7.76 — zagadnienia dynamiczne,
problemy początkowe,
fale w ciałach stałych,
tłumienie fal i drgań ośrodków ciągłych

Tadeusz Klecha

FALE POWIERZCHNIOWE W NIEJEDNORODNEJ IZOTROPOWEJ PÓŁPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ

18/1991

WARSZAWA 1991

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 października 1988 r.

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd.6,25 Ark.druk.8,0
Oddano do drukarni w czerwcu 1991 r.
Nr zamówienia 201/91

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Tadeusz Klecha
Zakład Matematyki
AE Kraków

FALE POWIERZCHNIOWE W NIEJEDNORODNEJ, IZOTROPOWEJ PÓŁPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono dowód istnienia fal powierzchniowych w ośrodkach niejednorodnych dla sformułowania naprężeniowego, oraz wykazano, że fala propagująca się i jej prędkość są funkcjami analitycznymi liczby falowej.

Wstęp.

Zagadnieniem propagacji fal powierzchniowych w jednorodnej półprzestrzeni sprężystej, zarówno izotropowej jak i anizotropowej zajmowało się wielu badaczy.
W 1979 roku I. A. Victorov (por. [1]) dokonał przeglądu najważniejszych prac powstałych w latach 1885 - 1979, poświęconych zagadnieniu propagacji fal powierzchniowych / surface Waves / w jednorodnym ośrodku sprężystym oraz propagacji fal powierzchniowych powstałych na granicy dwóch różnych ośrodków / interface waves / (por. też A. C. Eringen i E. S. Suhubi [2] oraz A. Ben-Menachem i S. J. Singh [3]).

W roku 1971 (por. [4] J. Ignaczak pokazał, że zagadnienie propagacji fal powierzchniowych w pewnej niejednorodnej, izotropowej półprzestrzeni sprężystej może być zredukowane do następującego problemu własnego:

znaleźć dodatnią liczbę λ , oraz rzeczywiste symetryczne pole tensorowe

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(x_2) \ , \ \left(\alpha_{ij} \in C^2[0,\infty) \ ; \ i,j = 1,2 \right)$$

które spełniają równania:

$$\underline{A}(s)\underline{\alpha} - \lambda \underline{B}\underline{\alpha} = \underline{0} \tag{0.1}$$

oraz warunki

$$\alpha_{22}(0) = \alpha_{12}(0) = \alpha_{22}(\infty) = \alpha_{12}(\infty) = 0 \tag{0.2}$$

gdzie

$$\underline{\alpha}(x_2) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(x_2) \\ \alpha_{22}(x_2) \\ \alpha_{12}(x_2) \end{bmatrix} \tag{0.3}$$

$$\underline{A} \equiv \begin{bmatrix} \frac{s^2}{\varrho} & 0 & \frac{s}{\varrho}D \\ 0 & -D\frac{1}{\varrho}D & sD\frac{1}{\varrho} \\ -sD\frac{1}{\varrho} & -\frac{s}{\varrho}D & -D\frac{1}{\varrho}D + \frac{s^2}{\varrho} \end{bmatrix} . \tag{0.4}$$

$$\underline{B} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2\mu} & \frac{-\nu}{2\mu} & 0 \\ \frac{-\nu}{2\mu} & \frac{1-\nu}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \tag{0.5}$$

Tutaj $\underline{\alpha}$ określa amplitudę tensora naprężenia, a symbol D występujący w definicji macierzy $\underline{A}$ oznacza różniczkowanie względem x_2 : tzn $D = d/dx_2$. Ponadto s jest liczbą falową oraz $\rho = \rho(x_2)$, $\mu = \mu(x_2)$ i $\nu = \nu(x_2)$ oznaczają kolejno gęstość ośrodka, moduł ścinania i współczynnik Poissona $(0 \leq x_2 < \infty)$.

Sformułowanie problemu (0.1) - (0.2) opiera się na czysto naprężeniowym opisie klasycznej elastodynamiki x/.

We wcześniejszej pracy [5] J. Ignaczak pokazał, że zagadnienie propagacji fal powierzchniowych w niejednorodnej izotropowej półprzestrzeni sprężystej, w której moduł ścinania μ oraz współczynnik Poissona ν są fumkcjami głębokości półprzestrzeni, zaś gęstość ośrodka ρ jest stała sprowadza się do znalezienia pary: $(c_R, \beta(x_2))$ spełniającej równanie różniczkowe zwyczajne czwartego rzędu.

---

x/ Można również rozważać problem (0.1) - (0.2) , gdy $\underline{\alpha} = [\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}]^T \in L^2(0,\infty) \times L^2(0,\infty) \times L^2(0,\infty) = \left(L^2(0,\infty)\right)^3$, $\underline{A}, \underline{B} \in \left(L^2(0,\infty)\right)^3$. Aby problem własny (0.1) - (0.2) , był dobrze postawiony musi być spełniony warunek: $R(\underline{A}) = R(\underline{B})$, gdzie $R(\underline{A})$, $R(\underline{B})$ oznaczają range operatorów $\underline{A}$, $\underline{B}$ (por. T. Kato [25] str. 16). Z równości $R(\underline{A}) = R(\underline{B})$ wynika, że $R(\underline{A}) = R(\underline{B}) = \{(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}) \in [C^2[0,\infty)]^3, (\in (L^2(0,\infty))^3)$:

$$-\left[\frac{\alpha_{11} - \nu\alpha_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}}{2\mu}\right]'' + \frac{s^2(\alpha_{22} - \nu\alpha_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}})}{2\mu} - s\left[\frac{\alpha_{12}}{\mu}\right]' = 0\Big\}, \quad \tilde{\mu} = 1,2$$

Równość w nawiasie oznacza płaski warunek nierozdzielności.

$$(0.6)\quad \left(\frac{1}{s^2} D \frac{1}{1-\Omega} D - 1\right)\frac{1}{1-\varkappa}\,\frac{\Omega}{2-\Omega}\left[D^2 - s^2(1-\Omega\varkappa)\right]\beta +$$

$$+4\left[\frac{1}{2-\Omega}D^2 - D\frac{1}{1-\Omega}D\frac{1-\Omega}{2-\Omega}\right]\beta = 0 \qquad \text{dla } x_2 \in (0,+\infty)$$

i warunki brzegowe

$$(0.7)\quad \beta(0) = \beta(\infty) = 0$$

$$\frac{1}{s^2(2-\Omega)} D\left\{\frac{\Omega}{2-\Omega}\,\frac{1}{1-\varkappa}\left[D^2 - s^2(1-\Omega\varkappa)\right]\beta - 4s^2\frac{1-\Omega}{2-\Omega}\beta\right\}\Bigg|_{\substack{x_2=0\\ x_2=\infty}} = 0$$

gdzie

$$(0.8)\quad \varkappa(x_2) = \frac{1-2\nu(x_2)}{2-2\nu(x_2)}, \qquad \Omega(x_2) = \frac{c_R^2}{\mu(x_2)}$$

liczba c_R , będąca prędkością fali powierzchniowej jest wartością własną zagadnienia opisanego związkami (0.6) - (0.8) , zaś funkcja $\beta(x_2)$, określająca zmienność naprężenia normalnego wzdłuż głębokości półprzestrzeni jest stowarzyszoną funkcją własną w tym zagadnieniu $(\beta(x_2) = \alpha_{22}(x_2))$.

W 1967 C.R.A. Rao [6] uogólnił sformułowanie (0.6) – (0.7) na przypadek, gdy gęstość ośrodka ϱ, moduł ścinania μ i współczynnik Possona ν są dowolnymi funkcjami głębokości półprzestrzeni. Pewne efektywne rozwiązanie problemu własnego opisanego związkami (0.6) - (0.7) w przypadku gdy:

$$(0.9)\quad \varrho(x_2) \equiv 1,$$

$$\mu(x_2) \equiv \text{const},$$

$$\varepsilon > 0$$

(0.10) $$\nu_0 = \nu(0)\ ,\quad \nu_\infty = \nu(\infty)$$

$$\nu(x_2) = 1-(1-\nu_\infty)\left[1+\frac{\nu_0-\nu_\infty}{1-\nu_0}(1+\varepsilon x_2)^{-2}\right]^{-1}$$

podał J. Ignaczak w pracy [5]

Przypadek, gdy

(0.11) $$\varrho(x_2)\equiv 1\ ,\quad \nu(x_2)\equiv \nu_0$$

$$\mu(x_2) = \mu_\infty + (\mu_0-\mu_\infty)e^{-\varepsilon x_2}$$

badał C.R.A. Rao w pracy [7] metodą szeregów potęgowych (por. też [8]).

Z kolei T. Rożnowski (por. [9]) podał efektywne rozwiązanie zagadnienia (0.6) - (0,7), gdy gęstość ϱ oraz liczba Poissona ν nie zależą od głębokości półprzestrzeni, zaś μ jest wykładniczą słabo zmienną funkcją taką, że w równaniu (0.6) człon

(0.12) $$4\left(\frac{1}{2-\Omega(x_2)}\frac{d^2}{dx_2^2}-\frac{d}{dx_2}\frac{1}{1-\Omega(x_2)}\frac{d}{dx_2}\frac{1-\Omega(x_2)}{2-\Omega(x_2)}\right)\beta$$

można pominąć.

Obok naprężeniowej metody, zaproponowanej przez Ignaczaka do badania fal powieszchniowych istnieje podejście, w którym punktem wyjścia do rozwiązania problemu są równania przemieszczeniowe.

I tak w latach 60 - tych A.G. Alenitsyn [10], [11] wychodząc z przemieszczeniowych równań ruchu badał falę powierzchniową w niejednorodnej półprzestrzeni dla dużych

liczb falowych metodami asymptotycznymi.
Głównym wynikiem jego prac jest przybliżone równanie dyspersji dla tego przypadku (por. też Brekhovski [12]) oraz A. Ben-Menahem i S.J. Singh [3].

Celem przedstawionej rozprawy jest opisanie szeregu nowych własności fal powierzchniowych w niejednorodnej izotropowej półprzestrzeni sprężystej, wykorzystując naprężeniowe podejście do zagadnienia. Praca składa się z pięciu rozdziałów. Rozdział I jest poświęcony ogólnemu sformułowaniu rozważanego problemu. Rozdział II dotyczy jakościowej analizy rozwiązania. Pokazujemy w nim, że jeżeli gęstość ośrodka, moduł ścinania i współczynnik Poissona są ograniczonymi funkcjami klasy $C^2[0,\infty)$, to prędkość fali powierzchniowej oraz wektor amplitudy tej fali na głębokości półprzestrzeni są funkcjami analitycznymi liczby falowej. W rozdziale III pokazano istnienie co najmniej jednego, a co najwyżej skończonej ilości rozwiązań problemu własnego (0.6) - (0.7), w przypadku gdy gęstość ośrodka ϱ i moduł ścinania μ są stałymi, zaś współczynnik Poissona $\nu(x_2)$ jest funkcją ograniczoną oraz $\nu(x_2) \in C^2[0,\infty)$. W rozdziale IV zredukowano problem własny analizowany w rozdziale III do rozwiązania pewnego równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju. Pokazano, że rozwiązanie tego równania całkowego jest funkcją Greena dla pewnego zwyczajnego równania różniczkowego drugiego rzędu o zmiennych wspołczynnikach, a operator całkowy

jest zwężający. Wynika stąd istnienie samej funkcji Greena oraz możliwość znalezienia tej funkcji drogą iteracji.
W rozdziale V podano przybliżone rozwiązanie problemu fal powierzchniowych w "słabo" niejednorodnej półprzestrzeni sprężystej w dwóch przypadkach:

1/ gdy gęstość półprzestrzeni $\varrho = \varrho(x_2)$ jest " słabo " zmienną funkcją głębokości, zaś moduł ścinania $\mu(x_2) \equiv$ const, i liczba Poissona $\nu(x_2) \equiv$ const,

2/ gdy moduł ścinania $\mu = \mu(x_2)$ jest " słabo " zmienną funkcją, zaś ϱ i ν są stałe.

W obu tych przypadkach zastosowano metodę perturbacyjną zaproponowaną przez K. Friedrichsa w 1965 roku [13]. Wyniki uzyskane w pracy dotyczą wyłącznie fal powierzchniowych mechanicznych, propagujących się w niejednorodnej półprzestrzeni w warunkach izotermicznych. We współczesnej literaturze technicznej istnieje szereg teorii sprzężonych fal powierzchniowych w jednorodnej półprzestrzeni, opisujących sytuację gdy pole mechaniczne jest sprzężone z polem elektromagnetycznym [15], [16], lub gdy jest ono sprzężone z polem temperatury [14]. Istnieje też teoria fal powierzchniowych w Ośrodku Mikropolarnym [17]. Wydaje się, że analiza fal powierzchniowych zaprezentowana w pracy może być przeniesiona również na wyżej wymienione sprzeżone fale powierzchniowe w pewnej półprzestrzeni niejednorodnej.

ROZDZIAŁ I. Naprężeniowe sformułowanie problemu fal powierzchniowych [1]/.

Rozważmy dwuwymiarowe naprężeniowe równanie liniowej teorii sprężystości dla niejednorodnego izotropowego ośrodka, w którym fale są niezależne od zmiennej x_3 (por. [5] i [6]):

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad & \mu^{-1}(x_2)\left[\ddot{\tau}_{\alpha\beta}(x,t) - \nu(x)\delta_{\alpha\beta}\ddot{\tau}_{\gamma\gamma}(x,t)\right] + \\
& -\left[\varrho^{-1}(x)\tau_{\alpha\gamma,\gamma}(x,t)\right]_{,\beta} - \left[\varrho^{-1}(x)\tau_{\beta\gamma,\gamma}(x,t)\right]_{,\alpha} = 0
\end{aligned}
$$

gdzie

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}(x,t)\;;\;(\alpha,\beta) = (1,2)\;;\;\left[x = (x_1, x_2)\right].$$

oznacza bezwymiarowy tensor naprężenia, $\mu(x)$ i $\varrho(x)$ oznaczają kolejno bezwymiarowy moduł ścinania i bezwymiarową gęstość, zaś $\nu(x)$ oznacza współczynnik Poissona. Bezwymiarowy czas t jest dany wzorem:

$$(1.2)\qquad t = \tau\,\mu_0^{1/2}/x_0\varrho_0^{1/2}$$

gdzie τ jest czasem fizycznym oraz μ_0, ϱ_0 i x_0 oznaczają kolejno jednostkę naprężenia, gęstości i długości. Ponadto

$$\dot{\tau}_{\alpha\beta} = \partial\tau_{\alpha\beta}/\partial t\;;\;\tau_{\alpha\beta,\gamma} = \partial\tau_{\alpha\beta}/\partial x_\gamma.$$

Zakładamy, że funkcje $\varrho(x)$ i $\mu(x)$ występujące w (1.1) zależą od zmiennej x_2 ($x_2 \in [0,\infty)$), oraz $\varrho(x_2), \mu(x_2), \nu(x_2) \in C^2[0,\infty)$. Zakładamy ponadto, że spełniają one nierówności:

$$0<\mu_0 \leq \mu(x_2) \leq \mu_1 < +\infty$$

$$(1.3) \qquad 0<\varrho_0 \leq \varrho(x_2) \leq \varrho_1 < +\infty$$

$$-1<\nu_0 \leq \nu(x_2) \leq \nu_1 < +1/2 \qquad \text{dla } x_2 \in [0,+\infty)$$

Tataj trójki liczb $(\varrho_0, \mu_0, \nu_0)$ oraz $(\varrho_1, \mu_1, \nu_1)$ określają kolejno minimalne oraz maksymalne wartości trójki funkcji (ϱ, μ, ν) na głębokości półprzestrzeni $x_2 \geq 0$.

Będziemy poszukiwać pewnego rozwiązania $\tau_{\alpha\beta}$ równania (1.1) w półprzestrzeni

$$(1.4) \qquad U = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 0, -\infty < x_1 < +\infty\}$$

dla każdego $t \in [0,+\infty)$. Przyjmujemy, że rozwiązanie to reprezentuje falę propagującą się wzdłuż brzegu rozważanej półprzestrzeni, tzn że ma ono postać (por. [4]):

$$(1.5) \qquad \begin{aligned} \tau_{11}(x,t) &= \alpha_{11}(x_2)\exp[i(sx_1 - t\sqrt{\lambda})] \\ \tau_{22}(x,t) &= \alpha_{22}(x_2)\exp[i(sx_1 - t\sqrt{\lambda})] \\ \tau_{12}(x,t) &= i\,\alpha_{12}(x_2)\exp[i(sx_1 - t\sqrt{\lambda})] \end{aligned}$$

gdzie $i=\sqrt{-1}$, $s>0$, $\lambda>0$.

