materiale statystycznym pochodzącym z przeprowadzania wielu doświadczeń na próbkach naturalnej wielkości.

Pierwszym tego typu opracowaniem jest praca japońska M.Yamaya i M. Tani /1/ (1971), w której wyznaczono średnią siłę quasi-statycznego zgniatania cienkościennych kolumn metalowych o przekrojach kwadratowym, prostokątnym i kapeluszowym (por. rys. 6.1a,b) oraz opisano wpływ imperfekcji początkowych na wielkość tej siły. Podano również doświadczalne wielkości współczynnika dynamicznego, który określał wzmocnienie konstrukcji w funkcji prędkości zgniatania próbki.

Wyniki podobnych badań bogatą analizą statystyczną znaleźć można w podobnych pracach J.Provansal /4,5/ (1979 i 1980) oraz R.C. Vankuren et al /2/ - w tej ostatniej znaleźć można również materiał porównawczy energochłonności próbek wykonanych z różnych gatunków stali przy dużych prędkościach uderzenia. Podobny charakter ma również praca H.Pirschel /5/ (1978), w której przedstawiono analizę energochłonności typowych profili stosowanych w przemyśle samochodowym. Omawiane w tej pracy doświadczenia były próbami dynamicznymi.

Na szczególną uwagę wśród opisanych opracowań zasługuje seria prac P.M.Tharton /6,7,8,9,10/ z lat 1977-1979, w których podano wyniki zgniatania i zginania typowych cienkościennych elementów konstrukcyjnych o przekrojach zamkniętym i otwartym wykonanych z różnych gatunków stali, poddanych różnym rodzajom obróbki cieplnej. Ponadto podano wyniki eksperymentów przeprowadzonych w różnych temperaturach. Dla wszystkich rozważanych w pracy profili zaproponowano proste wzory empiryczne pozwalające na wyznaczenie obciążeń zewnętrznych.

Opisana powyżej grupa prac miała charakter czysto aplikacyjny i nie wnikała głębiej w istotę zjawiska dużych deformacji, tym niemniej dostarczyła szeregu ważnych informacji o ogólnych właściwościach mechanizmów zgniatania konstrukcji cienkościennych. Charakterystyczną cechą zaobserwowanych mechanizmów jest występowanie skoncentrowanych stref plastycznego płynięcia oraz sztywnych płatów powierzchniowych. Płaty te obracają się względem siebie wzdłuż linii przegubów plastycznych, umożliwiając tym samym deformację powłoki. Zaobserwowano ponadto,

że mechanizm deformacji powłoki zależy przede wszystkim od jej parametrów geometrycznych i od imperfekcji początkowych, natomiast mechaniczne własności materiału, rozmieszczenie spoin itp. mają znaczenie drugorzędne /1,2,4,5,10,22/.

Próby dynamiczne wykazały, że w prostych konstrukcjach cienkościennych takich jak kolumny czy powłoki cylindryczne mechanizm deformacji nie zależy również od prędkości obciążenia zewnętrznego /24,25,26/. Fakt ten ma fundamentalne znaczenie dla uproszczonych rozwiązań dynamicznych /25,26,35,88/.

Równoległe z omówionymi powyżej pracami o charakterze czysto praktycznym pojawiały się publikacje, których celem było zrozumienie i głębsza analiza mechanizmów deformacji konstrukcji powłokowych. Cechą charakterystyczną tych prac jest ograniczenie rozważań do badania formy lokalnej utraty stateczności konstrukcji, w zależności od parametrów określających jej kształty geometryczne, z równoczesnym pominięciem wpływu innych czynników takich jak np. imperfekcje początkowe czy wzmocnienie materiału. Z tego powodu we wspomnianych publikacjach rozważane są w przeważającej większości mechanizmy towarzyszące quasi-statycznemu zgniataniu powłok wykonanych z materiału sztywno-idealnie plastycznego.

Jako pierwsze w tej grupie należy wymienić prace: A.Pugsley'a /11/ z 1960 r.; M.J.Alexander /13/ z 1960 r. oraz R.K.McFarland'a /90/ z 1963 r. Autorzy ci po raz pierwszy zastosowali podejście postulowania kinematyki procesu deformacji w analizie pokrytycznego zachowania się konstrukcji powłokowych (w tym przypadku powłok cylindrycznych i konstrukcji ulowych) przyjmując kształt wyboczenia lokalnego z obserwacji doświadczalnych. Ponadto Pugsley i Alexander zbadali i opisali współistnienie różnych form wyboczenia lokalnego powłok cylindrycznych w zależności od stosunku ich wymiarów geometrycznych (w zależności od stosunku grubości ścianki powłoki do jej promienia por. rozdz. 2), wprowadzili też pośrednio pojęcie fali wyboczenia lokalnego (rozdz. 6).

W pracach tych zauważono ponadto współistnienie różnych mechanizmów dysypacji energii. Wyróżniono mianowicie mechanizm

zginania, odpowiadający obrotowi sztywnych płatów powierzchniowych wokół linii stacjonarnych przegubów plastycznych (patrz rozdz. 3 niniejszej pracy), nie zauważono natomiast występowania mechanizmu przewijania materiału, który jest skutkiem powstawania na powierzchni powłoki ruchomych przegubów plastycznych (patrz rozdz. 2 i 3) wprowadzając zamiast niego mechanizm "ścianania" prostych płatów powierzchniowych.

Uproszczenie to było między innymi przyczyną dużych rozbieżności między wynikami obliczeniowymi a wynikami eksperymentalnymi w pracy A. Pug Sley'a /11/. Ponadto nie uwzględnienie istnienia ruchomych przegubów plastycznych doprowadziło do pominięcia w rozważaniach mechanizmu "deformacji naroża" (patrz rozdz. 2), który w odniesieniu do powierzchni środkowej powłoki jest mechanizmem rozciągliwym i w rezultacie do stworzenia niezgodnego kinematycznie mechanizmu deformacji, modelowanego obszarami regularnym odwzorowaniem powierzchni środkowej powłoki (patrz rozdz. 3), analogicznym do modelu Yoshimury /22/ 1951.

W pracy M.J. Alexandera /13/ analizowana jest natomiast rozciągliwa (w odniesieniu do powierzchni środkowej) deformacja powłoki cylindrycznej. Przedstawione tu rozwiązanie otrzymano przy poprawnym sformułowaniu założeń, a otrzymana zgodność z danymi eksperymentalnymi jest zadawalająca. Rozwiązanie podane przez Alexander a jest akceptowane do chwili obecnej w niezmienionej formie /21,22,32,33/, Również postulowana tu zasada minimum obciążenia zewnętrznego (w odniesieniu do średniej wartości tego obciążenia) jest powszechnie stosowana do chwili obecnej /14,21,22,23,24,28,33/, chociaż nie posiada dostatecznego uzasadnienia teoretycznego.

Dalszym krokiem w zrozumieniu mechanizmów deformacji konstrukcji powłokowych są prace Y. Ohokubo /16/; T.Wierzbińskiego /24/, D. Kečmana /17,76/ oraz W.Johnson'a /21,22/, w których podano metodę wyznaczania obciążeń zewnętrznych towarzyszących quasi-statycznemu zgniataniu cienkościennych kolumn metalowych o przekrojach kwadratowym, prostokątnym i kapeluszowym (Rys.6.3. abc), zgniataniu powłok cylindrycznych oraz zginaniu belek o przekroju kwadratowym. W pracach tych wyróżnione są dwa rodzaje

mechanizmów dysypacji energii tzn. zginanie wzdłuż stacjonarnych przegubów plastycznych oraz mechanizm przewijania materiału, który jest szczególnym przypadkiem wędrującego przegubu plastycznego (Rozdz. 4), gdy linia tego przegubu jest odcinkiem. W dalszym ciągu nie wyróżniono tu jednak mechanizmów rozciągliwych (względem powierzchni środkowej powłoki) jak np. wspomnianego poprzednio mechanizmu deformacji naroża. Fakt ten był przyczyną postulowania mechanizmów deformacji niezgodnych kinematycznie (Rozdz. 3) modelowanych tak jak w poprzednio omawianej grupie prac przez obszarami regularne izometryczne odwzorowanie powierzchni środkowej powłoki.

Mimo tych niekonsekwencji prace te wniosły duży wkład w zrozumienie mechanizmów deformacji. Należy tu wymienić przede wszystkim prace W. Johnsona a i współpracowników /21,22,32/, w których mechanizmy deformacji modelowano jako szereg następujących kolejno po sobie izometrycznych odwzorowań powierzchni środkowej.

W pracy T. Wierzbickiego /24/ zastosowano po raz pierwszy metodę "mieszaną" wyznaczania mechanizmu deformacji, a mianowicie kształt lokalnej formy wybożenia kolumny pryzmatycznej przyjęto z obserwacji doświadczalnych z dokładnością do dwóch wolnych parametrów geometrycznych, a następnie z tak określonej klasy mechanizmów dopuszczalnych wybrano jeden, spełniający zasadę minimum obciążenia zewnętrznego, przy czym jeden z parametrów określających mechanizm wyznaczono na drodze analitycznej natomiast drugi przyjęto na podstawie badań doświadczalnych. Metoda ta jest nadal często stosowana przy rozwiązywaniu podobnych problemów /23,28,74,75/. W pozostałych wymienionych poprzednio pracach parametry te określono jedynie na drodze doświadczalnej, co często powodowało konieczność przeprowadzenia skomplikowanych badań doświadczalnych i wprowadzania intuicyjnych uproszczeń /17,22,76/.

Oprócz wymienionych powyżej typów konstrukcji, przy pomocy analogicznych prostych metod wyznaczono obciążenia zewnętrzne towarzyszące poprzecznemu zgniataniu powłok cylindrycznych - prace: S.R. Reid et al /19,20/ 1976-78; zewnętrznej i wewnętrznej

nej inwersji takiej powłoki - prace S.T.S. AlHassāni /14/ 1972 oraz wielu innym przypadkach zgniatania prostych konstrukcji cienkościennych i prętowych. Wyczerpujące zestawienie powyższych prac znaleźć można w artykule przeglądowym W. Johnsona et al /32/ 1978 oraz w jego dwóch książkach /33; 34/ 1972 i 1978.

Inną metodę wyznaczania obciążeń zewnętrznych towarzyszących zgniataniu kolumn przyrzmatycznych oraz zginaniu belek cienkościennych o przekroju kwadratowym zaproponowali N. Aya /15/ (1974) i N. Śeki /18/ (1978). W pracach tych po raz pierwszy wyróżniono mechanizm "deformacji naroża" opisany w (rozd. 2 i 6) i podano przybliżony sposób obliczania energii dysypowanej w narożu kolumny. Deformacja naroża jest tu modelowana przez izometryczne obszary regularne odwzorowanie powierzchni środkowej powłoki (rys. 6.b) i jest mechanizmem niezgodnym kinematycznie (Rozdz. 3). W prezentowanej pracy wykazano, że mechanizm deformacji naroża dobrze aproksymuje dysypację energii związaną ze zmianami krzywizny przewijanych przez naroże płatów powierzchniowych, zaniedbując znaczny (rzędu 60 %) udział rozciągnięć powierzchni środkowej tych płatów (Rozdz. 6). Mimo tego, mechanizm ten może być z powodzeniem stosowany przy opisie mechanizmów deformacji o bardziej skomplikowanych kształtach. W niniejszej pracy wykazano, że uproszczenie takie jest dopuszczalne przy analizie mechanizmów modelowanych quasi-izometrycznym odwzorowaniem powierzchni środkowej powłoki.

We wszystkich opisanych do tej pory publikacjach duży nacisk położono na wyodrębnienie i opisanie podstawowych mechanizmów towarzyszących bardzo dużym deformacjom powłok, mniej uwagi poświęcając analizie geometrycznych modeli tych mechanizmów, prowadziło to w większości wypadków do tworzenia mechanizmów niezgodnych kinematycznie. Szerszą analizę powyższego problemu znaleźć można w pracy W. Abramowicza i T. Wierzbickiego /28/ 1979, gdzie wykazano, że warunki kinematycznej zgodności na liniach ruchomych prostoliniowych przegubów plastycznych wymagają "gładkiego" połączenia rozgraniczonych tą linią płatów powierzchniowych (tzn. wektor normalny do powierzchni musi być określ-

lony na linii ruchomego przegubu plastycznego). Warunek ten pociąga za sobą konieczność rozważania mechanizmów deformacji modelowanych regularnymi odwzorowaniami powierzchni środkowej powłoki. Problem ten będzie rozważany w dalszych rozdziałach prezentowanej pracy.

1.3. Tematyka i zakres pracy

Pracę podzielono na dwie zasadnicze części - pierwszą z nich poświęcono omówieniu ogólnych metod wyznaczania obciążeń zewnętrznych występujących przy bardzo dużych deformacjach konstrukcji cienkościennych, w drugiej części podano przykłady zastosowań.

Pierwszy rozdział pracy poświęcony jest analizie doświadczeń w celu późniejszego wykorzystania podstawowych obserwacji przy budowie modelu obliczeniowego. Następne dwa rozdziały poświęcone są wydzieleniu i opisaniu podstawowych mechanizmów deformacji towarzyszących zgniataniu konstrukcji powłokowych oraz zamodelowaniu tych mechanizmów jako odwzorowania powierzchni środkowej powłoki. Odwzorowania te spełniają również postulowane warunki ciągłości pól przemieszczeń i prędkości przemieszczeń. Omówiono krótko izometryczne odwzorowanie powierzchni środkowej. Odwzorowanie to po wprowadzeniu pewnych modyfikacji związanych z występowaniem lokalnych deformacji rozciągliwych (powierzchni środkowej) było podstawą do wydzielenia pewnej klasy odwzorowań zwanych dalej quasi-izometrią.

Tak zdefiniowana klasa odwzorowań pozwoliła na efektywne zamodelowanie mechanizmów deformacji wielu prostych cienkościennych elementów konstrukcyjnych takich jak belki i kolumny o przekrojach nieokrągłych. W rozdziale tym omówiono również krótko klasę odwzorowań modelujących rozciągliwe deformacje powłok (np. zewnętrzną i wewnętrzną inwersję powłoki cylindrycznej).

W dalszych rozdziałach pierwszej części pracy podano analityczny opis wyróżnionych mechanizmów deformacji oraz podano ogólne rozwiązania teorii dużych odkształceń powłok plastycznych umożliwiające obliczanie dysypacji wewnętrznej oraz wyznaczanie obciążeń zewnętrznych.

Druga część pracy poświęcona jest zastosowaniom otrzymanych wyników, ze szczególnym uwzględnieniem konieczności wyrowadzenia praktycznych, nadających się do zastosowań wzorów końcowych. Duży nacisk położono również na porównanie wyników teoretycznych z dostępnymi wynikami eksperymentów.

Pierwszy rozdział tej części poświęcony jest omówieniu przyjętych założeń podstawowych i założeń upraszczających oraz obliczaniu dysypacji wewnętrznej dla wybranych mechanizmów deformacji. W rozdziałach następnych przedstawiono pełne i uproszczone metody wyznaczania obciążeń zewnętrznych występujących przy quasi-statycznym zgniataniu kolumn cienkościennych, zginaniu belek o przekrojach zamkniętym i otwartym oraz przy zewnętrznej i wewnętrznej inwersji powłoki cylindrycznej.

W rozdziale ostatnim przedstawione są wnioski oraz uwagi końcowe dotyczące kierunków dalszych badań.

II. KINEMATYKA ZGNIATANIA KONSTRUKCJI CIENKOŚCIENNYCH

Rozdział ten poświęcono opisowi doświadczeń dotyczących zgniatania różnego rodzaju konstrukcji cienkościennych. Na tej podstawie zaproponowano mechanizmy modelujące proces zgniatania.

2.1. Mechanizmy zgniatania - obserwacje doświadczalne

Proces zgniatania zapoczątkowany jest przez zjawisko sprężysto plastycznej utraty stateczności. W dalszej fazie procesu, którą zajmiemy się tutaj, następuje koncentracja deformacji plastycznych wzdłuż linii tzw. przegubów plastycznych.

W układzie odniesienia związanym z punktem powierzchni środkowej powłoki rozróżnić możemy dwa rodzaje przegubów plastycznych:

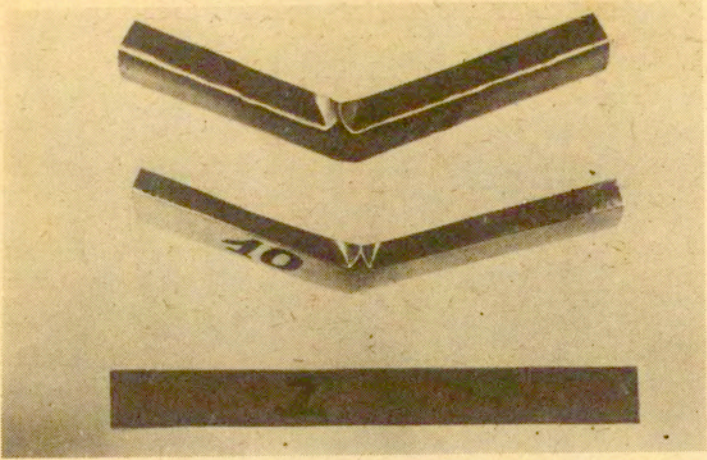
- ruchome
- nieruchome (stacjonarne) przeguby plastyczne.

Na liniach ruchomych i nieruchomych przegubów plastycznych występują bardzo duże zmiany krzywizn powierzchni środkowej powłoki oraz znaczne jej rozciągnięcia.

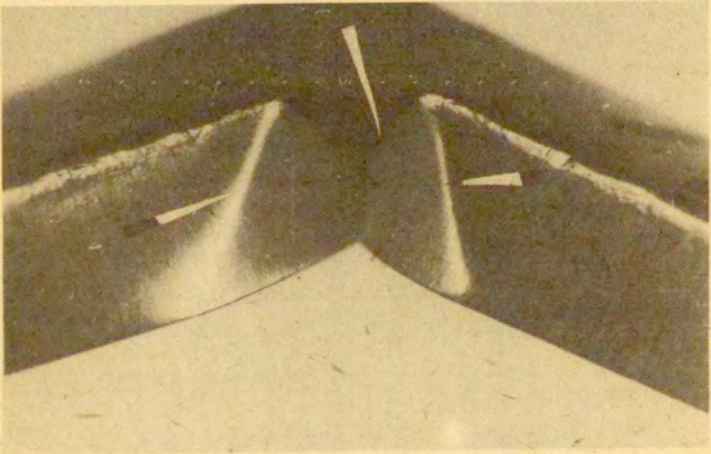
Różnice pomiędzy ruchomymi i nieruchomymi przegubami plastycznymi zilustrowane zostaną na przykładach dużych deformacji wybranych cienkościennych elementów konstrukcyjnych.

Jeden z prostszych mechanizmów deformacji zaobserwować można w doświadczeniach zginania ceowników. Swobodnie podparta belka ceowa obciążona jest siłą skupioną przyłożoną w środku między podporami, w ten sposób że materiał środka jest rozciągany. W pokrytycznym zakresie deformacji w środku belki następuje lokalna utrata stateczności. Jest ona wynikiem wytwarza-

a)



b)



Rys. 2.1

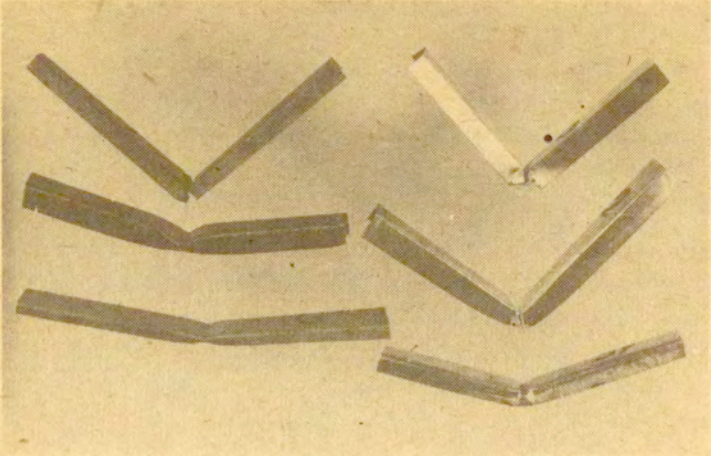
nia się stacjonarnych przegubów plastycznych. Rys. 2.1ab (strzałki wskazują linie przegubów plastycznych), symetrycznie po trzy na każdej z dwóch półek ceownika. Dalszy przebieg deformacji ceownika jest wynikiem względnych obrotów nieodkształconych płatów powierzchniowych wokół linii stacjonarnych przegubów plastycznych. W tych też przegubach następuje całkowita dysypacja energii.

Nieco bardziej skomplikowany kształt przegubów plastycznych zaobserwować można przy zginaniu belki ceowej w kierunku przeciwnym (tzn. tak żeby włókna środka były ściskane). Oprócz omówionych poprzednio przegubów stacjonarnych zauważyć tu można ruchomy przegub plastyczny (Rys. 2.2ab) (oznaczony strzałką), który w trakcie deformacji belki przemieszcza się po jej powierzchni, pozostawiając za sobą proste płyty powierzchniowe. Dalszy przebieg deformacji ceownika, tak jak poprzednio, realizuje się dzięki względnym obrotom płatów powierzchniowych wzdłuż linii przegubów plastycznych.

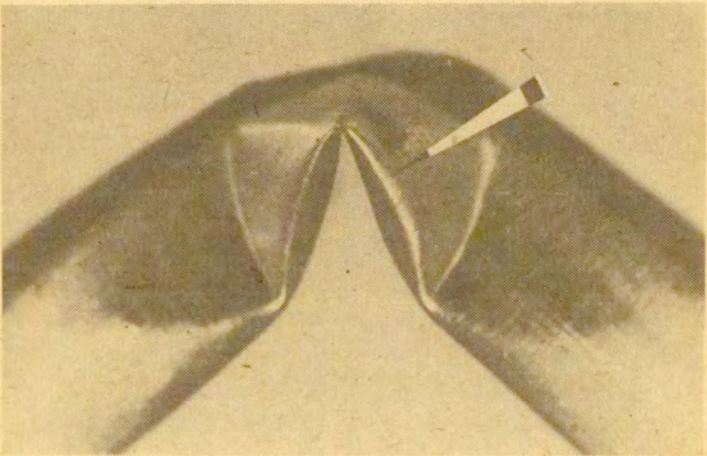
Analogiczne, do opisanych powyżej mechanizmy występują przy quasi-statycznym zgniataniu kolumn cienkościennych. Podobnie jak poprzednio w zakresie pokrytycznym, w przypadkowym obszarze powierzchni kolumny, następuje lokalna utrata stateczności (obszar, w którym pojawia się pierwsze lokalne wyboczenie powłoki jest zdeterminowany przede wszystkim imperfekcjami początkowymi powierzchni a także przebiegiem sprężystej i sprężysto-plastycznej fazy deformacji). Proces plastycznego płynięcia lokalizuje się w stacjonarnych i ruchomych przegubach plastycznych Rys. 2.3, a deformacja przebiega dzięki obrotom sztywnych płatów powierzchniowych. Proces ten trwa aż do momentu "zamknięcia się" pierwszej "fali wyboczenia lokalnego" (patrz rozdz. 6) Rys. 2.4. Następnie obok pierwszej fali w analogiczny sposób tworzy się następna itd., aż do całkowitego "złożenia" kolumny Rys. 2.5.

Opisany powyżej mechanizm deformacji, realizuje się również z pewnymi modyfikacjami, przy zgniataniu powłok cylindrycznych. Jak już wspomniano poprzednio mechanizm deformacji takiej powłoki zależy wyraźnie od stosunku średnicy do

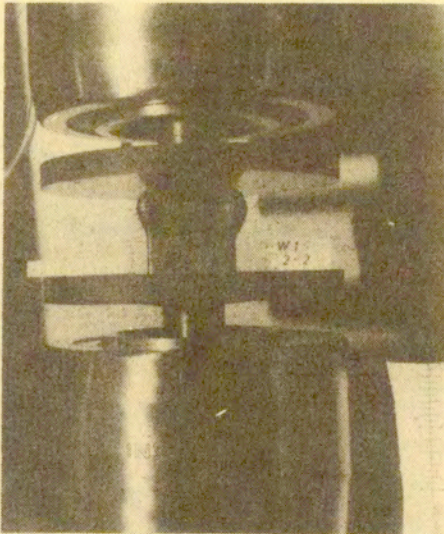
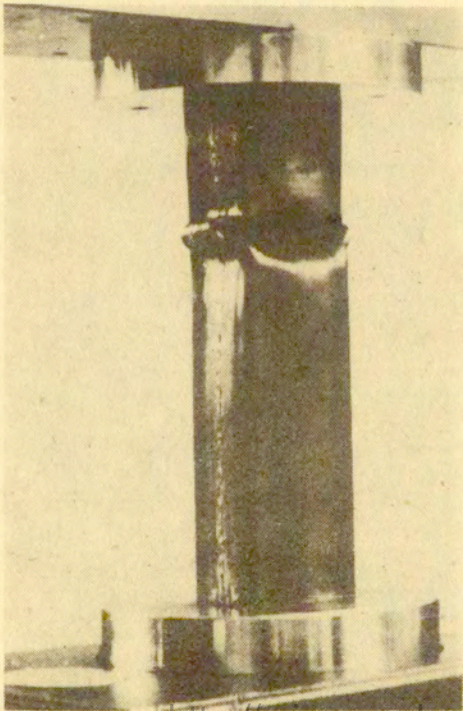
a)

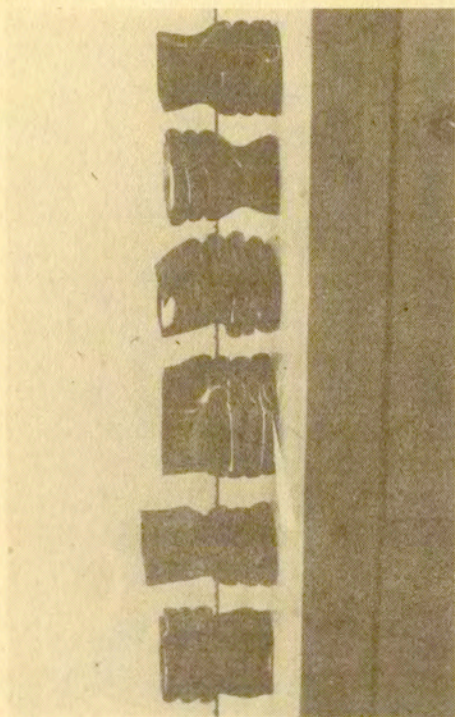


b)

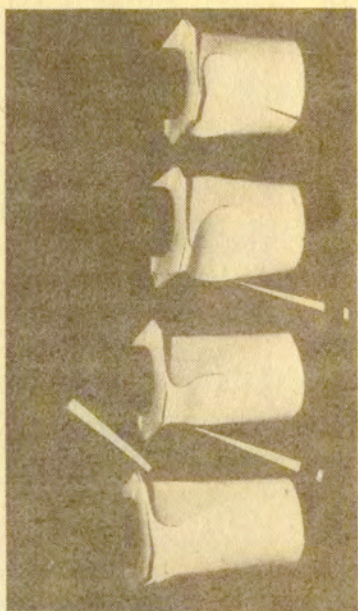


Rys. 22

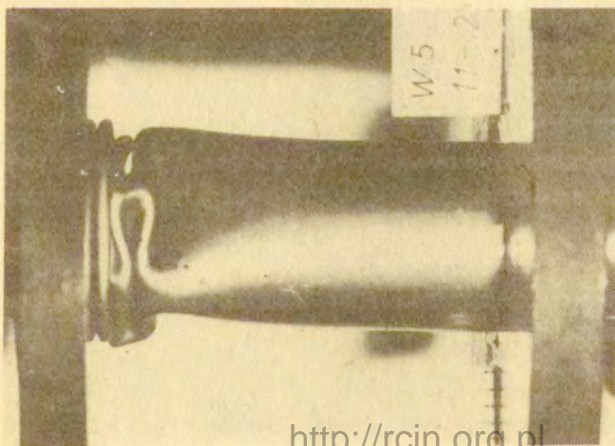
*Rys. 23**Rys. 24.*



Rys. 25



Rys. 2.6



Rys. 27

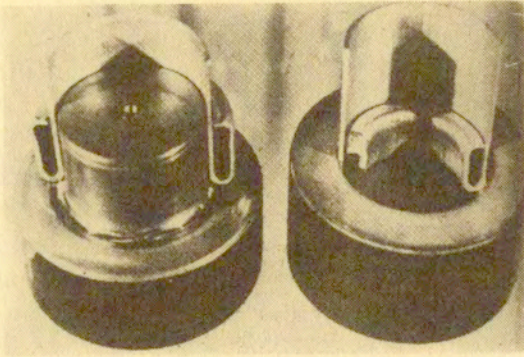
grubości ścianki powłoki. Dla wartości wspomnianego stosunku rzędu $10 \div 20$ (dla powłok z P.V.C) powłoki cylindryczne "składają się" na planie kwadratu bądź sześciokąta foremnego /21,22/. Przykład takiego procesu przedstawiony jest poglądowo na rys. 2.6 przy pomocy modeli kartonowych, które są szczególnie pomocne w zrozumieniu mechanizmów deformacji nierozciągliwych. Na rysunku tym strzałkami zaznaczono kolejne położenie ruchomego przegubu plastycznego. Przegub ten przemieszczając się po powierzchni cylindra pozostawia za sobą wyprostowane płyty powierzchniowe, natomiast dalsza deformacja powłoki przebiega analogicznie jak w przypadku kolumn cienkościennych dzięki "składaniu się" kolejnych fal wybożenia.

Łatwo się o tym przekonać porównując rys. 2.6 z 2.5 i 2.4 oraz rys. 2.5 z rys. 2.7 przedstawiającym pośredni stan deformacji rzeczywistej powłoki cylindrycznej.

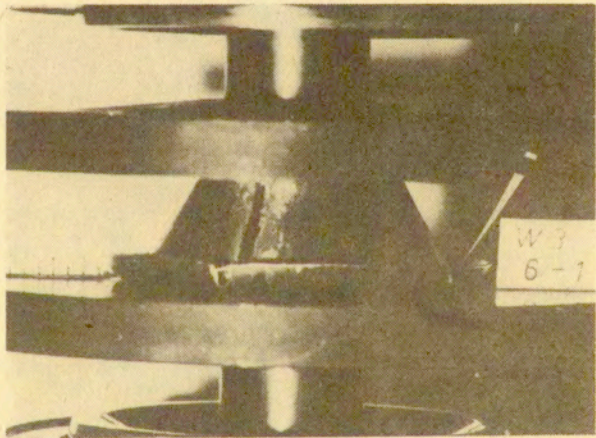
Obserwacje doświadczalne /16/ /21/ pokazały, że wspólną cechą wszystkich opisanych do tej pory mechanizmów deformacji są małe, czasami wręcz trudne do uchwycenia w warunkach laboratoryjnych, zmiany globalnych wymiarów geometrycznych powłoki (takich jak długość obwodu poprzecznego przekroju kolumny czy powłoki cylindrycznej, lub też długości tworzących tych powierzchni). Świadczy to o tym, że opisane mechanizmy deformacji należą do klasy deformacji nierozciągliwych. W dalszej części pracy (rozdz. 6) wykazano eksperymentalnie, że deformacje rozciągliwe występują, w omawianych przypadkach, tylko na niewielkich obszarach zgniatanych powłok i tym samym praktycznie nie mają wpływu na zmianę globalnych wymiarów geometrycznych.

Oprócz omówionych poprzednio mechanizmów deformacji wyróżnić można jeszcze jedną klasę mechanizmów, charakteryzującą się tym, że w trakcie procesu zgniatania występują zauważalne zmiany wymiarów geometrycznych powłoki a także zauważalne zmiany jej grubości. Klasa ta nazywana będzie dalej klasą mechanizmów rozciągliwych. Do klasy tej zaliczyć można następujące mechanizmy deformacji:

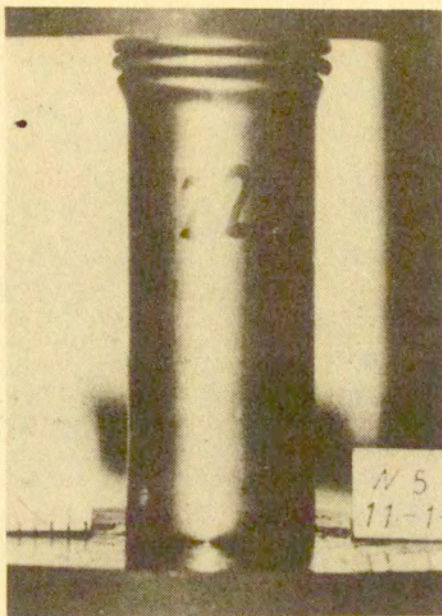
- zewnętrzną i wewnętrzną inwersję powłoki cylindrycznej Rys. 2.8.