Dodatkowo przyjmujemy, że fala ta spełnia warunki:

$$(1.6) \qquad \tau_{22}(x_1,0,t) = \tau_{12}(x_1,0,t) = 0 \quad \text{dla } x_1 \in (-\infty,+\infty), \quad t \geq 0$$

$$(1.7) \qquad \tau_{22}(x_1,\infty,t) = \tau_{12}(x_1,\infty,t) = \tau_{11}(x_1,\infty,t) = 0$$

dla $x_1 \in (-\infty, +\infty)$, $t \geqslant 0$.

Co oznacza, że poszukujemy fali propagującej się wzdłuż swobodnego brzegu $x_2=0$ i zanikającej w pewnej odległości od tego brzegu. Parametrami tej fali są:

a/ prędkość propagacji $c_R = \sqrt{\lambda}/s$

b/ okres fali $T = 2\pi/\sqrt{\lambda}$

c/ długość fali $l = 2\pi/s$

Tutaj s $(s>0)$ oznacza daną liczbę falową. Funkcje $\alpha_{11}(x,t)$, $\alpha_{22}(x,t)$, $\alpha_{12}(x,t)$ określające amplitudę fali oraz jej prędkość c_R należy tak dobrać, aby pole tensorowe $\underline{\tau}(x,t)$ określone wzorami (1.5) spełniało równania pola (1.1) oraz warunki (1.6) - (1.7). Po podstawieniu (1.5) do (1.1) wnosimy, że rozważane zagadnienie sprowadza się do znalezienia pewnej liczby λ oraz symetrycznego, rzeczywistego pola α_{ij} $(i,j=1,2)$, które spełniają równania [4]:

$$
\begin{aligned}
&\varrho^{-1}(s\alpha_{11}+s\dot{\alpha}_{12})-\lambda(2\mu)^{-1}(\alpha_{11}-\nu\alpha_{\gamma\gamma})=0\\
(1.8)\quad &-[\varrho^{-1}(\dot{\alpha}_{22}-s\alpha_{12})]^{\cdot}-\lambda(2\mu)^{-1}(\alpha_{22}-\nu\alpha_{\gamma\gamma})=0\\
&-[\varrho^{-1}(\dot{\alpha}_{12}+s\alpha_{11})]^{\cdot}-s\varrho^{-1}(\dot{\alpha}_{22}-s\alpha_{12})-\lambda(2\mu)^{-1}2\alpha_{12}=0
\end{aligned}
$$

dla $x_2 \in (0,+\infty)$ oraz warunki brzegowe:

$$
(1.9)\quad \alpha_{12}(0)=\alpha_{22}(0)=\alpha_{12}(\infty)=\alpha_{22}(\infty)=\alpha_{12}(\infty)=0
$$

gdzie wektor

$$
\underline{\alpha}=(\alpha_{11},\alpha_{22},\alpha_{12})^T\in C^2[0,\infty)\times C^2[0,\infty)\times C^2[0,\infty)
$$

W równaniu (1.8) kropka nad symbolem oznacza różniczkowanie względem x_2 [2]. Na oznaczenie różniczkowania względem x_2 będziemy używać również symbolu $D = d/dx_2$. Jest zatem widoczne, że rozważane zagadnienie jest pewnym liniowym zagadnieniem własnym dla pary $(\lambda, \underline{\alpha}(x_2))$.

C.R.A. Rao pokazał [3], że zagadnienie (1.8) - (1.9) może być zredukowane drogą eliminacji do następującego nieliniowego problemu własnego : znaleźć parę $(\lambda, \alpha_{22}(x_2))$ taką, aby spełnione były relacje

$$\begin{aligned}&\Big\{\Big[D-\Big(H_1-\frac{2h}{2-\Omega}\Big)\frac{1}{a^2-e^2}\big[D-(1-2\varkappa)H_1\big]-1\Big\}\times\\ (1.10)\qquad &\times\frac{\Omega}{2-\Omega}\frac{1}{1-\varkappa}(D^2+hD-b^2)\Big\}\alpha_{22}+4\Big\{\frac{1}{2-\Omega}(D^2+hD)+\\ &-\Big[D-\Big(H_1-\frac{2h}{2-\Omega}\Big)\Big]\frac{1}{a^2-e^2}\big[D-(1-2\varkappa)H_1\big]\frac{a^2}{2-\Omega}\Big\}\alpha_{22}=0\end{aligned}$$

dla $x_2 \in (0, \infty)$ oraz

$$(1.11)\qquad \alpha_{22}(0)=\alpha_{22}(\infty)=0$$

$$(1.12)\qquad \Big\{\frac{1}{a^2-e^2}\big[D-(1-2\varkappa)H_1\big]\frac{\Omega}{2-\Omega}\frac{1}{1-\varkappa}\Big[D^2+hD-b^2-\frac{4a^2(1-\varkappa)}{\Omega}\Big]\alpha_{22}\Big\}\Big|_{\substack{x_2=0\\ x_2=\infty}}=0$$

Tutaj

$$\varkappa(x_2)=\frac{1-2\nu(x_2)}{2-2\nu(x_2)}\quad,\quad \nu(x_2)=\frac{1-2\varkappa(x_2)}{2-2\varkappa(x_2)}\ ,$$

$$(1.13)\qquad h=\varrho D(\varrho^{-1})\quad,\quad \Omega(x_2)=c_R^2\,\varrho(x_2)/\mu(x_2)\ ,$$

$$a^2=s^2(1-\Omega)\quad,\quad b^2=s^2(1-\Omega\varkappa)\ ,$$

$$H_1 = [\Omega/2-\Omega]\cdot[h/2-2x] \quad , \quad e^2 = DH_1 - (1-2x)H_1^2$$

Znajomość pary $(\lambda, \alpha_{22}(x_2))$, spełniającej układ (1.10) - (1.12) pozwala wyznaczyć funkcje $\alpha_{11}(x_2)$ i $\alpha_{12}(x_2)$ przy pomocy związków:

$$(1.14) \quad \alpha_{11}(x_2) = -\frac{1}{s^2(2-\Omega)}\Big\{\big[s^2\Omega + 2(D^2+hD)\big]\alpha_{22} + h\frac{1}{a^2-e^2}\frac{1}{1-x}\big[D-(1-2x)H_1\big]\frac{2}{2-\Omega}\frac{1}{1-x}\cdot \cdot\Big[D^2+hD-b^2-\frac{4a^2}{\Omega}(1-x)\Big]\alpha_{22}\Big\},$$

$$(1.15) \quad -2s\alpha_{12}(x_2) = \frac{1}{a^2-e^2}\big[D-(1-2x)H_1\big]\frac{\Omega}{2-\Omega}\frac{1}{1-x}\cdot \cdot\Big[D^2+hD-b^2-\frac{4a^2}{\Omega}(1-x)\Big]\alpha_{22}$$

W przypadku $\varrho = \mathrm{const}$ równania (1.10) - (1.12) oraz (1.14) - (1.15) redukują się do postaci [5] :

$$(1.16) \quad \Big(\frac{1}{s^2}D\frac{1}{1-\Omega}D-1\Big)\frac{1}{1-x}\frac{\Omega}{2-\Omega}\big[D^2-s^2(1-\Omega x)\big]\alpha_{22} + +4\Big[\frac{1}{2-\Omega}D^2 - D\frac{1}{1-\Omega}D\frac{1-\Omega}{2-\Omega}\Big]\alpha_{22} = 0 \quad \text{dla } x_2\in(0,+\infty),$$

$$(1.17) \quad \alpha_{22}(0) = \alpha_{22}(\infty) = 0$$

$$\Big[D\Big\{\frac{\Omega}{2-\Omega}\frac{1}{1-x}\big[D^2-s^2(1-\Omega x)\big]\alpha_{22} +$$

$$-4s^2\frac{1-\nu}{2-\nu}\alpha_{22}\Big\}\Big]\Big|_{x_2=\infty}^{x_2=0} = 0 \,,$$

(1.18)

$$\alpha_{11}(x_2) = -\frac{1}{s^2(2-\nu)}\left(s^2\nu + 2D^2\right)\alpha_{22} \,,$$

(1.19) $-2s\alpha_{12}(x_2) =$

$$= \frac{1}{s^2(1-\nu)}D\left\{\frac{\nu}{2-\nu}\frac{1}{1-\varkappa}\left[D^2 - s^2(1-\nu\varkappa)\right]\alpha_{22} - 4s^2\frac{1-\nu}{2-\nu}\alpha_{22}\right\}$$

Nieliniowy problem własny (1.10) - (1.12) /lub (1.16) - -(1.17)/ jest problemem, w którym funkcja własna α_{22} spełnia liniowe zwyczajne równanie różniczkowe czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach, zaś λ wchodzi nieliniowo zarówno do równania jak i do warunków brzegowych.
Badanie rozwiązalności tego problemu nie można zatem przeprowadzać posługując się standartowymi metodami analizy spektralnej operatorów różniczkowych liniowych. Wracając do układu (1.1) zauważymy , że jeśli zapisać go w postaci:

$$\text{(1.20)}\qquad \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{\mu} & \frac{-\nu}{\mu} & 0 \\ \frac{-\nu}{\mu} & \frac{1-\nu}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\tau}_{11} \\ \ddot{\tau}_{22} \\ \ddot{\tau}_{12} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\frac{\partial}{\partial x_1}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 2\frac{\partial}{\partial x_1}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 2\frac{\partial}{\partial x_2}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2} & 2\frac{\partial}{\partial x_2}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_1}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

to wyznacznik charakterystyczny operatora stojącego po prawej stronie (1.20) ma postać:

$$(1.21) \qquad \begin{vmatrix} -2\varrho^{-1}\xi_1^2 & 0 & -2\varrho^{-1}\xi_1\xi_2 \\ 0 & -2\varrho^{-1}\xi_2^2 & -2\varrho^{-1}\xi_2\xi_1 \\ -\varrho^{-1}\xi_2\xi_1 & -\varrho^{-1}(\xi_2^2+\xi_1^2) & -\varrho^{-1}\xi_1\xi_2 \end{vmatrix}$$

Wyznacznik ten znika dla każdego punktu (ξ_1,ξ_2) płaszczyzny. Oznacza to, że układ równań (1.1) jest typu dyspesyjnego (por [35] str.151) a także [20], [21], [22], [23]. Do badania tego układu nie można więc stosować metod używanych dla regularnych operatorów.

Można pokazać, że jeśli istnieje pewne rozwiązanie tego układu, to spełnia ono następujący warunek nierozdzielności dwuwymiarowej teorii sprężystości 4/:

$$(1.22) \qquad \left\{\mu^{-1}\left[(1-\nu)\tau_{11}-\nu\tau_{22}\right]\right\}_{,22}+\left\{\mu^{-1}\left[(1-\nu)\tau_{22}-\nu\tau_{11}\right]\right\}_{,11}+$$

$$-2\{\mu^{-1}\tau_{12}\}_{,12}=0 \quad dla \quad (x,t)\in U\times[0,\infty).$$

Układ (1.20) wraz z warunkiem (1.22) może być sklasyfikowany jako regularny ; warunek (1.22) wynika z układu (1.20) , jeśli pole naprężeń $\tau_{\alpha\beta}$ jest dostatecznie gładkie na $U\times[0,\infty)$ oraz jeśli lewa strona wzoru (1.22) i pochodna czasowa lewej strony wzoru (1.22) znikają dla t=0. Te ostatnie warunki oznaczają, że początkowa deformacja i początkowa prędkość deformacji spełniają płaski warunek nierozdzielności.

Zanikanie wyznacznika (1.21) ma określone konsekwencje. Otóż operator

$$\underline{\Sigma}\,\tau_{\alpha\beta}(x,t)\equiv\begin{bmatrix} 2\frac{\partial}{\partial x_1}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 2\frac{\partial}{\partial x_1}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 2\frac{\partial}{\partial x_2}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2} & 2\frac{\partial}{\partial x_2}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_1}\varrho^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tau_{11}\\ \tau_{22}\\ \tau_{12}\end{bmatrix} \tag{1.23}$$

określony na dziedzinie

$$D_1(\underline{\Sigma})=\{(\tau_{11},\tau_{22},\tau_{12})\in[C^2(U\times[0,\infty))]^3 : \tau_{22}(x_1,0,t)=\tau_{12}(x_1,0,t)=\tau_{22}(x_1,\infty,t)=$$
$$=\tau_{12}(x_1,\infty,t)=\tau_{11}(x_1,\infty,t)=0\}.$$

lub

$$D_2(\underline{\Sigma})=\{(\tau_{11},\tau_{22},\tau_{12})\in[L^2(U\times[0,\infty))]^3 : \tau_{22}(x_1,0,t)=\ldots=\tau_{11}(x_1,\infty,t)=0\}$$

nie jest odwracalny . Dopiero warunek (1.22) powoduje, że operator $\underline{\Sigma}\,\tau_{\alpha\beta}(x,t)$ jest odwracalny. Łatwo sprawdzić, że

$\underline{\Sigma}\,\tau_{\alpha\beta}(x,t)=0$, $\tau_{\alpha\beta}\in D_1$ lub D_2, $\tau_{\alpha\beta}(x,t)$ spełnia warunek (1.22) ; implikuje , że

(1.24) $\underline{\tau} = (\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12})^T = (0,0,0)$, a zatem operator $\underline{\Sigma}\, \tau_{\alpha\beta}(x,t)$ jest odwracalnym operatorem (por. T. Kato [25] str. 143).

ROZDZIAŁ II. O analitycznej zależności prędkości i amplitudy fal powierzchniowych od liczby falowej (por [24]).

W tym rozdziale zajmiemy się jakościową analizą problemu I. (1.8) - I.(1.9)5/. Stosując B-holomorficzną teorię perturbacji liniowych operatorów zaproponowaną przez T. Kato [25] pokażemy, że prędkość propagacji fal powierzchniowych oraz amplituda tych fal są funkcjami analitycznymi liczby falowej s .

W zespolonej przestrzeni Hilberta H 6/ generowanej przez iloczyn skalarny

(1.1) $$(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \int_0^\infty (\bar{\alpha}_{11}\beta_{11} + \bar{\alpha}_{22}\beta_{22} + \bar{\alpha}_{12}\beta_{12})\, dx_2$$

z normą

(1.2) $$\|\underline{\alpha}\|^2 = \int_0^\infty (|\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{22}|^2 + |\alpha_{12}|^2)\, dx_2 < +\infty$$

równanie I. (1.8) może być zapisane w postaci

(1.3) $$\underline{A}(s)\underline{\alpha} - \lambda \underline{B}\underline{\alpha} = \underline{0}$$

gdzie

$$\underline{\alpha} = (\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12})^T ,$$

$$
\underline{A}(s) \equiv \begin{bmatrix} \frac{s^2}{\varrho} & 0 & \frac{s}{\varrho}D \\ 0 & -D\frac{1}{\varrho}D & sD\frac{1}{\varrho} \\ -sD\frac{1}{\varrho} & -\frac{s}{\varrho}D & \frac{s^2}{\varrho} - D\frac{1}{\varrho}D \end{bmatrix}
$$

$$
\underline{B} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2\mu} & \frac{-\nu}{2\mu} & 0 \\ \frac{-\nu}{2\mu} & \frac{1-\nu}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix}
$$

Dziedziny operatorów $\underline{A}$ i $\underline{B}$ określemy następująco:

(1.4) $$\mathcal{D}(\underline{A}) = \{ \underline{\alpha} : \alpha_{ij} \in C^2[0,+\infty),\ \alpha_{12}(0) = \alpha_{21}(0) = \alpha_{12}(\infty) = \alpha_{22}(\infty) = \alpha_{12}(\infty) = \alpha_{11}(\infty) = 0 \}$$

(1.5) $$\mathcal{D}(\underline{B}) = \{ \underline{\alpha} : \alpha_{ij} \in C^2[0,\infty) \} \qquad (i,j) = (1,2)$$

Zbiory $\mathcal{D}(\underline{A})$ i $\mathcal{D}(\underline{B})$ są gęstymi 7/ w przestrzeni H, ponieważ zbiór $C_0^\infty[0,\infty) \times C_0^\infty[0,\infty) \times C_0^\infty[0,\infty)$ jest gęsty w H i zawarty w $\mathcal{D}(\underline{A})$ i $\mathcal{D}(\underline{B})$. Zachodzi następujące twierdzenie

TWIERDZENIE 1. W przestrzeni H operatory $\underline{A}$ oraz $\underline{B}$ są symetrycznymi 8/.

Symetryczność operatora $\underline{A}$ wynika stąd, że dla dowolnych

$\underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathcal{D}(\underline{A}) \subset H$ mamy:

$$(\underline{A}\,\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \int_0^\infty \Big\{ \varrho^{-1}(s^2 \bar{\alpha}_{11} + s\dot{\bar{\alpha}}_{12})\beta_{11} - [\varrho^{-1}(\dot{\alpha}_{22} - s\bar{\alpha}_{12})]^{\cdot}\,\beta_{22} +$$

$$- [\varrho^{-1}(\dot{\alpha}_{12} + s\bar{\alpha}_{11})]^{\cdot}\,\beta_{12} - s\varrho^{-1}(\dot{\alpha}_{12} - s\bar{\alpha}_{22})\beta_{12} \Big\} dx_2$$

Całkowanie przez części, przy użyciu warunków brzegowych określających $\mathcal{D}(\underline{A})$ pokazuje, że

$$(\underline{A}\,\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = (\underline{\alpha}, \underline{A}\,\underline{\beta})$$

Symetryczność operatora $\underline{A}$ wynika również stąd, że operatory różniczkowe stojące po obydwu stronach głównej przekątnej macierzy różniczkowej $\underline{A}$ są formalnie sprzężone: np $\frac{s}{\varrho} D$ i $-sD\frac{1}{\varrho}$; $sD\frac{1}{\varrho}$ i $-\frac{s}{\varrho}D$.