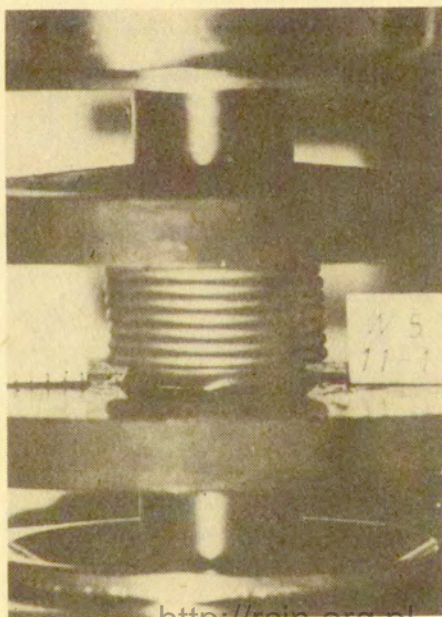
Rys.28



Rys.29



a)



b)



a)



b)

Rys.2.11

- zewnętrzną i wewnętrzną (nie pokazana na rysunku) inwersję powłoki stożkowej Rys. 2.9.

W wyniku omówionego procesu wyjściowa powłoka cylindryczna lub stożkowa przekształca się w inną powłokę cylindryczną, dzięki przemieszczaniu się po powierzchni powłoki ruchomego przegubu plastycznego o kształcie odcinka powierzchni toroidalnej. Należy zwrócić uwagę, że promień powierzchni toroidalnej (oznaczonej na Rys. 2.9 strzałką), nie jest wynikiem specjalnego ukształtowania matrycy, a jedynie "wyborem" przez powłokę takiej konfiguracji, w której realizowany jest postulat minimum obciążenia zewnętrznego.

Do klasy mechanizmów rozciągliwych zalicza się także pewien specjalny przypadek zgniatania powłok cylindrycznych. Występuje on przy zgniataniu powłok, dla których stosunek $d/H \approx 5$ (dla powłok z PVC /21/ Rys. 10ab).

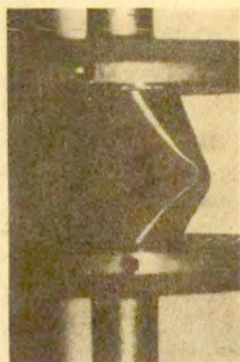
W tym przypadku występują znaczne deformacje rozciągające i ściskające powierzchnię środkową powłoki, są one rozłożone w sposób ciągły między liniami stacjonarnych przegubów plastycznych /13/.

Innym przykładem deformacji rozciągliwej jest mechanizm deformacji nazywany dalej "plastycznym odbiciem", ze względu na pewną analogię do odbicia lustrzanego. Przykład takiego mechanizmu deformacji zilustrowany jest na Rys. 2.11a. Przedstawiono tu część zdeformowanego błotnika samochodu osobowego. Gdyby na płaszczyźnie, w której leży ruchomy przegub plastyczny (oznaczony strzałkami) położyć lustro to z dokładnością do obszaru ruchomego przegubu plastycznego, obserwowany obraz byłby identyczny z kształtem powłoki przed deformacją.

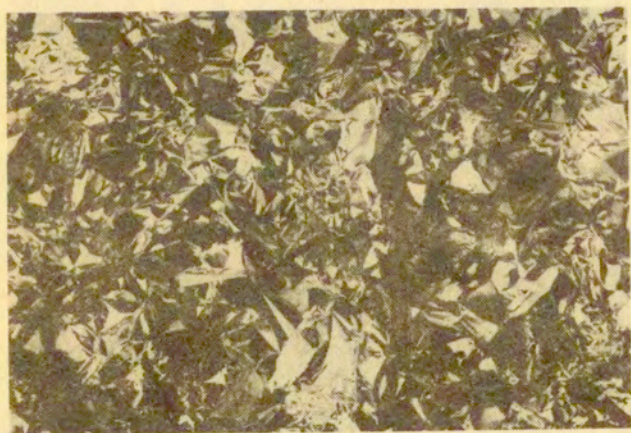
Analogiczne do opisanych powyżej mechanizmy towarzyszą dużym deformacjom innych powłok dwukrzywiznowych. Przykładowo na rys. 2.11.b przedstawiony jest zdeformowany dach samochodu osobowego. Wyraźnie jest tu widoczny ruchomy przegub plastyczny (oznaczony strzałką białą), który poruszając się po powierzchni pozostawia za sobą płaskie płyty powierzchniowe (strzałka czerwona). Względny obrót tych płyt następuje wzdłuż stacjonarnych przegubów plastycznych (strzałka bia-



Rys.2.12



Rys.2.14



Rys.2.13

łoczerwona). Omawiany mechanizm deformacji lepiej widoczny jest na Rys.2.12, który przedstawia ten sam fragment zdeformowanego dachu widziany z innej pozycji (oznaczenia na Rys. 2.12 są analogiczne jak na Rys. 2.11). Zauważyć można, że mimo skomplikowanego kształtu powierzchni powłokowej mechanizm deformacji jest analogiczny jak w poprzednio omawianych konstrukcjach. S szczególnie dobrze widoczne jest tu podobieństwo do mechanizmu deformacji kolumny cienkościennej Rys. 2.9.

Podobne wnioski wyciągnąć można analizując zgniatanie folii aluminiowej Rys. 2.13. Obserwując dokładnie kształt zdeformowanej folii wyróżnić można te same podstawowe mechanizmy deformacji co w omawianych poprzednio powłokach. Występują tu tak samo stacjonarne i ruchome przeguby plastyczne (strzałka biała Rys. 2.13), a deformacja powłoki zachodzi dzięki względnym obrotom sztywnych płatów powierzchniowych (strzałka czerwona Rys. 2.13). Aby nie zaciemniać fotografii na Rys. 2.13 oznaczono strzałkami tylko jeden, szczególnie dobrze widoczny segment zdeformowanej powłoki. Powtarza się on w różnych orientacjach na całej powierzchni zdeformowanej folii.

Reasumując uwagi zawarte w powyższym rozdziale, a także wnioski z prac doświadczalnych (cytowanych w pkt. 1.2) wyróżnić można następujące właściwości procesu dużych deformacji cienkich powłok.

- (i) Mechanizm deformacji cienkich powłok zależy przede wszystkim od warunków brzegowych i od wymiarów geometrycznych powłok. Fizyczne własności materiału mają tu drugorzędne znaczenie /6-10,11,21,22,28/.
- (ii) Zjawiskom dużych deformacji powłok cienkościennych towarzyszy pojawianie się skoncentrowanych stref plastycznego płynięcia - przegubów plastycznych.
- (iii) W układzie odniesienia związanym z punktem powierzchni środkowej powłoki wyróżnić można dwa rodzaje przegubów plastycznych: - stacjonarne i ruchome. Ruchome przeguby plastyczne poruszają się w procesie deformacji po powierzchni powłoki pozostawiając za sobą skomplikowane kształty fałd i zagięć. Wzdłuż linii przegubów plastycz-

nych następuje skokowa zmiana prędkości obrotowej płyt powierzchni powłoki.

- (iv) Przeguby plastyczne charakteryzują się tym, że leżą zawsze w jednej płaszczyźnie, niezależnie od stopnia zaawansowania procesu deformacji /28/. (Szczególnie dobrze jest to widoczne na Rys. 2.14 przedstawiającym zdeformowany panel cylindryczny).

2.2. Modelowanie mechanizmów dużych deformacji powłok cienkościennych

Opisane poprzednio obserwacje doświadczalne pozwalają obecnie na zamodelowanie mechanizmów plastycznego płynięcia, towarzyszących zgniataniu powłok.

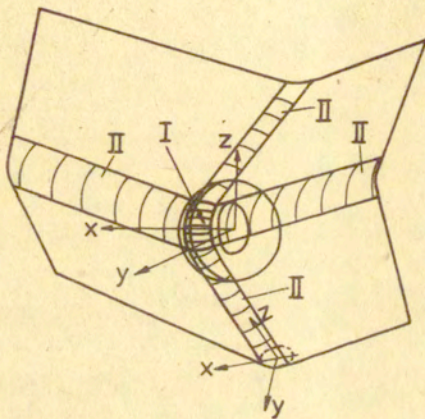
Rozważmy najpierw ruchome przeguby plastyczne. Jak już zaznaczono poprzednio są one krzywymi płaskimi, ponadto można w nich wyróżnić wyraźne odcinki linii prostych oraz linie silnie zakrzywione. W pierwszym przybliżeniu założono, że przeguby takie da się zamodelować przy pomocy odcinków walców kołowych i wycinków torusów o stałych promieniach^{*}. Dodatkowo warunek nierozdzielności materiału wymaga, aby w punkcie styku obu tych powierzchni, promień powierzchni walcowej był równy mniejszemu promieniowi torusa.

Sytuacja ta jest zilustrowana na rys.2.15, gdzie przedstawiono część zdeformowanego obszaru "naroża" powłoki (porównaj np. Rys. 2.14).

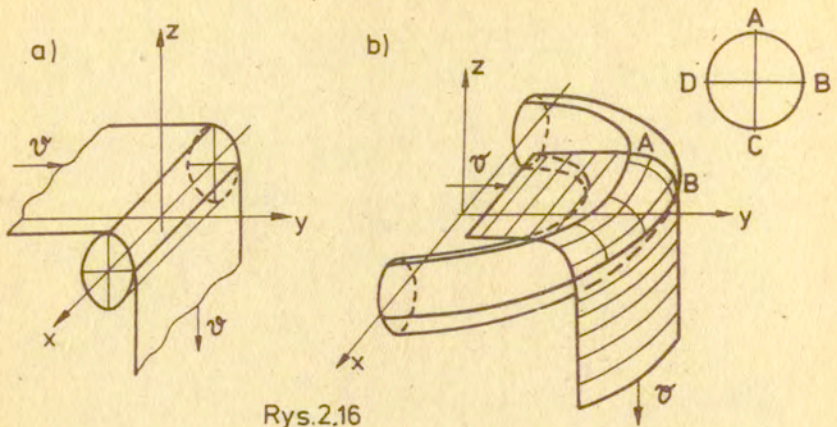
Jeżeli zwiążemy układ współrzędnych $\{xyz\}$ z dowolnym punktem osi walca lub osi symetrii "z" torusa (Rys. 2.15) to otrzymamy sytuację przedstawioną schematycznie na Rys.2.16ab.

^{*} Założenie to jest konsystentne z dalszymi rozważaniami pracy. Przedstawione rozwiązania będą bowiem dążyły do oszacowania pewnej średniej wartości promienia r_1 w całym procesie zgniatania, a nie do określenia jego rzeczywistych wartości w poszczególnych punktach przegubu plastycznego, (porównaj uwagę na str.99).

I- wycinek powierzchni turusa
II- wycinek walca kołowego



Rys. 2.15

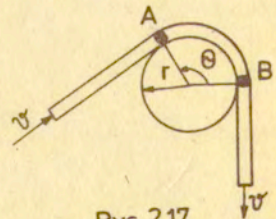


Rys.2.16

Rysunek 2.16 przedstawia przypadki "plastycznego opływu" torusa i walca. Jeżeli prędkość V - napływu materiału na powierzchnię walca i torusa będzie stała to zamodelowany na rys. 2.16 proces nazywany będzie dalej "stacjonarnym opływem" torusa lub walca.

Proces "stacjonarnego opływu" walca był już opisany w publikacjach dotyczących zginięcia konstrukcji powłokowych /15,16/ i określa się go powszechnie mianem mechanizmu przewijania materiału. Dla przypadku materiału sztywno - idealnie plastycznego jest to proces, w którym materiał zostaje dwukrotnie uplastyczniony, w punktach A i B rys. 2.17 odpowiadających liniom nieciągłości prędkości obrotu.

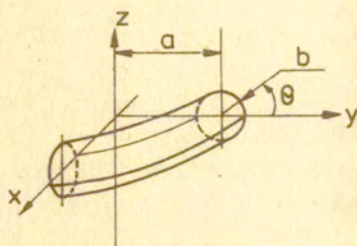
Na wspomnianych liniach osobliwych następuje też całkowita dysypacja energii, a wielkość jej nie zależy od kąta przewijania materiału (θ) Rys. 2.17. W następnym rozdziale pracy pokazano, że w odniesieniu do powierzchni środkowej powłoki mechanizm przewijania jest mechanizmem nierozciągłym.



Rys.2.17

Pod pojęciem plastycznego opływu torusa rozumiemy dalej przemieszczanie się po powierz-

chni powłoki strefy skoncentrowanych odkształceń plastycznych o kształcie torusa Rys. 2.18.



Rys.2.18

Omówionych zostanie kilka charakterystycznych przypadków tego opływu.

Jako pierwszy rozważany będzie przypadek przedstawiony na Rys. 2.16b. Płaskie pasmo powłoki nabiega tu na powierzchnię torusa w punkcie A; proces kończy się po osiągnięciu przez powłokę punktu B. W wyniku omawianego opływu początkowo płaskie pasmo przekształcone zostało na wycinek powierzchni walcowej o promieniu $R = a+b$ /por. Rys. 2.18/.

Już ten prosty przykład pokazuje, że zmieniając miejsca nabiegu i zbiegu materiału z powierzchni torusa zamodelować można szereg interesujących przekształceń konstrukcji powłokowych. Najciekawsze z nich, z punktu widzenia zastosowań do opisywanych poprzednio mechanizmów deformacji powłok, zostaną krótko omówione poniżej.

- 1 - jeżeli materiał nabiega na powierzchnię torusa w pkt. B i zbiega w pkt. D /Rys. 2.16b/ otrzymujemy mechanizm "zewnątrznej inwersji" powłoki cylindrycznej Rys. 2.8, opisany przez W. Johnsona w /14,33/.
- 2 - jeżeli zmienimy miejscami punkty B i D Rys. 2.16b, otrzymamy mechanizm "inwersji wewnętrznej" /14,33/ Rys. 2.8.
- 3 - dobierając punkty nabiegu i zbiegu materiału symetrycznie

względem osi AC (Rys. 16b) otrzymany proces, w którym zmianie ulega znak krzywizny obciążanego pasma. Przypadek ten ma miejsce przy deformacji "naroża" zgniatanych kolumn Rys. 2.15.

Jeżeli założymy, że nabiegające pasmo jest wycinkiem powierzchni walcowej to rozpatrywana powierzchnia pierścieniowa powinna być "torusem" eliptycznym. Ponieważ jednak w rzeczywistych konstrukcjach wspomniany wycinek jest stosunkowo wąski, ze względu na wygodę obliczeń, powierzchnia ta będzie aproksymowana powierzchnią torusa,

- 4 - jeżeli rozpatrzmy proces, w którym punkt D jest punktem nabiegu materiału a pkt. A punktem zbiegu (Rys. 2.16b) otrzymany proces, w którym wycinek powierzchni walcowej o promieniu $R = a - b$ jest prostowany. Przypadek taki ma miejsce przy deformacji naroża zginanej belki cienkościennej; Rys. 2.2b. Ogólnie wykazać można (patrz Rozdz. 3), że plastyczny wpływ torusa jest deformacją rozciągliwą w odniesieniu do powierzchni środkowej powłoki .

Stacjonarne przeguby plastyczne

W ogólnym przypadku deformacji konstrukcji cienkościennej stacjonarne przeguby plastyczne mogą być dowolnymi (gładkimi) krzywymi płaskimi /86/. W omawianych w tej pracy przypadkach zgniatania stacjonarne przeguby plastyczne są liniami prostymi lub nieznacznie zakrzywionymi (Rys. 2.1, 2.2, 2.12, 2.14) i w dalszych rozważaniach będą aproksymowane odcinkami linii prostej. Jest to jeden z podstawowych mechanizmów plastycznego płynięcia, występujący przy nieciągłych polach prędkości odkształcenia i został dokładnie opisany w pracach omawiających problemy teorii plastyczności i nośności granicznej konstrukcji. Np. w Teorii Plastyczności /40/ 1965 omawiany przypadek przegubu plastycznego zdefiniowany jest w klasie uogólnionych przegubów plastycznych, używa się również określenia "liniowy przegub plastyczny". We wspomnianej pracy podano też metody obliczania dysypacji wewnętrznej w tego typu przegubach.

III. WARUNKI KINEMATYCZNEJ I GEOMETRYCZNEJ ZGODNOŚCI NA LINIACH PRZEGUBÓW PLASTYCZNYCH

W rozdziale tym pokazano, że ruchome przeguby plastyczne można interpretować jako ruch po powierzchni środkowej powłoki linii osobliwych, na których następuje skokowa zmiana prędkości obrotu elementu powłoki.

Na liniach osobliwych skokowe nieciągłości funkcji i jej pochodnych muszą spełniać pewne warunki zwane związkami zgodności. Pokazano w jaki sposób związki te, przy dodatkowych założeniach, wpływają na kształt ruchomych "przegubów plastycznych".

Punktem wyjścia rozważań jest założenie, że przemieszczenia i prędkości przemieszczeń punktów leżących na powierzchni środkowej nie doznają skoku na liniach osobliwych. Niespełnienie założenia o ciągłości pola prędkości przemieszczeń implikuje powstawanie nieskończonych prędkości odkształceń na linii osobliwej /51/. Przyjęty w dalszych rozdziałach pracy sztywno-idealnie plastyczny model materiału dopuszcza teoretycznie tego typu osobliwości w polu prędkości odkształceń, jednakże fakt, że prezentowana teoria ma opisywać powłoki wykonane z materiałów rzeczywistych, wykazujących efekty lepkie, przemawia za przyjęciem wspomnianego założenia. Podobną motywację tego kroku znaleźć można w pracach H.G.Hopkins a /51/ i W.Pragera /52/.

3.1 Zależności podstawowe

Wielkością określającą szybkość zmian funkcji tensorowej A określonej w sposób ciągły na ruchomej powierzchni osobliwej $s(t)$:

$$(3.1) \quad s(t): \quad X = \varphi(t, u_r) \quad r \in \{1, 2\}$$

i poruszającej się w trójwymiarowym continuum jest pochodna przemieszczeniowa $\frac{\delta \cdot}{\delta t}$ /54/. Jeżeli pole tensorowe A jest ciągle na powierzchni osobliwej $s(t)$, to pochodna przemieszczeniowa jest tożsamościowo równa zeru.

Odpowiednie związki zgodności dla funkcji $A \equiv [f]$ i $A \equiv [\text{grad} f]$ przybierają wtedy postać /54/ (o ile $[f] = 0$)

$$(3.2) \quad \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right] + u_n [\text{grad} f] n = 0$$

$$(3.3) \quad [\text{grad} \frac{\partial f}{\partial t}] = - \left\{ u_n \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] \right\}_{,a} \varphi^a + \left\{ \frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] - u_n \left[\frac{\partial^2 f}{\partial n^2} \right] \right\} n$$

Jeżeli $\left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] = 0$ to związek (3.3) redukuje się do:

$$(3.4) \quad [\text{grad} \frac{\partial f}{\partial t}] + u_n [\text{grad} \text{grad} f] (n \otimes n) n = 0$$

W notacji indeksowej równania te mają postać:

$$(3.5) \quad \left[\frac{\partial f^i}{\partial t} \right] + u_n \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^i} \right] n^i = 0$$

$$\left[\frac{\partial f^i_{,j}}{\partial t} \right] + u_n \left\{ [f^i_{,kl}] m^k n^l \right\} n_j = 0$$

gdzie:

$$- [f] = \overset{(+)}{f} - \overset{(-)}{f}$$

- n - jest wektorem normalnym do powierzchni $s(t)$ skierowanym w stronę obszaru oznaczonego indeksem (+).

- $u_n = \frac{\partial \psi}{\partial t} n$ - jest prędkością normalną powierzchni $s(t)$ (niezależną od wyboru parametryzacji u_γ (3.1)).

O funkcji f zakłada się, że jest ona określona i ciągła w każdym z obszarów przestrzeni Euklidesowej \mathcal{D}_3 rozgraniczonych powierzchnią osobliwą $s(t)$ /54/.

Jeżeli rozpatrywaną analizę odniesiemy do powierzchni środkowej powłoki to powierzchnia osobliwa będzie reprezentowana przez linię osobliwą zadaną w dwuwymiarowej przestrzeni zakrzy-

wionej a f będzie polem tensorowym określonym na pewnej powierzchni χ

$$(3.7) \quad \chi: \quad x = x(\alpha, \beta)$$

zanurzonej w przestrzeni \mathcal{D}_3 . W tym przypadku odpowiednie operacje wyznaczania 1-go i 2-gó gradientu funkcji f , we wzorach (3.5) należy zastąpić odpowiednio operacjami obliczania pierwszego i drugiego gradientu f na powierzchni χ . Jest to równoznaczne z zastąpieniem w równaniach (3.5) odpowiednich pochodnych cząstkowych pochodnymi kowariantnymi:

$$(3.8) \quad [f_i] + \mu_n [f^i/\alpha] n^\alpha = 0 \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

$$[f^i/\xi] + \mu_n \{ [f^i/\alpha] n^\alpha n^\beta \} n_\beta = 0 \quad \alpha, \beta, \gamma, \xi = 1, 2$$

gdzie wprowadzono oznaczenie: $f_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}$

η - jest wektorem powierzchniowym normalnym do linii Σ powstałej z przecięcia powierzchni $s(t)$ i χ tzn.:

$$(3.9) \quad \Sigma(t, s) = s(t, \mu_n) \cap \chi(t, \alpha, \beta) \quad \mu_n \in \{1, 2\}$$

Wektor η leży więc w płaszczyźnie stycznej do $\chi(t, \alpha, \beta)$ i ma współrzędne krzywoliniowe $\eta = [n^\alpha; n^\beta]$

Ponieważ dla każdego czasu t :

$$(3.10) \quad \chi: \quad x^i = x^i(\alpha, \beta) \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

$$\Sigma: \quad \begin{cases} \alpha = \alpha(s) \\ \beta = \beta(s) \end{cases}$$

gdzie s jest długością łuku linii Σ , to Σ jest krzywą przestrzenną określoną równaniami:

$$\Sigma: \quad x^i = x^i(s) \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

Wtedy:

- krzywizna przestrzenna \mathcal{K} krzywej Σ o jednostkowym wektorze stycznym λ , związana jest ze składowymi $\lambda_{\alpha\beta}$ tensora krzywizny χ zależnościami /37/:

$$(3.11) \quad \alpha \cos(\angle \nu \mu) = b_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta$$

$$\alpha^i / b_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} \nu^i \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

gdzie: ν - jednostkowy wektor normalny do χ

μ - jednostkowy wektor normalny główny do krzywej Σ

- jeżeli wektory μ i ν mają ten sam kierunek i zwrot to równanie (3.11)₂ redukuje się do

$$(3.11a) \quad \alpha e = b_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta$$

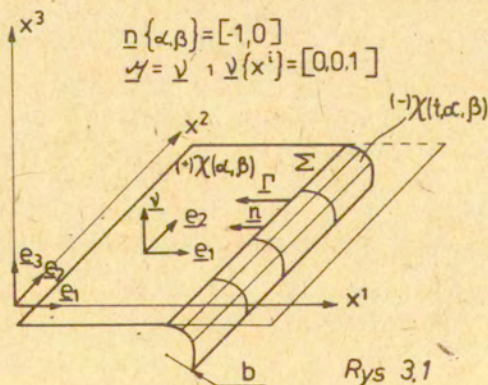
a krzywizna przestrzenna krzywej Σ równa jest krzywiznie normalnej $\kappa_{(n)}$ powierzchni χ w kierunku λ .

3.2 Linia prosta nieciągłości prędkości obrotowej poruszająca się po powierzchni płaskiej

Rozważmy linię osoblwą Σ : $x^i = x^i(t, s)$; $i \in \{1, 2, 3\}$ równoległą do osi x^2 , poruszającą się ze stałą prędkością

$\Gamma = -u_n e_n$ po powierzchni χ . Linia ta rozdziela powierzchnię χ na dwie rozłączne części $(+)\chi$ i $(-)\chi$ tak że:

$$\chi = (+)\chi \cup \Sigma \cup (-)\chi \quad \text{Rys. 3.1}$$



Założymy, że $(+)\mathcal{X}$ jest powierzchnią płaską leżącą w płaszczyźnie $\{x^1, x^2\}$, a punkty leżące na tej powierzchni są nieruchome względem układu $\{x^i\}$ tzn.:

$$(3.12a) \int_{\mathcal{X}} \int_t \quad {}^{(+)}\mathcal{X}(t, \alpha, \beta) = {}^{(+)}\mathcal{X}(t_0, \alpha, \beta) = {}^{(+)}\mathcal{X}(\alpha, \beta)$$

O powierzchni $(-)\mathcal{X}$ założymy, że jest ona określona równaniem:

$$(3.12b) \quad {}^{(-)}\mathcal{X}: \quad {}^{(-)}\mathcal{X} = \mathcal{X}(t, \alpha, \beta)$$

Jeżeli dalej funkcja $f: x^i = x^i(t, \alpha, \beta)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ określa pole przemieszczeń punktów leżących na powierzchni \mathcal{X} , to warunek ciągłości przemieszczeń ($[\dot{x}^i] = 0$) na linii Σ prowadzi do wzoru:

$$(3.13a) \quad \int_{i \in \{1, 2, 3\}} [\dot{x}^i] + u_n [x^i_{,\alpha}] (-1) = 0$$

gdzie wielkości $x^i_{,\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial \alpha}$ są składowymi wektora stycznego do linii współrzędnych $\alpha = x^1$.

Jeżeli założymy dalej, że prędkości przemieszczeń \dot{x}^i są ciągłe na linii Σ ($[\dot{x}^i] = 0$) to z warunku (3.13a) wynika, że:

$$(3.13b) \quad ([x^i_{,\alpha}] = 0) \Rightarrow \left(\left[\frac{\partial x^i}{\partial n} \right] = 0 \right)$$

tzn., że wektor styczny do linii współrzędnych $(+)\alpha$ i $(-)\alpha$ nie doznaje skoku na Σ . Dodatkowo, z geometrycznych warunków zgodności ($[\text{grad} x^i] = \left[\frac{\partial x^i}{\partial n} \right] \mathfrak{n}$) wynika, że jednostkowy wektor \mathfrak{n} normalny do \mathcal{X} :

$$(3.13c) \quad \mathfrak{n} = \frac{x_{,\alpha} \times x_{,\beta}}{|x_{,\alpha} \times x_{,\beta}|}$$

jest określony jednoznacznie na linii Σ .

Po uwzględnieniu (3.13b) z (3.5)₂ wynika:

$$(3.14) \quad \int_{i \in \{1, 2, 3\}} [\dot{x}^i_{,\alpha}] - u_n [x^i_{,\alpha}] = 0$$

Ponieważ dalej: $x^i/\beta = \alpha_{\alpha\beta} \gamma^i$ (3.11) i $\gamma = [0, 0, 1]$ Rys. 3.1.
to z (3.14) wynika:

$$(3.15) \quad \overset{1}{i \in \{1, 2\}} [\dot{x}_{,\alpha}^i] = 0$$

$$[\dot{x}_{,\alpha}^3] - \mu_n [\alpha_{\alpha\alpha}] = 0$$

Ponieważ dla $(+)\chi(\alpha, \beta)$ spełnione są zależności:

$$(3.16) \quad \overset{1}{\alpha, \beta \in \{1, 2\}} \overset{1}{\alpha^3} = 0 \quad \overset{1}{\alpha_{\alpha\beta}} = 0$$

to (3.15) redukuje się do równania:

$$(3.17) \quad (-)\dot{x}_{,\alpha}^3 - \mu_n (-)\alpha_{\alpha\alpha} = 0$$

które musi spełniać wektor przemieszczenia $\mu = x^i e_i$, opisujący ruch punktów znajdujących się na powierzchni χ .

Ponieważ powierzchnie $(+)\chi$ i $(-)\chi$ mają na linii Σ' wspólne wektory bazowe składowe tensora krzywizny $(-)\alpha_{\alpha\beta}$ wyznaczyć można z zależności (3.11a).

Równanie 3.17 przybiera wtedy postać:

$$(3.18) \quad (-)\dot{x}_{,\alpha}^3 - \mu_n \frac{1}{b} = 0 \quad \text{gdzie: } x^1 = \alpha$$

b - promień krzywizny przestrzennej linii współrzędnych $(-)\alpha$

Interpretacja powyższego równania jest bardziej przejrzysta w układzie odniesienia $\{x, y, z\}$ związanym z dowolnym punktem na linii osobliwej Σ , transformacją:

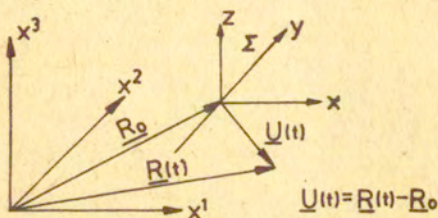
$$(3.19) \quad \begin{aligned} x^1 - a_0 &= x - \Gamma^2 t \\ x^2 - a_2 &= y \\ x^3 - a^3 &= z \end{aligned} \quad a_0, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

t - czas

Γ^2 - prędkość linii Σ Rys. (3.1).

Transformacja ta ma następujące własności:

- (i) Obserwator poruszający się z układem $\{xyz\}$ będzie obserwował stacjonarny ($f^2 = \text{const}$) napływ punktów powierzchni $(^{(1)})\chi$ na linię osobliwą Σ .
- (ii) Wektor u chwilowych przemieszczeń punktów leżących na linii Σ , odniesiony do układu $\{xyz\}$ odpowiada wektorowi wodzącemu tych punktów w $\{xyz\}$ Rys. 3.2.



Rys.3.2

- (iii) Równania (3.17) i (3.18) są niezmiennicze względem transformacji (3.19).

W związku z tym łatwo sprawdzić (Dodatek A), że obserwator poruszający się z układem $\{xyz\}$ będzie interpretował wielkość $\dot{x}_{/x}^3$ jako prędkość obrotu wektora normalnego $\vec{\nu}$ w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny: $\{x, z\}$ Rys. 3.2.

W związku z tym zaobserwuje on, że po czasie dt wektor normalny do powierzchni $(^{(1)})\chi$ odchylił się od pionu o kąt:

$$(3.20) \quad d\theta = \omega dt = \frac{u_n dt}{b} = \frac{ds}{b}$$

zgodnie z równaniem okręgu o promieniu b ; leżącym w płaszczyźnie $\{x, z\}$.

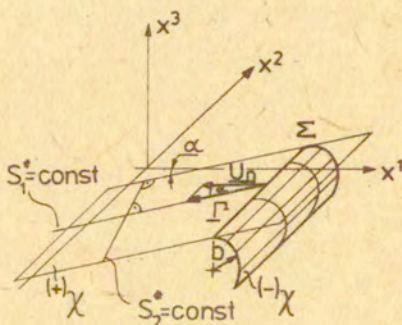
Jeżeli dodatkowo założymy, że prędkość obrotu jest stała na całej powierzchni $(^{(1)})\chi$ to równanie (3.20) będzie słuszne dla dowolnego przyrostu czasu Δt , co oznacza, że dalszy ruch wektora $\vec{\nu}$ będzie się odbywał po okręgu koła o promieniu b .

Ponieważ związek (3.20) jest prawdziwy dla każdej współrzędnej $\beta \equiv y$ (Rys. 3.1), wspomniany obserwator stwierdzi, że powierzchnia $(+)\chi$ napływając na linię Σ ze stałą prędkością $\Gamma = \mu_n \bar{t}$ zakrzywia się wzdłuż pobocznicy walca o promieniu b (Rys. 3.1).

Rozumowanie powyższe, zatówno w tym jak i w rozpatrywanych dalej przypadkach łatwo odwrócić tzn. jeżeli ruch Σ będzie się odbywał ze stałą prędkością po powierzchni walca kołowego $(+)\chi$ to, przy analogicznych założeniach, linia osobliwa Σ będzie pozostawiała za sobą powierzchnię płaską $(-)\chi$.

Przedstawione powyżej rozumowanie jest spełnione na całej płaszczyźnie $\{x^1, x^2\}$ Rys. 3.1, będzie więc również spełnione dla dowolnego podobszaru tej płaszczyzny.

W szczególności rozważmy obszar wydzielony z płaszczyzny $\{xy\}$ przez dwie proste równoległe tworzące z osią x^1 kąt α Rys. 3.3.



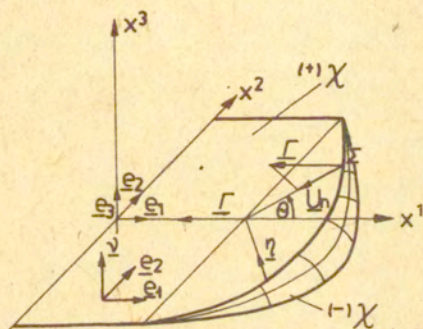
Rys.3.3

Podobnie jak poprzednio linia nieciągłości Σ pozostawi za sobą powierzchnię walcową $(-)\chi$, o promieniu b , z tym, że w układzie współrzędnych Gauss'a $\{s_1, s_2\}$ parametryzujących powierzchnię $(+)\chi$ Rys. 3.3. prędkość Γ poruszania się linii Σ będzie związana z prędkością μ_n związkiem

$$(3.21) \quad \cos \alpha = \frac{\Gamma \cdot \mu_n}{|\Gamma| |\mu_n|}$$

Rozważania analogiczne do przedstawionych powyżej pozwalają na analizę warunków zgodności dla różnych kształtów powierzchni $(+)\chi$ i linii nieciągłości Σ . W szczególności rozważane będą dalej linie nieciągłości poruszające się po powierzchniach walców kołowych oraz przypadek zakrzywionych linii Σ poruszających się w płaszczyźnie $\{x, y\}$

3.3. Linia nieciągłości Σ o kształcie odcinka okręgu poruszająca się w płaszczyźnie $\{x^1, x^2\}$ ze stałą prędkością v (Rys. 3.4)



Rys.3.4

W rozpatrywanym przypadku wektor normalny ν do powierzchni $(+)\chi$ ma w układzie $\{x^i\}$ współrzędne:

$$(5.22) \quad \nu = [0; 0; 1]$$

natomiast wektor normalny n do linii Σ ma w układzie $\{\alpha, \beta\}$ współrzędne:

$$(3.23) \quad n = [-\cos \theta; -\sin \theta]$$

Warunek zgodności (3.5) można zapisać w postaci:

$$(3.24) \bigwedge_{i \in \{1,2,3\}} [\dot{x}^i] - \mu_n \{ [x^i_{,\alpha}] \cos \theta + [x^i_{,\beta}] \sin \theta \} = 0$$

Jeżeli założymy jak poprzednio, że prędkość punktów leżących na powierzchni (nie doznaje skoku na linii Σ , to z (3.24) wynika:

$$(3.25) \left\{ \bigwedge_{i \in \{1,2,3\}} [\dot{x}^i] = 0 \right\} \Rightarrow \left\{ [x^i_{,\alpha}] = 0 \wedge [x^i_{,\beta}] = 0 \right\}$$

Zależność (3.21) mówi o tym, że wektory styczne do linii współrzędnych α, β na $(*)\mathcal{X}$ są ciągłe na linii Σ .

Stąd na mocy (3.5₂) i (3.11) otrzymujemy równania:

$$(3.26) \begin{cases} [\dot{x}^3_{,\alpha}] - \mu_n \cos \theta \{ [b_{\alpha\alpha}] \cos^2 \theta + 2[b_{\alpha\beta}] \sin \theta \cos \theta + [b_{\beta\beta}] \sin^2 \theta \} = 0 \\ [\dot{x}^3_{,\beta}] - \mu_n \sin \theta \{ [b_{\alpha\alpha}] \cos^2 \theta + 2[b_{\alpha\beta}] \sin \theta \cos \theta + [b_{\beta\beta}] \sin^2 \theta \} = 0 \end{cases}$$

Zachodzą również związki:

$$(3.27) \begin{matrix} (+) \\ b_{\alpha\beta} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad \begin{matrix} (+) \\ \dot{x}^3_{,\alpha\beta} \end{matrix} = 0$$

a z (3.23) i (3.21) wynika dodatkowo:

$$(3.28) \begin{matrix} (-) \\ b_{\alpha\beta} \end{matrix} = \begin{bmatrix} b_{\alpha\alpha} & 0 \\ 0 & b_{\beta\beta} \end{bmatrix}$$

w związku z tym (3.26) redukuje się do układu:

$$\begin{cases} \dot{x}^3_{,\alpha} - \mu_n \cos \theta (b_{\alpha\alpha} \cos^2 \theta + b_{\beta\beta} \sin^2 \theta) = 0 \\ \dot{x}^3_{,\beta} - \mu_n \sin \theta (b_{\alpha\alpha} \cos^2 \theta + b_{\beta\beta} \sin^2 \theta) = 0 \end{cases}$$

Można wykazać (Dodatek A), że związki te opisują ruch po okręgu leżącym w płaszczyźnie \mathcal{M} wyznaczonej przez wektory: \mathcal{N} normalnej głównej do linii Σ i \mathcal{V} normalny do powierzchni $(*)\mathcal{X}$ (Rys. 3.4), w układzie odniesienia $\{x, y, z\}$ związanym, jak poprzednio, z linią Σ .

Tak więc linia Σ pozostawia za sobą powierzchnię zakrzywioną, której krzywizna \mathcal{K} w płaszczyźnie \mathcal{M} dana jest zależnością: (Dodatek A).

$$(3.30) \quad \omega - \mu_n \alpha = 0 \quad \text{gdzie } \omega \text{ jest prędkością obrotu} \\ \text{niezależną od kąta } \theta \text{ (Rys. 3.4).}$$

Krzywizna ta jest zmienna wzdłuż linii Σ , ponieważ mimo założonej stałej prędkości Γ^2 , poruszania się linii Σ , prędkość normalna μ_n dana jest zależnością: (Rys. 3.4).

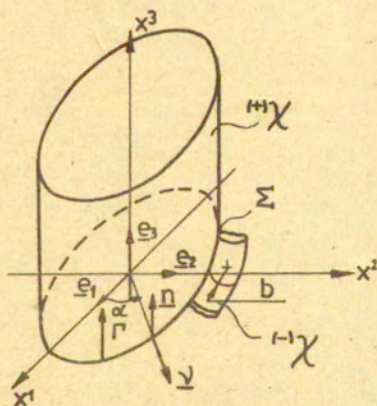
$$(3.31) \quad \mu_n = \Gamma^2 \cos \theta$$

z (3.26) i (3.27) wynika:

$$(3.32) \quad \alpha = \text{const} \cdot \cos \theta$$

Powierzchnia $(-)\mathcal{X}$ jest więc powierzchnią "torusa" o zmiennym małym promieniu b (por. Rys. 2.18)

3.4. Linia nieciągłości o kształcie okręgu poruszająca się po powierzchni cylindrycznej (ze stałą prędkością Γ^2 Rys. 3.51)



Rys.3.5

Niech powierzchnia walcowa będzie dana równaniem:

$$(3.33) \quad \begin{aligned} {}^{(+)}\mathcal{X}: \quad x^1 &= {}^{(+)}R \cos \alpha \\ x^2 &= {}^{(+)}R \sin \alpha \\ x^3 &= s \end{aligned}$$

gdzie wielkości s, α są współrzędnymi krzywoliniowymi na ${}^{(+)}\mathcal{X}$ (s - jest długością tworzącej walca mierzoną od płaszczyzny $x^3 = 0$).

Składowe wektorów: \boldsymbol{n} normalnego do linii Σ i $\boldsymbol{\nu}$ normalnego do powierzchni ${}^{(+)}\mathcal{X}$ będą miały odpowiednio w układach $\{x^i\}$ i $\{s, \alpha\}$ współrzędne:

$$(3.34) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{n} \{s, \alpha\} &= [1, 0] \\ \boldsymbol{n} \{x^i\} &= [0, 0, 1] \\ \boldsymbol{\nu} \{x^i\} &= [\cos \alpha, \sin \alpha, 0] \end{aligned}$$

Warunki zgodności (3.5)₁ mają postać:

$$(3.35) \quad \bigwedge_{i \in \{1, 2, 3\}} [\dot{x}^i] + \mu_n [x^i/s] = 0$$

gdzie jak poprzednio x^i/s są współrzędnymi przestrzennymi wektora stycznego do linii współrzędnych s na ${}^{(+)}\mathcal{X}$. Jeżeli dodatkowo $[\dot{x}^i] = 0$ to wektor ten zmienia się w sposób ciągły na linii osobiwej Σ . Ciągłość zmian wektora stycznego o współrzędnych x^i/s wynika, jak poprzednio, z warunków geometrycznej zgodności.

W związku z tym warunki zgodności (3.5)₂ przybierają postać:

$$(3.36) \quad \bigwedge_{i \in \{1, 2, 3\}} [\dot{x}^i/s] + \mu_n [x^i/s_s] = 0$$

$$\bigwedge_{i \in \{1, 2, 3\}} [\dot{x}^i/\alpha] = 0$$

lub po uwzględnieniu (3.11) i (3.33)

$$(3.37) \quad \begin{aligned} [\dot{R}_{1,s} \cos \alpha] + \mu_n [b_{ss} \cos \alpha] &= 0 \\ [\dot{R}_{1,s} \sin \alpha] + \mu_n [b_{ss} \sin \alpha] &= 0 \end{aligned}$$

Przyjmujemy dalej, że nieznaną powierzchnia $(-)\mathcal{X}$ zadana jest równaniem parametrycznym: (w małym otoczeniu Σ).

$$(3.38) \quad \begin{aligned} (-)\mathcal{X}: \quad x^1 &= {}^{(-)}R(s, \alpha) \cos \alpha \\ x^2 &= {}^{(-)}R(s, \alpha) \sin \alpha \\ x^3 &= x^3(s) \end{aligned}$$

Z warunków zgodności wynika dodatkowo, że w otoczeniu Σ funkcja $(-)\mathcal{R}(s, \alpha)$ nie może zależeć od współrzędnej α . W związku z tym po uwzględnieniu zależności (3.33) i (3.11) otrzymujemy równanie

$$(3.39) \quad \dot{R}_{,s} + \mu_n \varrho = 0$$

które musi spełniać wektor przemieszczenia $\mu = x^i \mathbf{g}_i$; $i \in \{1, 2, 3\}$ opisujący ruch punktów na powierzchni $(-)\mathcal{X}$

W układzie współrzędnych $\{x, y, z\}$ związanym z linią Σ transformacją:[‡]

$$(3.40) \quad \begin{aligned} x^1 &= x + {}^{(+)}R \cos \alpha \\ x^2 &= y + {}^{(+)}R \sin \alpha \\ x^3 &= z + R_L + \alpha_0; \quad \alpha_0 \in \mathcal{Q} \end{aligned}$$

Równanie (3.39) opisuje (w małym otoczeniu Σ) ruch po okręgu leżącym w płaszczyźnie wektorów \mathcal{V} , \mathbf{n} (patrz dodatek A). Z (3.39) wynika dodatkowo że ruch ten nie zależy od wyboru kąta α Rys. 3.5.

Tak więc obserwator związany z ruchomym układem $\{x, y, z\}$ obserwując stacjonarny ruch powierzchni $(+)\mathcal{X}$ stwierdzi, że po przejściu przez linię Σ zakrzywie się ona wzdłuż poboczniczy torusa, którego krzywizna południkowa ϱ dana jest zależnością (3.39).

[‡] Transformacja (3.36) ma wszystkie własności wymienione na str. 37

Przedstawione powyżej rozumowanie jest słuszne dla całej poboczniczy walca kołowego $(+)\mathcal{X}$ Rys. 3.5. Będzie więc również słuszne dla dowolnego podobszaru tej poboczniczy. W szczególności będzie również słuszne dla dowolnego odcinka walca (por. Rys. 3.16b).

Należy również zwrócić uwagę, że związki (3.33 ÷ 3.40) będą słuszne dla dowolnej, (gładkiej) linii osobliwej Σ . W szczególności jeżeli linia Σ jest elipsą leżącą w płaszczyźnie Π nachylonej pod kątem γ do płaszczyzny $\{x_1, x_2\}$ powstająca powierzchnia $(-)\mathcal{X}$ będzie powierzchnią pierścieniową, o krzywiznie połunikowej \mathcal{K} danej (3.39)

3.5. Formalna definicja ruchomego "przegubu plastycznego"

Przedstawione rozważania pozwalają na podanie formalnej definicji ruchomego przegubu plastycznego w oparciu o analizę ruchu linii osobliwych po powierzchni środkowej powłoki.

Niech będzie dana powierzchnia \mathcal{X} o brzegu $\partial\mathcal{X}$, po której poruszają się w stałej odległości (mierzonej w $\{x^i\}$) i ze stałą prędkością dwie równoległe linie Σ_k nieciągłości prędkości obrotu (ω_k) wektora (\mathcal{V}) normalnego do \mathcal{X} . Linie $\Sigma_k; k \in \{1, 2\}$ dzielą \mathcal{X} na trzy rozłączne obszary tak że:

$$(3.41) \quad \mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \Sigma_1 \cup \mathcal{X}_2 \cup \Sigma_2 \cup \mathcal{X}_3 \cup \partial\mathcal{X}$$

Def. 1.

Ruchomym przegubem plastycznym nazywamy podobszar $\mathcal{X}_r \subset \mathcal{X}$ będący teoriomnogościową sumą linii osobliwych Σ'_k oraz obszaru wydzielonegoz \mathcal{X} przez te linie oraz brzeg $\partial\mathcal{X}_2$:

$$(3.42) \quad \mathcal{X}_r = \Sigma'_1 \cup \mathcal{X}_2 \cup \Sigma'_2 \cup \partial\mathcal{X}_2$$

Jeżeli założymy dalej, że zmiana prędkości obrotowej występuje jedynie na liniach osobliwych Σ'_k tzn.:

$$(3.43) \quad \mathcal{X} \subset \mathcal{X}_r \quad \{ \omega = \text{const}, \omega \neq 0 \}$$

to z zależności (3.18) (3.30) (3.39) mających podobną postać typu:

$$(3.44) \quad \omega = \frac{\Gamma}{R_S}$$

można wywnioskować, że \mathcal{X}_r ma stałą krzywiznę $\partial \ell = \frac{1}{R_S}$ w kierunku normalnym do Σ_k .

Tak więc przeguby plastyczne opisane w przykładach 3.2, 3.4 będą miały odpowiednio kształty torusa i walca. Odpowiadają więc kształtem wprowadzonym poprzednio, na gruncie obserwacji doświadczalnych, ruchomym przegubom plastycznym (Rozdz. 2).

3.6. Własności odwzorowań modelujących ruchome przeguby plastyczne

Z warunków zgodności typu (3.5₁) wynika, że na liniach osobliwych Σ_k jednostkowy wektor normalny do powierzchni \mathcal{X} dany:

$$(3.45) \quad \eta = \frac{\mathcal{X}/\alpha \times \mathcal{X}/\beta}{|\mathcal{X}/\alpha \times \mathcal{X}/\beta|}$$

musi się zmieniać w sposób ciągły. Jest to warunek konieczny i dostateczny aby powierzchnia $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_r \cup \mathcal{X}_3$ była powierzchnią regularną /37/.

Zamiana powierzchni $\mathcal{X}_1(u_\delta)$ w powierzchnię $\mathcal{X}_r(v_\delta)$ a następnie w powierzchnię $\mathcal{X}_3(w_\delta)$ związana jest z pewnym odwzorowaniem obszarów na płaszczyznach parametrów (u_δ) , (w_δ) (v_δ) ; $\delta \in \{1, 2\}$. Warunek (3.45) wymaga aby odwzorowanie to było odwzorowaniem regularnym /37/.

Należy jeszcze zbadać jakiego typu odwzorowanie modelują opisane poprzednio typy ruchomych przegubów plastycznych.

Szczególnie ważne jest tu sprawdzenie czy mogą to być odwzorowania izometryczne*.

Pomocne jest tu twierdzenie Gauss'a (Theorema-Egregium), które mówi że:

Iw, Gauss'a /37/

Krzywizna Gaussowska K powierzchni da się wyrazić za pomocą samych tylko współczynników pierwszej formy kwadratowej i ich pochodnych (względem wsp. Gauss'a).

Dla rozważanego w tej pracy przypadku ortogonalnego układu współrzędnych krzywoliniowych wyrażenie to ma postać:

$$(3.46) \quad K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left[\frac{\partial}{\partial \mu_1} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \mu_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu_2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \mu_2} \right) \right]$$

Jednocześnie wiadomo /36/, że w punktach odpowiadających sobie w odwzorowaniu izometrycznym dwu powierzchni, obie te powierzchnie mają tę samą krzywiznę Gauss'a.

Jest to warunek konieczny i dostateczny istnienia takiego odwzorowania, jeżeli obydwie powierzchnie mają stałą krzywiznę Gauss'a.

Z powyższych uwag widać od razu, że odwzorowanie powierzchni walcowej w płaszczyznę (i odwrotnie) jest odwzorowaniem izometrycznym. Natomiast odwzorowanie dowolnej z tych powierzchni w powierzchnię torusa o równaniu (4.6) str.53 i współczynnikach I formy kwadratowej:

$$(3.47) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix}$$

nie jest odwzorowaniem izometrycznym, ponieważ krzywizna Gaussowska torusa obliczona na podstawie (3.46) i (3.47) wynosi:

$$(3.48) \quad K = \frac{\cos \theta}{b(b \cos \theta + a)}$$

* Odwzorowanie izometryczne jest to takie odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne dwu powierzchni, w którym długości odpowiadających sobie łuków krzywych są zawsze równe /36/.

i nie jest tożsamościowo równa zeru. Omawiane odwzorowanie zaliczyć można do klasy odwzorowań konforemnych.

3.7. Odwzorowanie quasi-izometryczne

Z przedstawionych rozważań wynika, że odwzorowania izometryczne mogą modelować jedynie te ruchome przeguby plastyczne, które są wycinkami powierzchni walcowych.

Przypadki deformacji, w których ruchome przeguby plastyczne składają się głównie z odcinków powierzchni walcowych, a powierzchnie toroidalne występują jedynie na niewielkich obszarach deformowanych powłok zaliczane będą dalej do klasy odwzorowań quasi-izometrycznych (/28/ /56/). Przykładem omawianego odwzorowania jest mechanizm zgniatania kolumny cienkościennej (Rys. 6.3). Obserwacje doświadczalne wykazują, że deformacja rozciągliwa występuje tu na powierzchniach o łącznym polu rzędu kilku - kilkunastu procent całkowitego pola powierzchni kolumny (por. Rys. 2.5). Podobna sytuacja występuje również przy:

- zginaniu belek ceowych Rys. 2.2b.
- zginaniu belek o przekroju zamkniętym i otwartym, Rys.2.2.
- zgniataaniu folii aluminiowej, Rys. 2.13.

3.8. Stacjonarne przeguby plastyczne i nieregularne odwzorowanie powierzchni środkowej powłoki

W przypadku stacjonarnych przegubów plastycznych warunki zgodności typu (3.5) redukują się (przy założeniu ciągłości przemieszczeń i ciągłości prędkości przemieszczeń) do prostej formy:

$$(3.49) \quad \begin{aligned} [\alpha^i] &= 0 \\ [\dot{\alpha}^i] &= 0 \end{aligned} \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

nie nakładając żadnych ograniczeń na wektory styczne do linii współrzędnych krzywoliniowych na powierzchni \mathcal{X} . Wynika stąd,

że stacjonarne przeguby plastyczne mogą być modelowane zarówno przez regularne jak i nieregularne odwzorowania powierzchni środkowej powłoki.

Przykład odwzorowania regularnego pokazany jest na Rys. 2.15b, gdzie w narożu kolumny występują obydwa typy przegubów plastycznych.

Jeżeli deformacja powłoki następuje jedynie w wyniku powstawania stacjonarnych przegubów plastycznych to mechanizm deformacji może być modelowany za pomocą odwzorowań nieregularnych. Jako przykład można tu podać mechanizm zginania ceownika rys. 2.1b. Izometryczny model tego typu deformacji przedstawiony jest na Rys. 7.3.

3.9. Uwagi o metodach geometrycznych w sprężystej analizie powłok

Przedstawiona w pracy metoda modelowania mechanizmów plastycznej deformacji powłok ma swój odpowiednik w metodach geometrycznej analizy powłok sprężystych.

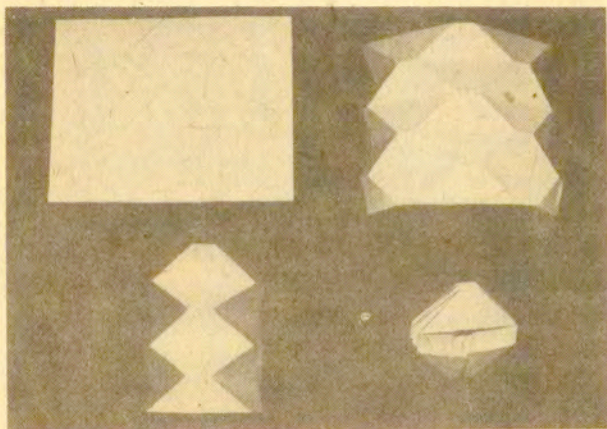
Zaproponowana w 1881 r. przez lorda Rayleigh'a (za /55/) metoda modelowania deformacji powłok sprężystych w oparciu o odwzorowania izometryczne przyniosła szereg nowych rozwiązań, szczególnie przy wyznaczaniu obciążenia krytycznego /57, 60, 61, 62/ a także w analizie zachowania się konstrukcji w zakresie pokrytycznym /31, 56/.

Podstawy analityczne oraz ogólną metodę rozwiązywania tego typu zagadnień podał w szeregu swoich prac A.B. Pogoriełow /57, 58, 59/. Pewne modyfikacje tej metody podane są w pracach S.Łukasiewicza /56/ i W.Szyszkowskiego /31/.

Specyfika materiału sprężystego, w którym wartość obciążenia zewnętrznego w konfiguracji końcowej nie zależy od drogi obciążenia, pozwoliła, w analizie sprężystej, na badanie geometrii powłoki jedynie w tej właśnie konfiguracji.

W przypadku deformacji powłok plastycznych zachodzi konieczność badania całego procesu deformacji, tak więc rozwinięte w teorii sprężystości metody geometryczne są nieprzydatne w analizie powłok plastycznych, a badanie jedynie konfiguracji końcowej prowadzi do błędnych wyników. Błąd taki popełniono w pracy /21/ przy wyznaczaniu średniej siły zgniatania powłok cylindrycznych. Przypadek ten jest zilustrowany na Rys. 2.6/3.6. Przedstawiono tu dwie możliwe drogi osiągnięcia końcowej postaci całkowitego zgniecia powłoki cylindrycznej. W pierwszym przypadku Rys. 2.6 zamodelowano przebieg rzeczywistego procesu, w którym cylinder jest progresywnie zgniatany a kolejne "fałdy" tworzą się w wyniku występowania na powierzchni powłoki ruchomych przegubów plastycznych (por. Rys. 2.7). Rys. 3.6 przedstawia natomiast proces zginania płaskiego arkusza wzdłuż linii stacjonarnych przegubów plastycznych. Widać tu wyraźnie, że chociaż końcowy efekt obydwu przekształceń jest jednakowy, to droga obciążenia jest inna.

W pracy /28/ pokazano, że mechanizm przedstawiony na rys. 3.6b pozwala na wyznaczenie dolnego oszacowania średniego obciążenia zewnętrznego powłoki (realizuje bowiem obciążenie proporcjonalne).



Rys. 3.6

IV. ZALEŻNOŚCI PODSTAWOWE DLA POWŁOK CIEŃKOŚCIENNYCH

Przyjęto następujące założenia:

- /i/ Odształcenia powłoki są duże.
- /ii/ Nieściśliwy materiał powłoki jest sztywno-idealnie plastyczny i może być opisywany przez gładkie oraz osobliwe warunki plastyczności.
- /iii/ W konfiguracji aktualnej ciała obowiązuje stowarzyszone prawo płynięcia.
- /iv/ Pomija się wpływ składowych tensora naprężenia o kierunkach normalnych do powierzchni środkowej powłoki na jej unplastycznienie oraz udział tych składowych w dysypacji energii.

Założenie pierwsze oznacza, że związki kinematyczne dla trójwymiarowego continuum przyjmowane są bez żadnych uproszczeń. Sposób budowania teorii przybliżonej opisującej kinematykę powłok cienkościennych opisany jest w pkt. 4.1.

Sposób opisu warunków plastyczności w konfiguracji aktualnej przedstawiony jest w pkt. 4.2.

Założenie trzecie jest powszechnie stosowane w teorii plastyczności /40, 53, 66/. Ponieważ związki konstytutywne dla rozpatrywanej klasy materiałów podane są w konfiguracji aktualnej, naturalnym ich opisem jest opis przestrzenny. Jest to opis często stosowany w teorii dużych deformacji powłok plastycznych /64, 68, 69/, przy opisie procesów obróbki metali /40, 66/, oraz w mechanice cieczy.

Założenie czwarte wynika stąd, że każdy dwuwymiarowy opis trójwymiarowego continuum związany jest z pewnymi uproszczeniami. Dotyczą one głównie stanu odształcenia i stanu naprężenia w powłoce.

Przyjęte dalej przy wyprowadzaniu związków kinematycznych za-

łożenia Love'a - Kirchhoffa pozwalają jedynie na wyznaczenie składowych odkształcenia w płaszczyznach równoległych do powierzchni środkowej, podczas gdy odkształcenia w kierunku normalnym pozostają nieoznaczone. Zazwyczaj przyjmuje się, że są one pomijalnie małe, lub tożsamościowo równe zeru /43/. W ogólności wynika to z założenia, że grubość powłoki jest niewielka w porównaniu z najmniejszym promieniem krzywizny powierzchni środkowej. Z założenie to nie jest spełnione w rozpatrywanych zagadnieniach, dlatego też składowe normalne odkształcenia wyznaczone będą dalej z postulatu nieściśliwości materiału. Analogiczne założenia wykorzystywane były przy rozwiązywaniu problemów idealnej plastyczności w pracy H. Stolarskiego i A. Sawczuka /69/.

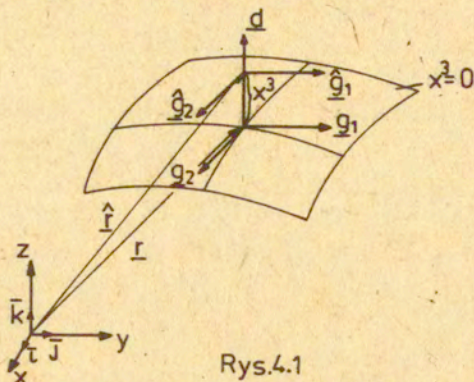
4.1. Związki kinematyczne

W punkcie 2.2. pokazano, że odpowiedni wybór układu współrzędnych pozwala na zamodelowanie ruchu przegubów plastycznych po powierzchni powłoki jako plastyczne opływy powierzchni walcowych i toroidalnych.

Takie postawienie problemu jest równoznaczne z postulowaniem pola przemieszczeń powłoki, a więc także ze znajomością funkcji ruchu punktów leżących na powierzchni środkowej powłoki. Wyznaczenie odpowiednich składowych tensora prędkości odkształcenia wymaga podania związków kinematycznych opisujących duże deformacje powłok (opis przestrzenny).

Opis trójwymiarowego continuum, jakim jest powłoka, został sprowadzony do problemu dwuwymiarowego w przestrzeni zakrzywionej przez wprowadzenie klasycznego założenia Love'a - Kirchhoffa o prostych normalnych /46, 47/. Okazuje się jednak, że nawet tak silna (dyskutowane np. w pracach /40, 45, 66, 67, 70/) założenie prowadzi do związków na prędkość odkształcenia zawierających drugą i wyższe potęgi współrzędnej X^3 (Rys. 4.1). Tak więc różne teorie przybliżone można otrzymać przez analizę współczynników przy różnych potęgach współrzędnej X^3 .

W prezentowanej pracy przyjęto związki uproszczone zawierające tylko pierwszą potęgę współrzędnej x^3 .



Rys.4.1

Przy powyższych założeniach tensor prędkości odkształcenia przedstawić można w następującej formie (szczegóły wyprowadzenia znajdują się w dodatku B str. 124)

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad \mathfrak{D} &= \text{sym}[(v_{\Delta/\lambda} - v^3 B_{\Delta\lambda}) g^{\Delta} \otimes g^{\lambda}] + \\
 &\quad + \text{sym}[\chi^3 (\Omega_{\Delta/\lambda} + B_{\Delta}^{\alpha} (v_{\Delta/\alpha} - v^3 B_{\Delta\alpha})) g^{\Delta} \otimes g^{\lambda}] \\
 &= (\mathfrak{D}_{\Delta\lambda}^{\varepsilon} + \chi^3 \mathfrak{D}_{\Delta\lambda}^{\alpha}) g^{\Delta} \otimes g^{\lambda}
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$(4.2) \quad \mathfrak{D}_{\Delta\lambda}^{\varepsilon} = \text{sym}(v_{\Delta/\lambda} - v^3 B_{\Delta\lambda})$$

są składowymi tensora prędkości odkształceń powierzchni środkowej powłoki a:

$$(4.3) \quad \mathfrak{D}_{\Delta\lambda}^{\alpha} = \text{sym}(\Omega_{\Delta/\lambda}) + \text{sym}[B_{\Delta}^{\alpha} (v_{\Delta/\alpha} - v^3 B_{\Delta\alpha})]$$

składowymi tensora prędkości zmiany krzywizny tej powierzchni.

Wskaźniki greckie Δ, λ, α , we wzorach 4.1 ÷ 4.5 przybierają wartości ze zbioru $\{1; 2\}$, a ogólny schemat oznaczeń

przedstawiono na Rys. 4.1. Ograniczając rozważania, do rozpatrywanych w niniejszej pracy, osiowo-symetrycznych kształtów przegubów plastycznych[⊗] (walce i torusy) otrzymać można związki (4.1) w nieco prostszej formie:

$$(4.4) \quad \mathcal{D} = [\mathcal{V}_{\Delta/h} - \mathcal{B}_{\Delta/h} v^3 + \mathcal{X}^3(\mathcal{R}_{\Delta/h} + \mathcal{B}_1^\alpha \mathcal{E}_{\Delta/h}^\alpha)] g^a \otimes g^a$$

oraz:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_{\Delta/h}^\alpha &= \mathcal{V}_{\Delta/h} - \mathcal{B}_{\Delta/h} v^3 \\ \mathcal{R}_{\Delta/h} &= \mathcal{R}_{\Delta/h} + \mathcal{B}_1^\alpha \mathcal{E}_{\Delta/h}^\alpha \end{aligned}$$

(szczegóły wyprowadzenia znajdują się w dodatku C na str.129)

We wzorach powyższych, tak jak poprzednio, wskaźniki greckie α, β, γ przybierają wartości ze zbioru $\{1; 2\}$, natomiast symbol „/” oznacza pochodną kowariantną na powierzchni środkowej.

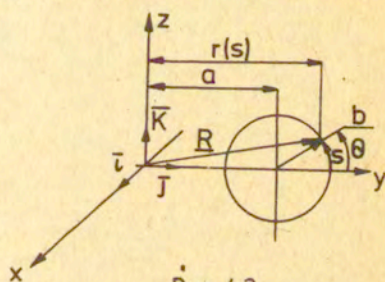
Specyfikacja związków kinematycznych dla powierzchni toroidalnej

Parametryczne równanie torusa typu C.1 (Dodatek C), są następujące:

$$(4.6) \quad \begin{cases} x(s, \vartheta) = r(s) \cos \vartheta \\ y(s, \vartheta) = r(s) \sin \vartheta \\ z(s, \vartheta) = b \sin \vartheta \end{cases}$$

$$r(s) = b \cos \theta + a$$

$$\theta = \frac{s}{b}$$



s - jest długością łuku południka, mierzoną od pkt 1. Rys. 26. Jeżeli rozważymy stacjonarny opływ powierzchni torusa, to funkcja ruchu punktu leżącego na powierzchni środkowej powłoki dana będzie wzorem:

[⊗] Tutaj przegub plastyczny rozumiany jest jako silnie zakrzywiona powłoka.

$$(4.7) \quad \mathcal{R}(s, \vartheta, t) = (b \cos \omega t + a) \cos \vartheta \bar{k} + (b \cos \omega t + a) \sin \vartheta \bar{j} + b \sin \omega t \bar{k}$$

gdzie: $v = \omega \cdot b$ jest prędkością styczną do południka torusa Rys. 4.2.

Reprezentacja (4.7) funkcji ruchu zawiera w sobie założenie o nierozciągłości włókien materialnych stycznych do południka powłoki.

Prędkość punktów leżących na powierzchni środkowej określona jest wzorem:

$$(4.8) \quad v = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \omega \cdot b (-\sin \theta \cos \vartheta \bar{k} - \sin \theta \sin \vartheta \bar{j} + \cos \theta \bar{k}) = \omega b g_s$$

gdzie:

$$(4.9) \quad g_s = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s} = -\sin \theta \cos \vartheta \bar{k} - \sin \theta \sin \vartheta \bar{j} + \cos \theta \bar{k}$$

jest wektorem stycznym do linii współrzędnych Gauss'a na powierzchni środkowej powłoki (jest to wektor styczny do południka torusa).

Tak więc współrzędne prędkości (4.8) zapisane w bazie $\{g_s, g_\vartheta, d\}$ Rys. 4.1. są następujące:

$$(4.10) \quad v = [\omega b; 0; 0]$$

Następnie korzystając z definicji (B.7) (Dodatek B) można napisać:

$$(4.11) \quad \Omega_s = -B_{s\Sigma} v^\Sigma - v_{,s}^3 = -B_{s\Sigma} v^\Sigma = -\omega$$

wynika stąd że $\Omega_{s,15} = 0$ oraz na podstawie wzorów c.9 i c.11 (Dodatek C):

$$(4.12) \quad [\Omega_{s,15}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\omega r \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

$$(4.13) \quad [\varepsilon_{\Delta}^{\prime}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega br \cos \varphi \end{bmatrix}$$

stąd można obliczyć składowe $\varepsilon_{\Delta P}^{\prime}$ tensora \mathcal{D}

$$(4.14) \quad [\varepsilon_{\Delta P}^{\prime}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

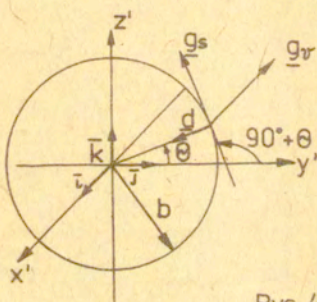
oraz składowe $\alpha_{\Delta P}^{\prime}$

$$(4.15) \quad [\alpha_{\Delta P}^{\prime}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega r \cos \varphi + \omega b \sin \varphi \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Zgodnie z oznaczeniami na rysunkach 4.2 i C.2 kąty φ i θ są związane zależnością:

$$(4.16) \quad \varphi = \frac{\widehat{jl}}{2} + \theta$$

por. również rys. 4.3.