Bezpośrednią konsekwencją definicji operatora $\underline{B}$ jest

TWIERDZENIE 2. Macierz $\underline{B}$ jest dodatnio określona oraz dla każdego $\underline{\alpha} \in \mathcal{D}(\underline{B}) \subset H$ zachodzi nierówność

$$(\ast) \qquad (\underline{B}\,\underline{\alpha}, \underline{\alpha}) \geqslant k(\underline{\alpha}, \underline{\alpha})$$

gdzie

$$k = \min_{x_2 \in [0, +\infty)} \left(\frac{1-2\nu}{2\mu}, \frac{1}{2\mu} \right)$$

Dla dowodu twierdzenia 2 por. odsyłacz (9).

Rozważmy teraz formy [10/]

$$\mathfrak{A}[\underline{\alpha}] = (\underline{A}\,\underline{\alpha}, \underline{\alpha}), \quad \mathfrak{B}[\underline{\alpha}] = (\underline{B}\,\underline{\alpha}, \underline{\alpha})$$

określone wzorami:

$$(\underline{A}\,\underline{\alpha},\underline{\alpha}) = \int_0^\infty \varrho^{-1}\left[\,|\dot{\alpha}_{22} - s\alpha_{12}|^2 + |\dot{\alpha}_{12} + s\alpha_{11}|^2\right] dx_2$$

$$(\underline{B}\,\underline{\alpha},\underline{\alpha}) = \int_0^\infty (2\mu)^{-1}\left[(1-\nu)|\alpha_{11}|^2 + (1-\nu)|\alpha_{22}|^2 + \right.$$

$$\left. + 2|\alpha_{12}|^2 - 2\nu \operatorname{Re}(\alpha_{11}\bar{\alpha}_{22})\right] dx_2$$

Ponadto zdefiniujemy w przestrzeni H formę postaci

$$(1.6) \qquad \mathfrak{a}(z)[\underline{\alpha}] = \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{a}^{(i)}(s_0)[\underline{\alpha}](z-s_0)^i$$

gdzie parametr z należy do pewnego otoczenia dodatniej półosi $s_0 \in (0,+\infty)$, oraz [11].

$$(1.7) \qquad \mathfrak{a}^{(0)}(s_0)[\underline{\alpha}] = (\underline{A}(s_0)\,\underline{\alpha},\underline{\alpha}) =$$

$$= \int_0^\infty \varrho^{-1}(|\dot{\alpha}_{22} - s_0\alpha_{12}|^2 + |\dot{\alpha}_{12} + s_0\alpha_{11}|^2)\,dx_2,$$

$$(1.8) \qquad \mathfrak{a}^{(1)}(s_0)[\underline{\alpha}] = \left(\int_0^\infty \varrho^{-1}\{2s_0|\alpha_{12}|^2 + 2s_0|\alpha_{11}|^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha_{12}\dot{\bar{\alpha}}_{22}) + \right.$$

$$\left. + 2\operatorname{Re}(\alpha_{11}\dot{\bar{\alpha}}_{12})\}\,dx_2\right.$$

$$(1.9) \qquad \mathfrak{a}^{(2)}(s_0)[\underline{\alpha}] = \int_0^\infty 2\varrho^{-1}(|\alpha_{12}|^2 + |\alpha_{11}|^2)\,dx_2$$

$$(1.10) \qquad \mathfrak{a}^{(n)}(s_0)[\underline{\alpha}] = 0 \quad \text{dla } n = 3,4,\ldots$$

Stosując kryterium B-holomorficzności [12] pokażemy, że domknięcie formy $\widetilde{\mathfrak{a}(z)}$ [13] danej wzorem (1.6) generuje pewną B-holomorficzną rodzinę operatorów $\widetilde{\underline{A}(z)}$. Następnie rozważymy problem własny:

$$\widetilde{\underline{A}(z)}\,\underline{\alpha} - \lambda \underline{\widetilde{B}}\,\underline{\alpha} = \underline{0} \tag{1.11}$$

gdzie $\underline{\widetilde{A}}(z)$ jest B-holomorficznym operatorem stowarzyszonym z domknięciem formy (1.6) oraz $\underline{\widetilde{B}}$ jest domknięciem operatora $\underline{B}$ i korzystając z twierdzenia Kato o analityczności rozwiązania problemu (1.11) względem z (por. [25] str. 526 lub Dodatek A) udowodnimy analityczność rozwiązania problemu (I. (1.8) - I. (1.9)) względem liczby falowej s .

Niech dziedziną formy $\mathfrak{n}^{(0)}(s_0)[\underline{\alpha}]$ będzie zbiór $\mathcal{D}[\mathfrak{n}^{(0)}]$ 14/. Zauważmy, że forma

$$\mathfrak{n}^{(0)}(s_0)[\underline{\alpha}] = (\underline{A}(s_0)\underline{\alpha}, \underline{\alpha})$$

jest symetryczną, nieujemną formą , a zatem formą domykalną 15/. Ponadto zbiór $\mathcal{D}[\mathfrak{n}^{(0)}]$ jest gęstym w przestrzeni H , gdyż dziedzina $\mathcal{D}(\underline{A})$ operatora $\underline{A}$ jest zbiorem gęstym w H oraz

$$\mathcal{D}(\underline{A}) \subset \mathcal{D}[\mathfrak{n}^{(0)}] \subset H$$ 16/

Zachodzi TWIERDZENIE 3. Dla każdej naturalnej liczby $n \geq 1$ forma $\mathfrak{n}^{(n)}(s_0)[\underline{\alpha}]$ są ograniczone względem formy $\mathfrak{n}^{(0)}(s_0)[\underline{\alpha}]$; to znaczy, że $\mathcal{D}[\mathfrak{n}^{(0)}] \subset \mathcal{D}[\mathfrak{n}^{(n)}]$ i istnieją stałe $c > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ takie,że dla $\underline{\alpha} \in \mathcal{D}[\mathfrak{n}^{(0)}]$ zachodzi nierówność:

$$\left|\mathfrak{n}^{(n)}(s_0)[\underline{\alpha}]\right| \leq c^{n-1}\left(a\|\underline{\alpha}\|^2 + b\,\mathrm{Re}\,\mathfrak{n}^{(0)}(s_0)[\underline{\alpha}]\right). \tag{1.12}$$

Dowód: Korzystając z oszacowań 17/

$$
\begin{aligned}
(1.13)\quad \left|\mathfrak{A}^{(1)}(s_0)[\underline{\alpha}]\right| &= \Big| \int_0^\infty \varrho^{-1}\big[-\bar{\alpha}_{12}(\dot{\alpha}_{22}-s_0\alpha_{12})-(\dot{\bar{\alpha}}_{22}-s_0\bar{\alpha}_{12})\alpha_{12}+ \\
&\quad + \bar{\alpha}_{11}(\dot{\alpha}_{12}+s_0\alpha_{11})+(\dot{\bar{\alpha}}_{12}+s_0\bar{\alpha}_{11})\alpha_{11}\big]dx_2 \Big| \leq \\
&\leq \Big(\int_0^\infty \varrho^{-1}|\alpha_{12}|^2dx_2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\int_0^\infty \varrho^{-1}|\dot{\alpha}_{22}-s_0\alpha_{12}|^2dx_2\Big)^{1/2}+ \\
&\quad + \Big(\int_0^\infty \varrho^{-1}|\alpha_{12}|^2dx_2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\int_0^\infty \varrho^{-1}|\dot{\alpha}_{22}-s_0\alpha_{12}|^2dx_2\Big)^{1/2}+ \\
&\quad + \Big(\int_0^\infty \varrho^{-1}|\alpha_{11}|^2dx_2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\int_0^\infty \varrho^{-1}|\dot{\alpha}_{12}+s_0\alpha_{11}|^2dx_2\Big)^{1/2}+ \\
&\quad + \Big(\int_0^\infty \varrho^{-1}|\alpha_{11}|^2dx_2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\int_0^\infty \varrho^{-1}|\dot{\alpha}_{12}+s_0\alpha_{11}|^2dx_2\Big)^{1/2} = \\
&= 2\Big[\Big(\int_0^\infty \varrho^{-1}|\alpha_{12}|^2dx_2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\int_0^\infty \varrho^{-1}|\dot{\alpha}_{22}-s_0\alpha_{12}|^2dx_2\Big)^{1/2}+ \\
&\quad + \Big(\int_0^\infty \varrho^{-1}|\alpha_{11}|^2dx_2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\int_0^\infty \varrho^{-1}|\dot{\alpha}_{12}+s_0\alpha_{11}|^2dx_2\Big)^{1/2} \leq \\
&\leq \varepsilon \max_{x_2\in[0,+\infty)} \varrho^{-1}\Big(\int_0^\infty \big[|\alpha_{11}|^2+|\alpha_{22}|^2+|\alpha_{12}|^2\big]dx_2\Big)+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \frac{1}{\varrho}\left(|\dot{\alpha}_{22}-s_0\alpha_{12}|^2+|\dot{\alpha}_{12}+s_0\alpha_{11}|^2\right)dx_2 =$$

$$=\frac{\varepsilon}{\varrho_0}\|\underline{\alpha}\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\mathfrak{a}^{(0)}(s_0)[\underline{\alpha}]$$

oraz

(1.14)

$$\left|\mathfrak{a}^{(2)}(s_0)[\underline{\alpha}]\right|=\int_0^\infty \frac{2}{\varrho}\left(|\alpha_{11}|^2+|\alpha_{22}|^2\right)dx_2 \leq$$

$$\leq \max_{x_2\in[0,+\infty)}\frac{2}{\varrho}\int_0^\infty\left(|\alpha_{11}|^2+|\alpha_{22}|^2+|\alpha_{12}|^2\right)dx_2+$$

$$+\frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^\infty\frac{1}{\varrho}\left(|\dot{\alpha}_{22}-s_0\alpha_{12}|^2+|\dot{\alpha}_{12}+s_0\alpha_{11}|^2\right)dx_2=$$

$$=\frac{2}{\varrho_0}\|\underline{\alpha}\|^2+\frac{2}{\varepsilon^2}\mathrm{Re}\,\mathfrak{a}^{(0)}(s_0)[\underline{\alpha}]$$

wnosimy, że $\mathcal{D}[\mathfrak{a}^{(0)}]\subset\mathcal{D}[\mathfrak{a}^{(n)}]$ dla n= 1,2 .... oraz, że istnieją liczby $a=\varepsilon/\varrho_0$, $b=1/\varepsilon$, $c=2/\varepsilon$ takie, że dla $\underline{\alpha}\in\mathcal{D}(\mathfrak{a}^{(0)})$ zachodzi nierówność (1.12) / ε oznacza dowolną liczbę dodatnią / c.k.d.

Z twierdzenia 3 wynika, że spełnione są założenia kryterium B-holomorficzności (por. Tw. 1, Dodatek A i prawdziwe jest

TWIERDZENIE 4. Forma $\mathfrak{a}(z)[\underline{\alpha}]$ dana wzorem (1.6) jest określona dla $|z-s_0|<\varepsilon/2$, a dla $|z-s_0|<\varepsilon/3$ jest sektorialną [18] i domykalną. Domknięcie $\widetilde{\mathfrak{N}(z)}[\underline{\alpha}]$ formy $\mathfrak{N}(z)[\underline{\alpha}]$ generuje pewną B-holomorficzną rodzinę operatorów $\underline{\widetilde{A}}(z)$ przy czym $\underline{\widetilde{A}}(z)$ jest maksymalnym [19] i domkniętym operatorem. W dalszym ciągu będziemy rozważać zagadnienia własne opisane równaniem (1.11), w którym $\underline{\widetilde{A}}(z)$ jest operatorem występującym w twierdzeniu 4 oraz $\underline{\widetilde{B}}$ jest domknięciem operatora $\underline{B}$. Ponieważ $\underline{\widetilde{A}}(z)$ jest operatorem B-holomorficznym dla $z \in V = \{z : |z - s_0| < \varepsilon/3\}$ i macierz $\underline{\widetilde{B}}$ jest dodatnio określonym symetrycznym operatorem, to na mocy twierdzeniem Kato [20] ([25] str. 523-527) zachodzi

TWIERDZENIE 5. Jeżeli para $(\lambda(z), \underline{\alpha}(z))$ jest rozwiązaniem problemu własnego (1.11), to jest ona analityczną względem parametru

$$z \in V = \{z : |z - s_0| < \varepsilon/3\}$$

oraz TWIERDZENIE 6. Jeżeli para $(\lambda(s), \underline{\alpha}(x_2, s))$ jest rozwiązaniem problemu własnego (1.3), to jest ona funkcją analityczną liczby falowej s tzn. że

$$(\lambda(s), \underline{\alpha}(x_2, s)) \equiv \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (s - s_0)^n, \ \underline{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\alpha}_n(x_2)(s - s_0)^n\right)$$

gdzie

$$\lambda_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n \lambda}{d s^n}\right)_{s=s_0}$$

$$\underline{\alpha}_n(x_2) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n \underline{\alpha}}{\partial s^n}\right)_{s=s_0}, \quad s_0 \in (0; \infty)$$

Dowód twierdzenia 6 jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 5 oraz faktu, że każde rozwiązanie problemu własnego (1.3) jest również rozwiązaniem własnym równania (1.11) .

UWAGA 1. Analityczność $\lambda=\lambda(s)$ względem s implikuje analityczność prędkości fali powierzchniowej

$$c_R = c_R(s) = \sqrt{\lambda(s)}/s$$

dla każdego $s \in (0, +\infty)$

UWAGA 2. (por. [25] str. 417, 418)

Najbardziej naturalnym podejściem do rozpatrywania problemu własnego $\underline{A}\underline{\alpha} - \lambda \underline{B}\underline{\alpha} = \underline{0}$ jest badanie uogólnionej rezolwenty $(\underline{A} - \xi \underline{B})^{-1}$

Niech

$$X = \Big\{(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}) \in [L^2(0,+\infty)]^3, [C^2[0,+\infty)]^3 :$$

$$-\left[\frac{(\alpha_{11} - \nu\alpha_{\gamma\gamma})}{2\mu}\right]'' + s^2 \frac{\alpha_{22} - \nu\alpha_{\gamma\gamma}}{2\mu} - s\left[\frac{\alpha_{12}}{\mu}\right]' = 0$$

$$Y = \Big\{(g_{11}, g_{22}, g_{12}) \in [L^2(0,\infty)]^3, [(C^2[0,+\infty))^3] :$$

$$-\ddot{g}_{11}(x_2) + s^2 g_{22}(x_2) - s\dot{g}_{12}(x_2) = 0\Big\}$$

Łatwo sprawdzić, że przestrzenie X , Y są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $[L^2(0,\infty)]^3$, $[C^2[0,\infty)]^3$

Niech $\mathcal{C}(X,Y)$ oznacza przestrzeń operatorów domykalnych z przestrzeni X do przestrzeni Y . Podobnie niech $B(X,Y)$ oznacza przestrzeń operatorów ograniczonych z przestrzeni X do przestrzeni Y . Ponieważ $\underline{A} \in \mathcal{C}(X,Y)$, $\underline{B} \in B(X,Y)$ i $\underline{B}^{-1} \in B(X,Y)$ więc $\underline{B^{-1}A} \in \mathcal{C}(X,X) = \mathcal{C}(X)$,

$\underline{A}\underline{B}^{-1} \in \mathcal{C}(Y,Y) = \mathcal{C}(Y)$ i równania własne

$$\underline{A}\underline{\alpha} - \lambda \underline{B}\underline{\alpha} = \underline{0}\ , \quad \underline{B}^{-1}\underline{A}\underline{\alpha} - \lambda\underline{\alpha} = \underline{0}\ , \quad \underline{A}\underline{B}^{-1}\underline{\alpha} - \lambda\underline{\alpha} = \underline{0}$$

są równoważne (por [25] str. 417, 418). Wracając do problemu istnienia operatora $(\underline{A} - \xi\underline{B})^{-1}$ i odpowiedzi dla jakich $\xi \in C$ / C- płaszczyzna zespolona / istnieje

$$(\underline{A} - \xi\underline{B})^{-1} \quad \text{lub} \quad (\underline{A} - \xi\underline{B})^{-1} \in B(Y)$$

zauważmy, że w przypadku jednorodnym / ϱ = const, μ = const, ν = const/ rozwiązaniem równania:

$$\underline{A}\underline{\alpha} - \xi\underline{B}\underline{\alpha} = \underline{0}$$

$$\underline{\alpha} \in D(\underline{A}) \cap D(\underline{B}) \subset X$$

jest

$$\underline{\alpha} = (0,0,0)^T$$

o ile $\xi \notin \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ Użyte w poprzednim zdaniu $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ są pierwiastkami równania

$$(2-\omega)^2 - 4\sqrt{(1-\omega)(1-\omega\varkappa)} = 0$$

zaś $\varkappa = (1-2\nu)(2-2\nu)^{-1}$

Rzeczywiście podstawiając rozwiązanie:

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} \quad \text{równania} \quad \underline{A}\underline{\alpha} - \xi\underline{B}\underline{\alpha} = 0$$

$$\underline{\alpha} \in D(\underline{A}) \cap D(\underline{B})$$

gdzie
$$\alpha_{11} = -\beta_0\left[e^{-x_2h_2} - \frac{2+\xi(1-2\varkappa)}{2-\xi}\,e^{-x_2h_1}\right]$$

$$\alpha_{22} = \beta_0\left[e^{-x_2h_2} - e^{-x_2h_1}\right]$$

$$\alpha_{12} = -\frac{2}{s}\,\frac{\beta_0}{2-\xi}\,h_1\left[e^{-x_2h_2} - e^{-x_2h_1}\right]$$

$$h_1 = s\sqrt{1-\xi\varkappa}\ , \quad h_2 = s\sqrt{1-\xi}$$

do warunku nierozdzielności:

$$-\left[\frac{\alpha_{11}-\nu\alpha_{\tilde\mu\tilde\mu}}{2\mu}\right]^{\cdot\cdot} + s^2\,\frac{\alpha_{12}-\nu\alpha_{\tilde\mu\tilde\mu}}{2\mu} - s\left[\frac{\alpha_{12}}{\mu}\right]^{\cdot} = 0\ ;\ (\tilde\mu = 1,2)$$

otrzymujemy

$$\frac{\beta_0 s^2}{2\mu(2-\xi)}\,e^{-x_2 s\sqrt{1-\xi}}\left[(2-\xi)^2 - 4\sqrt{(1-\xi)(1-\xi\varkappa)}\right] +$$

$$+\frac{\beta_0 s^2}{2\mu(2-\xi)(1-\nu)}\,e^{-x_2 s\sqrt{1-\xi\varkappa}}\cdot\left[\ 0\ \right] = 0$$

Jeśli więc $\xi \notin \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, to

$(2-\xi)^2 - 4\sqrt{(1-\varkappa)(1-\xi\varkappa)} \neq 0$ i $\beta_0 = 0$. Zatem

$(\underline{A} - \xi\underline{B})^{-1}$ istnieje. Więcej informacji na temat odwracalności operatorów można znaleźć w [25].

UWAGA 3.

Interesującym jest badanie operatora $\underline{A}$ w przestrzeni X, a zwłaszcza badanie odwracalności jego. Można w ten sposób uzyskać odpowiedź na temat krotności wartości własnej $\lambda = 0$.

W tym celu rozwiążmy równanie:

$$\underline{A}(s)\underline{\alpha} = \underline{0} \qquad \text{gdzie} \qquad \underline{\alpha} = (\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12})^T$$

Niech dziedziną operatora $\underline{A}$ jest zbiór

$$D(\underline{A}) = \{ \underline{\alpha} = (\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12})^T \in [C^2[0,+\infty)]^3, ((L^2(0,\infty))^3) :$$

$$: \alpha_{12}(0) = \alpha_{22}(0) = \alpha_{12}(\infty) = \alpha_{22}(\infty) = \alpha_{11}(\infty) = 0 \}$$

Wtedy

$$\underline{A}(s)\underline{\alpha} = \underline{0} \iff \begin{cases} s\,\alpha_{11} + \dot{\alpha}_{12} = 0 \\ -s\,\alpha_{12} + \dot{\alpha}_{22} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_{11}(x_2) = C_1 \varphi''(x_2) \\ \alpha_{22}(x_2) = -s^2 C_1 \varphi(x_2) \\ \alpha_{12}(x_2) = -s C_1 \varphi'(x_2) \end{cases}$$

Uwzględniając dziedzinę:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi(\infty) = \varphi'(\infty) = 0$$

otrzymujemy rozwiązanie / ker $\underline{A}$ / w postaci

$$(*) \qquad \alpha_{11}(x_2) = C_1(2 - 4\alpha_k x_2 + \alpha_k^2 x_2^2) e^{-\alpha_k x_2}$$

$$\alpha_{22}(x_2) = -s^2 x_2^2 C_1 e^{-\alpha_\kappa x_2}$$

$$\alpha_{12}(x_2) = -s\, C_1 (2x_2 - \alpha_\kappa x_2^2) e^{-\alpha_\kappa x_2}$$

gdzie $C_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in [0, +\infty)$, $\alpha_\kappa > 0$

Zauważamy, że

$$\dim \ker \underline{A} = \infty$$

gdy dziedziną operatora $\underline{A}$ jest zbiór:

$$\{\underline{\alpha} = (\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}) \in [C^2[0,\infty)]^3 ; ([L^2(0,\infty)]^3) :$$
$$: \alpha_{12}(0) = \alpha_{22}(0) = \alpha_{12}(\infty) = \alpha_{22}(\infty) = \alpha_{11}(\infty) = 0\}$$

Natomiast

$$\dim \ker \underline{A} = 0$$

gdy dziedziną jest zbiór:

$$\{\underline{\alpha} = (\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}) \in [C^2[0,\infty)]^3 ; ([L^2(0,\infty)]^3) : \alpha_{12}(0) = \ldots$$
$$= \alpha_{11}(\infty) = 0 \quad i \quad -\left[\frac{\alpha_{11} - \nu\alpha_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}}{2\mu}\right]^{\cdot\cdot} + \frac{s^2(\alpha_{22} - \nu\alpha_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}})}{2\mu} - s\left[\frac{\alpha_{12}}{\mu}\right]^{\cdot} = 0\}$$

Wstawiając bowiem rozwiązanie równania $\underline{A}(s)\underline{\alpha} = \underline{0}$ dane wzorami (*) do warunku rozdzielności spełnionego dla każdego x_2 otrzymujemy $C_1 = 0$ i w konsekwencji rozwiązanie równania $\underline{A}(s)\underline{\alpha} = \underline{0}$ w $\mathbb{X}$ jest postaci:

$$\underline{\alpha} = [0, 0, 0]^T = \underline{0}\ ,$$

a więc ker $\underline{A}$ = $\underline{0}$.

ROZDZIAŁ III. Istnienie fal powierzchownych w niejednorodnej, izotropowej półprzestrzeni sprężystej, gdy gęstość ϱ i moduł ścinania μ są stałe, zaś współczynnik Poissona ν zależy od głębokości półprzestrzeni (por[27] str 967 - 971).

W przypadku, gdy gęstość ośrodka $\varrho(x_2) \equiv 1$ moduł ścinania $\mu(x_2) \equiv 1$, zaś liczba Poissona $\nu(x_2) \in C^2[0,\infty)$ problem własny I. (1.10) - I. (1.15) redukuje się do następującego nieliniowego problemu własnego: znaleźć nieznikającą parę $(c_R, \alpha_{22}(x_2))$, która spełnia związki

$$(1.1) \quad \left[\frac{1}{s^2(1-\varkappa_0)} D^2 - 1\right] \frac{1}{1-\varkappa(x_2)} \left[D^2 - s^2(1-\varkappa_0 \varkappa(x_2))\right] \alpha_{22} = 0$$

dla $x_2 \in (0,\infty)$

$$(1.2) \quad \begin{cases} \alpha_{22}(0) = \alpha_{22}(\infty) = 0 \\ D\left\{ \dfrac{\varkappa_0}{2-\varkappa_0} \dfrac{1}{1-\varkappa(x_2)} \left[D^2 - s^2(1-\varkappa_0 \varkappa(x_2))\right]\alpha_{22} + \right. \\ \left. - 4s^2 \dfrac{1-\varkappa_0}{2-\varkappa_0} \alpha_{22} \right\} \Bigg|_{\substack{x_2=0 \\ x_2=\infty}} = 0 \end{cases}$$

Tutaj $\Lambda_0 = C_R^2$ oraz funkcja $\varkappa(x_2)$ jest określona przy pomocy funkcji $\nu(x_2)$ wzorem

$$(1.3) \qquad \varkappa(x_2) = \frac{1 - 2\nu(x_2)}{2 - 2\nu(x_2)} \qquad \text{por. I } (1.13)$$

Z nierówności I. $(1.3)_3$ wynika, że

$$(1.4) \qquad 0 < \varkappa_0 \leq \varkappa(x_2) \leq \varkappa_1 < 3/4$$

gdzie $\varkappa_0$ i $\varkappa_1$ oznaczają kolejno minimalną i maksymalną wartość funkcji $\varkappa(x_2)$ na $[0, \infty)$. Przyjmując, że;

1/ poszukiwana funkcja własna $\alpha_{22} = \alpha_{22}(x_2)$ jest klasy $C^4[0, \infty)$

2/ $\alpha_{22}(x_2)$ znika wraz ze swoimi pochodnymi skończonego rzędu względem x_2 w punkcie $x_2 = \infty$

3/ $\Lambda_0 \in (0,1)$

wnioskujemy, że układ $(1.1) - (1.2)$ jest równoważny układowi:

$$(1.5) \qquad \frac{1}{1 - \varkappa(x_2)} \left[D^2 - s^2(1 - \Lambda_0 \varkappa(x_2) \right] \alpha_{22} =$$

$$= C_1 \exp(-s\sqrt{1-\Lambda_0}\, x_2) \quad \text{dla} \quad x_2 \in (0, \infty)$$

(1.6) $$\alpha_{22}(0) = 0$$

(1.7) $$D\left\{\frac{\rho_0}{1-\varkappa(x_2)}\left[D^2 - s^2(1-\rho_0\varkappa(x_2))\right]\alpha_{22} + \right.$$

$$\left. -4s^2(1-\rho_0)\,\alpha_{22}\right\}\Big|_{x_2=0} = 0$$

gdzie C_1 jest dowolną stałą.

Rozważmy jednorodne równanie różniczkowe stowarzyszone z równaniem (1.5)

$$\frac{1}{1-\varkappa(x_2)}\left[D^2 - s^2(1-\rho_0\varkappa(x_2))\right]\alpha_{22} = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 \in (0,\infty)$$

Równanie to na mocy nierówności (1.4) można zapisać w postaci

(1.8) $$\left[D^2 - s^2(1-\rho_0\varkappa(x_2))\right]\alpha_{22} = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 \in (0,\infty)$$

zachodzi

TWIERDZENIE I. Równanie (1.8) ma dwa liniowo niezależne rozwiązania postaci:

(1.9) $$\alpha_{22}^{(i)}(x;\rho_0,s) = \alpha_{22}^{(i)}(0;\rho_0,s)\exp\left(\int_0^x F_i(\tau;\rho_0,s)\,d\tau\right)$$

$(i = 1.2)$, $(x = x_2)$,

gdzie funkcje $\xi_1(x;\mathcal{N}_0,s)$ i $\xi_2(x;\mathcal{N}_0,s)$ spełniają nierówności

$$(1.10)\qquad a_1 \leq \xi_1(x;\mathcal{N}_0,s) \leq b_1 < c_1 \leq \xi_2(x;\mathcal{N}_0,s) \leq d_1$$

dla każdego $(x;\mathcal{N}_0,s) \in [0,\infty)\times(0,1)\times(0,\infty)$

parametry $a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1$ występujące w (1.10) są określone wzorami:

$$(1.11)\qquad \begin{aligned} a_1 &= -s\sqrt{1-\mathcal{N}_0 x_0}\,, & c_1 &= s\sqrt{1-\mathcal{N}_0 x_1} \\ b_1 &= -s\sqrt{1-\mathcal{N}_0 x_1} & d_1 &= s\sqrt{1-\mathcal{N}_0 x_0} \end{aligned}$$

Dowód twierdzenia 1 opiera się na następującym twierdzeniu C. Olecha (por. [28] str. 319 - 326) :

TWIERDZENIE OLECHA. Rozważmy liniowe równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego postaci:

$$(x)\qquad \ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0 \qquad \left(\cdot = d/dt\right)$$

gdzie $x = x(t)$, $t \in R$

zaś $a = a(t)$, $b = b(t)$; $t \in R$

jeśli

i/ $a(t)$ i $b(t)$ są rzeczywistymi i ciągłymi funkcjami na R,

ii/ równanie algebraiczne

$$\lambda^2 + a(t)\lambda + b(t) = 0$$

ma rzeczywiste pierwiastki $\lambda_1(t)$ i $\lambda_2(t)$ dla każdego $t \in R$,

iii/ istnieją stałe α, β, γ, δ takie, że

$$\alpha \leq \lambda_1(t) \leq \beta < \gamma \leq \lambda_2(t) \leq \delta$$

dla każdego $t \in R$.

Wtedy równanie (x) posiada dwa liniowe niezależne rozwiązania $x_1(t)$ i $x_2(t)$ postaci:

$$\text{(xx)} \qquad x_i(t) = x_i(0) \exp\left(\int_0^t \xi_i(\tau)\, d\tau \right) \qquad (i = 1,2)$$

gdzie funkcje $\xi_i(t)$ spełniają nierówności:

$$\text{(xxx)} \qquad \alpha \leq \xi_1(t) \leq \beta \quad , \quad \gamma \leq \xi_2(t) \leq \delta$$

dla każdego $t \in R$.

Stosując to twierdzenie do równania (1.8) i wykorzystując nierówności (1.4) otrzymujemy tezę twierdzenia 1 (por. też [27]). Z twierdzenia 1 oraz z warunków (1.6) i (1.7) wynika, że dopuszczalne rozwiązanie równania (1.5) ma postać

$$(1.12) \qquad \alpha_{22}(x; \nu_0, s) = A_1 \alpha_{22}^{(1)}(0; \nu_0, s) \exp\left[\int_0^x \xi_1(\tau; \nu_0, s)\, d\tau \right] +$$

$$- C_1 \nu_0^{-1} s^{-2} \exp\left(-s \sqrt{1 - \nu_0}\, x\right)$$

gdzie $(\lambda_0, s) \in (0,1) \times (0, \infty)$ oraz A_1 jest stałą dowolną. Rozwiązanie (1.12) wraz ze swoimi wszystkimi pochodnymi skończonego rzędu względem x znika w punkcie $x = \infty$ Z twierdzenia II. 6 wynika, że rozwiązanie problemu (1.5) - (1.7) jest funkcją analityczną liczby falowej $s \in (0, \infty)$ dla każdego $x \in [0, \infty)$. Stąd i z postaci (1.12) wnosimy, że własność tę posiada również funkcja $\xi_1(x; \lambda_0, s)$. Wynik ten można uzyskać na innej też drodze, na przykład korzystając z twierdzenia Stourma-Liouville'a lub z twierdzenia o analitycznej zależności rozwiązania od parametru [21].