Rys. 4.3

Biorąc pod uwagę zależności (4.15)(4.16) i (C.12) można napisać następujące wzory na składowe tensora \mathcal{D} :

$$(4.17) \quad \begin{aligned} [\varepsilon_{\Delta P}^{\prime}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\omega br \sin \theta \end{bmatrix} \\ [\alpha_{\Delta P}^{\prime}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \omega \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ponieważ składowe tensora \mathcal{S} są zapisane w bazie naturalnej:

$$(4.18) \quad \mathcal{S} = (\varepsilon \mathcal{S}_{\Delta\Sigma} + \chi^3 \mathcal{S}_{\Delta\Sigma}^{\alpha\rho}) g^{\Delta} \otimes g^{\Sigma}$$

składowe fizyczne należy obliczyć z zależności

$$(4.19) \quad \mathcal{S} = (\varepsilon \mathcal{S}_{\Delta\Sigma} + \chi^3 \mathcal{S}_{\Delta\Sigma}^{\alpha\rho}) / |g^{\Delta}| / |g^{\Sigma}| / \frac{g^{\Delta}}{|g^{\Delta}|} \otimes \frac{g^{\Sigma}}{|g^{\Sigma}|}$$

Biorąc pod uwagę wzory (C.3) nieznikające składowe fizyczne tensora prędkości odkształcenia można ostatecznie zapisać w postaci:

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \mathcal{S}_{\langle\psi\psi\rangle}^{\varepsilon\rho} &= - \frac{\omega b \sin \theta}{r} \\ \mathcal{S}_{\langle\psi\psi\rangle}^{\alpha\rho} &= \frac{\omega a \sin \theta}{r^2} \end{aligned} \quad \theta = \frac{s}{b}$$

i

$$(4.21) \quad [\mathcal{S}_{\langle\Delta\rho\rangle}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_{\langle 22 \rangle} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathcal{S}_{\langle 22 \rangle} = \mathcal{S}_{\langle\psi\psi\rangle}^{\varepsilon\rho} + \chi^3 \mathcal{S}_{\langle\psi\psi\rangle}^{\alpha\rho}$$

Z wzorów (4.21) wynika, że rozpatrywany mechanizm deformacji jest nierozciągliwy w kierunku południkowym, natomiast rozciągnięcia i zmiany krzywizny powierzchni środkowej występują w kierunku prostopadłym do południka.

Warunek nieściśliwości

Przedstawiona powyżej teoria cienkich powłok nie stawiała do tej pory żadnych ograniczeń na zmiany grubości powłoki podczas deformacji. W zdeformowanych konstrukcjach powłokowych obserwuje się jednak zauważalne zmiany grubości powłok (Rys. 6.9 str. 87), przy jednoczesnym braku rozciągnięć powierzchni środkowej w jednym z kierunków głównych (zgodnie z reprezentacją (4.21) tensora \mathcal{S}).

W związku z tym w dalszej części pracy postulowane będzie prawo nieściśliwości materiału. Lokalna postać warunku nieś-

ciężkości zapisana w funkcji wydłużeń jest następująca /71/:

$$(4.22) \quad \lambda_{(1)} \lambda_{(2)} \lambda_{(3)} = 1$$

Wykorzystując oznaczenia z Rys. 4.3. oraz biorąc pod uwagę fakt, że $\lambda_{(1)} = 1$ otrzymano:

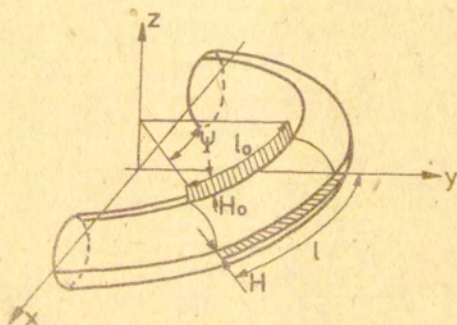
$$(4.23) \quad \lambda_{(2)} = \frac{1}{\lambda_{(3)}}$$

Uwzględniając oznaczenia Rys. 4.4. prawo powyższe zapisać można w postaci:

$$(4.24) \quad dl dh = dl_0 dh_0 \Rightarrow d\beta = dS$$

lub w postaci całkowej:

$$(4.25) \quad H = \frac{l_0 H_0}{(a + b \cos \theta) \Psi}$$



Rys.4.4

4.2. Warunek plastyczności

Spełnienie założeń (i), (iii) postulowanych na początku rozdziału IV jest równoznaczne z żądaniem, by w każdej konfiguracji aktualnej ciała warunek plastyczności wyrażał się przez ustaloną funkcję od fizycznych składowych tensora naprężenia.

Dla powłok osiowo-symetrycznych warunek ten odpowiada tzw. "współobrotowemu" sformułowaniu warunku plastyczności opisanemu w pracach H.Stolarskiego /64/ i /65/:

$$(4.26) \quad \bigwedge_{\xi} \bigwedge_{\xi} \bigwedge_{\xi} \bigwedge_{\xi} \quad \bar{\Phi}_i^{\xi} (R_{\xi} \mathcal{G}^t R_{\xi}^{\xi}) = \bar{\Phi}_i^t (\mathcal{G}^{\xi})$$

gdzie:

wskaźnik t informuje o tym, że funkcja $\bar{\Phi}_i^t$ opisuje warunek plastyczności w konfiguracji t , natomiast wskaźnik ξ odnosi się do konfiguracji ξ .

\mathcal{G}^t - jest tensorem naprężenia Cauchy /53/

R - jest tensorem obrotu w biegunowym rozkładzie gradientu deformacji F : $F^2 = R \cdot U$ [71]

Fakt, że warunek (4.26) rzeczywiście spełnia postulowane żądanie wynika z następującego rozumowania (za H.Stolarskim /64/). Niech e_t^k będzie bazą jednostkową w konfiguracji t , wtedy, ze względu na osiową symetrię, bazie tej przyporządkowana jest w chwili ξ baza e_{ξ}^k :

$$(4.27) \quad e_{\xi}^k = R_{(\xi)}^t e_t^k$$

Warunek (4.26) jest wtedy spełniony, gdyż dla

$$(4.28) \quad \mathcal{G}^{\xi} = R_{(\xi)}^t \mathcal{G}^t R_{(\xi)}^{\xi}$$

oraz dla warunku plastyczności zdefiniowanego:

$$(4.29) \quad \bar{\Phi}_i(\bar{\mathcal{G}}_{\xi}^{kl}) \equiv \bar{\Phi}_i^{\xi}(\mathcal{G}^{\xi}) = \bar{\Phi}_i^{\xi}(e_{\xi}^k \mathcal{G}^{\xi} e_{\xi}^l)$$

zachodzi:

$$(4.30) \quad \bar{\Phi}_i^{\xi}(\mathcal{G}^{\xi}) = \bar{\Phi}_i^{\xi}(e_{\xi}^k \mathcal{G}^{\xi} e_{\xi}^l) = \bar{\Phi}_i^{\xi}(e_{\xi}^k \mathcal{G}^t e_{\xi}^l) = \bar{\Phi}_i^{\xi}(\bar{\mathcal{G}}_{\xi}^{kl}) = \bar{\Phi}_i^t(\mathcal{G}^t)$$

gdzie \bar{G}^{kl} są składowymi tensora Cauchy związanymi z bazą e_γ^k

Wobec dowolności wyboru λ, i, γ z (4.30) wynika, że warunek plastyczności opisany jest przez ustaloną funkcję sześciu argumentów, niezależnie od wyboru konfiguracji aktualnej.

Po przetransformowaniu warunku plastyczności do przestrzeni sił wewnętrznych (patrz np. /37/) warunek powyższy, w każdej konfiguracji aktualnej, można zapisać w formie:

$$(4.31) \quad F_i(M^{\langle\alpha\beta\rangle}, N^{\langle\alpha\beta\rangle}) \leq k_i \quad i \in N$$

gdzie:

F_i - funkcja opisująca i -ty gładki płat powierzchni granicznej a :

$$(4.32) \quad \begin{aligned} M^{\langle\alpha\beta\rangle} &= \int_{-H/2}^{H/2} \bar{G}^{\langle\alpha\beta\rangle} X^3 dX^3 \\ N^{\langle\alpha\beta\rangle} &= \int_{-H/2}^{H/2} \bar{G}^{\langle\alpha\beta\rangle} dX^3 \end{aligned}$$

gdzie:

H - jest grubością powłoki w konfiguracji aktualnej

są składowymi fizycznymi sił wewnętrznych. Z postaci równości (4.32) wynika formalnie, że w każdej konfiguracji aktualnej, składowe fizyczne sił wewnętrznych, określone są analogicznie jak w teorii nieskończenie małych odkształceń.

Po uwzględnieniu powyższych zależności postulowane prawo płynięcia ma postać:

$$(4.33) \quad \mathcal{D} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial N^{\langle\alpha\beta\rangle}} + X^3 \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial M^{\langle\alpha\beta\rangle}} \right) e^\alpha \otimes e^\beta$$

gdzie wektory: $e^1 = g^1/|g^1|$; $1 \in \{1, 2\}$ są wektorami jednostkowymi.

Odrębnej analizy wymagają przypadki, w których pole prędkości odkształceń \mathcal{D} jest nieciągłe. W dalszej części pracy rozważone będą jedynie przypadki nieciągłej zmiany prędkości

obrotu elementu powłoki (porównaj Def. 1 str.44. i wzór B.7 str.125).

$$(4.34) \quad [\mathcal{S}_i] \neq 0$$

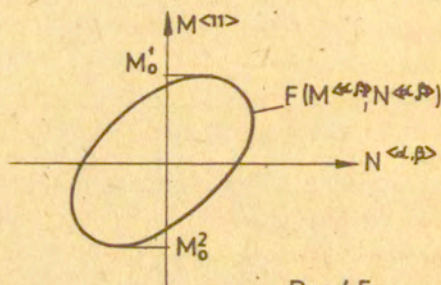
z (4.5) i (5.8) wynika również, że $[\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial M^{11}}] \neq 0$ podczas gdy pozostałe składowe tensora \mathcal{S} nie doznają skoku. W rozpatrywanym przypadku, przy określaniu stowarzyszonej wartości momentu M^{11} należy posłużyć się rzutem czterowymiarowej powierzchni granicznej (4.32) na oś M^{11} .

Warunek plastyczności przyjmie wtedy prostą postać:

$$(4.35) \quad M_0^2 \leq M^{11} \leq M_0^1 \quad \text{por. Rys 4.5}$$

a stowarzyszone prawo płynięcia opisane jest zależnością:

$$(4.36) \quad [\mathcal{S}_i] = \lambda \operatorname{sgn}[M^{11}]$$



Rys.4.5

4.3. Obliczanie dysypacji wewnętrznej

Moc dysypowaną w procesie deformacji rozważanych powłok \hat{E}_{int} określić można następująco:

$$(4.37) \quad \hat{E}_{int} = \iint_S \mathcal{D} ds = \iint_S (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2) ds \quad , \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2$$

gdzie:

\mathcal{D}_1 - zredukowana do powierzchni środkowej powłoki funkcja dysypacji wewnętrznej /40/, określona na ciągłych polach prędkości odkształceń,

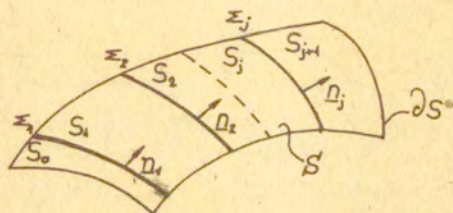
\mathcal{D}_2 - zredukowana do powierzchni środkowej powłoki funkcja dysypacji wewnętrznej, określona na nieciągłych (w sensie (4.34)) polach prędkości odkształcenia.

Całkowanie rozciągnięte jest na obszar S powierzchni środkowej powłoki Rys. (4.6) o brzegu ∂S . Na powierzchni tej znajdować się może jedna lub więcej linii osobliwych Σ_j (w sensie 4.34) o wektorze normalnym η_j . Linie te mogą być nieruchome lub ruchome względem S .

Linie Σ_j rozgraniczają S na S_{j+1} rozłącznych płatów w ten sposób że:

$$(4.38) \quad S' = S_1 \cup \dots \cup S_{j+1} \cup \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_j$$

Wśród S_{j+1} płatów powierzchni S może się również znajdować S_i ($i \leq j$) płatów sztywnych.



Rys.4.6

Powyższe sformułowanie problemu odpowiada obliczaniu całkowitej mocy dysypacji wewnętrznej, związanej z procesem zgniatacia powłoki, dopuszcza bowiem zarówno występowanie obszarów sztywnych, jak i skoncentrowanych stref plastycznego płynięcia odpowiadających ruchomym i stacjonarnym przegubom plastycznym (Rozdz. 2).

W pierwszej kolejności przeanalizowany zostanie przypadek wyznaczania mocy dysypacji wewnętrznej określonej na polach ciągłych.

Zgodnie z wzorem (4.37) moc tę przedstawić można w następującej postaci:

$$(4.39) \quad \iint_S \mathcal{D}_1 dS = \sum_{k=1}^k \iint_{S_k} \mathcal{D}_1^k dS_k \quad k \leq i; i \in N$$

gdzie sumowanie rozciągnięte jest na k płatów powierzchniowych, na których chociaż jedna ze składowych tensora prędkości odkształcenia \mathcal{D}_{1S} jest różna od zera. Pozostałe płyty powierzchniowe są obszarami sztywnymi i nie biorą udziału w dysypacji energii.

Funkcja dysypacji wewnętrznej zredukowana do punktu powierzchni środkowej powłoki określona jest równaniem /40/:

$$(4.40) \quad \mathcal{D}_1 = \int_{-H(\chi_k)/2}^{H(\chi_k)/2} \int_{\langle \alpha\beta \rangle} \sigma^{\langle \alpha\beta \rangle} d\chi^3 = \int_{-H(\chi_k)/2}^{H(\chi_k)/2} \int_{\langle \alpha\beta \rangle} (\mathcal{L}_{\langle \alpha\beta \rangle}^E + \chi^3 \mathcal{L}_{\langle \alpha\beta \rangle}^3) d\chi^3 = \\ = \mathcal{L}_{\langle \alpha\beta \rangle}^E N^{\langle \alpha\beta \rangle} + \mathcal{L}_{\langle \alpha\beta \rangle}^3 M^{\langle \alpha\beta \rangle}$$

gdzie: nawias $\langle \rangle$ oznacza, że odpowiednie składowe tensorów: naprężenia Cauchy i prędkości deformacji \mathcal{D} liczone są w bazie fizycznej, natomiast argument χ_k funkcji $H(\chi_k)$ określającej grubość powłoki, przypomina, że jest ona związana z konfiguracją ciała zależnością (4.25). We wszystkich związkach równości (4.40) opuszczono też górny indeks k - określający na którym z płatów powierzchni S określone są rozpatrywane pola Rys. 4.6.

Zgodnie z (4.40) składowa \hat{E}_{int}^1 całkowitej mocy dysypacji wewnętrznej (4.37) określona jest równością:

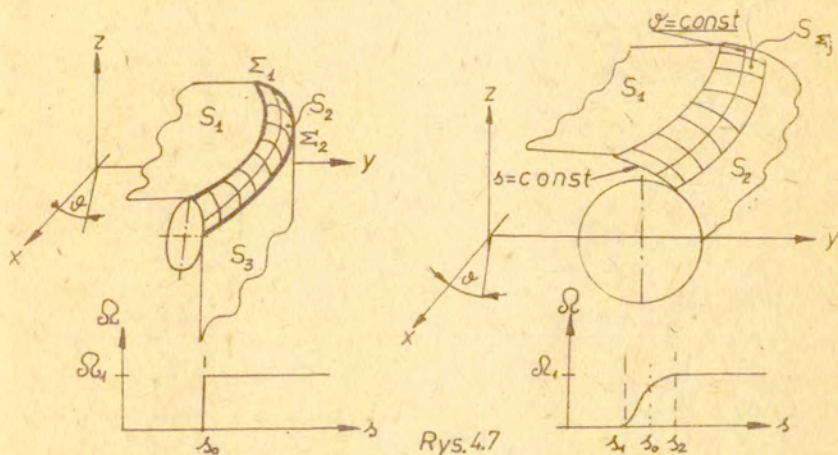
$$(4.41) \quad \hat{E}_{int}^1 = \iint_S \mathcal{D}_1 dS = \sum_{k=1}^k \iint_{S_k} (\mathcal{L}_{\langle \alpha\beta \rangle}^E N^{\langle \alpha\beta \rangle} + \mathcal{L}_{\langle \alpha\beta \rangle}^3 M^{\langle \alpha\beta \rangle}) dS_k \quad k \leq i, i \in N$$

gdzie jak poprzednio sumowanie rozciągnięte jest na te płyty powierzchniowe S_k , na których nie wszystkie składowe tensora \mathcal{D} są równe zeru.

Zajmiemy się obecnie wyznaczaniem mocy dysypowanej na nieciągłych polach prędkości odkształcenia. Jeżeli pola ze wspomnianymi nieciągłościami interpretować będziemy jako graniczny przypadek szybko zmieniających się pól ciągłych, dla których słuszne są przedstawione poprzednio związki (niezależnie od szybkości zmian) to można stąd wywnioskować, że związki te są słuszne także dla pól nieciągłych.

Stwierdzenie to, w problemach nieliniowych, nie jest poparte ogólnym, bezpośrednim dowodem /64/. Dlatego też w dalszej części pracy ograniczono się do analizy ruchomych linii osobliwych Σ_j modelujących plastyczne opływy powierzchni walcowych i toroidalnych oraz linii nieruchomych modelujących stacjonarne przeguby plastyczne.

Zgodnie z tym co napisano powyżej linie nieciągłości Σ_j , występujące przy plastycznym opływie powłok osiowo-symetrycznych, zastąpiono obszarami S_{Σ_j} o skończonym polu Rys. 4.7. (dla uproszczenia na Rys. 4.7b przedstawiono tylko połowę ruchomego przegubu plastycznego).



Obszary te są sparametryzowane ortogonalną siatką współrzędnych krzywoliniowych $\{s, \varphi\}$ Rys. 4.7. Prędkość obrotu Ω zmienia się monotonicznie w przedziale (s_1, s_2) takim, że $s_1 \leq s_0 \leq s_2$. Zgodnie z definicją plastycznego opływu walca

i torusa, założono, że moduł prędkości punktów leżących na linii współrzędnych s jest stały. Przy uwzględnieniu tych założeń z (4.45) wynika, że w rozpatrywanym przypadku postać tensora \mathcal{D} jest następująca:

$$[\mathcal{D}_{\langle\mu\nu\rangle}] = \begin{bmatrix} \Omega_{s_1, s} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{\langle 22 \rangle} \end{bmatrix}$$

W związku z tym moc energii dysypowanej w każdym z obszarów S_{Σ_j} niezależnie od tego czy modelują one ruchomy przegub plastyczny czy też stacjonarne przeguby plastyczne, wyrazi się wzorem:

$$(4.42) \quad \dot{E}_{int} = \iint_{S_{\Sigma_j}} \mathcal{D}_2 dS_{\Sigma_j} = \int_0^{\delta_2} r d\varphi \int_{s_1}^{s_2} M^{\langle\mu\nu\rangle} \Omega_{s_1, s} ds + \iint_{S_{\Sigma_j}} (\mathcal{D}_{\langle 22 \rangle} M^{\langle 22 \rangle} + \mathcal{D}_{\langle 12 \rangle} M^{\langle 12 \rangle}) dS_{\Sigma_j}$$

Jeżeli do pierwszego członu po prawej stronie równości (4.42) zastosujemy twierdzenie o wartości średniej²⁸ otrzymamy:

$$(4.43) \quad \dot{E}_{int} = L M^{\langle 22 \rangle}(\bar{s}) \int_{s_1}^{s_2} \Omega_{s_1, s} ds + \iint_{S_{\Sigma_j}} (\mathcal{D}_{\langle 22 \rangle} M^{\langle 22 \rangle} + \mathcal{D}_{\langle 12 \rangle} M^{\langle 12 \rangle}) dS_{\Sigma_j} = \\ = L M^{\langle 22 \rangle}(\bar{s}) [\Omega_s(s_2) - \Omega_s(s_1)] + \iint_{S_{\Sigma_j}} (\mathcal{D}_{\langle 22 \rangle} M^{\langle 22 \rangle} + \mathcal{D}_{\langle 12 \rangle} M^{\langle 12 \rangle}) dS_{\Sigma_j}$$

gdzie: L - długość linii Σ

$$\bar{s} \in [s_1, s_2]$$

jeżeli s_1 i s_2 zbiegają jednostajnie do wartości s_0 to:

$$(4.44) \quad \lim_{\substack{s_1 \rightarrow s_0 \\ s_2 \rightarrow s_0}} L M^{\langle 22 \rangle}(\bar{s}) [\Omega_s(s_2) - \Omega_s(s_1)] = L M^{\langle 22 \rangle}(s_0) \Omega_s(s_0)$$

$$\lim_{\substack{s_1 \rightarrow s_0 \\ s_2 \rightarrow s_0}} \iint_{S_{\Sigma_j}} (\mathcal{D}_{\langle 22 \rangle} M^{\langle 22 \rangle} + \mathcal{D}_{\langle 12 \rangle} M^{\langle 12 \rangle}) dS_{\Sigma_j} = 0$$

ostatnia równość wynika z postaci wyrażeń (4.20)

²⁸ Twierdzenie o wartości średniej iloczynu dwóch funkcji wymaga aby: funkcja $\mathcal{D}_{\langle 22 \rangle}$ była całkowna, a funkcja $M^{\langle 22 \rangle}$ ciągła. Jeżeli pomijając bezwładność obrotową powłoki ciągłość $M^{\langle 22 \rangle}(s)$ wynika z rozważań dynamicznych /51, 52, 71/

W związku z tym:

$$(4.45) \quad \int_{S_{z'}} \vec{E}_{int} = \iint_{S_{z'}} D_2 dS_{z'} = L \cdot M^{(z_0)} \Omega_{z_0} \quad , \quad L = \int_{z_0}^{z_1} r dy$$

a z (4.35) wynika, że $M^{(z_0)} = M_0^z$ (na linii Σ_j).

Równanie (4.45) podaje przepis na obliczanie mocy dysypowanej na liniach osobliwych Σ_j o dowolnym kształcie, należy również zwrócić uwagę, że gdy linia osobliwa Σ_j jest linią prostą wartości mocy dysypacji obliczone według wzorów (4.43) i (4.45) są takie same (drugi składnik sumy po prawej stronie (4.43) jest tożsamościowo równy zeru), wynika stąd, że w tym przypadku moc energii dysypowanej nie zależy od kształtu powierzchni walcowej $S_{z'}$ a jedynie od wielkości $[\Omega]$. Potwierdza to przedstawioną w Rozdz. 3 koncepcję modelowania stacjonarnych przegubów plastycznych, będących odcinkami linii prostych, zarówno przez powierzchnie o skończonym polu ($S_{z'}$) jak i przez linie osobliwe (Σ_j).

Poistawiając (4.45) i (4.41) do (4.37) otrzymano ostatecznie

$$(4.46) \quad \vec{E}_{int} = \sum_{k=1}^k \iint_{S_k} (\epsilon_0 \langle \text{ob}_{sup} \rangle N^{(sup)} + \langle \text{ob}_{sup} \rangle M^{(sup)}) dS_k + \sum_{j=1}^j M_0^j L^j \Omega_j^j$$

gdzie sumowanie rozciągnięte jest na k ($k \leq i$) płatów powierzchniowych o ciągłym rozkładzie składowych \mathcal{E} oraz na j ($j \leq i - 1$) linii nieciągłości prędkości obrotu Ω_j^j .

Zastosowania

V. ZALEŻNOŚCI PODSTAWOWE

5.1. Warunek plastyczności i założenia upraszczające

W dalszych rozważaniach prezentowanej pracy jako kryterium uplastycznienia materiału przyjęto warunek plastyczności Treski. Wyznaczanie dysypacji wewnętrznej wymagać będzie dalej zapisania tego warunku w przestrzeni sił wewnętrznych. Transformacja warunku plastyczności do przestrzeni sił wewnętrznych przebiega tak samo jak w teorii nieskończenie małych odkształceń, ponieważ jak już wspomniano poprzednio, w konfiguracji aktualnej składowe fizyczne sił wewnętrznych formalnie określone są w ten sam sposób jak w teorii nieskończenie małych odkształceń (4.32).

Konkretna postać tych związków zależy od reprezentacji tensora prędkości odkształceń $\dot{\mathcal{D}}$. Dla reprezentacji $\dot{\mathcal{D}}$ określonej w (4.21) związki między siłami wewnętrznymi określone są następująco /40/:

$$(5.1) \quad m^{22} + (n^{22})^2 - 1 = 0$$

$$\text{gdzie: } m^{22} = \frac{M^{(22)}}{M_0}$$

$$M_0 = \frac{\sigma_0 H^2}{4}$$

$$n^{22} = \frac{N^{(22)}}{N_0}$$

$$N_0 = \sigma_0 H$$

Siła $N^{(22)}$ i moment $M^{(22)}$ działające w płaszczyźnie południka powłoki są w rozpatrywanym przypadku reakcjami, ponieważ odpowiadające im składowe tensora $\dot{\mathcal{D}}$ są równe zeru (4.21) i w związku z tym nie mogą być określone przez samą kinematykę powłoki. Znajomość wielkości tych sił wewnętrznych nie jest jednak konieczna, ponieważ nie biorą one udziału w dysypacji energii.

Z bezwymiarowymi wielkościami $m^{\alpha\beta}$ i $n^{\alpha\beta}$ stowarzyszone są bezwymiarowe prędkości krzywizn i wydłużeń powierzchni środkowej $\dot{\lambda}_{\alpha\beta}$; $\dot{\sigma}_{\alpha\beta}$. Relacja ta związana jest z następującymi reprezentacjami funkcji dysypacji wewnętrznej \mathbb{D} .

$$\begin{aligned}
 (5.2) \quad \mathbb{D} &= N^{\langle\alpha\beta\rangle} \frac{\epsilon_{\rho}}{\mathcal{D}_{\langle\alpha\beta\rangle}} + M^{\langle\alpha\beta\rangle} \frac{\alpha_{\rho}}{\mathcal{D}_{\langle\alpha\beta\rangle}} = \\
 &= N_0 \left(\frac{N^{\langle\alpha\beta\rangle} \epsilon_{\rho}}{N_0} \frac{1}{\mathcal{D}_{\langle\alpha\beta\rangle}} + \frac{M^{\langle\alpha\beta\rangle}}{M_0} \frac{M_0}{N_0} \frac{\alpha_{\rho}}{\mathcal{D}_{\langle\alpha\beta\rangle}} \right) = \\
 &= N_0 (m^{\alpha\beta} \dot{\lambda}_{\alpha\beta} + n^{\alpha\beta} \dot{\sigma}_{\alpha\beta})
 \end{aligned}$$

tzn.:

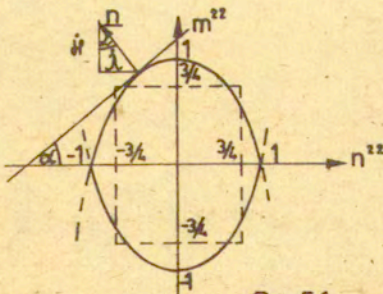
$$\dot{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{\epsilon_{\rho}}{\mathcal{D}_{\langle\alpha\beta\rangle}}$$

$$\dot{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{\alpha_{\rho}}{\mathcal{D}_{\langle\alpha\beta\rangle}} \frac{M_0}{N_0}$$

Korzystając z zależności (5.1)(5.2) oraz (4.21) (dla powierzchni toroidalnej) wyznaczyć można trajektorię naprężeń związaną z procesem deformacji określonym przez reprezentację (4.21) tensora prędkości odkształcenia (Rys. 5.1).

Trajektorja ta określona jest układem równań:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha &= \frac{|\dot{\lambda}|}{|\dot{\sigma}|} = \frac{4ar}{bH} = \frac{4a(a+b\cos\theta)}{H \cdot b} \\
 (5.3) \quad \alpha &= \operatorname{arctg}(2n^{22}) \\
 m^{22} + (n^{22})^2 - 1 &= 0
 \end{aligned}$$



Rys.5.1

Wynika stąd, że w zależności od konkretnych wartości parametrów (a, b, θ, H) rys. 4.2. funkcja dysypacji dana będzie związkiem:

$$(5.4) \quad D(a, b, \theta, H) = \begin{cases} N_0 (m^{a\beta} \dot{\lambda}_{a\beta} + m^{a\beta} \dot{\alpha}_{a\beta}) & \text{dla } \frac{4a(a+b\cos\theta)}{H \cdot b} < 2 \\ N_0 m^{a\beta} \dot{\lambda}_{a\beta} & \text{dla } \frac{4a(a+b\cos\theta)}{H \cdot b} \geq 2 \end{cases}$$

Taka postać funkcji dysypacji jest niewygodna z punktu widzenia oczekiwanej prostej postaci wyników końcowych, ponieważ zależy zarówno od wymiarów geometrycznych torusa jak i od szerokości geograficznej rozpatrywanego punktu.

Rozpatrzmy przykładowo torus o następujących relacjach między parametrami a, b, H :

$$a = 100H$$

$$b = 10H$$

wtedy:

$$\forall \theta \in [0, 2\pi] \quad \frac{4a(a+b\cos\theta)}{H \cdot b} > 10^2$$

i funkcja dysypacji określona jest zawsze wzorem (5.4₂).

Ogólnie można powiedzieć, że dla torusów spełniających zależności:

$$(5.5) \quad \begin{cases} a \gg b \\ b \gg H \end{cases}$$

funkcja dysypacji jest zawsze określona związkiem (5.4₂).

Spostrzeżenie to tłumaczy stosowane powszechnie intuicyjne założenie o pomijaniu wpływu momentu $M^{(12)}$ w wyrażeniu na dysypację wewnętrzną. Można tu zacytować wspomniane poprzednio publikacje W. Johnsona /14, 35/ dotyczące inwersji powłoki cylindrycznej.

Omawiany powyżej wniosek nie będzie prawdziwy jeżeli rozważymy torusy bardziej/"zakrzywione"; i tak dla torusa określonego relacjami:

$$\begin{aligned} a &= H \\ b &= 0,7 H \end{aligned}$$

wartość (5.3₁) wynosi:

$$\frac{4a(a+b \cos \theta)}{H \cdot b} = \begin{cases} 2,50 & \text{dla } \theta = 0 \\ 1,43 & \text{dla } \theta = \frac{\pi}{2} \\ 0,45 & \text{dla } \theta = \pi \end{cases}$$

Przykład powyższy pokazuje wyraźnie, że postać wyrażenia (5.4) określającego funkcję dysypacji wewnętrznej zależy istotnie od szerokości geograficznej θ na powierzchni torusa.

Aby uniknąć tej niedogodności w dalszej analizie przyjęto pewne uproszczenie warunku (5.1) zaproponowane przez Drucker'a & Shield'a /73/. Przybliżona powierzchnia graniczna zaznaczona jest na Rys. 5.1 linią przerywaną. W tym przypadku funkcja dysypacji wewnętrznej ma prostszą postać:

$$(5.6) \quad \mathbb{D}(H) = \frac{3}{4} N_0 \mathcal{L}_{227}^{\mathcal{E}} + \frac{3}{4} M_0 \mathcal{L}_{227}^{\mathcal{M}} \quad , \quad M_0 = \frac{\sigma_0 H^2}{4} \quad N_0 = \sigma_0 H$$

umożliwiająca analizę szerszej klasy powierzchni toroidalnych, bez ograniczeń związanych z geometrycznymi własnościami powierzchni torusa.

5.2. Podstawowe mechanizmy dysypacji energii

Przedstawione poniżej rozumowanie pozwoli w prosty sposób wyznaczyć dysypację wewnętrzną towarzyszącą zgniataniu prostych konstrukcji powłokowych. Do celów następujących rozdziałów podano rozwiązania następujących przypadków plastycznego opływu torusa i waleca.

- A) Deformacja naraża; proces deformacji rozciągłiwej, który występuje przy zgniataniu kolumn cienkościennych rozdz. 6. Zgodnie z definicją 13 str.29 punkty nabiegu i zbiegu materiału z powierzchni torusa określone są kątami $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$;

$\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$ (Rys. 2.16) a prawo zmiany grubości powłoki, zgodnie z (4.25) dane jest równaniem:

$$(5.7) \quad H(\theta) = \frac{l_0}{\psi} \frac{H_0}{(a+b\cos\theta)} = \frac{H_0}{\psi} \frac{(a + \frac{b\sqrt{2}}{2})}{(a+b\cos\theta)}$$

gdzie:

H_0 - jest początkową grubością powłoki

ψ - jest kątem środkowym ograniczającym pewien wycinek powierzchni torusa (Rys. 4.4)

a, b, θ - są określane na rys. 4.2.

Zgodnie z (4.46) moc dysypacji wewnętrznej związana z ciągłym polem składowych tensora \mathcal{D} dana jest zależnością:

$$(5.8) \quad \iint_S \mathcal{D} dS \equiv \hat{E}_{int} = \frac{3}{4} \iiint_V \left[\frac{\epsilon_0 H^2(\theta) a \omega \sin\theta}{4(a+b\cos\theta)^2} + H(\theta) \epsilon_0 \frac{b \omega \sin\theta}{a+b\cos\theta} \right] dV =$$

$$= \frac{3}{4} \omega b \int_0^{\psi} \left\{ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[M_0 \frac{l_0 a \sin\theta}{\psi(a+b\cos\theta)^3} + \frac{l_0 N_0 b \sin\theta}{\psi(a+b\cos\theta)} \right] d\theta \right\} d\psi =$$

$$= \frac{3}{4} \nu M_0 \left\{ \frac{l_0^2}{\psi} \frac{1}{2\lambda} \left[\frac{1}{(a - \frac{b\sqrt{2}}{2})^2} - \frac{1}{(a + \frac{b\sqrt{2}}{2})^2} \right] + \frac{4l_0}{H_0} \ln \left(\frac{2 + \sqrt{2}\lambda}{2 - \sqrt{2}\lambda} \right) \right\}$$

gdzie: $\lambda = \frac{b}{a}$

$$(5.9) \quad l_0 = \psi \left(a + \frac{b\sqrt{2}}{2} \right)$$

Jeżeli w dalszych rozważaniach pominąć wpływ zmian grubości powłoki to wyrażenie (5.8) przybiera prostszą postać:

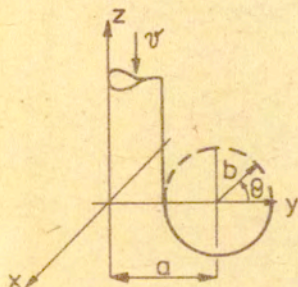
$$(5.10) \quad \hat{E}_{int} = \frac{3}{4} \nu M_0 \psi \left\{ \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2 + \sqrt{2}\lambda}{2 - \sqrt{2}\lambda} \right) + 4\sqrt{2} \frac{b}{H_0} \right\} \quad , \quad H = const$$

B) Inwersja cylindra - deformacja rozciągliwa, która towarzyszy procesowi "odwracania" powłoki cylindrycznej. (rozdz. 8).

Zgodnie z definicją 1 str. 29, dla inwersji zewnętrznej punkty nabiegu i zbiegu materiału z powierzchni torusa określone są kątami: $\theta_1 = \pi$; $\theta_2 = 2\pi$. (Rys. 2.16), a prawo zmiany grubości powłoki, zgodnie z (4.25) ma postać:

$$(5.11) \quad H(\theta) = \frac{R H_0}{R + b(1 + \cos^2 \theta)}$$

gdzie: H_0 - początkowa grubość powłoki
 R - promień powłoki cylindrycznej (Rys.5.2),
 a, b, θ - są zdefiniowane na Rys. 4.2



Rys.5.2

Podobnie jak poprzednio moc dysypacji wewnętrznej związanej z ciągłym polem składowych tensora \hat{D} dana jest zależnością (4.46):

$$(5.12) \quad \iint_S \hat{D}_1 ds \equiv \hat{E}_{int} = v \frac{3}{4} \iint_S \left[\frac{(1+\gamma) M_0 \sin \theta}{[1+\gamma(1+\cos^2 \theta)]^3} + R N_0 \frac{b \sin \theta}{a+b \cos \theta} \right] d\theta d\phi$$

$$= \frac{3\pi}{2} M_0 v \left[\frac{2\gamma^2 + 4\gamma + 2}{(1+2\gamma)^2} + \xi \ln(1+2\gamma) \right]$$

gdzie bezwymiarowe parametry γ ; ξ określone są następująco:

$$(5.13) \quad \gamma = \frac{b}{R}$$

$$(5.14) \quad \xi = \frac{4R}{H_0}$$

Założenie upraszczające $H = \text{const}$ prowadzi do wzoru

$$(5.15) \quad \hat{E}_{int} = \frac{3\pi}{2} M_0 v \left[\frac{1+\gamma}{\gamma} \ln(1+2\gamma) + 2\xi \gamma \right]$$

Dla przypadku inwersji wewnętrznej wzory te mają

odpowiednio postać:

$$(5.17) \iint_{\Sigma} \mathbb{D}_2 dS \equiv \dot{E}_{int} = v \frac{3}{4} M_0 \iint_{\Sigma} \left(\frac{(1-\gamma) \sin \theta}{1-\gamma(1-\cos \theta)} \right)^2 + \xi \frac{\gamma \sin \theta}{1-\gamma(1-\cos \theta)} d\theta d\varphi$$

$$= \frac{3\pi}{2} M_0 v \left[(1-\gamma) \frac{2-2\gamma}{(1-2\gamma)^2} - \xi \ln(1-2\gamma) \right]$$

gdzie jak poprzednio

$$\gamma = \frac{b}{R}$$

(5.18)

$$\xi = \frac{4R}{H_0}$$

Dla $H = \text{const}$ (5.17) redukuje się do:

$$(5.19) \dot{E}_{int} = \frac{3\pi}{2} M_0 v \left[-\frac{1-\gamma}{\gamma} \ln(1-2\gamma) + 2\xi\gamma \right]$$

C) Wyznaczanie dysypacji wewnętrznej na liniach osobliwych Σ_j ;

Zgodnie z zależnością (4.45) moc dysypacji wewnętrznej na linii osobliwej Σ określona jest zależnością (porównaj (5.1) i Rys. 5.1).

$$(5.20) \dot{E}_{int} = M_0 \omega L$$

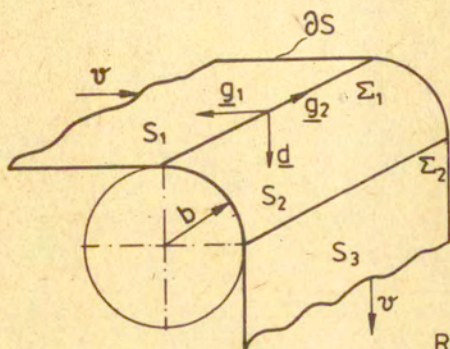
gdzie jak poprzednio

$$(5.21) L = \int_{\Sigma} dl(s) = \frac{\epsilon_0 H^2}{4} a \quad \text{— jest długością linii } \Sigma_j \text{ ;}$$

Jeżeli linia Σ_j jest wycinkiem okręgu koła o promieniu R i kącie środkowym ψ to:

$$(5.22) \dot{E}_{int} = \psi R M_0 \omega$$

Szczególnym przypadkiem ruchu linii osobliwych Σ_j po powierzchni środkowej powłoki jest przewijanie materiału (Rozdz. 2 Rys. 2.17). Występują tu dwa ruchome odcinki $\bar{\Sigma}_j$; $j \in \{1, 2\}$, rozgraniczające trzy sztywne płyty powierzchniowe S_i ; $i \in \{1, 2, 3\}$ Rys. 5.3. Płyty te są odpowiednio płytami płaskimi (S_1 i S_3) oraz wycinkiem walca S_2 .



Rys.5.3

Zgodnie z (4.45) moc dysypacji wewnętrznej dana jest zależnością:

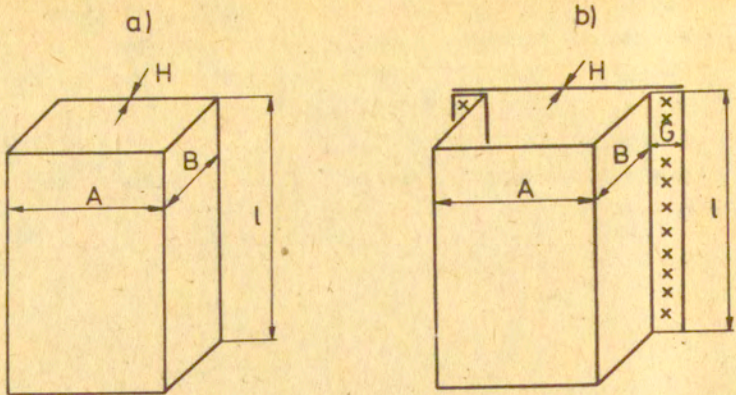
$$(5.23) \quad {}_2\hat{E}_{int} = 2\nu \frac{M_0 l}{b}$$

gdzie jak poprzednio $M_0 = \frac{\sigma_0 H^2}{4}$

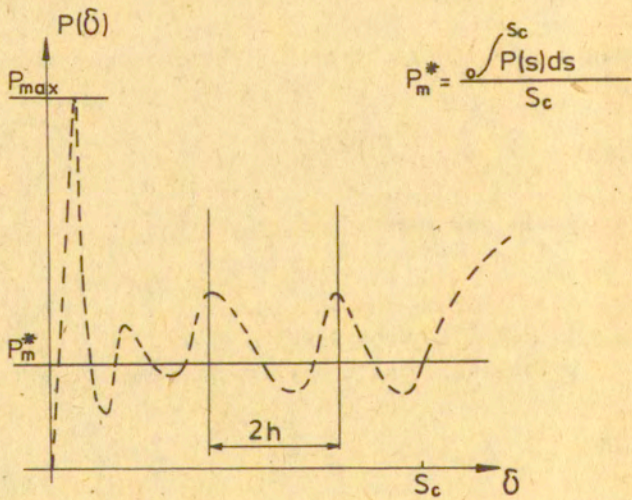
l-jest długością odcinka $\bar{\Sigma}_j$; $j=1, 2$

Z (5.23) wyznaczyć można energię dysypowaną w procesie przewijania płyta powierzchniowego o polu S . Wynosi ona:

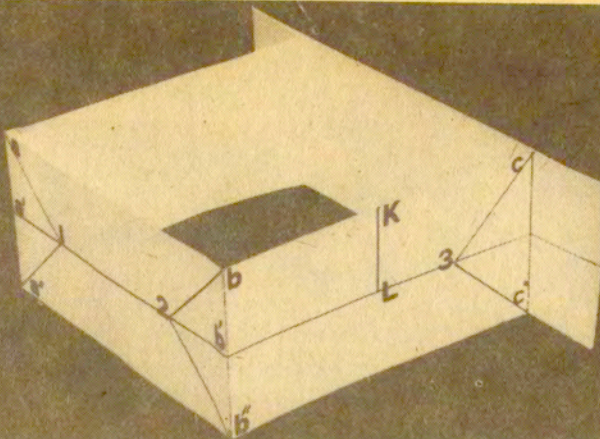
$$(5.24) \quad {}_2\hat{E}_{int} \equiv E_r = 2 \frac{M_0 S'}{b}$$



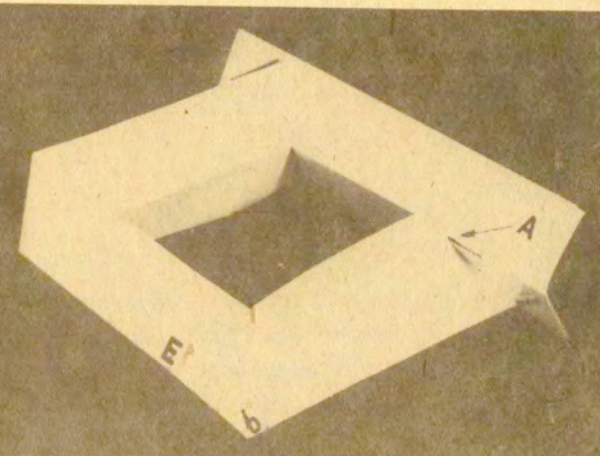
Rys.6.1



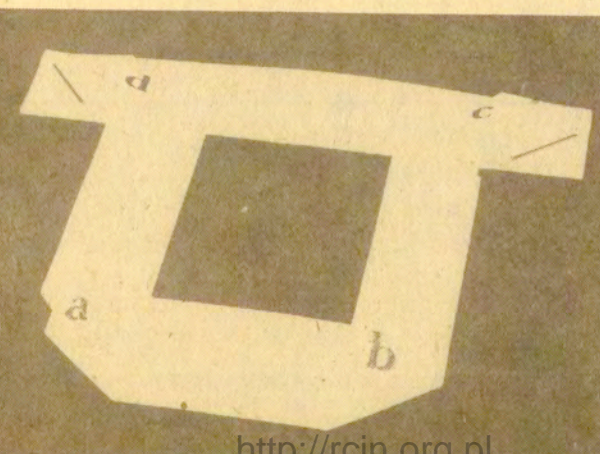
Rys. 6.2



a)



b)



c)

VI. QUASI-STATYCZNE ZGNIATANIE CIENKOŚCIENNYCH KOLUMN METALOWYCH

Rozdział ten poświęcony jest analizie zgniatania kolumn przyrządkowanych o poprzecznym przekroju kwadratowym bądź prostokątnym oraz kolumn skrzynkowych zgrzewanych punktowo z dwóch części. Poprzeczny przekrój takiej kolumny przypomina kapelusz, stąd też, idąc za nazewnictwem angielskim nazwa "kolumna kapeluszu" Rys. 6.1ab. Typowy wykres przebiegu zgniatania kolumny przedstawiony na Rys. 6.2*.

Z punktu widzenia zastosowań ważne jest wyznaczenie średniej siły zgniatania P_m^* :

$$(6.1) \quad P_m^* = \frac{\int_0^L P(\delta) d\delta}{L} \quad \text{Rys 6.2}$$

określającej zdolność kolumny do pochłaniania energii.

Mechanizm zgniatania kolumny, oraz sposób jego zamodelowania jako quasi-izometryczne przekształcenie powierzchni środkowej powłoki, zostały omówione w rozdziałach 2 i 3; wspomniano tam, że zgniatanie kolumny następuje poprzez kolejne zgniatanie fałd (o długości $2h$) - zwanych dalej: "półfałdami wyboczenia lokalnego". Rysunek 6.3abc przedstawia taki quasi-izometryczny model zgniatania elementu kolumny typu kapeluszu (o wysokości $2h$). Można w nim wyróżnić:

- ruchome przeguby plastyczne typu b"Eb itd. Rys. 6.3a. Ograniczają one obszary trójkątów b 2b; a" 1a, itd., w których następuje przewijanie materiału.
- nieruchome przeguby plastyczne abcd, a'b'c'd' itd., wokół których następuje obrót sztywnych płatów powierzchniowych, oraz,

* Kolumna zgniatana jest między dwiema równoległymi płaszczyznami, bez żadnych dodatkowych mocowań. Szczegółowe omówienie opisywanego tu mechanizmu deformacji znaleźć można w pracy /74/.

- obszary deformacji rozciągliwej związanej z poruszaniem się w procesie zgniatania naroży E, itd. Rys. 6.3b. W procesie zgniatania naroża te przemieszczają się wzdłuż odcinków $1a'$, $2b'$ itd. Rys. 6.3a.

Rys. 6.4. przedstawia wybrany element KLBB' kolumny w pośrednim stadium deformacji określonym kątem $\theta(\delta)$. W płaszczyźnie rozważanego prostokąta KLBB' leży dodatkowo $\Delta B'EB$, który powstał z materiału przewiniętego w tym obszarze. Z Rys. 6.4. wynikają następujące, podstawowe zależności geometryczne:

$$(6.2) \quad |\overline{B'B_1}| = b \sin \theta$$

$$(6.3) \quad \sin \theta = \operatorname{tg} \Psi$$

$$(6.4) \quad \delta = |\overline{B_1 B_1'}| = 2h(1 - \cos \theta)$$

Zgodnie z zależnością (5.20) energia przewijania materiału w $\Delta b''2b$; $\Delta a''1a$ itd. Rys. 6.3. odpowiadająca skróceniu kolumny o $2h$ wynosi:

$$(6.5) \quad E_T = \frac{M_0 h^2}{b}$$

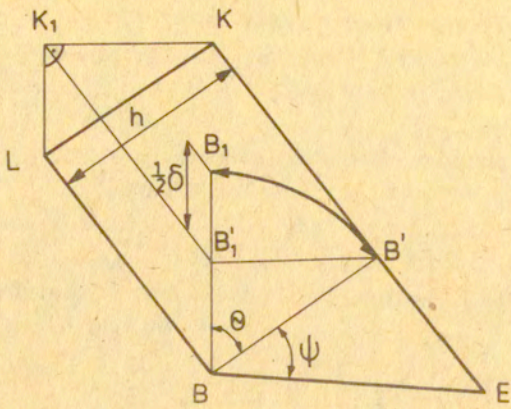
natomiast energia związana z obrotem sztywnych płyt powierzchniowych wokół stacjonarnych przegubów plastycznych abcd, $a'b'c'd'$ itd., Rys. 6.3a, po uwzględnieniu zależności:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \text{ wynosi:}$$

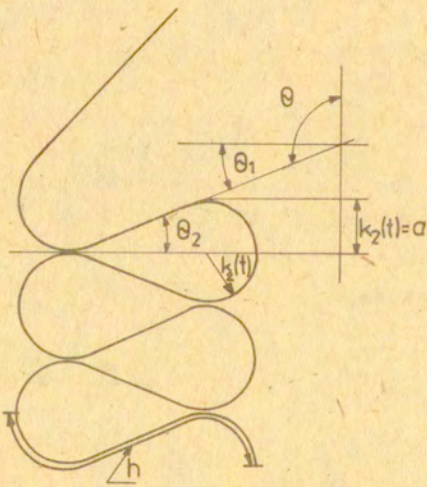
$$(6.6) \quad E_b = 4\sqrt{3} M_0 (R+B) \quad - \text{ dla kolumny pryzmatycznej}$$

$$E_b = 4\sqrt{3} M_0 (R+B+4C) \quad - \text{ dla kolumny o przekroju kape-
luszowym.}$$

Obydwa powyższe wyrażenia są słuszne dla przypadku skrócenia kolumny o $2h$.



Rys.6.4



Rys.6.5

W rozdziale 3 wspomniano, że oprócz wymienionych powyżej mechanizmów, zgniataniu kolumny towarzyszy również deformacja rozciągliwa, skoncentrowana w narożach typu 1,2 itd. Rys. 6.3a. Chwilowa siła towarzysząca takiemu procesowi dana jest zależnością (5.8).

Ponieważ kąt $\psi = \angle b'2b$ Rys. 6.3a i Rys. 4.4 zmienia się w procesie zgniatania kolumny o $2h$, w zakresie od 0 do π energia dysypowana w procesie rozciągliwym wyraża się zależnością:

$$(6.7) E_{cb} = M_0 \frac{3\pi}{2} \delta \left\{ \frac{1}{2\lambda} \left[\frac{(2+\lambda\sqrt{2})^2}{(2-\lambda\sqrt{2})} - 1 \right] + \frac{b}{M_0} \left(\frac{4}{\lambda} + 2\sqrt{2} \right) \ln \left(\frac{2+\lambda\sqrt{2}}{2-\lambda\sqrt{2}} \right) \right\}$$

gdzie $\lambda = \frac{b}{a}$ Rys. 4.2; δ - skrócenie kolumny.

Natomiast całkowita energia dysypowana w procesie zgniatania wynosi:

$$(6.8) E_c = E_b + E_r + E_{cb}$$

Średnią siłę zgniatania kolumny (P_m^*) zdefiniować można następującą równością $E_c = P_m^* \delta$, gdzie δ jest skróceniem kolumny. Należy jednak zwrócić uwagę, że w opisywanym procesie skrócenie to jest równe $\delta = 2h - 2a$. Fakt ten jest spowodowany utworzeniem się torusa o promieniu a (Rys. 4.2) w narożu kolumny. Ilustrują to Rys. 2.5 (gdzie wspomniany torus oznaczony jest strzałką) i Rys. 6.5. Zgodnie z powyższą uwagą średnia siła P_m^* dana jest zależnością:

$$(6.9) \frac{P_m^*(a,b,k)}{M_0} = \frac{2\pi(A+B)}{h-a} + \frac{4h^2}{4(h-a)} + \frac{3\pi}{4} \left\{ \frac{1}{2\lambda} \left[\frac{(2+\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2}\lambda)} - 1 \right] + \frac{b}{M_0} \left(\frac{4}{\lambda} + 2\sqrt{2} \right) \ln \left(\frac{2+\sqrt{2}\lambda}{2-\sqrt{2}\lambda} \right) \right\}$$

gdzie P_m^* jest funkcją trzech niezależnych parametrów;

a, b - dużego i małego promienia torusa*

h - długości fali wybożenia lokalnego.

Rzeczywistą siłą działającą w procesie zgniatania wyznaczamy z postulatu minimum obciążenia zewnętrznego,

$$(6.10) \quad P_{\text{min}}^I = \min \{ P_{\text{min}}^*(a, b, h) \}$$

co jest równoważne rozwiązaniu uwikłanego układu równań na a, b, h :

$$\pi b(R+B) = 2h^2 - 4ha$$

$$(6.11) \quad \frac{2\pi(R+B)}{(h-a)^2} + \frac{4h^2}{b(h-a)^2} = \frac{0,75}{a^2} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{2}{2}} - \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2+\sqrt{2}\lambda}{2-\sqrt{2}\lambda} \right) + 4\sqrt{2} \frac{b}{H_0} \right\}$$

$$\frac{4h^2}{b^2(h-a)} = \frac{0,75}{a} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{2}{2}} - \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2+\sqrt{2}\lambda}{2-\sqrt{2}\lambda} \right) + 4\sqrt{2} \frac{b}{H_0} \right\}$$

wyznaczanie parametrów a, b, h z (6.11) jest pracochłonne i wymaga zastosowania metod numerycznych. Pewne uproszczenie problemu uzyskać można wykorzystując dodatkowo informację eksperymentalną /16/; /24/.

$$(6.12) \quad 2h = \frac{B}{2},$$

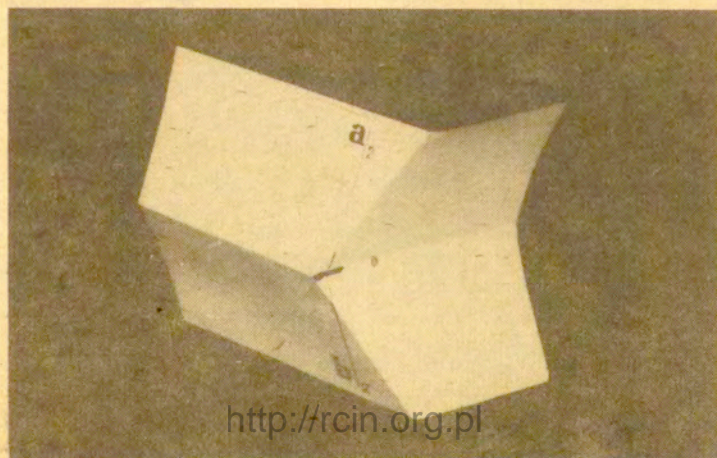
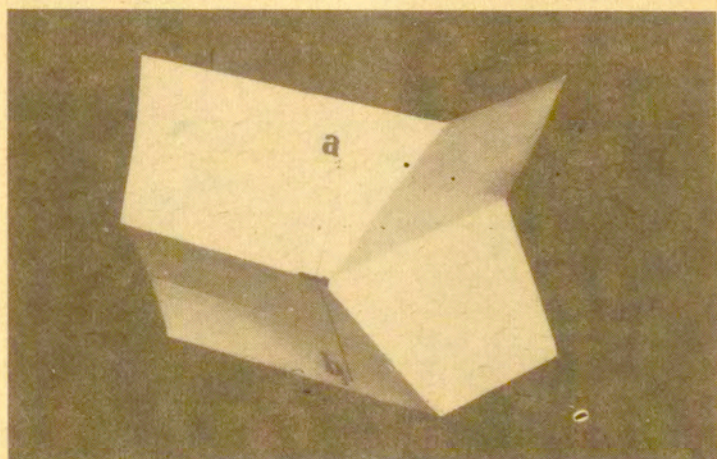
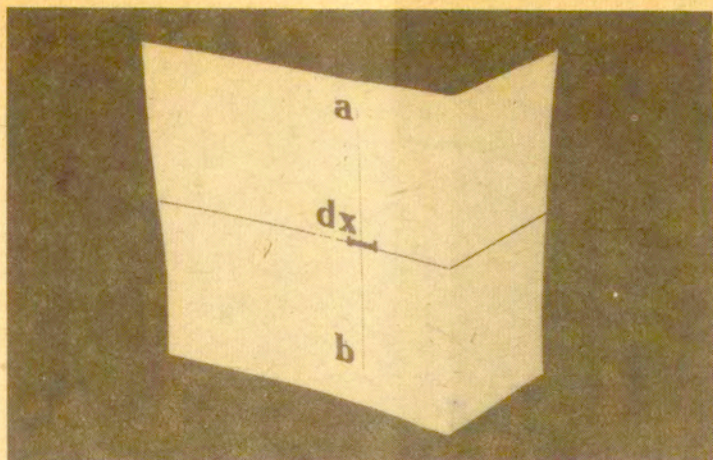
która mówi, że długość fali wyboczenia równa się połowie krótszego boku kolumny. Równania (6.11) redukują się wtedy do układu:

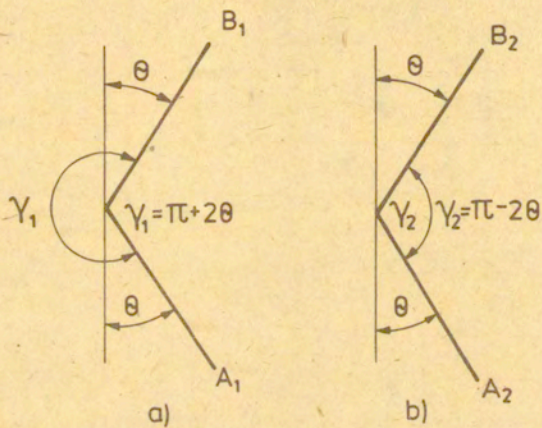
$$(6.13) \quad b = \frac{B^2}{8\pi(R+B)}$$

$$\frac{4B}{3\pi b} = \frac{8\sqrt{2} + 8\lambda}{(2-\sqrt{2}\lambda)^2} - \frac{1}{2\lambda} \left[\left(\frac{2+\sqrt{2}\lambda}{2-\sqrt{2}\lambda} \right) - 1 \right] + \frac{2b}{H_0} (2+\sqrt{2}\lambda) + \frac{b}{H_0} 2\sqrt{2} \ln \left(\frac{2+\sqrt{2}\lambda}{2-\sqrt{2}\lambda} \right)$$

Z jedną niewiadomą λ_{min} (b wyznaczone jest jednoznacznie przez wymiary geometryczne kolumny 6.13₁), a średnią siłę zgniatania wyznaczyć można z zależności:

* Promień torusa b jest pewną umowną, średnią wartością parametru, który w rzeczywistym procesie może zależeć zarówno od parametru zaawansowania procesu σ jak i od zmiennych przestrzennych.





Rys.6.7

$$(6.14) \quad \frac{P_{\text{max}}^{\text{II}}(\lambda_{\text{min}})}{M_0} = \frac{32 \lambda_{\text{min}} \sqrt{2} (A+B)^2}{2 \lambda_{\text{min}} B (A+B) - B^2} + \frac{3\pi}{4} \left\{ \frac{1}{2\lambda} \left[\left(\frac{2 + \sqrt{2}\lambda}{2 - \sqrt{2}\lambda} \right)^2 - 1 \right] \right. \\ \left. + \frac{B^2}{8\pi H_0 (A+B)} \left(\frac{4}{\lambda_{\text{min}}} + 2\sqrt{2} \right) \ln \left(\frac{2 + \lambda \sqrt{2}}{2 - \lambda \sqrt{2}} \right) \right\}$$

Daleko idące uproszczenie wyrażenia (6.10) uzyskać można zakładając uproszczony (niezgodny kinematycznie) mechanizm deformacji naroża, opisany po raz pierwszy w pracy N.A.ya /15/ i przedstawiony schematycznie na Rys. 6.6abc. Prześledźmy zachowanie się elementu dx leżącego na linii przegubu plastycznego oraz poprowadzonej przez niego tworzącej AB kolumny.

Podczas zgniatania kolumny tworząca ta ulega zginaniu w punkcie przecięcia z linią przegubu plastycznego. Rys. 6.6b przedstawia element dx przed samym przewinięciem przez naroże. W tym momencie ramiona tworzącej ($A_1 B_1$) tworzą kąt γ_1 , w następnym momencie, tuż po przegięciu elementu dx , ramiona tworzącej ($A_2 B_2$) tworzą kąt γ_2 (Rys. 6.6c).

Na rys. 6.7ab przedstawiony jest przekrój ścianki kolumny płaszczyzną przechodzącą przez ramiona tworzących $A_1 B_1$ i $A_2 B_2$, widać stąd, że podczas przewijania przegub plastyczny o długości dx uległ dodatkowo zginaniu o kąt γ :

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 = 4\theta$$

ponieważ, $x = \sqrt{E B'}$ (Rys. 6.3a) otrzymujemy, po uwzględnieniu (8.2) i (8.3), następujące wyrażenie na energię dysypowaną w procesie deformacji czterech naroży kolumny:

$$(6.15) \quad dE_{cb} = 4M_0 dx \gamma = 4M_0 d(h \sin \theta) \cdot 4\theta = 16M_0 h \cos \theta \cdot \theta d\theta$$

lub

$$(6.16) \quad E_{cb} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16M_0 h \cos \theta \cdot \theta d\theta = 8\pi M_0 h$$

W dalszej części pracy pokazano, że wyrażenie (6.16) dobrze aproksymuje dysypację energii związaną ze zmianami krzywizny równoleżników torusa modelującego ruch naroża, nie uwzględnia natomiast zmian ich długości (rozciągnięć).

Podstawiając zależność (6.16) do (6.8) otrzymujemy:

$$(6.17) \quad \frac{P_m^*(h)}{M_0} = \frac{2\sqrt{A+B}}{h} + \frac{4h}{b} + 4\sqrt{J}$$

Warunek minimum obciążenia zewnętrznego przyjmuje wtedy postać:

$$(6.18) \quad \frac{d}{dh} \left(\frac{P_m^*(h)}{M_0} \right) = -\frac{2\sqrt{A+B}}{h^2} + \frac{4}{b} = 0$$

lub

$$h^2 = \frac{\sqrt{J}}{2} b(A+B)$$

Podstawiając następnie (6.18) do (6.17) otrzymujemy:

$$(6.19) \quad \frac{P_m^{\text{III}}}{M_0} = 16\sqrt{J} \left(\frac{A}{B} + 1 \right)$$

Uwzględniając dodatkowo fakt, że w rozpatrywanym przypadku $\delta = 2h - 4H_0$, gdzie H_0 jest grubością ścianki /74/ otrzymano ostatecznie:

$$(6.20) \quad \frac{P_m^{\text{III}}}{M_0} = 16\sqrt{J} \frac{\frac{A}{B} + 4\frac{C}{B} + \frac{20}{16}}{1 - 8\frac{H_0}{B}}$$

dla kolumny typu kapeluszowego

$$^1 \frac{P_m^{\text{III}}}{M_0} = 16\sqrt{J} \frac{\frac{A}{B} + \frac{20}{16}}{1 - 8\frac{H_0}{B}}$$

- dla kolumny o przekroju prostokątnym

lub

$$(6.21) \quad \frac{G_m^*}{G_0} = 2\sqrt{J} \frac{\frac{A}{B} + 4\frac{C}{B} + \frac{21}{16}}{\left(1 - 8\frac{H_0}{B}\right) \left(\frac{A}{H_0} + \frac{B}{H_0} + 2\frac{C}{H_0}\right)}$$

- dla kolumny kapeluszowej

oraz

$$\frac{G_m^*}{G_0} = 2\sqrt{J} \frac{\frac{A}{B} + \frac{20}{16}}{\left(1 - 8\frac{H_0}{B}\right) \left(\frac{A}{H_0} + \frac{B}{H_0}\right)}$$

- dla kolumny o przekroju prostokątnym.

gdzie średnie naprężenie ściskające G_m^* - odpowiadające sile P_m^{III} , określone jest zależnością:

$$(6.22) \quad G_m^* = \begin{cases} \frac{P_m^{\text{III}}}{2(A+B+4C)H_0} & \text{- dla kolumny o przekroju kapeluszowym} \\ \frac{P_m^{\text{III}}}{2(A+B)H_0} & \text{- dla kolumny o przekroju prostokątnym} \end{cases}$$

Porównanie pełnych i uproszczonych wzorów określających średnią siłę zgniatania kolumny oraz udział deformacji naroża w ogólnej dysypacji przeprowadzono na przykładzie typowej kolumny o przekroju prostokątnym i wymiarach:

$$A = 70 \text{ mm}$$

$$B = 60 \text{ mm}$$

$$H = 1 \text{ mm}$$

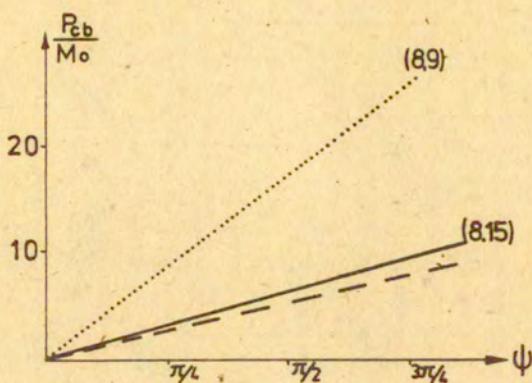
Wyniki zebrane są w tabeli I

Tabela I

Rozwiązanie	P_m	Udział deformacji naroża w ogólnej dysypacji
Model I (6.9)	146	15 %
Model II (6.14)	143	15 %
Model III (6.20)	140	10 %

Na rys. (6.8) przedstawione jest porównanie uproszczonego mechanizmu deformacji naroża (6.15) z mechanizmem opisanym w punkcie 5.2 A (wzór 5.9). Na rysunku tym linią ciągłą oznaczono wartość chwilowej siły zewnętrznej P_{Cb} wyznaczonej na podstawie rozwiązania przybliżonego (6.5), linią kropkowaną wartość tej siły obliczonej wg wzoru (6.9) (dla $\lambda_{min} = 0,65$ - otrzymanego z numerycznego rozwiązania układu (6.11)), natomiast linia przerywana przedstawia udział członu związanego

ze zmianą krzywizn powierzchni środkowej powłoki, w całkowitej dysypacji opisanej wzorem (5.9).