Aby uzyskać związek określający liczbę własną c_R zauważamy, że problem (1.5) - (1.7) jest równoważny problemowi: znaleźć znikającą w nieskończoności funkcję α_{22} /znikają w nieskończoności wszystkie pochodne $\alpha_{22}^{(i)}$/ taką, że

(1.13) $$\frac{1}{1 - \varkappa(x)} \left[D^2 - s^2 (1 - \lambda_0 \varkappa(x)) \right] \alpha_{22} =$$

$$= C_1 \exp\left(-s\sqrt{1-\lambda_0}\, x\right) \quad \text{dla} \quad x \in (0, \infty)$$

(1.14) $$\alpha_{22}(0; \lambda_0, s) = 0$$

(1.15) $$\left.\frac{d\alpha_{22}}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{1}{4} C_1 \lambda_0 (1-\lambda_0)^{-1/2} s^{-1}$$

Podstawiając (1.12) do (1.14) i (1.15) otrzymujemy równanie dyspersji zawierające funkcję $\xi_1(0;\nu_0,s)$:

$$(1.16) \qquad (2-\nu_0)^2 + 4s^{-1}(1-\nu_0)^{1/2}\,\xi_1(0;\nu_0,s) = 0$$

Ponieważ dla każdego $(\nu_0,s)\in(0,1)\times(0,\infty)$

$$-s\sqrt{1-\nu_0 x_0} \leq \xi_1(0;\nu_0,s) \leq -s\sqrt{1-\nu_0 x_1}\,,$$

zatem dla każdego $(\nu_0,s)\in(0,1)\times(0,\infty)$ otrzymujemy oszacowanie

$$-4\sqrt{(1-\nu_0)(1-\nu_0 x_0)} + (2-\nu_0)^2 \leq$$

$$(1.17) \qquad \leq 4s^{-1}\sqrt{1-\nu_0}\,\xi_1(0;\nu_0,s) + (2-\nu_0)^2 \leq$$

$$\leq -4\sqrt{(1-\nu_0)(1-\nu_0 x_1)} + (2-\nu_0)^2 .$$

Jeśli wprowadzić oznaczenia:

$$f_0(\nu_0) \equiv -4\sqrt{(1-\nu_0)(1-\nu_0 x_0)} + (2-\nu_0)^2$$

$$f_1(\nu_0) \equiv -4\sqrt{(1-\nu_0)(1-\nu_0 x_1)} + (2-\nu_0)^2$$

$$f(\nu_0,s) \equiv 4\sqrt{1-\nu_0}\,\xi_1(0;\nu_0,s)s^{-1} + (2-\nu_0)^2$$

to nierówności (1.17) można zapisać w postaci

$$(1.18)\qquad f_0(\Lambda_0) \leq f(\Lambda_0, s) \leq f_1(\Lambda_0)$$

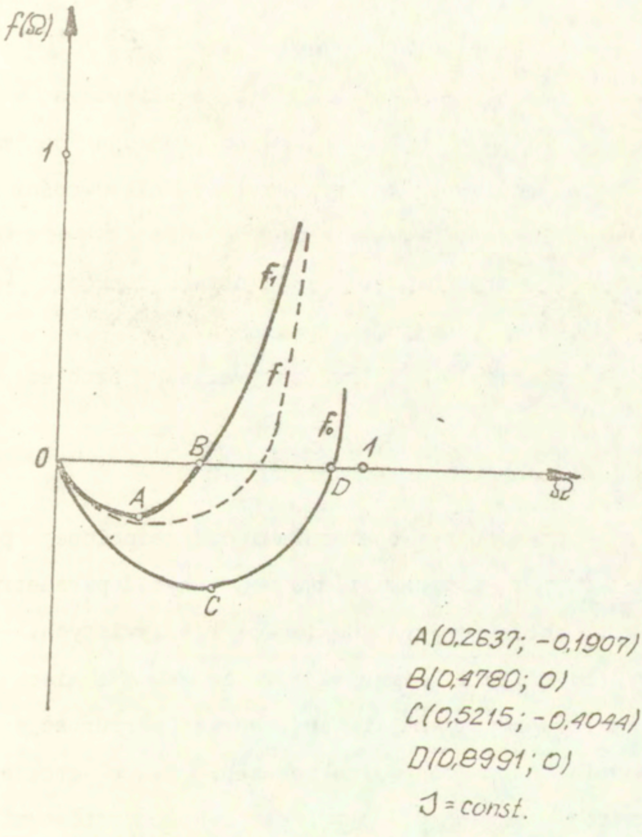
Jest widoczne, że funkcja $f_0(\Lambda_0)$ i funkcja $f_1(\Lambda_0)$ zerują się dla $\Lambda_0 = 0$. Ponadto $f_0(\Lambda_0)$ i $f_1(\Lambda_0)$ zerują się odpowiednio w $\Lambda_0 = c_0^2$ i $\Lambda_0 = c_1^2$, gdzie c_0^2 i c_1^2 oznaczają kwadraty prędkości fal powierzchniowych w jednorodnych, izotropowych półprzestrzeniach opisanych kolejno parametrami $\varrho \equiv 1$, $\mu \equiv 1$, $\varkappa \equiv \varkappa_0$, oraz $\varrho \equiv 1$, $\mu \equiv 1$, $\varkappa \equiv \varkappa_1$. Ponieważ $\varkappa_0 < \varkappa_1$ /por. 1.4 /, to $c_1^2 < c_0^2$.

Z nierówności (1.18) i własności funkcji $f_0(\Lambda_0)$, $f_1(\Lambda_0)$, oraz $f(\Lambda_0, s)$ wynika zatem, że funkcja $f(\Lambda_0, s)$ ma dla każdego $s \in (0, \infty)$, co najmniej jedno miejsce zerowe w przedziale $[c_1^2, c_2^2]$. Zatem prawdziwe jest

TWIERDZENIE 2. W niejednorodnej, izotropowej półprzestrzeni sprężystej, w której gęstość i moduł ścinania są stałe, zaś liczba Poissona jest dostatecznie gładką funkcją głębokości, istnieje co najmniej jedna fala powierzchniowa. Prędkość tej fali jest zawarta w przedziale $[c_1, c_0]$, amplituda naprężenia normalnego ma postać / por (1.12), (1.14) /

$$(1.19)\qquad \alpha_{22}(x;\Lambda_0,s) = A_1\left\{\exp\left[\int_0^x \xi_1(\tau;\Lambda_0,s)\,d\tau\right] - \exp\left(-xs\sqrt{1-\Lambda_0}\right)\right\}$$

zaś amplitudy pozostałych naprężeń są dane wzorami I. (1.18) i I. (1.19) w którym $\Omega = \Omega_0$ oraz α_{22} jest dane wzorem (1.19). Funkcja $\xi_1(x;\Omega_0,s)$ występująca w (1.19) jest określona w twierdzeniu 1, zaś A_1 jest dowolną stałą.



Rys. 1

Można podać pewną ogólniejszą wersję twierdzenia 2, jeśli zauważyć, że słuszne jest

TWIERDZENIE 3. Dla każdego $s>0$ równanie $f(\nu_0,s)=0$ posiada co najwyżej skończoną liczbę rozwiązań.

Dowód. Gdyby istniała nieskończona liczba rozwiązań równania $f(\nu_0,s)=0$ dla ustalonego $s>0$ to zbiór

$$S=\{\nu_0 : f(\nu_0,s)=0\}$$

miałby punkt skupienia w przedziale $[c_1^2, c_0^2]$. Ponieważ funkcja $f(\nu_0,s)$ jest analityczna w obszarze $(\nu_0,s)\in(0,1)\times(0,+\infty)$, więc funkcja ta musiałaby znikać tożsamościowo, co przeczyłoby nierówności (1.18).

Wykresy funkcji $f_0(\nu_0)$ i $f_1(\nu_0)$ dla $\varkappa=0,1$, $\varkappa_1=0,7$ oraz hipotetyczny obraz funkcji $f(\nu_0,s)$ dla $\nu_0\in(0,1)$ pokazuje rysunek 1.

UWAGA. W rozdziale II rozpatrywaliśmy problem własny

$$/a/ \qquad \underline{A}(s)\underline{\alpha} - \lambda(s)\,\underline{B}\,\underline{\alpha} = \underline{0}$$

gdzie $\underline{A}$, $\underline{B}$ były operatorami z zespolonej przestrzeni Hilberta H. Liczba falowa s była parametrem przebiegającym zbiór dodatnich liczb rzeczywistych.

Odejdźmy od fizyki. Przyjmijmy, że $s\in R$ i niech $s_0 = 0$. Jeśli zastosujemy analityczną teorię perturbacji Kato do równania /a/, to można pokazać, że w otoczeniu osi rzeczywistej operatory $\underline{A}(z)$ są B-holomorficznymi operatorami, stowarzyszone z nimi domknięcia $\tilde{\mathfrak{n}}(z)$ form

$\mathfrak{n}(z)$ są typu a. Kato w [25] (str. 523 - 527) udowodnił

TWIERDZENIE. Niech T/z/ jest B-holomorficznym, $\hat{A}$/z/ ograniczono-holomorficznym i domkniętym operatorami w przestrzeni Hilberta H /zespolonej/, określonymi w pewnym otoczeniu D_0 punktu z=0 i niech $\hat{A}^{-1}(z)$ będzie odwrotnym, ograniczonym operatorem do operatora A/z/. Wtedy wartości własne i odpowiadające im wektory własne równania

$$(i) \qquad T(z)u - \lambda(z)\hat{A}(z)u = 0$$

lub równoważnego równania

$$(ii) \qquad \hat{A}^{-1}(z)T(z)u - \lambda(z)u = 0$$

są funkcjami analitycznymi parametru z.

Założenia powyższego twierdzenia Kato są spełnione dla równania własnego (por. II (1.11)) :

$$(v) \qquad \underline{\tilde{A}}(z)\underline{\alpha} - \lambda(z)\underline{\tilde{B}}\,\underline{\alpha} = \underline{0}$$

dla z należących do otoczenia osi rzeczywistej, lub dla równoważnego równania własnego

$$(vv) \qquad \underline{\widetilde{B^{-1}}A}(z)\alpha - \lambda(z)\underline{\alpha} = \underline{0}$$

Zapiszmy równanie (vv) w postaci:

$$(vvv) \qquad \underline{C}(z)\underline{\alpha} - \lambda(z)\underline{\alpha} = \underline{0}$$

Wartości własne, wektory własne i projektory odpowiadające tym wartościom, spełniającym równanie (vv) są w otoczeniu osi rzeczywistej funkcjami analitycznymi parametru z, w szczególności funkcjami analitycznymi parametru s , gdy $s \in (0, \infty)$.

Przytoczmy inne

TWIERDZENIE Kato [25] (str. 464) :

Jeśli $\underline{L}(z)$ jest rodziną holomorficznych operatorów w otoczeniu parametru z = 0. Wtedy każdy układ wartości własnych $\lambda(z)$ operatora $\underline{L}(z)$ stanowi jedną lub skończoną ilość gałęzi posiadających co najwyżej osobliwości algebraiczne (por. Knopp [34] w z=0.

Z powyższego twierdzenia Kato oraz twierdzenia 3 wynika, że gałęzie związku dyspersyjnego (1.16) jeśli się przecinają, to są osobliwościami algebraicznymi ich punkty przecięcia.

ROZDZIAŁ IV. Efektywna postać fal powierzchniowych, gdy gęstość i moduł ścinania są stałe, zaś współczynnik Poissona jest funkcją głębokości półprzestrzeni sprężystej [36] .

§ 1. Sformułowanie zagadnienia.

Celem tego rozdziału jest redukcja rozwiązania problemu III. (1.5) - III (1.7) do rozwiązania pewnego równania całkowitego, oraz podanie iteracyjnej metody rozwiązania tego równania.

Niech L będzie operatorem różniczkowym stowarzyszonym z III. (1.8) i działającym na funkcję $\beta=\beta(x)$ znikającą w punktach $x=0$ i $x=\infty$, tzn

$$L\beta \equiv D^2\beta - s^2(1-\varrho_0\varkappa(x))\beta \tag{1.1}$$

$$\beta(0)=\beta(\infty)=0 \qquad (D = d/dx) \tag{1.2}$$

Niech $g=g(x,t;\varrho_0,s)$; $(x,t;\varrho_0,s)\in$

$$\in [0,\infty)\times[0,\infty)\times(0,1)\times(0,\infty)$$

będzie funkcją Greena dla operatora L z "zamrożonym" współczynnikiem $\varkappa$, tzn g spełnia związki:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = s^2(1-\varrho_0\varkappa(x))g \qquad \text{dla} \quad t \neq x \tag{1.3}$$

$$g=0 \qquad \text{dla} \quad t=0 \tag{1.4}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{t=x+0} - \left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{t=x-0} = 0 \tag{1.5}$$

Wtedy funkcja Greena $G=G(x,t;\varrho_0,s)$ dla operatora ze zmiennym współczynnikiem $\varkappa$ spełnia następujące równanie całkowite (por. [30] str. 123-149)

$$(1.6) \quad G(x,t;\varkappa_0,s) = g(x,t;\varkappa_0,s) +$$

$$- s^2\varkappa_0 \int_0^\infty g(x,\xi;\varkappa_0,s)[\varkappa(x)-\varkappa(\xi)]G(\xi,t;\varkappa_0,s)d\xi$$

dla każdego

$$(x,t;\varkappa_0,s) \in [0,\infty)\times[0,\infty)\times(0,1)\times(0,\infty).$$

Łatwo dowieść, że funkcja $g = g(x,t;\varkappa_0,s)$ spełniająca (1.3) - (1.5) ma postać

$$(1.7) \quad g(x,t;\varkappa_0,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2s\sqrt{1-\varkappa_0\varkappa(x)}}\left[e^{-s\sqrt{1-\varkappa_0\varkappa(x)}(t-x)} + \right. \\ \left. - e^{-s\sqrt{1-\varkappa_0\varkappa(x)}(t+x)}\right] \\ \quad \text{dla} \quad x \leq t < \infty \\ \dfrac{1}{2s\sqrt{1-\varkappa_0\varkappa(x)}}\left[e^{-s\sqrt{1-\varkappa_0\varkappa(x)}(x-t)} + \right. \\ \left. - e^{-s\sqrt{1-\varkappa_0\varkappa(x)}(x+t)}\right] \\ \quad \text{dla} \quad 0 \leq t < x \end{cases}$$

W dalszych częściach tego rozdziału zbadamy podstawowe własności funkcji $G = G(x,t;\varkappa_0,s)$ oraz wyrazimy rozwiązanie problemu własnego III. (1.5) - III. (1.7) przy pomocy tej funkcji.

§ 2. Analiza równania całkowego dla funkcji Greena.

Oznaczmy przez X przestrzeń Banacha funkcji rzeczywistych $A(x,t) : (x,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$ z normą $\|\cdot\|_X$ daną wzorem:

$$(2.1) \qquad \|A(x,t)\|_X^2 = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty |A(x,t)|^2 dt \right\} dx < +\infty$$

Niech N będzie operatorem w przestrzeni X postaci:

$$(2.2) \qquad N A(x,t) = s^2 \Lambda_0 \int_0^\infty g(x,\xi;\Lambda_0,s)\left[\varkappa(x)-\varkappa(\xi)\right]A(\xi,t)d\xi$$

gdzie funkcja $g(x,\xi;\Lambda_0,s)$ jest określona wzorem (1.7) . Zauważmy , że dla każdego $(x,\xi) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$ istnieje $m > 0$ takie, że

$$(2.3) \qquad |\varkappa(x)-\varkappa(\xi)| \le m|x-\xi|$$

Istnienie m wynika z założenia III. (1.4) i faktu, że $\varkappa(x) \in C^2[0,\infty)$. Można przyjąć, że

$$m = \sup_{x \in [0,\infty} \left| \frac{d\varkappa}{dx} \right|$$

Zachodzi

TWIERDZENIE 1. Jeżeli jest spełniona nierówność

(2.4) $$q \equiv \lambda_0 m (1-\lambda_0 x_1)^{-3/2} s^{-1} < 1$$

to operator N jest w przestrzeni X operatorem zwężającym, tzn

$$\| NA \|_X \leq q \, \| A \|_X$$

Dowód: Na mocy 2.2 i 1.7 otrzymujemy

$$N A(x,t) \equiv M(x,t;\lambda_0,s) =$$

$$= \frac{1}{2} s\lambda_0 \int_x^\infty (1-\lambda_0 x)^{-1/2} \left[e^{-s\sqrt{1-\lambda_0 x}(\xi - x)} - e^{-s\sqrt{1-\lambda_0 x}(x+\xi)} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[x(x) - x(\xi) \right] A(\xi,t) d\xi + \frac{1}{2} s\lambda_0 \int_0^x (1-\lambda_0 x)^{-1/2} \cdot$$

$$\left[e^{-s\sqrt{1-\lambda_0 x}(x-\xi)} - e^{-s\sqrt{1-\lambda_0 x}(x+\xi)} \right] \left[x(x) - x(\xi) \right] A(\xi,t) d\xi \equiv$$

$$\equiv a(x,t;\lambda_0,s) + b(x,t;\lambda_0,s)$$

Stąd

(2.5) $$|M(x,t;\lambda_0,s)| \leq |a(x,t;\lambda_0,s)| + |b(x,t;\lambda_0,s)|$$

$$M^2(x,t;\lambda_0,s) \leq 2 \{ a^2(x,t;\lambda_0,s) + b^2(x,t;\lambda_0,s) \}$$

Szacując z góry wyrażenie $a^2(x,t;\lambda_0,s)$ dostajemy

$$(2.6)\qquad a^2(x,t;\varkappa_0,s) \le \frac{1}{4}s^2\varkappa_0^2\left\{\int_x^\infty (1-\varkappa_0 x)^{-1/2}\left[e^{-s\sqrt{1-\varkappa_0 x}(\xi-x)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.-e^{-s\sqrt{1-\varkappa_0 x}(\xi+x)}\right]|x(x)-x(\xi)|\cdot|A(\xi,t)|d\xi\right\}^2$$

Na mocy nierówności (2.3) i III (1.4) dostajemy

$$(2.7)\qquad (1-\varkappa_0 x)^{-1/2}\left[e^{-s\sqrt{1-\varkappa_0 x}(\xi-x)}-e^{-s\sqrt{1-\varkappa_0 x}(\xi+x)}\right]\times$$

$$\times|x(x)-x(\xi)||A(\xi,t)| \le (1-\varkappa_0 x_1)^{-1/2}e^{-s\sqrt{1-\varkappa_0 x_1}(\xi-x)}\cdot$$

$$\cdot m(\xi-x)|A(\xi,t)|$$

Zatem

$$(2.8)\qquad a^2(x,t;\varkappa_0,s) \le \frac{1}{4}s^2 m^2\varkappa_0^2(1-\varkappa_0 x_1)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_x^{+\infty}(\xi-x)e^{-s\sqrt{1-\varkappa_0 x_1}(\xi-x)}\cdot|A(\xi,t)|d\xi\right\}^2$$