Rys.6.8

Wynika stąd, że uproszczony mechanizm deformacji naroża dobrze aproksymuje dysypację energii związaną ze zmianami krzywizn powierzchni środkowej, zaniedbując całkowicie część związaną z jej rozciągnięciami.

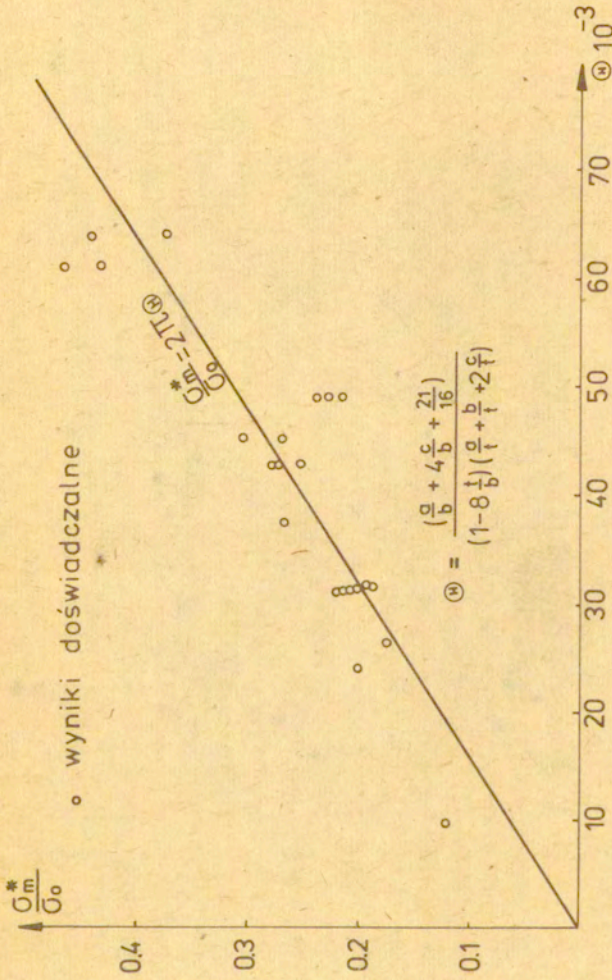
Znaczny udział deformacji rozciągliwej w mechanizmie deformacji naroża (opisanej w punkcie 6 A), Rys. 6.8. znajduje również pośrednie uzasadnienie doświadczalne. Rys. 6.9 przedstawia fotografię poprzecznego przekroju zdeformowanej kolumny, poprowadzonego prostopadłe do osi kolumny przez naroże zaznaczone na Rys. 2.5. Strzałkami oznaczono miejsca wyraźnego pogrubienia ścianki, jest to obszar, po którym przesuwiała się w czasie deformacji powierzchnia turusa.

Zgodnie z zależnością (4.25) miejsca te powinny ulec pogrubieniu, co rzeczywiście zauważyć można na Rys. 6.9. Przedstawione porównanie może być traktowane jedynie jako dowód jakościowy, ze względu na duże trudności w uzyskaniu dokładnego przekroju kolumny w kierunku prostopadłym do powierzchni ścianki na całym obwodzie przekroju.

Z porównań zamieszczonych w tabeli 1 wynika wniosek, że wyrażenia uproszczone (6.14) i (6.20) dobrze aproksymują rozwiązanie dokładne (6.9) (błąd przybliżenia nie przekracza 5 %).



Rys. 69



Rys. 6.10

Do zastosowań praktycznych najlepiej więc stosować proste wzory (6.20) i (6.21), które określają średnią siłę zginięcia kolumny wyłącznie na podstawie jej wymiarów geometrycznych Rys. 6.1.

Małe rozbieżności między wyrażeniami (6.9) + (6.14) i (6.20) tłumaczy fakt, że udział deformacji rozciągłej jest mały (rzędu 10 %) w porównaniu z nierozciągłą deformacją powierzchni środkowej kolumny tab. 1. Jest to potwierdzeniem przyjętego poprzednio założenia (Rozdz. 3) o quasi-nierozciągłym mechanizmie deformacji kolumny.

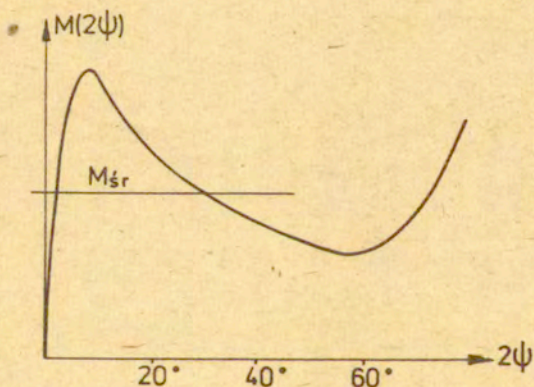
Porównanie wyników obliczeniowych (6.21) z dostępnymi danymi eksperymentalnymi /15,16,24,74/ przedstawia Rys. 6.10. Stosunek średniego naprężenia ściskającego (σ_m^*) do granicy plastyczności materiału (σ_0) przedstawiony jest tu w funkcji bezwymiarowego parametru \textcircled{H} :

$$(6.23) \quad \textcircled{H} = \frac{\frac{A}{B} + 2\frac{C}{B} + \frac{21}{16}}{(1 - 8\frac{H_c}{B})(\frac{A}{H_c} + \frac{B}{H_c} + 2\frac{C}{H_c})}$$

zależnego wyłącznie od geometrycznych wymiarów poprzecznego przekroju kolumny. Dokładność rozwiązania przybliżonego (6.21) uznać można za wystarczającą do zastosowań praktycznych (błąd nie przekracza 20 %), biorąc pod uwagę fakt, że rozrzut danych doświadczalnych jest rzędu 10 % /74/, a dokładność doświadczalnego wyznaczenia granicy plastyczności materiału (σ_0) jest również nie większa od 10 %.

VII. QUASI-STATYCZNE ZGINANIE BELEK CIENKOŚCIENNYCH O PRZEKROJACH OTWARTYCH I ZAMKNIĘTYCH

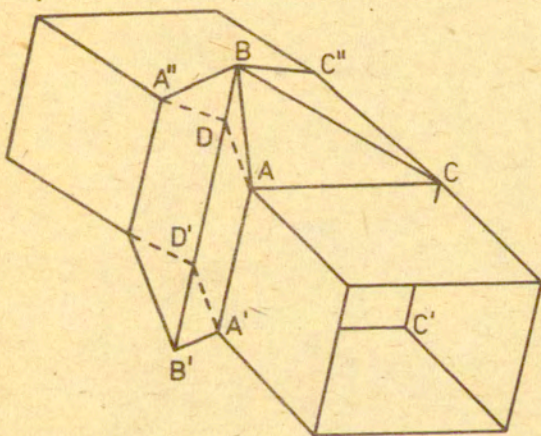
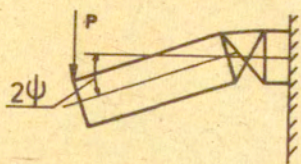
Niniejszy rozdział poświęcony jest analizie zginania cienkościennych belek metalowych. Na rys. 7.1. przedstawiony jest typowy przebieg zależności moment zewnętrzny - kąt obrotu, towarzyszący tego typu deformacji. W opisywanym przypadku, odwrotnie niż w przypadku kolumn metalowych, ważne jest określenie wartości momentu obciążającego w każdej chwili deformacji belki, podczas gdy znajomość średniej wartości momentu w całym procesie ma znaczenie drugorzędne /por. 81/. Dlatego też w dalszej części tego rozdziału główny nacisk położono na otrzymanie zależności określających chwilową wartość momentu obciążającego w funkcji parametru zaawansowania procesu (2ψ).



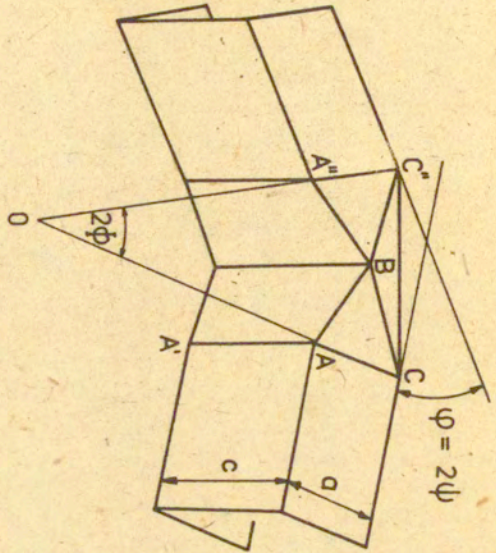
Rys.7.1

Mechanizm deformacji belek o przekroju ceowym omówiony został w rozdziale 2.

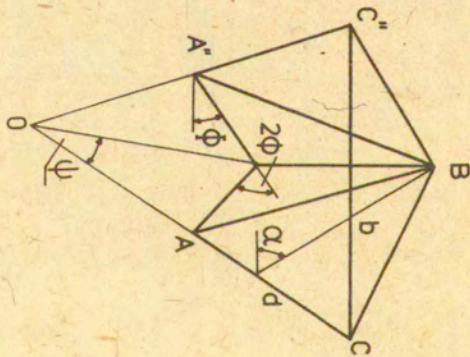
Dodatkowego omówienia wymaga mechanizm deformacji występujący w przypadku zginania belek o przekroju zamkniętym (kwadratowym

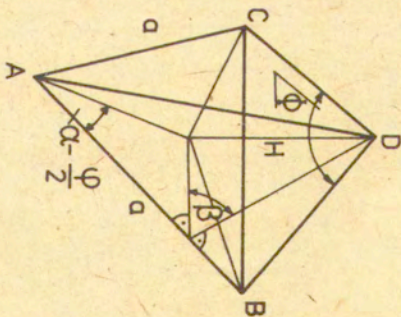
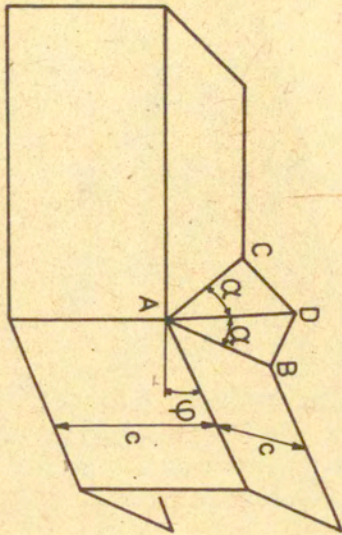


Rys.7.2



Rys. 73





Rys.7.4

lub prostokątnym) Rys. 7.2. Jak wynika z opublikowanych danych eksperymentalnych kształt lokalnej formy wybożenia plastycznego jest dość skomplikowany i trudny do prostego zamodelowania, dlatego też w publikacjach poświęconych temu problemowi spotkać można różne modele izometryczne zdeformowanej belki^{*} /17/ /18/. W niniejszej pracy przyjęto prosty model obliczeniowy Rys. 7.2, który wydaje się być dobrym przybliżeniem procesu rzeczywistego. Zginanie materiału występuje tutaj wzdłuż linii AC, CC', AA', CC'', C''A'' itd., przewijanie natomiast wzdłuż linii AB, BC, C''B itd.

Rys. 7.3 przedstawia izometryczny model zginania ceownika (zginanie ceownika w tym kierunku nazywane będzie dalej zginaniem "na zewnątrz" por. Rys. 2.2b).

Porównanie powyższych rysunków /72 i 73/ dowodzi, że postać lokalnej formy wybożenia jest analogiczna w obu przypadkach.

Rys. 7.4 przedstawia przypadek zginania ceownika w kierunku przeciwnym do pokazanego na Rys. 7.3. Ten typ zginania nazywany będzie dalej zginaniem "do wewnątrz" (por. Rys. 2.1b).

Korzystając z rysunków 7.3. i 7.4 wyprowadzić można następujące zależności geometryczne odpowiednio dla przypadku zginania belki o przekroju zamkniętym i dla zginania ceownika "na zewnątrz" (7.1) oraz dla zginania ceownika "do wewnątrz" (7.2).

$$(7.1) \begin{cases} \cos \bar{\Phi} = 1 - 2\lambda \sin \psi \\ \alpha = \bar{\Phi} - \psi \\ \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{2\lambda - \sin \alpha} \\ H = \frac{b}{2} \sin \alpha \end{cases}$$

$$(7.2) \begin{cases} \cos \beta = \left(\frac{1}{2 \sin 2\alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{\bar{\Phi}}{2} \right) = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{i} \quad \bar{\Phi} = \pi - \bar{\Phi} \end{cases}$$

* Szczegółowe omówienie wspomnianych różnic znaleźć można w pracy /17/.

gdzie:

a - wymiar poprzecznego przekroju belki Rys. 7.3, 7.4.

b - długość "fali wybożenia lokalnego" Rys. 7.3 i 7.4.

• φ, ψ - parametry zaawansowania procesu, równe-kątowi zgięcia belki od konfiguracji początkowej Rys. 7.2, 7.3 i 7.4.

$\lambda = \frac{a}{b}$ - bezwymiarowy, wolny parametr procesu

$\mathcal{M} = \frac{a}{c}$ - parametr konstrukcyjny belki (bezwymiarowy)

Podobnie jak przy zgniataniu kolumn cienkościennych tak i w przypadku zginania belek dysypacja energii następuje dzięki aktywowaniu mechanizmów: przewijania materiału, deformacji naroża oraz zginania wzdłuż stacjonarnych przegubów plastycznych o stałej bądź zmiennej długości (w procesie zginania belki do wewnątrz zmienia się długość stacjonarnego przegubu BB' Rys. 7.2.) Ponieważ podobnie jak w przypadku zgniatania kolumn proces deformacji naroża jest zjawiskiem lokalnym, do dalszych obliczeń przyjęto uproszczony model deformacji naroża przedstawiony na Rys. 6.6.

Zgodnie z zależnością (4.46) elementarny przyrost energii dysypowanej w stacjonarnym przegubie plastycznym o długości dx, przy zginaniu o kąt d θ wyraża się zależnością:

$$(7.3) dE_b = \int_2^A \dot{E}_{int} dt = M_0 dx \omega dt = M_0 dx d\theta$$

gdzie: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ jest względną prędkością obrotu płatów powierzchniowych wokół stacjonarnego przegubu plastycznego, a

$M_0 = \frac{\sigma_0 H^2}{4}$ - jest pełnym momentem plastycznym.

Po uwzględnieniu powyższej zależności oraz wyrażeń (4.16), (7.1) i (7.2) elementarny przyrost energii dysypowanej w stacjonarnych przegubach plastycznych wyrazić można zależnościami^z:

^z S zczegółowe wyprowadzenia powyższych związków znajdują się w pracy 1751.

$$(7.4) dE_b = 2M_0 a \left[\frac{d\beta}{\lambda} - 2d\psi + 2\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) d\Phi \right] + 2M_0 b \sin \alpha \Phi_{,\psi} d\psi$$

dla belki o przekroju zamkniętym;

$$(7.5) dE_b = M_0 c [4(\mu+1)d\Phi - 2(2\mu+1)d\psi] + 2M_0 b \sin \alpha \Phi_{,\psi} d\psi$$

dla zginania ceownika "na zewnątrz" oraz:

$$(7.6) dE_b = M_0 \left(c d\psi + 4 \frac{a}{\cos \alpha} d\beta + 2a d\Phi \right)$$

dla przypadku zginania ceownika "do wewnątrz".

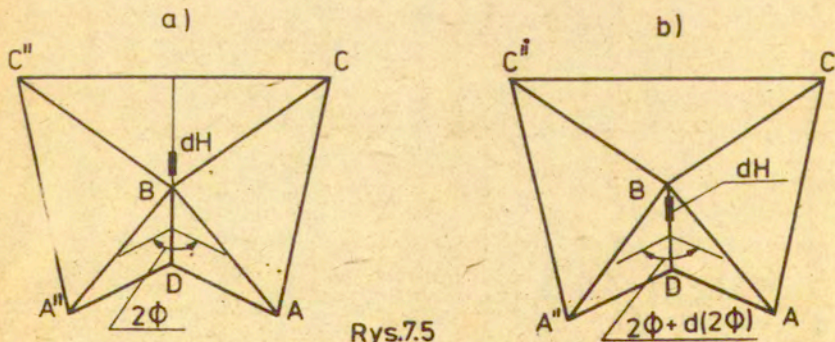
Energia deformacji dwóch naroży kolumny, zgodnie z (6.16) wyraża się wzorem:

$$dE_{cb} = 2M_0 dH \cdot \gamma$$

gdzie γ jest kątem o jaki zostaje przegięty infinitezmalny element naroża dH , gdy parametr zaawansowania procesu zginania zmienia się o $d\gamma$. Z rysunku 7.5 wynika, że: $\gamma = 2\Phi$, w związku z tym po uwzględnieniu (7.1₄)

$$(7.7) dE_{cb} = 2M_0 dH(\psi) \cdot 2\bar{\Phi}(\psi) = 2M_0 b \bar{\Phi} \cos \alpha \cdot \Phi_{,\psi}$$

wyrażenie to jest prawdziwe dla przypadku zginania belki o przekroju zamkniętym oraz dla przypadku zginania ceownika, "na zewnątrz".



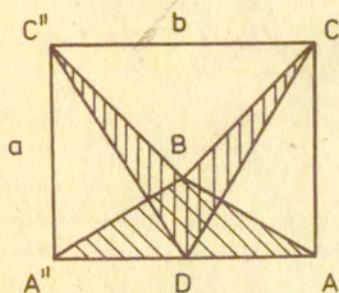
Energię przewijania, oraz jej przyrost wyznaczyć można na podstawie zależności (5.24). Ponieważ w czasie zginania belki przewinięciu ulega materiał o łącznym polu:

$$(7.8) \quad S = b^2 \sin \alpha \quad \text{Rys. 7.5.}$$

elementarny przyrost energii przewijania wynosi:

$$(7.9) \quad dE_r = 2 \hat{E}_{int} dA = 2 \frac{M_0 \lambda_0 v dt}{r} = 2 \frac{M_0 dS}{r} = 2 M_0 \frac{d(b^2 \sin \alpha)}{r}$$

gdzie: λ i α zdefiniowane są na rys. 7.3 natomiast r jest średnią wartością promienia przewijania, która zostanie wyznaczona w dalszej części pracy.



■ materiał przewijany
w procesie zginania
belki

Rys.7.6

Korzystając z zależności (7.4 - 7.8) przyrost energii dysypowanej wyznaczyć można z zależności:

$$(7.10) \quad dE_c = dE_b + dE_{cb} + dE_r$$

która dla poszczególnych przypadków zginania (po uwzględnieniu równości $dE_c = M(2\varphi) d(2\varphi)$) wyrazi się wzorami:

$$(7.11) \quad \frac{M(2\varphi)}{M_0 a} = (\mathcal{H} - 1) \left[4 + \frac{2}{\mathcal{H}} + \frac{2 \cos \alpha}{(2\lambda - \sin \alpha) \sqrt{\lambda^2 - \lambda \sin \alpha}} + \frac{2\Phi}{\lambda} \cos \alpha + \frac{2}{\lambda^2} \frac{a}{r} \cos \alpha \right] +$$

$$+ \mathcal{H} \left(\frac{2}{\mathcal{H}} + \frac{2 \sin \alpha}{\lambda} \right) + \frac{2}{\mathcal{H}}$$

gdzie:
$$\lambda = \frac{\lambda' \cos \beta \psi}{\sqrt{\lambda' \sin \psi - \lambda'^2 \sin^2 \psi}}$$

$$\bar{\Phi} = \arccos(1 - 2\lambda' \sin \psi)$$

dla zginania belki o przekroju prostokątnym

$$17.12/ \frac{M(2\psi)}{M_0 c} = \frac{\alpha_{1\psi} \cos \alpha}{\lambda} \left(\frac{4b}{r} + 2\bar{\Phi} \right) + \bar{\Phi}_{1\psi} \left(\frac{2\psi \sin \alpha}{\lambda} + 4\psi + 4 \right) - 4\psi - 2$$

dla zginania belki ceowej "na zewnątrz" oraz

$$17.13/ \frac{M(\psi)}{M_0 c} = \frac{4\psi}{\cos \alpha} B_{\psi} + 2\psi \bar{\Phi}_{1\psi} + 1$$

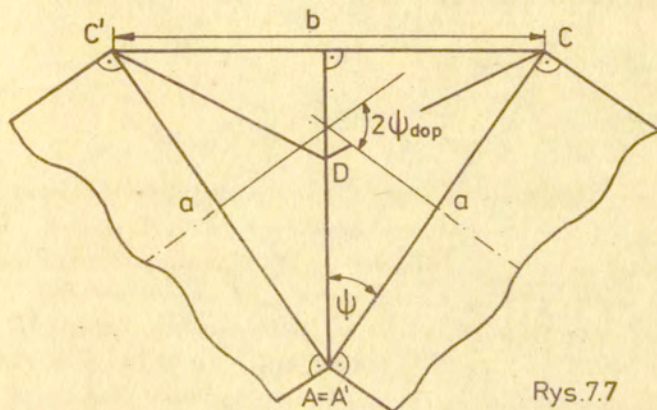
dla przypadku zginania belki ceowej "do wewnątrz". Wzory /7.11/ i /7.12/ określają przebiegi zmienności momentu gnącego w funkcji parametru zaawansowania procesu 2ψ / . Występują w nich dwa wolne parametry λ i $\beta = \frac{b}{r}$.

Parametr $\lambda = \frac{a}{b}$ /Rys. 7.3/, może być określony na drodze doświadczalnej: $\lambda \cong 1$. /17,18,75,76/. Zakłada się przy tym milcząco, że jest on niezmienny w procesie zginania, tzn. że długość stacjonarnego przegubu plastycznego CC" Rys.7.3 nie zmienia się. Konieczność uwzględnienia w rozwiązaniach /7.11/ i /7.12/ doświadczalnej wartości $\lambda = 1$ jest wynikiem przyjęcia uproszczonego modelu deformacji naroża /Rys. 7.5/. Wprowadzenie modelu quasi-izometrycznego pozwoliłoby na usunięcie tego uproszczenia /podobnie jak w przypadku zgniatania kolumn por. 8.11 i 8.12/, jednak kosztem znacznego skomplikowania wyrażeń końcowych oraz konieczności używania każdorazowo metod numerycznych do wyznaczania minimalnej wartości obciążenia zewnętrznego.

Nie można natomiast określić na drodze eksperymentalnej promienia przewijania r . Należy bowiem zauważyć, że jest to pewna umowna, średnia wartość parametru będącego w

rzeczywistości funkcją parametru zaawansowania proceu (2ψ) i funkcją zmiennych przestrzennych^{**}.

Podobnie jak w przypadku zginięcia kolumn cienkościennych wartość tego parametru określona zostanie z postulatu minimum średniego obciążenia zewnętrznego. W tym celu należy najpierw określić granice fizycznej stosowalności związków (7.11) i (7.12), ze względu na parametr (2ψ) (kąt zgięcia belki). Dla parametru λ równego w przybliżeniu jedności kąt zgięcia (2ψ) ograniczony jest fizycznie zetknięciem się ścianek AD i AD'. Rys. 7.7, a wartość granicznego kąta ($2\psi_{dop}$) określona jest zależnością:



$$(7.14) \quad \sin \psi_{dop} = \frac{1}{2\lambda}$$

W związku z tym wartość średniego momentu gnącego wyznaczyć można z zależności:

^{**} Należy zauważyć (Por. Rys. 7.2), że w punkcie B promień przewijania osiąga swą największą wielkość $r = r_{max}$, która zmniejsza się wzdłuż każdej z osi BC, BC'', BA itd. aby w każdym z punktów C, C'', A, A'' osiągnąć minimalną wielkość $r_{min} = H/2$ (H-grubość ścianki).

$$(7.15) \quad E_c(2\psi_{dop}) = \int_0^{\psi_{dop}} dE(\psi) = M_{3r}(2\psi_{dop}) \cdot 2\psi_{dop}$$

Dla poszczególnych przypadków zginania belek zależność ta przyjmuje postać:

$$(7.16) \quad \frac{M_{3r}(2\psi_{dop})}{M_0 a} = \left(1 + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{\psi} - 2 + \frac{2\beta}{\psi} \sin\psi + \frac{4a}{r} \frac{\sin^2\psi \cos\psi}{\psi} + b\phi(b)$$

(po prawej stronie równości opuszczono wszędzie dolny indeks zmiennej ψ).

gdzie:

$$\psi_{dop} = \arcsin \frac{1}{2\lambda}$$

$$\phi(b) = \int_0^{\psi_{dop}} \Phi \cos \alpha_{\alpha, \psi} d\psi + \int_0^{\psi_{dop}} \sin \alpha \Phi_{\psi} d\psi$$

W wyrażeniu $\phi(b)$ poszczególne człony reprezentują odpowiednio energię związaną z deformacją naroży belki i energię zginania krawędzi o zmiennej długości. Eksperymenty numeryczne wykazują, że udział wymienionych mechanizmów w całkowitej dysypacji energii nie przekracza 10%. Jednocześnie wyrażenia na pochodną związku $\phi(b)$, z argumentem (ψ_{dop}) uwikłanym w górnej granicy całkowania miałyby bardzo skomplikowaną postać. Z tych względów w dalszych rozważaniach pominięto człon $D(b)$.

Przy powyższych założeniach równanie (7.16) przyjmuje prostszą postać:

$$(7.17) \quad \frac{M_{3r}(2\psi_{dop})}{M_0 a} = \left(1 + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{\psi} + \frac{2\beta}{\psi} \sin\psi + \frac{4a}{r} \frac{\sin^2\psi \cos\psi}{\psi} - 2$$

Natomiast z warunku minimum obciążenia zewnętrznego

$\frac{d}{d\psi_{dop}} (M_{3r}(\psi)) = 0$ otrzymano związek między dwoma wolnymi parametrami procesu λ i $\gamma = \frac{a}{r}$, który po wykorzystaniu informacji doświadczalnej $\lambda = 1$ przybiera postać:

$$(7.18) \frac{a}{r} = \frac{1 + \frac{1}{\chi}}{2} \frac{\pi + \beta \sin \psi - (\beta \sin \psi + \beta \cos \psi) \psi}{2[2(\sin \psi \cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \psi - \sin^2 \psi \cos \psi]}$$

gdzie:

$$\sin \psi = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \arcsin \left(\frac{2 \sin \psi}{2 - \sin 2\psi} \right)$$

$$\beta_{1\psi} = \frac{2 \cos \psi}{\sqrt{2 - \sin^2 2\psi}}$$

Po dokonaniu odpowiednich przekształceń związek ten można zapisać w formie:

$$(7.19) \frac{a}{r} \cong \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) - 0,2}{0,222} = 2,25 \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) - 0,9$$

W podobny sposób oszacować można stosunek $\gamma = \frac{a}{r}$ dla przypadku zginania belki ceowej "na zewnątrz". Odpowiednie związki mają wtedy postać:

$$(7.20) \frac{M_{\text{sc}}(2\psi_{\text{stop}})}{M_0 c} = 2(\chi+1) \frac{\Phi_0}{\psi_0} + 2(2\chi+1) + 8\chi \frac{\sin^2 \psi \sin \alpha}{\psi} \frac{a}{r}$$

Natomiast z warunku minimum obciążenia zewnętrznego otrzymamy:

$$(7.21) \frac{a}{r} = \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) \frac{\pi}{8[(2 \sin \psi \cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \psi - \sin^2 \psi \cos \psi]}$$

gdzie:

$$\sin \psi = \frac{1}{2\lambda}$$

Wyrażenie to można uprościć wprowadzając doświadczalną wartość parametru λ ($\lambda=1$). Związek ^(7.21) redukuje się wtedy do wzoru:

$$(7.22) \frac{a}{r} = \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) 3,49$$

który określa średni promień przewijania r jedynie jako funkcję parametrów konstrukcyjnych belki ($a; \psi = \frac{a}{c}$).
 W przypadku zginania belki ceowej "do wewnątrz" proces deformacji opisany jest tylko jednym wolnym parametrem α Rys. 7.4.
 W związku z tym można go wyznaczyć z warunku minimum średniego obciążenia zewnętrznego bez żadnych dodatkowych informacji ilościowych.

Średnia wartość momentu gnącego opisana jest w tym przypadku zależnością:

$$(7.23) \frac{M_{gr}(\alpha)}{M_0 c} = \frac{\psi \sqrt{1-\sin \alpha}}{\alpha} + \frac{\psi \sqrt{1-\sin \alpha}}{\alpha \cos \alpha} + 1$$

a warunek minimum prowadzi do równania

$$(7.24) \cos^2 \alpha - \alpha \sin \alpha + \cos \alpha = 0$$

którego rozwiązaniem jest:

$$\alpha \cong 0,995 \text{ rad} \cong 57^\circ$$

Wykorzystując wyprowadzone zależności dla wolnych parametrów procesu zginania można przekształcić podane poprzednio zależności moment - kąt obrotu do następujących postaci:

$$(7.25) \frac{M(2\psi)}{M_0 \alpha} = (\mathcal{R}-1) \left[4 + \frac{2}{\psi} + \frac{2 \cos \alpha}{(2-\sin \alpha) \sqrt{1-\sin \alpha}} + 2\Phi \cos \alpha + \right. \\ \left. + 2 \cos \alpha (2,25 (1 + \frac{1}{\psi}) - 0,9) \right] + 2 \mathcal{R} \left(\frac{1}{\psi} + \sin \alpha \right) + \frac{2}{\psi}$$

dla belki zamkniętej o przekroju prostokątnym oraz

$$(7.26) \frac{M(2\psi)}{M_0 \alpha} = (\mathcal{R}-1) \left[6 + \cos \alpha \left(\frac{2}{(2-\sin \alpha) \sqrt{1-\sin \alpha}} + 2\Phi + 26,2 \right) \right] + \\ + 2 \mathcal{R} (1 + \sin \alpha) + 2$$

dla belki zamkniętej o przekroju kwadratowym gdzie:

$$\mathcal{R} = \frac{\cos \psi}{\sqrt{\sin \psi - \sin^2 \psi}}$$

$$\Phi = \arccos (1 - 2 \sin \psi)$$

$$\alpha = \bar{\Phi} - \psi$$

Dla belek ceowych zależności moment - kąt obrotu mają następującą postać:

$$(7.27) \frac{M(2\psi)}{M_0 C} = 0,94 \mu \cos \alpha \alpha_{1,\psi} [13,6 \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) + 2\bar{\Phi}] + \\ + \bar{\Phi}_{1,\psi} (1,87 \mu \sin \alpha + 4\mu + 4) - 4\mu - 2$$

gdzie jak poprzednio:

$$\bar{\Phi} = \arccos(1 - 2\sin \psi)$$

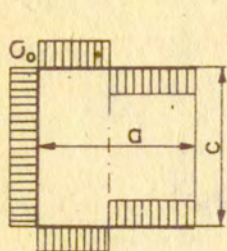
$$\alpha = \bar{\Phi} - \alpha$$

dla przypadku zginania belki ceowej "na zewnątrz" oraz:

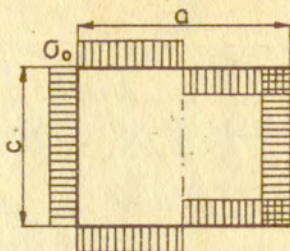
$$(7.28) \frac{M(\varphi)}{M_0 C} = \mu \left(\frac{2,380}{\sqrt{1 - 0,420 \mu^2 (5\varphi - \frac{\varphi}{2})}} + \frac{1,300}{\sqrt{1 - 0,106 \mu^2 (5\varphi - \frac{\varphi}{2})}} \right) \frac{1}{\cos^2(5\varphi - \frac{\varphi}{2})} + 1$$

dla przypadku zginania belki ceowej "do wewnątrz".

Wyrażenia (7.25 - 7.28) osiągają wartości nieskończenie duże dla parametrów zaawansowania procesu (ψ lub φ) bliskich zeru. Fakt ten jest wynikiem pominięcia w powyższych rozważaniach wstępnej fazy związanej z utratą stateczności. Z drugiej strony wiadomo jednak, że belka z materiału sztywno-idealnie plastycznego nie może przenieść obciążenia większego, niż to, które odpowiada uplastycznieniu całego przekroju nieodkształconej belki /77/ Rys. 7.8. Dlatego też w dalszych rozważaniach wartości funkcji (7.25 ÷ 7.28) ograniczone zostaną od góry wielkościami M_{\max} które odpowiadają rozkładowi naprężeń z Rys. 7.8.



belka ceowa



belka o przekroju zamkniętym

Rys.7.8

wynoszą one odpowiednio:

$$(7.29) \quad M_{max} = 2G_0 H c^2 \left(\frac{H + H^2}{1 + 2H} \right)^2$$

$$\frac{M_{max}}{M_0 c} = 8 \frac{c}{H} \left(\frac{H + H^2}{1 + 2H} \right)^2$$

dla belki ceowej oraz:

$$(7.30) \quad M_{max} = G_0 H a^2 \left(\frac{2 + H}{2H} \right)$$

$$\frac{M_{max}}{M_0 a} = 4 \frac{a}{H} \left(\frac{2 + H}{2H} \right)$$

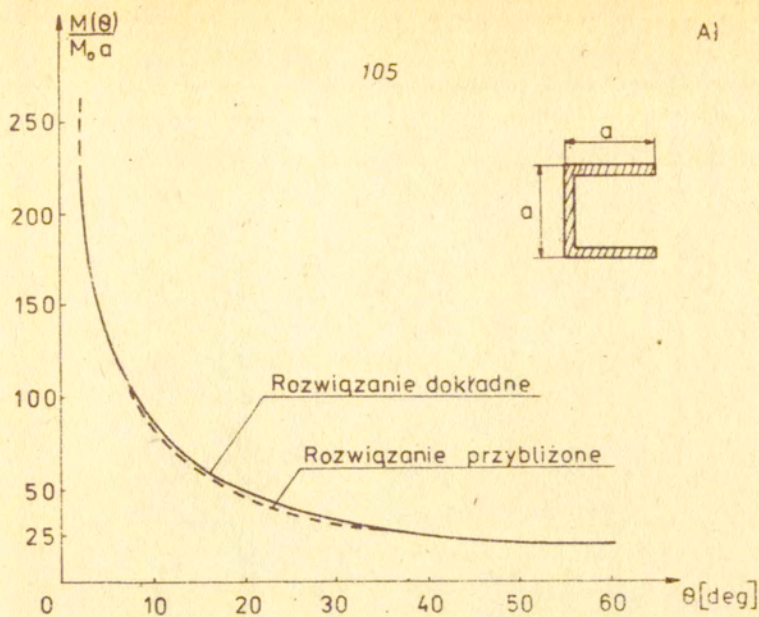
dla belki o przekroju prostokątnym.

Związki (7.25 ÷ 7.27) opisujące zależność moment-kąąt obrotu dla przypadku zginania belki i zginania ceownika "na zewnątrz" mają stosunkowo skomplikowaną postać. Wydaje się więc celowym podanie przybliżonych zależności opisujących wspomniany proces. W tym celu założono, że zależność tę można opisać funkcją potęgową postaci:

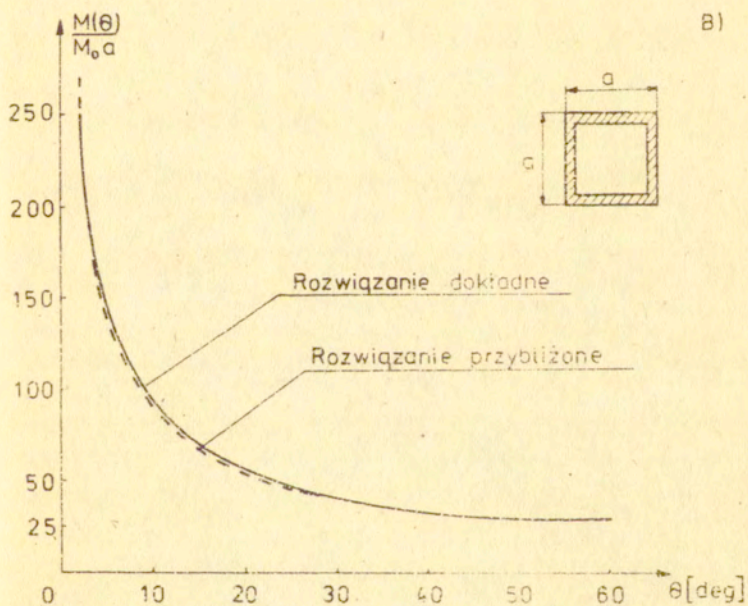
$$(7.31) \quad \frac{M(\theta)}{M_0 a} = \frac{K}{\theta^\alpha}$$

gdzie przez θ oznaczono kąt o jaki zostanie zgięta belka lub ceownik (oznaczony poprzednio przez 2ψ). Stałe K i α wyznaczyć można żądając aby zależność 7.31 była zgodna z zależnością podstawową w punktach o współrzędnych $\theta_1 = 6^\circ$ i $\theta_2 = 60^\circ$. Punkty te zostały wybrane doświadczalnie w ten sposób aby uzyskać najlepszą zgodność przebiegów.

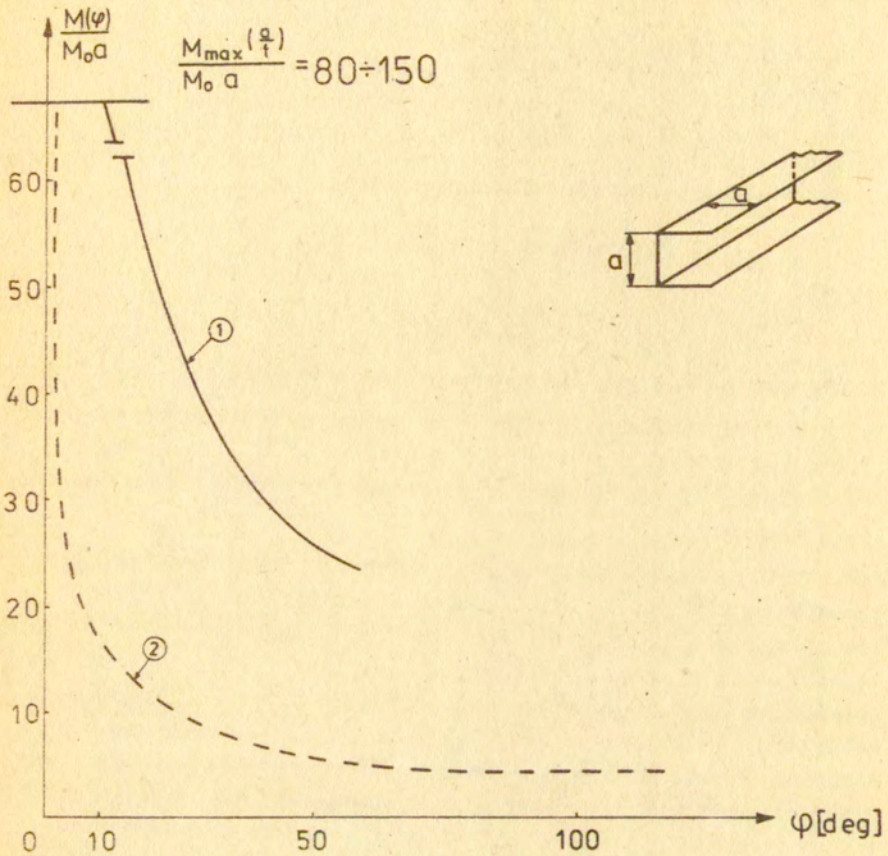
A)



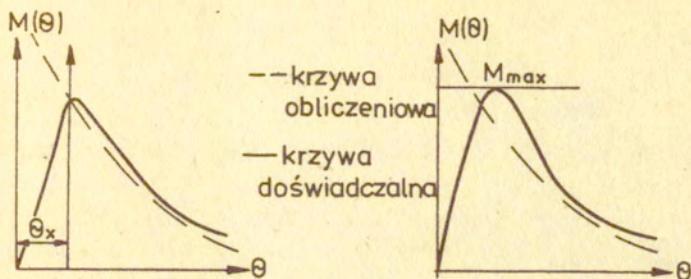
B)



Rys.79



Rys.7.12



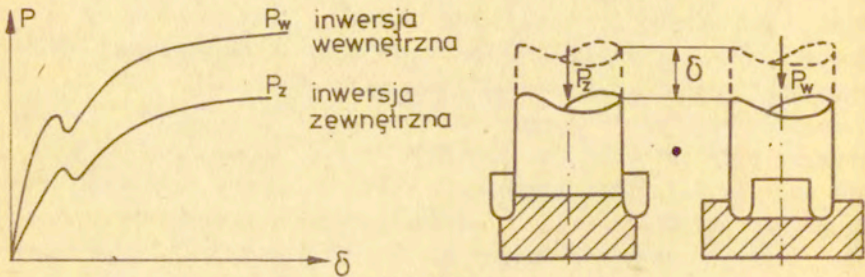
Rys.7.11

Na rysunku 7.12 przedstawiono porównanie charakterystyk moment - kąt obrotu dla przypadku zginania belek ceowych ($\mathcal{N} = 1$). Krzywa 1 na Rys. 7.12. odpowiada przypadkowi zginania "na zewnątrz" natomiast krzywa 2 przypadkowi zginania "do wewnątrz". Z analizy tego rysunku wynika, że zdolność do pochłaniania energii przy zginaniu "na zewnątrz" jest kilkakrotnie większa niż przy zginaniu "do wewnątrz". Fakt ten jest oczywistym następstwem braku przewijania materiału wzdłuż ruchomych przegubów plastycznych w przypadku zginania "do wewnątrz". Do momentu pisania tej pracy brak niestety wyników doświadczeń.

VIII. INWERSJA POWŁOK CYLINDRYCZNYCH

Przykładem rozciągłej deformacji powłok cienkościennych jest tzw. inwersja cylindra przedstawiona na Rys. 2.8. Mechanizm deformacji tego procesu opisany jest w Rozdz. 2 i 3.

Wykres obciążenie zewnętrzne - skrócenie otrzymany doświadczalnie dla wewnętrznej i zewnętrznej inwersji cylindra przedstawiony jest schematycznie na Rys. 8.1. (za /14/).

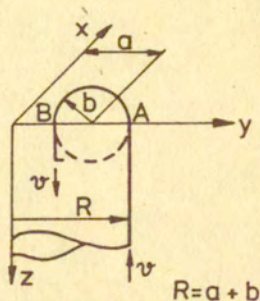
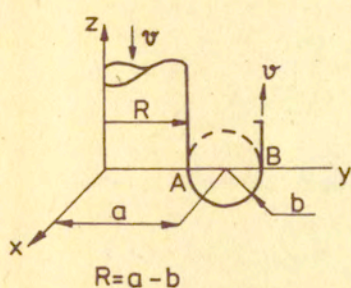


Rys.8.1

Widać tu wyraźnie, że poza stadium początkowym inwersja powłoki cylindrycznej charakteryzuje się niezmienną siłą obciążenia zewnętrznego w funkcji skrócenia cylindra. Tego typu charakterystyka jest szczególnie pożądana we wszelkiego typu obsorberach energii /14,78,79,80/.

Podobnie jak w poprzednich rozdziałach obciążenie zewnętrzne towarzyszące inwersji wyznaczone będzie, z dokładnością do jednego parametru, z postulatu równości zewnętrznej i wewnętrznej mocy dysypowanej, natomiast minimalna wartość siły (P_w lub P_z) wyznaczona będzie z postulatu minimum obciążenia zewnętrznego.

Rys. 8.2 przedstawia schemat oznaczeń wykorzystywanych następnie do wyznaczenia obciążeń zewnętrznych.



Rys.8.2

Zarówno w jednym jak i w drugim przypadku inwersji cylindra dysypacja energii wstępuje w ruchomym przegubie plastycznym $\widehat{A B}$ Rys. 8.2 odpowiadającym plastycznemu opływowi powierzchni torusa między punktami A i B (def. 1 i 2 str.29).

Zgodnie ze wzorami (5.12) i (5.14) moc energii dysypacji związanej z plastycznym opływem torusa wyraża się wzorami:

$$(8.1) \quad a) \quad \dot{E}_{int} = \frac{3\pi}{2} M_0 v \left[\frac{2\gamma^2 + 4\gamma + 2}{(1+2\gamma)^2} + \xi \ln(1+2\gamma) \right]$$

dla inwersji zewnętrznej oraz:

$$b) \quad \dot{E}_{int} = \frac{3\pi}{2} M_0 v \left[\frac{2\gamma^2 - 4\gamma + 2}{(1+2\gamma)^2} - \xi \ln(1-2\gamma) \right]$$

dla inwersji wewnętrznej; gdzie: $\gamma = \frac{b}{R}$ Rys 8.2

$\xi = \frac{4R}{H}$ - jest parametrem konstrukcyjnym powłoki (H - grubość ścianki)

Moc energii dysypowanej na liniach nieciągłości A i B wyraża się natomiast wzorami: (zgodnie z 5.22).

$$a) \dot{E}_{int}^1 = 2\pi M_0 v \frac{2+2\gamma}{8(1+2\gamma)} \quad \text{-inwersja zewnętrzna}$$

/B.2/

$$b) \dot{E}_{int}^2 = 2\pi M_0 v \frac{2-2\gamma}{8(1-2\gamma)} \quad \text{-inwersja wewnętrzna}$$

Następnie z postulatu równości zewnętrznej i wewnętrznej mocy dysypowanej wyznaczyć można obciążenia zewnętrzne towarzyszące inwersji powłok cylindrycznych. Wynoszą one odpowiednio:

$$\frac{P_{ext}(b)}{2\pi M_0} = \frac{3}{4} \frac{2\gamma^2 + 4\gamma + 2}{(1+2\gamma)^2} + \frac{3}{4} \zeta \ln(1+2\gamma) + \frac{2+2\gamma}{8+2\gamma^2}$$

-inwersja zewnętrzna

/B.3/ oraz:

$$\frac{P_{ext}(b)}{2\pi M_0} = \frac{3}{4} \frac{2\gamma^2 - 4\gamma + 2}{(1-2\gamma)^2} - \frac{3}{4} \zeta \ln(1+2\gamma) + \frac{2-2\gamma}{8-2\gamma^2}$$

-inwersja wewnętrzna

Obydwa powyższe wyrażenia są uwikłanymi funkcjami jednego wolnego parametru procesu /b - mały promień torusa/ $b = \delta R$. Obciążenia rzeczywiste wyznaczyć więc można z następującego układu równań:

$$a) \left(\frac{P_{ext}(b)}{2\pi M_0} \right)_{\text{ob}} = \frac{1}{R} \left[\frac{3(-8\gamma^2 - 12\gamma - 4)}{4(1+2\gamma)^4} + \frac{3}{4} \zeta \frac{2}{1+2\gamma} + \frac{-4\gamma^2 - 8\gamma - 2}{(8+2\gamma^2)^2} \right] = 0$$

- inwersja zewnętrzna

/B.4/ oraz

$$b) \left(\frac{P_{ext}(b)}{2\pi M_0} \right)_{\text{ob}} = \frac{1}{R} \left[\frac{3(8\gamma^2 - 12\gamma + 4)}{4(1-2\gamma)^4} - \frac{3}{4} \zeta \frac{2}{1-2\gamma} + \frac{-4\gamma^2 + 8\gamma - 2}{(8-2\gamma^2)^2} \right] = 0$$

- dla inwersji wewnętrznej

Numeryczne rozwiązanie powyższych równań dla różnych wartości parametru δ zestawione są w Tabeli 2.

Tabela 2

$\xi = \frac{4R}{H}$	δ_{min}	
	inwersja zewnętrzna	inwersja wewnętrzna
40	0,22	0,15
80	0,15	0,11
160	0,10	0,084
320	0,069	0,061

Pewne uproszczenie przedstawionych powyżej równań uzyskać można zakładając, że grubość ścianki cylindra jest niezmienna w procesie inwersji. Założenie to ma pełne uzasadnienie doświadczalne dla przypadku inwersji zewnętrznej, nie jest natomiast spełnione w przypadku inwersji wewnętrznej, gdzie zmiany grubości ścianki cylindra są rzędu 50 % /14/.

Przy powyższym założeniu wyrażenie na średnią siłę zewnętrzną inwersji cylindra przybiera postać: (zgodnie z5.15).

$$(8.5) \frac{P_{ext}(b)}{251 M_0} = 0,75 \frac{1+\delta}{\delta} \ln(1+2\delta) + 1,5 \xi \delta + \frac{2}{\delta}$$

gdzie jak poprzednio:

$$\delta = \frac{b}{R} \quad a \quad \xi = \frac{4R}{H}$$

a warunek minimum obciążenia zewnętrznego prowadzi do równania:

$$(8.6) \left(\frac{P_{ext}(b)}{251 M_0} \right)_b = \frac{1}{R} \left\{ -0,75 \frac{1}{\delta^2} \ln(1+2\delta) + 0,75 \frac{1+\delta}{\delta} \frac{2}{1+2\delta} + 1,5\xi - \frac{2}{\delta^2} \right\} = 0$$

Numeryczne rozwiązania powyższego równania dla różnych parametrów ξ zestawione są w Tabeli 3.

Porównanie wyników z tabeli 2 i 3 prowadzi do wniosku, że przyjęte uproszczenia mają znikomy wpływ na ekstremalną wartość

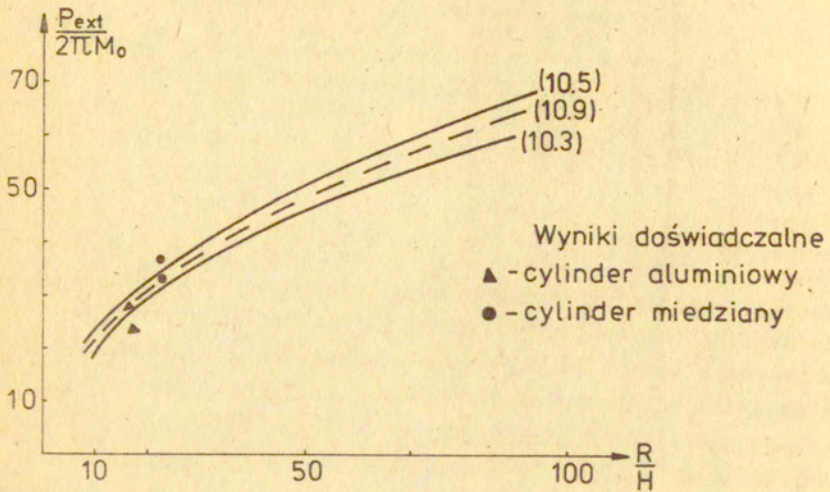
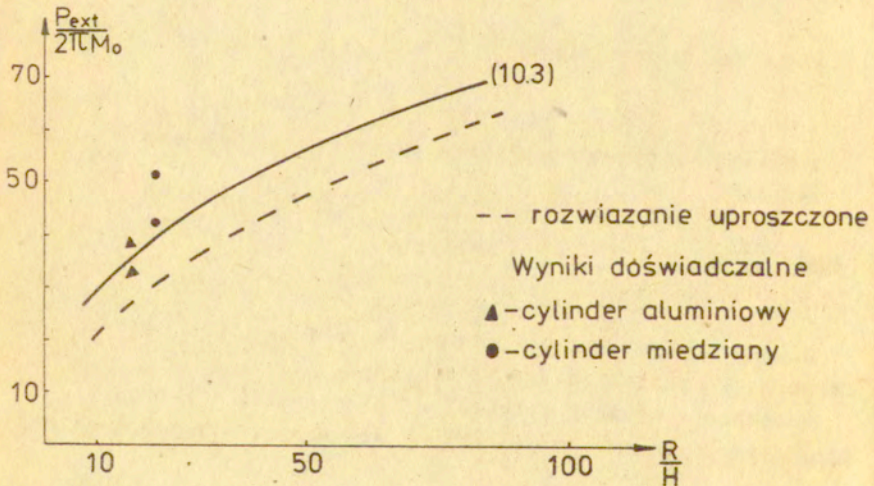
a) inwersja zewnętrznab) inwersja wewnętrzna

Tabela 3

ξ	γ_{min}	$\frac{P_{ext}}{2\pi M_0}$
40	0,18	25,42
80	0,13	32,49
160	0,091	45,32
320	0,066	63,48

parametru γ . Również wielkości obciążenia zewnętrznego wyznaczonego ze wzorów: (8.3a) i uproszczonego (8.5) wykazują niewielkie różnice rzędu 10 % Rys. 8.3a.

Możliwe jest również dalsze uproszczenie przedstawionych rozwiązań dla przypadku inwersji zewnętrznej. Uproszczenie to oparte jest na pominięciu w wyrażeniu (8.5) pierwszego członu, opisującego dysypację, związaną ze zmianą krzywizny równikowej powłoki (zgodnie z założeniem opisanym związkami 5.5). W tym przypadku wyrażenie (8.5) redukuje się do wzoru:

$$(8.7) \frac{P_{ext}(b)}{2\pi M_0} = 1,5\xi\gamma + \frac{2}{\gamma}$$

a warunekna minimum obciążenia zewnętrznego prowadzi do równania:

$$(8.8) \gamma \cong \sqrt{\frac{1,33}{\xi}}$$

Podstawiając (8.8) do (8.7) otrzymano ostatecznie

$$(8.9) \frac{P_{ext}(b)}{2\pi M_0} = 3,46\sqrt{\xi} \quad \wedge \quad \xi = \frac{4R}{H}$$

Wynik ten przy podobnych założeniach podany jest w pracy W. Johnsona /33/. Na rysunku 8.3a rozwiązanie (8.9) reprezentuje linia przerywana. Widać tu, że wyrażenie (8.9) lepiej przybliża rozwiązanie dokładne niż wyrażenie (8.5).

Opisane powyżej uproszczenia nie dają natomiast zadowalają-

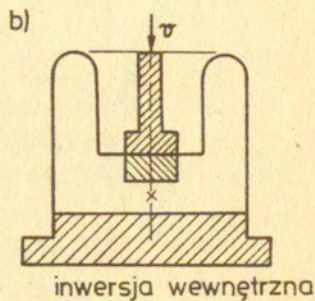
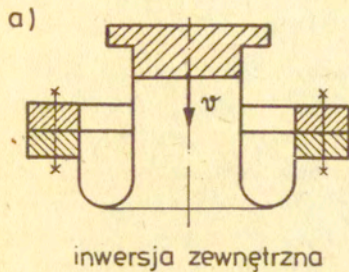
cych wyników w przypadku wewnętrznej inwersji cylindra (Rys. 8.3b) - rozwiązanie uproszczone, dla stałej grubości ścianki, przedstawiono tu linią przerywaną.

Jak już wspomniano poprzednio zaobserwowane doświadczalnie zmiany grubości powłoki mogą być rzędu 50 % /33/, tymczasem zmiana grubości obliczona z postulatu nieściśliwości materiału (4.25) jest rzędu 35 %. Wynika stąd, że w rozważanym przypadku inwersji wewnętrznej założenie o nierozciągliwości powłoki w kierunku tworzącej cylindra i wzdłuż linii południków torusa nie jest spełnione i powinno być zweryfikowane w dalszych badaniach. Fakt ten jest także jedną z przyczyn gorszej zgodności opisanych tu obliczeń z danymi doświadczalnymi Rys. 8.3b.

Również porównanie wyników obliczeniowych z danymi eksperymentalnymi sprawia pewne trudności. Wyniki doświadczeń²⁾ powłokami aluminiowymi i miedzianymi opisane w pracy W. Johnson'a /33/ wykazują bowiem zaskakującą właściwość znacznego (rzędu 25 %) spaiku średniej siły obciążenia zewnętrznego przy obciążeniach dynamicznych (inwersja z prędkością 6 m/s). Jednocześnie doświadczenie przeprowadzone ze znacznie mniejszą prędkością obciążenia zewnętrznego (od $0,4 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ do $8,5 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$) wykazują pewien wzrost obciążenia. Słuszna więc wydaje się sugestia W. Johnson'a, że efekt ten związany jest z mechanicznymi właściwościami matrycy, na której opisywana powłoka ulega inwersji. Wpływ ten jest jednak trudny do oszacowania i nie był uwzględniony w prezentowanym rozwiązaniu, dlatego też na Rys. 8.3 przedstawiono wyniki eksperymentów quasi-statycznej i dynamicznej inwersji cylindra. Widać stąd, że inwersja zewnętrzna jest opisywana z zadowalającą dokładnością zarówno dla przypadku obciążenia dynamicznego jak i quasi-statycznego, natomiast quasi-statyczna inwersja wewnętrzna opisana równaniem (8.3) może być obciążona dużym, rzędu 25 % błędem, podczas gdy inwersja dynamiczna daje zadowalające wyniki.

Ostateczna weryfikacja opisanej w tym rozdziale metody obliczeniowej będzie możliwa po przeprowadzeniu doświadczeń, w których

wyeliminowany zostanie wpływ matrycy. Schemat tego typu eksperymentu przedstawiony jest na Rys. 8.4ab.



Rys.8.4

IX. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono teorię dużych deformacji powłok plastycznych poddanych obciążeniom ściskającym.

Do obliczeń zastosowano metodę kinematyczną, w której pole przemieszczeń powłoki przyjmuje się z obserwacji doświadczalnych. Podejście takie jest wygodne, ze względu na występowanie skomplikowanych geometrycznie mechanizmów deformacji uniemożliwiających założenie a priori pola prędkości w deformowanej powłoce, tak jak jest to zwykle przyjęte w plastycznej analizie konstrukcji.

Dalej wprowadza się klasę kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów deformacji, określonych z dokładnością do jednego lub kilku wolnych parametrów. W tak zdefiniowanej rodzinie mechanizmów deformacji można następnie wyznaczyć stowarzyszone obciążenia zewnętrzne, korzystając z postulatu równości zewnętrznej i wewnętrznej mocy dysypowanej. Wspomniany postulat może być interpretowany jako globalne spełnienie równań równowagi.

Obciążenia rzeczywiste wyznaczane są następnie z zasady minimum obciążenia zewnętrznego, która (przy spełnieniu dodatkowych warunków) wynika z uogólnionych twierdzeń nosności granicznej /91/, lub też z warunków stateczności quasi-statycznego procesu plastycznego płynięcia /82/.

Zastosowana metoda pozwoliła na otrzymanie rozwiązań w postaci zamkniętej, dla różnych stopni aproksymacji rzeczywistego procesu zgniatania. Rozwiązania te, dla wybranych, prostych konstrukcji cienkościennych mają nieskomplikowaną postać i w prezentowanej formie nadają się do zastosowań praktycznych, a w szczególności do wyznaczania charakterystyk wszelkiego typu absorberów energii /14, 32, 33, 34, 78, 81/, oraz do wyznaczania

charakterystyk silnie nieliniowych elementów w hybrydowej metodzie symulacji zderzeń pojazdów /79/.

Z przedstawionych rozważań wynikają również niektóre kierunki dalszych badań.

Dotyczy to określania kształtu lokalnej formy wyboczenia plastycznego, który do tej pory przyjmowany był na podstawie obserwacji doświadczalnych. Wydaje się, że kształt ten określić można na podstawie sprężystej i sprężysto-plastycznej analizy procesu wyboczenia oraz pokrytycznego zachowania się powłok. W trakcie procesu deformacji następuje tu lokalizacja odkształceń plastycznych. Pewne ciekawe wyniki w tej dziedzinie przyniosły prace S.Łukasiewicza i W.Szyszkowskiego /31; 56/, a ostatnio także praca V.Trevgaard a i A.Needleman a /85/.

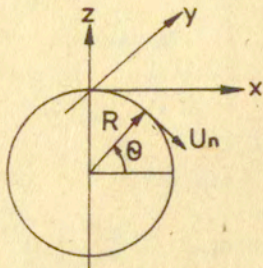
Szczegółowego zbadania wymaga również uwzględnienie zjawisk wzmocnienia materiału i lepkości w zakresie plastycznym na wielkość obciążeń zewnętrznych. Jest to ważny problem dla zastosowań praktycznych, a szczególnie dla wszelkiego typu metod optymalizacji konstrukcji ze względu na zdolność do pochłaniania energii. Pierwsze uproszczone rozwiązanie tego problemu zaproponowano w pracach T.Wierzbickiego i W.Abramowicza /25,26/ oraz w pracy T.Wierzbickiego i T. Akestronia /35/. Pomocne tu mogą być również prace dotyczące wyznaczania krzywych gięcia pasm metalowych /81,83/.

Ze względu na duże znaczenie praktyczne omawianych zagadnień wydaje się, że doczekają się one szybkiego i gruntownego zbadania.

Dodatek A

Związki kinematyczne opisujące ruch po okręgu koła.

I. Ruch po okręgu koła leżącego w płaszczyźnie $\{zx\}$ Rys. A.1.



$$\theta = \omega t$$

$$U_n = -\omega R$$

Rys. A.1

Jeżeli ruch po okręgu odbywa się ze stałą prędkością U_n to jest on opisany układem równań:

$$(A.1) \quad \begin{aligned} x &= R \cos \theta = R \cos \omega t \\ z - R &= R \sin \theta = R \sin \omega t \end{aligned}$$

Prędkość ruchu dana jest:

$$(A.2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -U_n \sin \theta = -U_n \frac{z}{R} \\ \dot{z} &= U_n \cos \theta = U_n \frac{x}{R} \end{aligned}$$

wynika stąd:

$$(A.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} &= -\omega \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} &= -\omega \end{aligned}$$

Z A.1 wynika:

$$(A.4) \quad Z_{,xx} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\sin^3 \theta}$$

Jeżeli badać będziemy ruch po okręgu w pobliżu jego przecięcia z osią z ($\theta \cong \frac{\pi}{2}$) to:

$$\gamma_{,xxx} \cong \frac{1}{R}$$

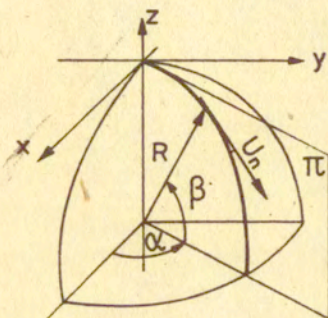
a równanie ruchu ma postać:

$$-\frac{\partial \dot{z}}{\partial x} + \mu_n \gamma_{,xxx} = 0$$

(A.5) lub

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial x} - \mu_n \frac{1}{R} = 0$$

II. Ruch po okręgu koła leżącego w płaszczyźnie π Rys. A.2.



Rys. A.2

Ruch po okręgu koła z Rys. A.2 opisany jest równaniem

$$(A.6) \quad \begin{aligned} x &= R \cos \beta \cos \alpha \\ y &= R \cos \beta \sin \alpha \\ z - R &= R \sin \beta \end{aligned}$$

gdzie: $\beta = -\omega t$

α - parametr, określający położenie płaszczyzny π

Prędkość ruchu dana jest:

$$(A.7) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -\mu_n \frac{z}{R} \cos \alpha \\ \dot{y} &= -\mu_n \frac{z}{R} \sin \alpha \\ \dot{z} &= \mu_n \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - z^2} \end{aligned}$$

Zachodzą również związki:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{,x} &= \omega \cos \alpha \\ \dot{z}_{,y} &= \omega \sin \alpha \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\ddot{z}_{,xx} = -\frac{1}{R} \left(\frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cos^2 \alpha}{\sin^3 \beta} \right)$$

$$\ddot{z}_{,yy} = -\frac{1}{R} \left(\frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}{\sin^3 \beta} \right)$$

Jeżeli rozpatrzemy ruch w pobliżu osi Y tzn. $\beta = \pi/2$ to:

$$\ddot{z}_{,xx} \cong \frac{1}{R} \quad (\text{A.9})$$

$$\ddot{z}_{,yy} \cong \frac{1}{R}$$

Zachodzi również (3.11)

$$\ddot{z}_{,xx} = b_{xx} \quad (\text{A.10})$$

$$\ddot{z}_{,yy} = b_{yy}$$

W związku z tym równanie ruchu po okręgu:

$$\omega = \frac{u_n}{R} \quad (\text{A.11})$$

można zapisać w formie układu:

$$\begin{aligned} \omega \cos \alpha - u_n \cos \alpha \frac{1}{R} &= 0 \quad \text{dla } \alpha \in \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\} \\ \omega \sin \alpha - u_n \sin \alpha \frac{1}{R} &= 0 \quad \text{dla } \alpha \in \{ 0; \pi \} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

lub po uwzględnieniu (A.9) i (A.10)

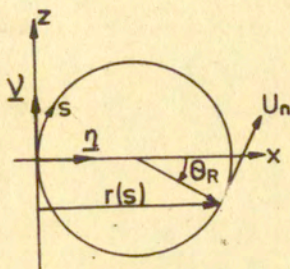
$$\begin{aligned} \ddot{z}_{,x} - u_n \cos \alpha (b_{xx} \cos^2 \alpha + b_{yy} \sin^2 \alpha) &= 0 \\ \ddot{z}_{,y} - u_n \sin \alpha (b_{xx} \cos^2 \alpha + b_{yy} \sin^2 \alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

III. Ruch po okręgu koła leżącego w płaszczyźnie wektorów

 n, ν (str. 41)

Równanie ruchu po okręgu koła leżącego w płaszczyźnie n, ν można przedstawić przy pomocy równania:

$$(A.14) \quad r(s) = 2R - R \cos \theta \quad \text{Rys. A.3.}$$



Rys A.3.