Całkując nierówność (2.8) względem x w przedziale $[0,\infty)$, dokonując zamiany zmiennych i korzystając z twierdzenia o zamianie granic całkowania (Rozdział IV, dod. Ia) otrzymujemy

$$(2.9)\quad \int_0^\infty a^2(x,t;\mathcal{N}_0,s)\,dx \leq \frac{1}{4}\mathcal{N}_0^2 m^2 (1-\mathcal{N}_0 \varkappa_1)^{-3} s^{-2}\int_0^\infty |A(x,t)|^2 dx$$

Całkując nierówność (2.9) względem t w przedziale $[0,\infty)$ dostajemy:

$$(2.10)\quad \|a(x,t;\mathcal{N}_0,s)\|_X \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\mathcal{N}_0 m (1-\mathcal{N}_0\varkappa_1)^{-3/2} s^{-1}\|A(x,t)\|_X$$

Oszacujmy teraz normę $\|b(x,t;\mathcal{N}_0,s)\|_X$. Z określenia funkcji $b(x,t;\mathcal{N}_0,s)$ mamy

$$(2.11)\quad b(x,t;\mathcal{N}_0,s) = \frac{1}{2}s\mathcal{N}_0\int_0^x (1-\mathcal{N}_0\varkappa)^{-1/2} \times \Big[e^{-s\sqrt{1-\mathcal{N}_0\varkappa}(x-\xi)} -$$

$$- e^{-s\sqrt{1-\mathcal{N}_0\varkappa}(x+\xi)}\Big]\big[\varkappa(x)-\varkappa(\xi)\big]A(\xi,t)\,d\xi .$$

Z nierówności (2.3) i III. (1.4) otrzymujemy

$$(2.12)\quad b^2(x,t;\mathcal{N}_0,s) \leq \frac{1}{4}s^2\mathcal{N}_0 m^2(1-\mathcal{N}_0\varkappa_1)^{-1} .$$

$$\cdot\left\{\int_0^x (x-\xi)e^{-s\sqrt{1-\mathcal{N}_0\varkappa_1}(x-\xi)}|A(\xi,t)|\,d\xi\right\}^2$$

Całkując (2.12) względem x w przedziale $[0,\infty)$, dokonując zamiany zmiennych i korzystają z twierdzenia o zamianie granic całkowania dostajemy:

$$(2.13)\qquad \int_0^\infty b^2(x,t;s_0,s)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{4} s_0^2 m^2 (1-s_0 x_1)^{-3} s^{-2} \int_0^\infty |A(x,t)|^2\,dx$$

/ por. Rozdz. IV, dodatek Ib /.

Całkując ostatnią nierówność względem t w przedziale $[0,\infty)$ otrzymujemy

$$(2.14)\qquad \|b(x,t;s_0,s)\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2} s_0 m (1-s_0 x_1)^{-3/2} s^{-1} \|A(x,t)\|_X$$

Z (2.5), (2.10) i (2.14) wynika, że operator N jest zwężający w przestrzeni X gdy

$$(2.15)\qquad q = s_0 m (1-s_0 x_1)^{-3/2} s^{-1} < 1$$

To kończy dowód twierdzenia 1.

Wprowadzmy teraz dwie inne przestrzenie Banacha, które wykorzystamy przy badaniu rozwiązalności równania całkowego (1.6). Niech $X_2^{(1)}$ będzie unormowaną przestrzenią funkcji $A(x,y)$, $0 \leqslant x, y < +\infty$, w której norma jest określona wzorem [22/]

$$\left\| A(x,y) \right\|^2_{X_2^{(1)}} = \sup_{y \in [0,\infty)} \int_0^\infty |A(x,y)|\,dx \tag{2.16}$$

oraz niech $X_2^{(-1/2)}$ będzie przestrzenią funkcji $A(x,y)$, $0 \leq x, y < +\infty$ z normą

$$\left\| A(x,y) \right\|^2_{X_1^{(-1/2)}} = \sup_{y \in [0,\infty)} \int_0^\infty \frac{|A(x,y)|^2}{s^2[1 - s_0 \varkappa(x)]}\,dx \tag{2.17}$$

Zachodzą następujące twierdzenia:

TWIERDZENIE 2. Operator N dany wzorem (2.2) jest zwężający w przestrzeni $X_2^{(1)}$, tzn

$$\| NA \|_{X_2^{(1)}} \leqslant q_1 \| A \|_{X_2^{(1)}} \tag{2.18}$$

o ile $q_1 = \sqrt{q} < 1$. Tutaj q jest określona wzorem (2.4). Dowód twierdzenia 2 podajemy w Dodatkach Ic i Id do niniejszego rozdziału.

TWIERDZENIE 3. Operator N jest zwężający w przestrzeni $X_1^{(-1/2)}$ tzn.

$$\| NA \|_{X_1^{(-1/2)}} \leqslant q \| A \|_{X_1^{(-1/2)}} \tag{2.19}$$

o ile $q < 1$. Tutaj q jest dane wzorem (2.4). Dowód twierdzenia 3 podajemy w Dodatkach Ie i If niniejszego rozdziału. Prawdziwe jest również

TWIERDZENIE 4. Dla każdego $(\lambda_0, s) \in (0,1) \times (0,\infty)$ każda z funkcji $g(x,t;\lambda_0,s)$, $\partial g(x,t;\lambda_0,s)/\partial t$ i $\partial^2 g(x,t;\lambda_0,s)/\partial t^2$ może być traktowana jako element przestrzeni $X_2^{(1)}$ lub $X_1^{(-1/2)}$.

Dowód. Pokażemy, że funkcja $\partial g(x,t;\lambda_0,s)/\partial t$ jest elementem przestrzeni $X_2^{(1)}$. Pozostałe przypadki dowodzi się podobnie. Rzeczywiście różniczkując względem t funkcję $g(x,t;\lambda_0,s)$ daną wzorem (1.7) otrzymujemy:

$$\partial g(x,t;\lambda_0,s)/\partial t = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[e^{-s\sqrt{1-\lambda_0 x}\,(t+x)} - e^{-s\sqrt{1-\lambda_0 x}\,(t-x)}\right] & \text{dla } x<t<+\infty \\ \frac{1}{2}\left[e^{-s\sqrt{1-\lambda_0 x}\,(x-t)} + e^{-s\sqrt{1-\lambda_0 x}\,(t+x)}\right] & \text{dla } 0<t<x \end{cases} \tag{2.20}$$

Stąd

$$\int_0^\infty \left|\partial g(x,t;\lambda_0,s)/\partial t\right| dt \leqslant \tag{2.21}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_x^\infty \left|e^{-s\sqrt{1-\lambda_0 x}\,(t+x)} - e^{-s\sqrt{1-\lambda_0 x}\,(t-x)}\right| dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^x \left| e^{-s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa}\,(x-t)} + e^{-s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa}\,(x+t)} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\int_x^\infty e^{-s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa}\,(t-x)}\, dt + \int_0^x e^{-s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa}\,(x-t)}\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^x e^{-s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa}\,(t+x)}\, dt \right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_x^\infty e^{-s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa_1}\,(t-x)}\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^x e^{-s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa_1}\,(x-t)}\, dt + \int_0^x e^{-s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa_1}\,(t+x)}\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa_1}}\, e^{-s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa_1}\,(t-x)} \Big|_{t=x}^{t=\infty} + \right.$$

$$+ \frac{1}{s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa_1}}\, e^{-s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa_1}\,(t-x)} \Big|_{t=0}^{t=x} +$$

$$\left. + \frac{-1}{s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa_1}}\, e^{-s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa_1}\,(t+x)} \Big|_{t=0}^{t=x} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa_1}} + \frac{1}{s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa_1}} - \frac{1}{s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa_1}}\, e^{s\sqrt{1-\lambda_0\varkappa_1}\, x} + \right.$$

$$- \frac{1}{s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}} e^{-2s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}\,x} + \frac{1}{s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}} e^{-s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}\,x} \Big) \leqslant \frac{3}{2s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}}$$

gdyż

$$- \frac{1}{s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}} e^{s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}\,x} < 0 ,$$

$$- \frac{1}{s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}} e^{-2s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}\,x} < 0$$

oraz

$$\frac{1}{s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}} e^{-s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}\,x} \leqslant \frac{1}{s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}}$$

Zatem

$$(2.22) \quad \sup_{x\in[0,\infty)} \int_0^\infty \left| \frac{\partial g(x,t;\lambda_0,s)}{\partial t} \right| dt \leqslant \frac{3}{2s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}} < +\infty$$

Udowodniliśmy więc, że $\partial g(x,t;\lambda_0,s)/\partial t \in X_2^{(1)}$ .Podobnie dowodzi się twierdzenia 4 w pozostałych przypadkach. Wykorzystując wzór (2.2) zapiszmy równanie (1.6) w postaci:

$$(2.23) \quad G(x,t;\lambda_0,s) = g(x,t;\lambda_0,s) - NG(x,t;\lambda_0,s)$$

Na mocy twierdzenia o operatorze zwężającym ([33] str.25) oraz twierdzeń 1,2 oraz 3 wnioskujemy, że równanie całkowe (2.23) posiada dokładnie jedno rozwiązanie:

1/ w przestrzeni X, jeśli spełniony jest warunek (2.4),

2/ w przestrzeni $X_2^{(1)}$, jeśli spełniony jest warunek $q_1<1$ w twierdzeniu 2,

3/ w przestrzeni $X_1^{(-1/2)}$, jeśli spełniony jest warunek (2.4). Rozwiązanie to można uzyskać metodą iteracji w postaci szeregu:

$$G=(1+N)^{-1}g=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k N^k g \tag{2.24}$$

gdzie

$$N^0 g = g(x,t;\varkappa_0,s), \tag{2.25}$$

$$g_1 = Ng = s^2\varkappa_0\int_0^\infty g(x,\xi;\varkappa_0,s)\left[\varkappa(x)-\varkappa(\xi)\right]g(\xi,t;\varkappa_0,s)\,d\xi,$$

$$g_2 = N^2 g = s^2\varkappa_0\int_0^\infty g(x;\xi;\varkappa_0,s)\,\times$$

$$\times\left[\varkappa(x)-\varkappa(\xi)\right]g_1(\xi,t;\varkappa_0,s)\,d\xi,$$

. . . .

$$g_k = N^k g = s^2 \mathcal{N}_0 \int_0^\infty g(x,\xi;\mathcal{N}_0,s)[\varkappa(x)-\varkappa(\xi)]\, g_{k-1}(\xi,t;\mathcal{N}_0,s)\, d\xi,$$

....

Szereg (2.24) zostanie wykorzystany do skonstruowania efektywnego rozwiązania problemu III. (1.5) - III. (1.7) w następnej części tego rozdziału.

§ 3. Pierwsza i druga pochodna funkcji $G(x,t;\mathcal{N}_0,s)$ względem t.

Różniczkując formalnie równanie (1.6) względem t otrzymujemy:

$$\text{(3.1)} \quad \frac{\partial G(x,t;\mathcal{N}_0,s)}{\partial t} = \frac{\partial g(x,t;\mathcal{N}_0,s)}{\partial t} - s^2 \mathcal{N}_0 \int_0^\infty g(x,\xi;\mathcal{N}_0,s) \times$$

$$\times [\varkappa(x)-\varkappa(\xi)] \frac{\partial}{\partial t} G(\xi,t;\mathcal{N}_0,s)\, d\xi$$

Z twierdzenia 2 oraz twierdzenia 4 wynika, że rozwiązanie $\partial G(x,t;\mathcal{N}_0,s)/\partial t$ równania (3.1) jest elementem przestrzeni $X_2^{(1)}$. Łatwo pokazać, że zachodzi

TWIERDZENIE 5. Funkcja $\partial G(x,t;\mathcal{N}_0,s)/\partial t$ jest ciągła dla każdego $(x,t;\mathcal{N}_0,s) \in [0,\infty)\times[0,\infty)\times(0,1)\times(0,\infty)$ takiego, że $t \neq x$.

Dowód. Równanie (3.1) można zapisać w postaci:

(3.2)

$$\frac{\partial G(x,t;\mathcal{N}_0,s)}{\partial t} - \frac{\partial g(x,t;\mathcal{N}_0,s)}{\partial t} =$$

$$= -s^2 \lambda_0 \int_0^\infty g(x,\xi;\lambda_0,s)[x(x)-x(\xi)] \frac{\partial}{\partial t} g(\xi,t;\lambda_0,s)d\xi +$$

$$-s^2 \lambda_0 \int_0^\infty g(x,\xi;\lambda_0,s)[x(x)-x(\xi)] \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{\partial G(\xi,t;\lambda_0,s)}{\partial t} - \frac{\partial g(\xi,t;\lambda_0,s)}{\partial t} \right\} d\xi$$

stosując oszacowanie analogiczne do tych, które były wykorzystane w dowodzie twierdzenia 2 można pokazać, że funkcja

$$(3.3) \quad l(x,t;\lambda_0,s) = -s^2 \lambda_0 \int_0^\infty g(x,\xi;\lambda_0,s)[x(x)-x(\xi)] \frac{\partial g(\xi,t;\lambda_0,s)}{\partial t} d\xi$$

jest ciągła względem t dla każdego $x \in [0,+\infty)$ oraz $(\lambda_0,s) \in (0,1) \times (0,+\infty)$ Ciągłość ta wynika stąd, że całka $l(x,t;\lambda_0,s)$ jest zbieżna jednostajnie względem t, a zbieżność jednostajna całki $l(x,t;\lambda_0,s)$ wynika z oszacowań stosowanych w twierdzeniu 2. Z ciągłości l względem t oraz z analizy równania (3.2) w którym równanie (3.2) posiada rozwiązanie w przestrzeniach X, $X_2^{(1/2)}$ lub $X_1^{(-1/2)}$ o ile jest spełniony warunek (2.4) . Rozwiązując to równanie metodą iteracji można pokazać, że funkcja

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x,t;\lambda_0,s) - \frac{\partial}{\partial t} g(x,t;\lambda_0,s)$$

jest ciągłą względem t dla $t \neq x$. to kończy dowód twierdzenia. Zachodzi także

TWIERDZENIE 6. Funkcja $\frac{\partial}{\partial t} G(x,t;\varrho_0,s)$ ma te same punkty nieciągłości co funkcja $\frac{\partial}{\partial t} g(x,t;\varrho_0,s)$

Dowód. Ze wzoru (2.20) wynika, że

$$(3.4) \qquad \frac{\partial}{\partial t} g(x,t;\varrho_0,s)\Big|_{t=x+0} - \frac{\partial}{\partial t} g(x,t;\varrho_0,s)\Big|_{t=x-0} = -1$$

Zatem na mocy twierdzenia 5 funkcja $\partial/\partial t\, G(x,t;\varrho_0,s)$ jest ciągła względem t, oprócz punktu $t=x$, gdzie ma nieciągłość pierwszego rodzaju tzn

$$(3.5) \qquad \frac{\partial G(x,t;\varrho_0,s)}{\partial t}\Big|_{t=x+0} - \frac{\partial G(x,t;\varrho_0,s)}{\partial t}\Big|_{t=x-0} = -1$$

Rodzaj nieciągłości funkcji G dla $t=x$ wynika z definicji funkcji Greena dla operatora L opisanego relacjami (1.1) - (1.2). Aby zbadać własności drugiej pochodnej funkcji $G(x,t;\varrho_0,s)$ względem t sprowadzamy równanie (3.1) do postaci:

$$(3.6) \qquad \mathcal{L}(x,t;\varrho_0,s) = l(x,t;\varrho_0,s) - s^2\varrho_0 \int_0^\infty g(x,\xi;\varrho_0,s) \times$$

$$\times \left[\varkappa(x) - \varkappa(\xi)\right] \mathcal{L}(\xi,t;\varrho_0,s)\, d\xi$$

gdzie

(3.7)
$$\begin{cases} \mathcal{L}(x,t;\nu_0,s) = \frac{\partial}{\partial t} G(x,t;\nu_0,s) - \frac{\partial}{\partial t} g(x,t;\nu_0,s) \\ l(x,t;\nu_0,s) = -s^2\nu_0 \int_0^\infty g(x,\xi;\nu_0,s)[\varkappa(x)-\varkappa(\xi)]\left[\frac{\partial}{\partial t} g(\xi,t,\nu_0,s)\right]d\xi \end{cases}$$

Różniczkując formalnie (3.6) względem t dostajemy:

(3.8)
$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}(x,t;\nu_0,s) = \frac{\partial}{\partial t} l(x,t;\nu_0,s) +$$
$$-s^2\nu_0 \int_0^\infty g(x,\xi)[\varkappa(x)-\varkappa(\xi)]\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}(\xi,t;\nu_0,s)\right]d\xi \quad , \quad t \neq x$$