Zachodzą wtedy równości:

$$(A.15) \quad r_{,s} = \sin \theta = \sin \frac{s}{R} = \sin(\alpha s)$$

dla ruchów w pobliżu przecięcia osi x i z ; dla ruchu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara spełnione jest równanie:

$$(A.16) \quad r_{,s} \cong -\alpha s$$

lub

$$(A.17) \quad \ddot{r}_{,s} + \mu_n \alpha = 0 \quad \text{gdzie} \quad \mu_n = \frac{\partial s}{\partial t}$$

Dodatek B

Związki kinematyczne dla powłok

Wyprowadzenia podane w tym punkcie oparte są na wynikach prac /64, 57, 45/.

Prędkościowe związki kinematyczne dla rozważanych w pracy powłok wyprowadzone zostały przy następujących założeniach:

- (i) spełnione jest założenie Love'a-Kirchhoffa.
- (ii) składowe tensora prędkości odkształcenia \mathcal{D} wyznaczone są z dokładnością do pierwszej potęgi współrzędnej x^3 Rys. B.1.

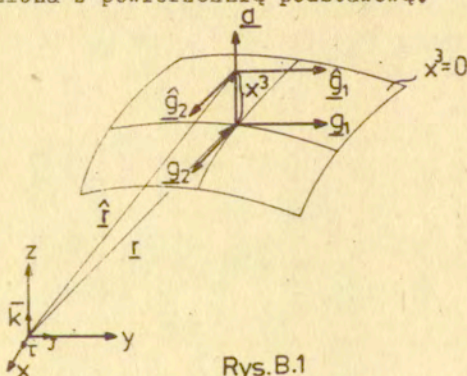
wektor wodzący dowolnego punktu powłoki można przedstawić w postaci:

$$(B.1) \quad \mathbf{F}(x; t) \equiv \mathbf{r}(x^A; t) + \mathbf{d}(x^A; t) \cdot x^3 \quad \text{Rys. B.1}$$

gdzie:

$$d \perp g_\Delta \quad g_\Delta = r_{,\Delta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\Delta}, \quad d \cdot d = 1$$

"współrzędne x^A opisują tu powierzchnię środkową, która została utożsamiona z powierzchnią podstawową.



Rys. B.1

W każdej chwili czasu "t" powierzchnia środkowa opisana jest równaniem $x^3 = 0$.

Wskaźniki greckie $\Delta, \lambda, \Sigma, \alpha$ przebiegają wartości ze zbioru $\{1, 2\}$. Znak "o" oznacza skalarne mnożenie wektorów.

Przy dekompozycji (B.1) prędkość punktów powłoki można przedstawić w następującej formie:

$$(B.2) \quad \hat{v}(x, t) \equiv \dot{r}(x, t) = \dot{r} + \underline{d} \cdot x^3 \stackrel{\text{def}}{=} v + x^3 \dot{v}$$

gdzie \dot{d} jest normalną prędkością cząstki względem odpowiedniego punktu powierzchni środkowej.

Prędkość \hat{v} można rozłożyć w bazie $(g_\Delta; d)$:

$$v(x, t) = (g_\Delta v^4 + d v^3) + x^3 (g_\Delta \dot{v}^4 + d \dot{v}^3)$$

Z założenia o prostych normalnych wynikają równości:

$$(B.4) \quad \{(d \circ d) = 1\} \Rightarrow \{d \circ \dot{d} = 0\} \Rightarrow \{d \circ \dot{v} = \dot{v}^3 = 0\}$$

oraz:

$$\{d \circ g_\Delta = 0\} \Rightarrow \{(\dot{d} \circ g_\Delta) = 0\} \Rightarrow \{\dot{d} \circ g_\Delta + (d \circ \dot{r})_{,\Delta} - d_{,\Delta} \circ \dot{r} = 0\}$$

z def. (B.2) wynika:

$$\dot{d} \circ g_\Delta = \dot{v}_\Delta$$

$$(B.5) \quad (d \circ \dot{r})_{,\Delta} = v_{,\Delta}^3$$

Natomiast ostatni człon równości (B.4) można na mocy wzoru Weingartena /39/ przedstawić w postaci:

$$(B.6) \quad d_{,\Delta} \circ \dot{r} = -B_\Delta^{\Sigma'} (g_\Sigma \circ \dot{r}) = -B_\Delta^{\Sigma'} v_{\Sigma'}$$

gdzie wielkości $B_\Delta^{\Sigma'}$ są mieszanymi składowymi drugiego tensora metrycznego powierzchni środkowej.

Podstawiając równości (B.5) i (B.6) do równania (B.4) można wyrazić prędkość \dot{v}_Δ w funkcji wielkości opisujących powierzchnię środkową.

$$(B.7) \quad \dot{v}_\Delta = \dot{\Omega}_\Delta = -B_\Delta^{\Sigma'} v_{\Sigma'} - v_{,\Delta}^3$$

Wprowadzono tu dodatkowe oznaczenie $v_\Delta = \Omega_\Delta$ bowiem jak wynika z dalszych rozważań wielkość Ω_Δ jest prędkością obrotu elementu powłoki.

Uwzględniając powyższe równości wyrażenia na prędkość punktów powłoki można przedstawić w następującej postaci:

$$(B.8) \quad \hat{v}(x, t) = g_\Delta v^\Delta + d v^3 + x^3 (g_\Delta \Omega_r g^{r\Delta}) = \\ = (v^\Delta + x^3 \Omega^\Delta) g_\Delta + v^3 d$$

W ten sposób prędkość dowolnego punktu powłoki została przedstawiona tylko w funkcji wielkości opisujących powierzchnię środkową.

Pole prędkości

Zgodnie z klasyczną definicją prędkość odkształcenia w opisie przestrzennym zdefiniowana jest jako symetryczna część gradientu prędkości: /49, 53, 71, 72/

$$(B.9) \quad \nabla v = L = \hat{v}_{,K} \otimes \hat{g}^K = \hat{v}_{,A} \otimes \hat{g}^A + v_{,3} \otimes d$$

gdzie:

$$\hat{g}_K = \begin{cases} v_{,K} - d_{,K} x^3 & \text{dla } K=1,2 \\ d & \text{dla } K=3 \end{cases}$$

lub po wykorzystaniu wzoru Weingartena:

$$(B.9a) \quad \hat{g}_K = \begin{cases} g_\Delta - B_\Delta^\Sigma g_\Sigma x^3 \\ \hat{g}_3 \equiv d \end{cases}$$

Składowe tensora metrycznego mają zatem postać:

$$(B.9b) \quad \hat{g}_{\Delta r} = (g_\Delta - B_\Delta^\Sigma g_\Sigma x^3) \circ (g^r - B_r^\Lambda g_\Lambda x^3) \cong g_{\Delta r} - 2 B_{\Delta r} x^3$$

gdzie znak \cong oznacza pominięcie członów zawierających drugą i wyższe potęgi x^3

W ramach tej dokładności składowe kontrawariantne tensora metrycznego można przedstawić w postaci:

$$(B.9c) \quad \hat{g}^{\Delta\Gamma} \cong g^{\Delta\Gamma} + 2B^{\Delta\Gamma} x^3$$

Korzystając z powyższego związku otrzymamy wyrażenie:

$$\hat{g}^{\Delta} = \hat{g}^{\Delta\Gamma} g_{\Gamma} \cong g^{\Delta} + x^3 B_{\Delta}^{\Gamma} g^{\Gamma}$$

$$\hat{g}^3 = d$$

Zależności B9a + B.9c oraz reguła różniczkowania wektorów bazy w układzie krzywoliniowym:

$$g_{\Delta, \lambda} = B_{\Delta, \lambda} d + \{ \Delta, \lambda \} g_{\Sigma}$$

pozwalają na wyrażenie gradientu prędkości tylko w funkcji wielkości opisujących powierzchnię środkową:

$$(B.10) \quad L = [(v^{\Delta} + x^3 \Omega^{\Delta}) g_{\Delta} + v^3 d]_{, \lambda} \otimes (g^{\lambda} + x^3 B_{\lambda}^{\Gamma} g^{\Gamma}) +$$

$$+ [(v^{\Delta} + x^3 \Omega^{\Delta}) g_{\Delta} + x^3 d]_{, 3} \otimes d$$

Jeżeli następnie wziąć pod uwagę zależności:

$$(B.10a) \quad \left\{ x^{\lambda}, t \right\} v^{\lambda} d \Rightarrow v'_{,3} = 0$$

$$\left\{ v_3 = \dot{r} \circ d \neq f(x^3) \right\} \Rightarrow \left\{ v_{,3} = 0 \wedge v_{3,3} = 0 \right\}$$

$$\Delta, \lambda \in \{1, 2\} \quad B_{\Delta, 3} = 0$$

$$x^{\lambda} d_{, 3} = 0$$

Wynikające bezpośrednio z narzuconych związków kinematycznych (Love'a - Kirchhoffa), rozpatrywane równanie można przekształcić do postaci:

$$(B.11) \quad L = (\nu_{\Delta/\lambda} - \nu^3 B_{\Delta\lambda} + \chi^3 (\Omega_{\Delta/\lambda} + B_{\lambda}^{\alpha} (\nu_{\Delta/\alpha} - \nu^3 B_{\Delta\alpha}))) g^{\Delta} \otimes g^{\lambda} \\ + \Omega_{\Delta} g^{\Delta} \otimes d - \Omega_{\lambda} d \otimes g^{\lambda}$$

gdzie: symbol „/” oznacza tzw. pochodną kowariantną na pow. środkowej.

Łatwo zauważyć, że tensor:

$$(B.12) \quad K = \Omega_{\Delta} g^{\Delta} \otimes d - \Omega_{\lambda} d \otimes g^{\lambda} = -(\Omega_{\lambda} d \otimes g^{\lambda} - \Omega_{\Delta} g^{\Delta} \otimes d)$$

jest tensorem antysymetrycznym, zgodnie z definicją tensora antysymetrycznego \underline{A} :

$$A = A_{ij} e^i \otimes e^j = -A_{ij} e^j \otimes e^i = -A_{ji} e^i \otimes e^j$$

Tak więc tensor prędkości deformacji $\mathcal{W} = \text{sym } \underline{L}$ można przedstawić w postaci:

$$(B.13) \quad \mathcal{W} = \text{sym}(\nu_{\Delta/\lambda} - \nu^3 B_{\Delta\lambda}) g^{\Delta} \otimes g^{\lambda} + \text{sym}(\chi^3 (\Omega_{\Delta/\lambda} + B_{\lambda}^{\alpha} (\nu_{\Delta/\alpha} - \nu^3 B_{\Delta\alpha}) \\ - \nu^3 B_{\Delta\alpha})) g^{\Delta} \otimes g^{\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{W}_{\Delta\lambda}^{\varepsilon} + \chi^3 \mathcal{W}_{\Delta\lambda}^{\alpha}) g^{\Delta} \otimes g^{\lambda}$$

gdzie składowe $\mathcal{W}_{\Delta\lambda}^{\varepsilon}$ i $\mathcal{W}_{\Delta\lambda}^{\alpha}$ interpretuje się odpowiednio jako tensor prędkości odkształceń powierzchni środkowej powłoki i tensor prędkości zmian krzywizny tej powłoki.

Należy zwrócić uwagę, że wektory g^{Δ} w ogólności nie są wektorami jednostkowymi, tak więc składowe \mathcal{W} w tej bazie nie są składowymi fizycznymi.

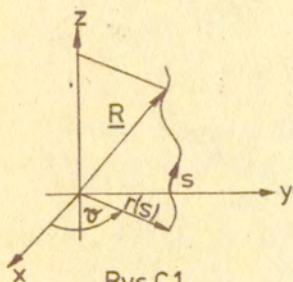
Dodatek C

Specyfikacja związków kinematycznych dla powłok osiowo-symetrycznych: (Wyniki tego punktu oparte są na pracy H.Stolarskiego /64/).

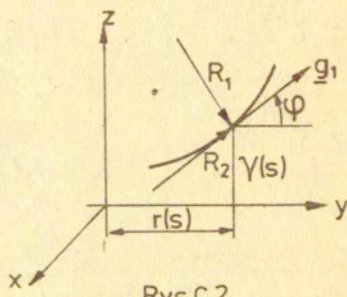
Jedną z możliwych parametrycznych reprezentacji powierzchni obrotowej w układzie ortokartezjańskim jest (por./36/).

$$(C.1) \quad \begin{cases} x = r(s) \cos \varphi \\ y = r(s) \sin \varphi \\ z = \gamma(s) \end{cases}$$

rys. 1



Rys.C.1



Rys.C.2

Reprezentacja ta ma następującą własność /36/

$$(C.2) \quad r_{,s}^2 + \gamma_{,s}^2 = 1$$

Takiemu parametrycznemu przedstawieniu powierzchni obrotowej odpowiadają następujące reprezentacje I tensora metrycznego powierzchni g :

$$(C.3) \quad [g_{s\varphi}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

$$[g^{s\varphi}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}$$

Wynika z nich, że współrzędne Gaussa tego typu powierzchni są współrzędnymi ortogonalnymi. Spostrzeżenie to pozwala na łatwe określenie składowych II-go tensora metrycznego o powierzchni B , a mianowicie:

- składowe różnoskładnikowe II-go tensora metrycznego znikają:

$$B_{s\varphi} = B^{\varphi s} = 0$$

natomiast pozostałe składowe łatwo jest określić z równań:

1371

$$(C.4) \quad \begin{aligned} \alpha_s &= \frac{B_{ss}}{g_{ss}} = \frac{1}{R_1} \\ \alpha_\varphi &= \frac{B_{\varphi\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{1}{R_2} = \frac{\sin\varphi}{r(s)} \end{aligned}$$

gdzie α_s oznacza południkową krzywiznę powierzchni, α_φ krzywiznę równikową, przy czym konwencję znaków przyjęto zgodnie z rys. C.2. 1371

Na podstawie wzorów C.3 i C.4 można wyznaczyć następujące reprezentacje tensora B

$$(C.5) \quad [B_{s\varphi}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & r\sin\varphi \end{bmatrix} \quad [B_s^\varphi] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{\sin\varphi}{r} \end{bmatrix} \quad [B^{s\varphi}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{\sin\varphi}{r^3} \end{bmatrix}$$

Nieznikające symbole Christoffela wyznacza się ze wzorów: 1371

$$(C.6) \quad \begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2 g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial s} = \frac{\cos\varphi}{r} \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2 g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial s} = -r\cos\varphi \end{aligned}$$

Wyrażenia te pozwalają z kolei na wyznaczenie kowariantnej pochodnej wektora prędkości.

Nieznikające składowe tego tensora dane są wzorami:

$$(C.7) \quad \begin{aligned} v^1_{/1} &= v^1_{,1} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \ 1 \end{matrix} \right\} v^1 + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{matrix} \right\} v^2 = v^1_{,1} \\ v^2_{/2} &= v^2_{,2} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} v^1 + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} v^2 = \frac{v^1 \cos \varphi}{r(s)} \end{aligned}$$

tak więc kowariantne składowe tej pochodnej są następujące:

$$(C.8) \quad [v^i_{/A}] = \begin{bmatrix} v^1_{,1} & 0 \\ 0 & \frac{v^1 \cos \varphi}{r} \end{bmatrix}$$

korzystając ze wzoru (C.3) łatwo wyznaczyć składowe kontrawariantne:

$$(C.9) \quad [v_{i/A}] = \begin{bmatrix} v_{,1}^1 & 0 \\ 0 & v_{,2}^1 r(s) \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Korzystając z kolei ze wzorów (C.5) wyznaczono składowe wektora \mathcal{D} :

$$(C.10) \quad \{\mathcal{D}_A\} = \{-B_{A^r} v^r - v_{,A}^3\} = \left\{ \begin{matrix} -\frac{v^1}{R_1} - v_{,1}^3 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

Składowe pochodnej kowariantnej wektora \mathcal{D} wyznacza się przy pomocy wzorów analogicznych do (C.7)

$$(C.11) \quad [\mathcal{D}_{A/A}] = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{A,1} & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_{A,2} r(s) \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Zgodnie ze wzorem B.13 (Dodatek B) składowe tensora prędkości odkształceń i prędkości zmian krzywizny powierzchni (1) dane będą wzorami:

$$(C.12) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{\Delta \Sigma}^{\varepsilon} &= v_{\Delta/\Sigma} - B_{\Delta \Sigma} v^3 \\ \mathcal{L}_{\Delta \Sigma}^{\omega} &= \mathcal{D}_{\Delta/\Sigma} + B_{\Sigma}^r \mathcal{L}_{\Delta r}^{\varepsilon} \end{aligned}$$

Reprezentacje tensorów $\mathcal{L}^{\varepsilon}$ i \mathcal{L}^{ω} podane są tu w bazie naturalnej $g^{\Delta} \otimes g^{\Sigma}$.

Literatura

1. M. Yamaya, M. Tani, Energy absorption by the plastic deformation of sheet metal columns with box-shaped cross section, Mitsubishi Technical Review, vol.8, No.1, 1971.
2. R.C. Van Kuren, J.E. Scott, Energy absorption of high-strength steel tubes under impact crush conditions, SAE papers, No.770213.
3. P. Chenchanna, M. Pirschel, Über die Energieaufnahme einiger Blechkörper bei Stossartiger Belastung, Automobil Industrie, 4/78, pp.47-53.
4. J. Provensal, Study of energy absorption in structures made of thin sheet metal, paper presented at Euromech Colloquium, No.121, Jablonna, August 26-28, 1979.
5. J. Provensal, B. Cosatti. Dissipation d'énergie dans les structures en matériaux composites, XVIII International Congress FISITA, 5-8 Mai 1980, Hamburg, pp.70-76.
6. P.H. Thorton, Energy absorption by foam filled structures, Ford Technical Report, No. SR 79-82, August 2, 1979.
7. P.H. Thorton, Energy absorption by structural collapse, Ford Technical Report, No.SR 79-83, August 2, 1979.
8. P.H. Thorton, The collapse of square section tubes in bending, Ford Technical Report, No.SR-79-06, January 16, 1979.
9. P.H. Thorton, Energy absorption by the structural collapse of spot-welded sheet metal sections, Ford Technical Report, No.SR-79-52, April 17, 1979.
10. C.L. Magee, P.H. Thorton, The interplay of geometric and materials variables in energy absorption, Journal of Engineering Materials and Technology, April, 1977.
11. A. Pugslay, M. Macaulay, The large-scale crumpling of thin cylindrical columns, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol.XIII, part 1, pp. 1-9, 1960.
12. A.G. Pugslay, On the crumpling of thin tubular struts, Q.J.Mech.appl.Math., vol.XXXII, part 1, 1979.
13. J.M. Alexander, An approximate analysis of the collapse

of thin cylindrical shells under axial loading, *Q.J.Mech. appl. Math.*, vol.XIII, part 1, pp.10-15, 1960.

- 14 S.T.S. Al-Hassani, W. Johnson, W.T. Lowe, Characteristics of inversion tubes under axial loading, *Journal Mechanical Engineering Science*, vol.14, No.6, 1972.
- 15 N. Aya, K. Takahashi, Energy absorbing characteristics of vehicle body structure, *Transactions of the Society of Automotive Engineers of Japan Inc.*, No.7, May, 1974.
- 16 Y. Ohokubo, T. Akamatsu, K. Shirasawa, Mean crushing strenght of closed-hat section members, *Toyo Kogyo Co. Ltd.*, paper No.740040.
- 17 G.H. Tidbury, D. Kečman, Investigation in to behaviour of hinges produced by bending collapse of vehicle structural components, *Proceedings XVII Congres International FISITA, Budapest, 4-10 Juni, 1978, Band II.*
- 18 N. Seki, Y. Sunami, Energy absorption of thin-walled box subjected to combination of bending with axial compression, *Proceedings XVII Congres International FISITA, Budapest, 4-10 Juni, 1978, Band III.*
- 19 S.R. Reid, W. Johnson, Large deformations of thin-walled circular tubes under transverse loading, *Int. J. Mech. Sci.*, vol.18, pp.501-509, 1976.
- 20 S.R. Reid, T. Yella Reddy, Effects of strain hardening on the lateral compression of tubes between rigid plates, *Int. J. Solids Structures* 1978, vol.14, pp.213-225.
- 21 W. Johnson, P. Soden, S.T.S. Al-Hassani, Inextensional collapse of thin-walled tubes under axial compression, *Journal of Strain Analisis*, vol.12, No.4, 1977.
- 22 P. Soden, S.T.S. Al-Hassani, W. Johnson, The crumpling of polyvinylchloride tubes under static and dynamic axial loads. *Institute of Phisics Conf. Sev.*, No.21, pp. 321-338.
- 23 W. Abramowicz, Simplified crushing analisis of thin-walled columns and beams, paper presented at *Euromech Colloquium, No.121, Jabłonna, August 26-30, 1979.*
- 24 T. Wierzbicki, T. Akerström, Dynamic crushing of strain rate sensivite box columns, *Proceedings Second International Conference on Vehicle Structural Mechanics, Ap-*

- ril 18-20, 1977.
- 25 A. Wimmer, Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit auf das Festigkeits und Vervormungsverhalten von Blechkonstruktionen am Beispiel von Kraftfahrzeugen, ATZ, 77 /1975/10.
- 26 T. Wierzbicki, C. Molnar, M. Matolcsy, Experimental-theoretical correlation of dynamically crushed components of bus frame structure. Proceedings XVII Congress International FISITA, Budapest, 4-10 Juni, 1978, Band III.
- 27 I.K. McIvor, W.J. Anderson, M. Bijak-Zochowski, An experimental study of the large deformation of plastic hinges, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan 48109.
- 28 W. Abramowicz, T. Wierzbicki, A kinematic approach to crushing of shell structures, SAE papers, No. 790992 Proceedings 3rd Int. Conf. Vehicle Struct. Mech., Troy, Michigan, 211-223, October 10-12, 1979.
- 29 Y. Yoshimura, On the mechanism of buckling of circular cylindrical shell under axial compression, Rep. Inst. Sci. and Technol. Univer., Tokyo, 1951, 5 No.5.
- 30 R.C. Tenneyson, Buckling of circular cylindrical shells in axial compression, AIAA Journal, 1964.
- 31 W. Szyszkowski, Zagadnienia stateczności powłok obrotowych w ujęciu geometrycznym, Praca doktorska, W-wa 1973.
- 32 W. Johnson, S.R. Reid, Metallic energy dissipating systems, Applied Mechanics Reviews, vol.31, No.3, 1978.
- 33 W. Johnson, Impact Strength of Materials, Edward Arnold Limited, London, 1972.
- 34 W. Johnson, A.G. Mamalis, Crashworthiness of Vehicles, MEP Ltd., London, 1978.
- 35 T. Wierzbicki, W. Abramowicz, Crushing of thin-walled strain rate sensitive structures, paper presented at Euromech Colloquium, No.121, Jabłonna, 26-30 August 1979.
- 36 M. Biernacki, Geometria różniczkowa, cz.I i II, PWN W-wa, 1955.
- 37 A. Goetz, Geometria różniczkowa, PWN, W-wa, 1965.
- 38 J.S. Sokolnikoff, Tensor Analysis Theory and Applica-

tions to Geometry and Mechanics of continua, John Wiley & Sons Inc., 1964.

- 39 L.M. Sobel, S.Z. Newman, Plastic buckling of cylindrical shells under axial compression, Trans ASME Journal Pressure Vessel Technology, vol.102, 1980, pp.40-44.
- 40 W. Olszak, P. Perzyna, A. Sawczuk, Teoria plastyczności, PWN, W-wa, 1965.
- 41 A. Sawczuk, M. Janas, I.A. König, Analiza plastyczna konstrukcji, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, 1972.
- 42 A. Sawczuk, On plastic shells at large strains and displacement, Lecture Notes, CISM Course "Dynamic of Plastic Structures" Udine, October 22-30, 1979.
- 43 M. Duszek, A. Sawczuk, O związkach podstawowych teorii powłok plastycznych, Rozprawy Inżynierskie, 18, 1970, str.715-730.
- 44 B.З. Власов, Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек, Прикладная Математика и Механика, Т.VIII, б.2, 1944, str.109-140.
- 45 P.M. Naghdi, The Theory of Shells and Plates, Handbuch der Physik, T.VIa/2, pp.425-633.
- 46 A. Love, Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge, 1927 /IV wyd./, za/67/.
- 47 G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mathematische Physik, Bd.1, Mechanik 1876, za/67/.
- 48,49 T.Y. Thomas, Plastic Flow and Fracture in Solids, Academic Press, 1961, vol.1,2.
- 50 H.S.M. Coxeter, Wstęp do geometrii dawnej i nowiej, PWN, W-wa, 1967.
- 51 H.G. Hopkins, On the behaviour of infinitely long rigid-plastic beams under transverse concentrated load, Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1955, vol.4, pp.38-52.
- 52 W. Prager, Discontinuous fields of plastic stress and flow, Proceedings of Second U.S. National Congress of Applied Mechanics.
- 53 C. Truesdell, R.A. Toupin, The Classical Field Theories, Handbuch der Physik, T. III/1, 1960, pp.226-790.
- 54 W. Kosiński, Wstęp do teorii osobliwości pola i analizy

fal, PWN, W-wa, Poznań, 1980.

55. C.R. Calladine, Thin-walled elastic shells analysed by a Rayleigh method, Int. J. Solids Structures, 1977, vol.13, pp.515-530.
56. S. Łukasiewicz, W. Szyszkowski, Geometryczne metody nieliniowej teorii powłok, Materiały sympozjum:Konstrukcje powłokowe - teoria i zastosowania. Kraków, 25-27 kwietnia, 1974, T.I, PWN, W-wa, 1978.
57. A.B. Погорелов, Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек, Издательство "Наука", Москва, 1967.
58. A.B. Погорелов, Геометрическая теория устойчивости оболочек, Издательство "Наука", Москва, 1966.
59. A.B. Погорелов, Угнбание выпуклых поверхностей, Государственное Издательство Техничко- Теоретической Литературы, Москва, 1951.
60. A.B. Погорелов, Цилиндрические оболочки при закрути-ческих деформациях, Издательство Харьковского Ордена Трудового Красного Знамени Государственного Университета, Харьков, 1962.
61. R.P. Nimmer, J. Mayers, Limit point buckling loads of axially compressed, Circular cylindrical shells - the effect of nonlinear material behaviour, Journal of Applied Mechanics, vol.46, June, 1979.
62. C.G. Foster, Some observations on the Yoshimura buckle pattern for thin-walled cylinders and Estimation of the collapse loads of thin-walled cylinders in axial compression, Journal of Applied Mechanics, vol.46, June, 1979.
63. J.R. Manning, Computerized pattern cutting methods based on an isomeric tree, CAD, vol.12, No.1, January, 1980.
64. H. Stolarski, Zasada ekstremalna dla oceny przemieszczeń dynamicznie obciążonych konstrukcji sztywno-plastycznych, Prace IPPT, 1980.
65. H. Stolarski, A minimum principle in nonlinear dynamics of hardening rigid-plastic bodies, Proceedings of IUTAM Symposium on "Variational methods in mechanics of solids" Northwestern University, Evanstone USA, Septem-

ber, 1978.

- 66 W. Szczepiński, Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej, PWN, W-wa, 1967.
- 67 Cz. Woźniak, Nieliniowa teoria powłok, PWN, W-wa, 1966.
- 68 H. Stolarski, Dynamics strongly deforming rigid-plastic structures, Lecture notes for the CISM Course on "Dynamics of plastic structures", Udine, Italy, October, 1979.
- 69 H. Stolarski, A. Sawczuk, On yield criteria for strongly deformed shells, Lecture notes for the CISM Course on "Dynamics of plastic structures", Udine, Italy, October, 1979.
- 70 W. Kosiński, Teoria powierzchni osobliwych w zastosowaniu do analizy fal, Prace IPPT, 39/1980.
- 71 L.E. Malvern, Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall Inc., 1969.
- 72 C. Eringen, Continuum physics, Academic Press, vol.II, 1975.
- 73 D.C. Drucker, R.T. Shield, Limit analysis of symmetrically loaded thin shells of revolution, J. Appl. Mech. Trans. ASME Ser.E 1. 26, 1959.
- 74 W. Abramowicz, Kinematyczna analiza energochłonności cienkościennych kolumn metalowych, Prace IPPT, 19/1979.
- 75 W. Abramowicz, Plastyczne zginanie belek cienkościennych o przekroju zamkniętym i otwartym, Prace IPPT, 56/1979.
- 76 D. Kečman, Bending collapse of rectangular section tubes in relation to the bus roll over problem, PhD, School of Automotive Studies, Cranfield.
- 77 T. Wierzbicki, Obliczenia zderzaka bezpiecznego samochodu, Technika Motoryzacyjna, No.5, maj, 1975.
- 78 S. Holmes, E. Sliter, Methods, application and cost effectiveness of scale model studies of automobile impact, Stanford Research Institute, Final Report, June, 1974.
- 79 T. Wierzbicki, Przegląd metod obliczeniowych w zagadnieniach bezpieczeństwa pojazdów przy zderzeniu, Opracowanie dla Komitetu Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych. PAN, 1977.
- 80 Materiały z sympozjum pt. "Konstrukcja nadwozi samochodowych w aspekcie bezpieczeństwa", Zarząd Koła SIMF

OBR-SO, Augustów, 1979.

- 81 T. Wierzbicki, Obliczanie i badanie elementów energochłonnych do zastosowania w pojazdach, Zakład Doświadczalny TECHPAN, W-wa, 1980.
- 82 H. Petryk, On the stability of non-uniquely defined processes of plastic deformations, Paper presented at 22nd Polish solid Mechanics Conference, Gołuń, 2-9 September, 1980.
- 83 J. Klepaczko, Wpływ szerokości walcowo giętego pasma na moment zginający w stanie plastycznym, Rozprawy Inżynierskie, T.X, zesz.2, 1962.
- 84 J. Klepaczko, J. Litoński, Własności materiałów przy gięciu walcowym, Rozprawy Inżynierskie, T.IX. zesz.4, 1961.
- 85 V. Tvergaard, A. Needleman, On the localization of buckling patterns, Journal of Applied Mechanics, September, 1980, vol.47, pp.613-619.
- 86 J.L. Duncan, J.P. Duncan, R. Sowerby, B.S. Levy, Curved line folding of sheet metal, McMaster University, Hamilton, Canada, L8S4L7, December, 1979.
- 87 E. Haug, Engineering safety analysis via destructive numerical experiments, Rozprawy Inżynierskie 1/1981.
- 88 C. Molnar, Correlation between static and dynamic collapse of compressed thin-walled tubes, Rozprawy Inżynierskie 1/1981.
- 89 A. Voith, Bus roll-over simulation using computer techniques on the basis of measurements results, Rozprawy Inżynierskie 1/1981.
- 90 R.K. McFarland, Hexagonal cell structures under post buckling axial load, AIAA Journal, vol.1, No.6, 1963.
- 91 M.K. Duszek, Geometrycznie nieliniowa teoria konstrukcji sztywno plastycznych, Prace IPPT 42/1975.

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wprowadzenie	3
1.2. Przegląd literatury	5
1.3. Tematyka i zakres pracy	11
2. Kinematyka zgniatania konstrukcji cienkościennych .	13
2.1. Mechanizmy zgniatania - obserwacje doświadczalne	13
2.2. Modelowanie mechanizmów dużych deformacji powłok cienkościennych	26
3. Warunki kinematycznej i geometrycznej zgodności na liniach przegubów plastycznych	31
3.1. Zależności podstawowe	31
3.2. Linia prosta nieciągłości prędkości obrotowej poruszająca się po powierzchni płaskiej	34
3.3. Linia nieciągłości o kształcie odcinka okręgu poruszająca się po powierzchni płaskiej	39
3.4. Linia nieciągłości o kształcie okręgu poruszająca się po powierzchni cylindrycznej u....	41
3.5. Formalna definicja ruchomego przegubu plastycznego	44
3.6. Własności odwzorowań modelujących ruchome przeguby plastyczne	45
3.7. Odwzorowanie quasi-izometryczne	47
3.8. Stacjonarne przeguby plastyczne i nieregularne odwzorowanie powierzchni środkowej powłoki ...	47
3.9. Uwagi o metodach geometrycznych w sprężystej analizie powłok	48
4. Zależności podstawowe dla powłok cienkościennych ..	50
4.1. Związki kinematyczne	51
4.2. Warunek płaścystości	57
4.3. Obliczanie dysypacji wewnętrznej	60

Zastosowania

5. Zależności podstawowe	66
5.1. Warunek plastyczności i założenia upraszczające	
5.2. Podstawowe mechanizmy dysypacji energii	69
6. Quasi-statyczne zgniatanie cienkościennych kolumn metalowych	76
7. Quasi-statyczne zgniatanie belek cienkościennych o przekrojach otwartych i zamkniętych	90
8. Inwersja powłok cylindrycznych	110
9. Zakończenie	118
Bibliografia	132
Dodatek A. Związki kinematyczne opisujące ruch po okrę- gu koła.....	120
Dodatek B. Związki kinematyczne dla powłok.....	124
Dodatek C. Specyfikacja związków kinematycznych dla powłok osiowo-symetrycznych.....	129