Oznaczmy pierwszy wyraz po prawej stronie równania (3.8) przez $\tilde{m}(x,t;\nu_0,s)$ i roważmy równanie całkowe

(3.9)
$$M(x,t;\nu_0,s) = \tilde{m}(x,t;\nu_0,s) +$$
$$-\nu_0 s^2 \int_0^\infty g(x,\xi;\nu_0,s)[\varkappa(x)-\varkappa(\xi)]\, M(\xi,t;\nu_0,s)\,d\xi .$$

W którym $M(x,t;\nu_0,s)$ jest funkcją niewiadomą.
Można pokazać, że fukcja $\tilde{m}(x,t;\nu_0,s) \in X_1^{(-1/2)}$ Dowód tego faktu jest analogiczny do dowodu zaproponowanego

przez Kostiuczenkę i Sargsjana (por. [30] str 123-149), Z twierdzenia 3 wynika, że jeżeli

$$q = \sigma_0 m (1-\sigma_0 x_1)^{-3/2} s^{-1} < 1$$

to rozwiązanie równania (3.9) jest elementem przestrzeni $X_1^{(-1/2)}$ Pokażemy, że rozwiązanie to dla $t \neq x$ pokrywa się z funkcją

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[G(x,t;\sigma_0,s) - g(x,t;\sigma_0,s)\right]$$

W tym celu całkujemy (3.9) względem t w przedziale $[0,t]$ i dostajemy:

$$(3.10)\qquad \int_0^t M(x,\hat{t};\sigma_0,s)\,d\hat{t} = \int_0^t \tilde{m}(x,\hat{t};\sigma_0,s)\,d\hat{t} + $$
$$-s^2\sigma_0\int_0^\infty g(x,\xi;\sigma_0,s)\left[x(x)-x(\xi)\right]\left\{M(\xi,\hat{t};\sigma_0,s)\,d\hat{t}\right\}d\xi$$

Z równania 3.6 wynika, że

$$(3.11)\qquad \mathcal{L}(x,t;\sigma_0,s)-\mathcal{L}(x,0;\sigma_0,s) = l(x,t;\sigma_0,s)-l(x,0;\sigma_0,s) + $$
$$-s^2\sigma_0\int_0^\infty g(x,\xi;\sigma_0,s)\left[x(x)-x(\xi)\right]\left[\mathcal{L}(\xi,t;\sigma_0,s)-\mathcal{L}(\xi,0;\sigma_0,s)\right]d\xi$$

Ponieważ

$$(3.12)\qquad \int_0^t \tilde{m}(x,\hat{t};\sigma_0,s)\,d\hat{t} = l(x,t;\sigma_0,s) - l(x,0;\sigma_0,s)\,,$$

to z istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania (3.10) oraz (3.11) w przestrzeni $X_1^{(-1/2)}$ mamy

$$\int_0^t M(x,\hat{t};\rho_0,s)\,d\hat{t} = \mathcal{L}(x,t;\rho_0,s) - \mathcal{L}(x,0;\rho_0,s) \tag{3.13}$$

Ostatni związek implikuje zatem, że

$$M(x,t;\rho_0,s) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}(x,t;\rho_0,s) = \tag{3.14}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial t}G(x,t;\rho_0,s) - \frac{\partial}{\partial t}g(x,t;\rho_0,s)\right].$$

Ponieważ $\frac{\partial^2}{\partial t^2}g(x,t;\rho_0,s)$ dla $x \neq t$ jest elementem przestrzeni $X_1^{(-1/2)}$, zatem dla $t \neq x$ mamy $\partial^2 G(x,t;\rho_0,s)/\partial t^2 \in X_1^{(-1/2)}$. Stąd, że $\partial^2 G(x,t;\rho_0,s)/\partial t^2 \in X_1^{(-1/2)}$ oraz z równości 3.14 wynika

TWIERDZENIE 7. Jeśli $q = \rho_0 n(1-\rho_0 x_1)^{-3/2} s^{-1} < 1$ to $G(x,t;\rho_0,s)$ spełnia równania:

$$\left|\begin{aligned} &\partial^2 G(x,t;\rho_0,s)/\partial t^2 = s^2(1-\rho_0 x(t))G(x,t;\rho_0,s) \\ &G(x,t;\rho_0,s) = G(t,x;\rho_0,s) \end{aligned}\right. \tag{3.15}$$

oraz warunki

$$G(x,t;\rho_0,s)\Big|_{t=0} = 0 \tag{3.16}$$

$$\left.\frac{\partial G(x,t;\lambda_0,s)}{\partial t}\right|_{t=x+0} - \left.\frac{\partial G(x,t;\lambda_0,s)}{\partial t}\right|_{t=x-0} = -1$$

Zatem $G(x,t;\lambda_0,s)$ jest funkcją Greena dla problemu brzegowego

$$(x)\qquad \begin{aligned} &L\beta(x) = 0 \\ &\beta(0) = 0 \end{aligned}$$

Stąd rozwiązanie problemu III. (1.5) - III (1.6) ma postać

$$(3.17)\qquad \beta(x;\lambda_0,s) = C_1\int_0^\infty G(x,t;\lambda_0,s)[1-\varkappa(t)]e^{-s\sqrt{1-\lambda_0}\,t}\,dt$$

$$(C_1 = \mathrm{const})$$

Ponieważ warunek III. (1.7) może być zapisany w postaci

$$(3.18)\qquad \beta(0;\lambda_0,s) = -C_1\lambda_0\sqrt{1-\lambda_0}/4s(1-\lambda_0)$$

zatem rozwiązanie problemu własnego III. (1.5) - III.(1.7) jest określone parą $(\lambda_0,\beta(x))$ w której λ_0 jest rozwiązanie równania

$$(3.19)\qquad \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial x}G\right]_{|x=0}\cdot[1-\varkappa(t)]\exp(-st\sqrt{1-\lambda_0})\,dt +$$

$$+\lambda_0\sqrt{1-\lambda_0}/4s(1-\lambda_0) = 0$$

zaś $\beta(x)$ jest dana wzorem (3.17) . Wstawiając szeregową postać funkcji G danej wzorami (2.24) - (2.25) do (3.17) i (3.19) otrzymujemy efektywne rozwiązanie rozważanego problemu własnego, jeśli $q < 1$ czyli gdy

(3.20) [23] $$\lambda_0 m < s(1-\lambda_0 x_1)^{3/2}$$ (por. (2.4))

Z twierdzenia III.2 wynika, że równanie (3.19) posiada co najmniej jedno rozwiązanie $\lambda_0 = \lambda_0(s)$ dla każdego $s \in (0,\infty)$

§ Dodatek do rozdziału IV.

Ia/, Całkowanie nierówności (2.8) względem x prowadzi do obliczenia całki

(4.1) $$I_a = \int_0^\infty dx\left[\int_x^\infty a(\xi - x)\, b(\xi)\, d\xi\right]^2$$

gdzie

(4.2) $$a(p) = p\exp\left(-s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}\, p\right)$$
$$b(p) = |A(p,t)| \qquad (p>0)$$

Dokonując zamiany zmiennych i korzystając z twierdzenia Fubiniego dostajemy:

(4.3) $$I_a = \int_0^\infty dx\left[\int_0^\infty a(p)\, b(p+x)\, dp\right]^2 = \int_0^\infty dx\left[\int_0^\infty a(p)\, b(p+x)\, dp\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\int_0^\infty a(\hat p)b(\hat p+x)d\hat p\right] = \int_0^\infty a(p)dp\cdot\int_0^\infty a(\hat p)d\hat p\cdot\int_0^\infty dx\cdot b(p+x)b(\hat p+x)$$

Na mocy nierówności Schwartza mamy:

$$(4.4)\quad \int_0^\infty dx\cdot b(p+x)b(\hat p+x)\le\left[\int_0^\infty b^2(p+x)dx\right]^{1/2}\left[\int_0^\infty b^2(\hat p+x)dx\right]^{1/2} =$$

$$=\left(\int_p^\infty b^2(\xi)d\xi\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\hat p}^\infty b^2(\xi)d\xi\right)^{1/2}\le\int_0^\infty b^2(\xi)d\xi$$

Skąd wynika

$$(4.5)\quad I_a\le\left[\int_0^\infty a(p)dp\right]^2\cdot\int_0^\infty b^2(\xi)d\xi$$

Ib/. Całkowanie nierówności (2.12) względem x w przedziale $[0,\infty)$ prowadzi do obliczenia całki

$$(4.6)\quad I_b=\int_0^\infty dx\left\{\int_0^x(x-\xi)\exp\left[-s\sqrt{1-\Omega_0 x_1}(x-\xi)\right]\cdot|A(\xi,t)|d\xi\,\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^x(x-\xi')\exp\left[-s\sqrt{1-\Omega_0 x_1}(x-\xi')\right]|A(\xi',t)|d\xi'\right\}$$

Niech

(4.7) $x-\xi=u\;,\;x-\xi'=u'$. Wtedy mamy

$$(4.8)\quad I_b=\int_0^\infty dx\Big(\int_x^0 u\exp[-s\sqrt{1-\Lambda_0\varkappa_1}\,u]\cdot|A(x-u,t)|\,du\;\cdot$$

$$\cdot\int_x^0 u'\exp[-s\sqrt{1-\Lambda_0\varkappa_1}\,u']\cdot|A(x-u',t)|\,du'\Big)=$$

$$=\int_0^\infty dx\Big(\int_0^x\int_0^x u\exp[-s\sqrt{1-\Lambda_0\varkappa_1}\,u]\cdot u'\exp[-s\sqrt{1-\Lambda_0\varkappa_1}\,u']\cdot$$

$$\cdot|A(x-u,t)|\cdot|A(x-u',t)|\,du\,du'\Big)=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\Big\{\int_{\max(u,u')}^\infty |A(x-u',t)|\cdot|A(x-u,t)|\,dx\Big\}\,u\exp[-s\sqrt{1-\Lambda_0\varkappa_1}\,u]\cdot$$

$$\cdot u'\exp[-s\sqrt{1-\Lambda_0\varkappa_1}\,u']\,du\,du'\leqslant\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big[\int_{\max(u,u')}^\infty |A(x-u',t)|^2dx\,+$$

$$+\int_{\max(u,u')}^\infty |A(x-u,t)|^2dx\Big]u\exp[-s\sqrt{1-\Lambda_0\varkappa_1}\,u]\,u'\exp[-s\sqrt{1-\Lambda_0\varkappa_1}\,u']\,du\,du'$$

$$\leqslant\int_0^\infty\int_0^\infty u\exp[-s\sqrt{1-\Lambda_0\varkappa_1}\,u]\,u'\exp[-s\sqrt{1-\Lambda_0\varkappa_1}\,u']\,du\,du'\cdot\int_0^\infty|A(x,t)|^2dx=$$

$$=s^{-4}(1-\Lambda_0\varkappa_1)^{-2}\int_0^\infty|A(x,t)|^2\,dx$$

Ic/. Oszacujmy całkę

$$(4.9)\quad I_c = \int_0^\infty |a(x,t;\varkappa_0,s)|\,dx = \frac{1}{2} s\varkappa_0 \int_0^\infty \left| \int_x^\infty (1-\varkappa_0 x)^{-1/2} \cdot \right.$$

$$\cdot \left[\exp\{-s\sqrt{1-\varkappa_0 x}\,(\xi - x)\} - \exp\{-s\sqrt{1-\varkappa_0 x}\,(x+\xi)\}\right] \cdot$$

$$\cdot \left.[\varkappa(x) - \varkappa(\xi)]\,A(\xi,t)\right|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} s\varkappa_0 m (1-\varkappa_0 x_1)^{-1/2} \left[\int_0^\infty \left(\int_x^\infty (\xi - x)\exp\{-s\sqrt{1-\varkappa_0 x_1}\,(\xi-x)\} \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot |A(\xi,t)|\,d\xi\right)dx\right].$$

Niech $\quad \xi - x = u\,, \quad d\xi = du.$

Wtedy

$$(4.10)\quad I_c \leqslant \frac{1}{2} s\varkappa_0 m (1-\varkappa_0 x_1)^{-1/2} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty u\exp\{-s\sqrt{1-\varkappa_0 x_1}\,u\} \cdot \right.$$

$$\cdot \left.\left|A(x+u,t)\right|\,du\right]dx = \frac{1}{2} s\varkappa_0 m (1-\varkappa_0 x_1)^{-1/2} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty u\exp\{-s\sqrt{1-\varkappa_0 x_1}\,u\}\,du \cdot \int_0^\infty |A(x+u,t)|\,dx \leqslant$$

$$\leq \frac{1}{2} s \varkappa_0 m (1-\varkappa_0 \varkappa_1)^{-1/2} s^{-2} (1-\varkappa_0 \varkappa_1)^{-1} \int_0^\infty |A(x,t)| dx =$$

$$= \frac{1}{2} \varkappa_0 m (1-\varkappa_0 \varkappa_1)^{-3/2} s^{-1} \int_0^\infty |A(x,t)| dx$$

Id/. Podobnie szacujemy całkę:

$$I_d = \int_0^\infty |b(x,t;\varkappa_0,s)| dx \leq \frac{1}{2} s \varkappa_0 m (1-\varkappa_0 \varkappa_1)^{-1/2} \cdot \tag{4.11}$$

$$\cdot \int_0^\infty \left(\int_0^x (x-\xi) \exp\left[-s\sqrt{1-\varkappa_0 \varkappa_1}(x-\xi)\right] |A(\xi,t)| d\xi \right) dx$$

Niech

$$x - \xi = u \quad , \; -d\xi = du \tag{4.12}$$

Zatem

$$I_d \leq \frac{1}{2} s \varkappa_0 m (1-\varkappa_0 \varkappa_1)^{-1/2} \cdot \tag{4.13}$$

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x u \exp\left[-s\sqrt{1-\varkappa_0 \varkappa_1}\, u\right] \cdot |A(x-u,t)| du \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} s \lambda_0 m (1-\lambda_0 x_1)^{-1/2} \int_0^\infty u \exp\left[-s\sqrt{1-\lambda_0 x_1}\, u\right] du \,\cdot$$

$$\cdot \int_u^\infty |A(x-u,t)|\, dx \leqslant \frac{1}{2} \lambda_0 m (1-\lambda_0 x_1)^{-3/2} s^{-1} \int_0^\infty |A(x,t)|\, dx$$

Całkując stronami nierówność (por. (2.5))

$$\left|NA(x,t)\right| \leqslant \left|a(x,t;\lambda_0,s)\right| + \left|b(x,t;\lambda_0,s)\right| \tag{4.14}$$

względem x w przedziale $[0,+\infty)$ i wykorzystując oszacowanie dla Ic oraz Id otrzymujemy

$$\int_0^\infty |NA(x,t)|\, dx \leqslant \int_0^\infty |a(x,t;\lambda_0,s)|\, dx + \int_0^\infty |b(x,t;\lambda_0,s)|\, dx \leqslant \tag{4.15}$$

$$\leqslant \lambda_0 m (1-\lambda_0 x_1)^{-3/2} s^{-1} \int_0^\infty |A(x,t)|\, dx$$

Zatem

$$\|NA(x,t)\|^2_{X_2^{(1)}} = \sup_{t\in[0,+\infty)} \int_0^\infty |NA(x,t)|\, dx \leqslant \tag{4.16}$$

$$\leqslant \lambda_0 m (1-\lambda_0 x_1)^{-3/2} s^{-1} \sup_{t\in[0,+\infty)} \int_0^\infty |A(x,t)|\, dx =$$

$$= \lambda_0 m (1-\lambda_0 \varkappa_1)^{-3/2} s^{-1} \| A(x,t) \|^2_{X_2^{(1)}}$$

Z ostatniej nierówności wynika, że operator NA jest zwężający w przestrzeni $X_2^{(1)}$ o ile $q_1 = \sqrt{q} < 1$.

Ie'. Rozważmy całkę

(4.17) $$I_e = \int_0^\infty \frac{b^2(x,t;\lambda_0,s)}{s^2(1-\lambda_0 \varkappa(x))} dx$$

Na mocy (2.12) dostajemy

(4.18) $$I_e \leqslant \frac{s^2 \lambda_0^2 m^2}{4(1-\lambda_0 \varkappa_1)} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{s\sqrt{1-\lambda_0 \varkappa(x)}} \int_0^x (x-\xi) \exp\left[-s\sqrt{1-\lambda_0 \varkappa_1}(x-\xi)\right] |A(\xi,t)| d\xi \right\}^2 dx .$$

Postępując podobnie jak w przypadku całki Ib otrzymujemy oszacowanie

(4.19) $$I_e \leqslant \frac{1}{4} \lambda_0^2 m^2 (1-\lambda_0 \varkappa_1)^{-3} s^{-2} \int_0^\infty \frac{|A(x,t)|^2}{s^2(1-\lambda_0 \varkappa(x))} dx$$

A zatem

(4.20) $$\| b(x,t;\lambda_0,s) \|^2_{X_1^{(-1/2)}} = \sup_{t \in [0,+\infty)} I_e \leqslant$$

$$\leq \frac{1}{4} s_0^2 m^2 (1 - s_0 x_1)^{-3} s^{-2} \| A(x,t) \|^2_{X_1^{(-1/2)}}$$

If/. Korzystając z metody szacowania całki I_n można pokazać, że

(4.21) $$I_f = \int_0^\infty \frac{a^2(x,t;s_0,s)}{s^2(1 - s_0 x(x))} dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} s_0^2 m^2 (1 - s_0 x_1)^{-3} s^{-2} \int_0^\infty \frac{|A(x,t)|^2}{s^2(1 - s_0 x(x))} dx$$

Zatem

(4.22) $$\| a(x,t;s_0,s) \|^2_{X_1^{(-1/2)}} = \sup I_f \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} s_0^2 m^2 (1 - s_0 x_1)^{-3} s^{-2} \| A(x,t) \|^2_{X_1^{(-1/2)}}$$

Ze wzoru /por. str 46 /

(4.23) $$NA(x,t) = a(x,t;s_0,s) + b(x,t;s_0,s)$$

oraz z oszacowań (4.20) i (4.22) wynika, że operator N jest zwężający w przestrzeni $X_1^{(-1/2)}$, o ile

(4.24) $$q = s_0 m (1 - s_0 x_1)^{-3/2} s^{-1} < 1 .$$

ROZDZIAŁ V. Fale powierzchniowe w "słabo" niejednorodnej półprzestrzeni sprężystej (por. [31]).

W przypadku, gdy funkcje $\varrho(x_2)$, $\mu(x_2)$ i $\nu(x_2)$ opisujące niejednorodność sprężystej półprzestrzeni, zmieniają się "mało" na głębokości półprzestrzeni, problem własny opisany równaniami I, (1.8) - I. (1.9) może być rozwiązywany metodą perturbacji zaproponowaną przez K.O. Friedrichsa (por. [13]).

W tym rozdziale zastosujemy tę metodę do analizy dwóch przypadków:

a/ gdy gęstość ośrodka $\varrho(x_2)$ różni się "mało" od maksymalnej stałej gęstości, zaś μ i ν są stałe,

b/ gdy moduł ścinania $\mu(x_2)$ różni się "mało" od stałego maksymalnego modułu zaś gęstość i liczba Poissona są stałe.

§1. Analiza przypadku: $[\varrho(x_2)]^{-1} = \varrho_1^{-1} + \varepsilon[\hat{\varrho}(x_2)]^{-1}$, $\mu(x_2) \equiv \mu_1$, $\nu(x_2) \equiv \nu_1$.

Korzystając z oznaczeń rozdziału II i ograniczając się do rzeczywistej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, w której iloczyn skalarny dwóch amplitud $\underline{\alpha}$ i $\underline{\beta}$ jest dany wzorem:

$$(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \int_0^\infty (\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{12}\beta_{12})\,dx_2 \tag{1.1}$$

zaś norma ma postać

$$(1.2) \qquad \|\underline{\alpha}\| = \Big[\int_0^\infty (\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{12}^2)\,dx_2\Big]^{1/2} < +\infty$$

redukujemy zagadnienie I. (1.8) - I. (1.9) do równania operatorowego

$$(1.3) \qquad \underline{A}(s)\underline{\alpha} - \lambda \underline{B}\,\underline{\alpha} = \underline{0} \qquad \big(\text{por. II. } (1.3)\big)$$

Tutaj $\underline{A}(s)$ i $\underline{B}$ są operatorami $\underline{A}(s)$ i $\underline{B}$ z rozdziału II zawężonymi do $\mathcal{H}$. W szczególności dla tak zawężonych operatorów mamy te same definicje dziedzin (por. II (1.4) i II. (1.5)) oraz twierdzenie o symetryczności operatorów $\underline{A}(s)$ i $\underline{B}$ (por. Tw. II.1 i Tw. II.2) . Problem własny (1.3) zawężony do przypadku jednorodnej, izotropowej, sprężystej w której $\varrho \equiv \tilde{\varrho}$ =const, $\mu \equiv \tilde{\mu}$ =const, $\nu \equiv \tilde{\nu}$ =const posiada dokładnie jedno rozwiązanie klasyczne postaci: $(\tilde{c}_R, \tilde{\underline{\alpha}})$ gdzie

$$(1.4) \qquad \begin{bmatrix} -\tilde{\beta}_0\Big[e^{-x_2\tilde{h}_2} - \dfrac{2+\tilde{\omega}(1-2\tilde{\varkappa})}{2-\tilde{\omega}}e^{-x_2\tilde{h}_1}\Big] \\[2ex] \tilde{\beta}_0\Big[e^{-x_2\tilde{h}_2} - e^{-x_2\tilde{h}_1}\Big] \\[2ex] -\dfrac{2}{s}\dfrac{\tilde{\beta}_0}{2-\tilde{\omega}}\tilde{h}_1\Big[e^{-x_2\tilde{h}_2} - e^{-x_2\tilde{h}_1}\Big] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\beta}_0 = \mathrm{const}$$

$$\tilde{\varkappa} = \frac{1-2\tilde{\nu}}{2-2\tilde{\nu}} \tag{1.5}$$

$$\tilde{h}_1 = s\sqrt{1-\tilde{\omega}\tilde{\varkappa}} \quad , \quad \tilde{h}_2 = s\sqrt{1-\tilde{\omega}}$$

oraz $\tilde{\omega}$ jest jedynym pierwiastkiem równania

$$(2-\tilde{\omega})^2 = 4\sqrt{(1-\tilde{\omega})(1-\tilde{\omega}\tilde{\varkappa})} \quad , \quad \tilde{\omega} \in (0,1) . \tag{1.6}$$

Liczba własna $\tilde{C}_R$ stowarzyszona z funkcją własną $\underline{\tilde{\alpha}}$ jest dana wzorem

$$\tilde{C}_R = \tilde{\mu}^{1/2} \tilde{\varrho}^{-1/2} \tilde{\omega}^{1/2} . \tag{1.7}$$

Pomiędzy $\tilde{\lambda}$ i $\tilde{C}_R$ zachodzi związek

$$(\tilde{\lambda})^{1/2} = s\tilde{C}_R \tag{1.8}$$

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy

$$[\varrho(x_2)]^{-1} = \varrho_1^{-1} + \varepsilon[\hat{\varrho}(x_2)]^{-1} , \tag{1.9}$$

$$\nu \equiv \nu_1 \quad , \quad \mu \equiv \mu_1$$

gdzie ε jest dostatecznie małą dodatnią liczbą. Po podstawieniu (1.9) do (1.3) otrzymujemy równanie:

$$\underline{A}_0 \underline{\alpha} + \varepsilon \underline{V} \underline{\alpha} = \lambda \underline{B}_0 \underline{\alpha} \tag{1.10}$$

w którym

$$\underline{A}_0 \equiv \begin{bmatrix} s^2 \varrho_1^{-1} & 0 & s \varrho_1^{-1} D \\ 0 & -\varrho_1^{-1} D^2 & s \varrho_1^{-1} D \\ -s \varrho_1^{-1} D & -s \varrho_1^{-1} D & s^2 \varrho_1^{-1} - \varrho_1^{-1} D^2 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

$$\underline{V} \equiv \begin{bmatrix} s^2 \hat{\varrho}^{-1} & 0 & s \hat{\varrho}^{-1} D \\ 0 & -D(\hat{\varrho}^{-1}) D & s D(\hat{\varrho}^{-1}) \\ -s D(\hat{\varrho}^{-1}) & -s \hat{\varrho}^{-1} D & -D(\hat{\varrho}^{-1}) D + s^2 \hat{\varrho}^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

$$\underline{B}_o \equiv \begin{bmatrix} (1-\nu_1)(2\mu_1)^{-1} & -\nu_1(2\mu_1)^{-1} & 0 \\ -\nu_1(2\mu_1)^{-1} & (1-\nu_1)(2\mu_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (\mu_1)^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

W dalszym ciągu dla podkreślenia tego, że problem własny (1.3) zależy nie tylko od s , lecz również od funkcji materiałowych $\varrho(x_2)$, $\mu(x_2)$ i $\nu(x_2)$ będziemy ukazywali tę zależność, jeśli to będzie konieczne. Na przykład w ogólności

$$\underline{A} = \underline{A}(s,\varrho) \ , \quad \underline{B} = \underline{B}(\mu,\nu) \tag{1.14}$$

$$\lambda = \lambda(s;\varrho,\mu,\nu) \ , \quad \underline{\alpha} = \underline{\alpha}(x,s;\varrho,\mu,\nu) \tag{1.15}$$

W szczególności, na mocy (1.4) i (1.8) mamy:

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(s;\tilde{\varrho},\tilde{\mu},\tilde{\nu}) \ , \quad \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(x,s;\tilde{\varrho},\tilde{\mu},\tilde{\nu}) \tag{1.16}$$

oraz

$$\tilde{c}_R = \tilde{c}_R(\tilde{\varrho},\tilde{\mu},\tilde{\nu}) \tag{1.17}$$

Dla problemu (1.10) mamy:

$$(1.18) \qquad \underline{A}_o = \underline{A}_o(s;\varrho_1), \quad \underline{B}_o = \underline{B}_o(\mu_1, \nu_1)$$

oraz

$$(1.19) \qquad \underline{V} = \underline{V}(s;\hat{\varrho})$$

Jeśli będziemy podkreślali zależność danego symbolu tylko od ϱ , μ i ν , wtedy opuścimy zmienne s i x .

Z ograniczoności $\varrho(x_2)$ $\left(\text{por. I.}(1.3)_1\right)$ i z (1.9) wynika ograniczoność $\hat{\varrho}(x_2)$ dla $x_2 \in [0, \infty)$. Stąd dla każdego $\underline{\alpha} \in \mathcal{D}(\underline{A}) \equiv D(\underline{V}) \subset \mathcal{H}$ mamy

$$(1.20) \qquad (\underline{V}\underline{\alpha}, \underline{\alpha}) < +\infty$$

Łatwo też udowodnić, że operatory $\underline{A}_o$, $\underline{V}$ i $\underline{B}_o$ są symetrycznymi w przestrzeni $\mathcal{H}$. Z faktu, że $\tilde{\lambda}(\varrho_1, \mu_1, \nu_1)$ jest prostą wartością własną / przestrzeń własna jest jednowymiarowa / wynika, że operator $(\underline{A}_o - \lambda\underline{B}_o)^{-1}$ może być określony na podprzestrzeni $\mathcal{H}$ ortogonalnej do wektora własnego $\underline{\tilde{\alpha}}(\varrho_1, \mu_1, \nu_1)$ odpowiadającego wartości własnej $\tilde{\lambda}(\varrho_1, \mu_1, \nu_1)$. Powyższe własności operatorów $\underline{A}_o$, $\underline{V}$ i $\underline{B}_o$ implikują, że dla dostatecznie małych ε (por. [13] str. 11-19) w otoczeniu rozwiązania

$$\left(\tilde{\lambda}(\varrho_1,\mu_1,\nu_1),\ \underline{\tilde{\alpha}}(\varrho_1,\mu_1,\nu_1)\right)$$ [24]

istnieje rozwiązanie $(\lambda_\varepsilon, \underline{\alpha}_\varepsilon)$ spełniające równanie (1.10), analityczne względem ε przy czym $\underline{\alpha}_\varepsilon$ spełnia warunek nierozdzielności dwuwymiarowej teorii sprężystości.

Wobec analityczności mamy rozwinięcia:

(1.21) $$\lambda \equiv \lambda_\varepsilon = \tilde{\lambda} + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots$$

(1.22) $$\underline{\alpha} \equiv \underline{\alpha}_\varepsilon = \underline{\tilde{\alpha}} + \varepsilon\underline{\alpha}_1 + \varepsilon^2\underline{\alpha}_2 + \ldots$$

gdzie

(1.23) $$\underline{\alpha}_i = \left(\alpha_{11}^{(i)},\ \alpha_{22}^{(i)},\ \alpha_{12}^{(i)}\right)^T;\quad i = 1,2,3\ldots$$

Podstawiając (1.21) i (1.22) do (1.10) i porównując przy odpowiednich potęgach ε otrzymujemy

$$(\underline{A}_0 - \tilde{\lambda}\,\underline{B}_0)\,\underline{\tilde{\alpha}} = \underline{0}\ ,$$

(1.24) $$(\underline{A}_0 - \tilde{\lambda}\,\underline{B}_0)\,\underline{\alpha}_1 = -(\underline{V} - \lambda_1\underline{B}_0)\,\underline{\tilde{\alpha}}\ ,$$

$$(\underline{A}_0 - \tilde{\lambda}\,\underline{B}_0)\,\underline{\alpha}_2 = -(\underline{V} - \lambda_1\underline{B}_0)\,\underline{\alpha}_1 + \lambda_2\underline{B}_0\,\underline{\tilde{\alpha}}\ ,$$

$$(\underline{A}_0 - \tilde{\lambda} B_0)\underline{\alpha}_3 = -(\underline{V} - \lambda_1 \underline{B}_0)\underline{\alpha}_2 + \lambda_2 \underline{B}_0 \underline{\alpha}_1 + \lambda_3 \underline{B}_0 \tilde{\underline{\alpha}}$$

....

Wektora $\underline{\alpha}_\varepsilon$ nie można wyznaczyć jednoznacznie z równań (1.24), a jedynie można wyznaczyć z dokładnością do pewnego czynnika będącego funkcją parametru ε. Ponieważ wektor $\tilde{\underline{\alpha}} \neq \underline{0}$; więc można uniknąć dowolności $\underline{\alpha}_\varepsilon$ i czynnik ten określić z warunku, że dla dostatecznie małych ε w przestrzeni $\mathcal{H}$ norma wektora $\underline{\alpha}_\varepsilon$ spełnia równość:

(i) $\|\underline{\alpha}_\varepsilon\|_{\mathcal{H}} = 1$

Czynnik ten można wyznaczyć również z równoważnego warunku:

(ii) $(\tilde{\alpha}, \underline{\alpha}_\varepsilon)_{\mathcal{H}} = 0$

Z warunku (ii) wynika równość iloczynów skalarnych:

(iii)

$$(\tilde{\underline{\alpha}}, \underline{\alpha}_1)_{\mathcal{H}} = (\tilde{\underline{\alpha}}, \underline{\alpha}_2)_{\mathcal{H}} = \ldots = 0$$

Mnożąc skalarnie pierwsze równanie (1.24) przez $\underline{\alpha}_1$, drugie przez $\underline{\tilde{\alpha}}$, korzystając z symetryczności operatorów $\underline{A}_o$ oraz $\underline{B}_o$ i odejmując stronami otrzymujemy:

$$(1.25)\qquad \lambda_1 = \frac{(\underline{V}\underline{\tilde{\alpha}}, \underline{\tilde{\alpha}})}{(\underline{B}_o\underline{\tilde{\alpha}}, \underline{\tilde{\alpha}})}$$

Analogicznie mnożąc $(1.24)_1$ przez $\underline{\alpha}_2$, $(1.24)_3$ przez $\underline{\tilde{\alpha}}$ i odejmując stronami dostajemy

$$(1.26)\qquad \lambda_2 = \frac{(\underline{V}\underline{\alpha}_1, \underline{\tilde{\alpha}}) - \lambda_1(\underline{B}_o\underline{\alpha}_1, \underline{\tilde{\alpha}})}{(\underline{B}_o\underline{\tilde{\alpha}}, \underline{\tilde{\alpha}})}$$

Ogólnie: λ_i $(i \geq 3)$ otrzymujemy przez skalarne pomnożenie $(1.24)_1$ przez $\underline{\alpha}_i$, $(1.24)_{i+1}$ przez $\underline{\tilde{\alpha}}$ i odjęcie stronami obu związków.

Wzory (1.21), (1.25) i (1.26) określają w sposób efektywny przybliżoną wartość własną w problemie ze "słabo" zmienną gęstością w rozważanej półprzestrzeni.

W dalszym ciągu przystąpimy do konstrukcji ciągu $\underline{\alpha}_i$. Łatwo pokazać, że prawe strony równań (1.24) są elementami podprzestrzeni $\mathcal{H}$ ortogonalnej do wektora $\underline{\tilde{\alpha}}$. Konstrukcja ciągu $\underline{\alpha}_i$ sprowadza się więc do znalezienia pewnego operatora $(\underline{A}_o - \tilde{\lambda}\underline{B}_o)^{-1}$ na podprzestrzeni $\mathcal{H}$ ortogonalnej do wektora $\underline{\tilde{\alpha}}$.

W tym celu rozpatrzmy równanie

$$(1.27)\qquad (\underline{A}_o - \tilde{\lambda}\underline{B}_o)\underline{\hat{\alpha}} = \underline{g}$$

gdzie $\underline{g} = (g_{11}, g_{22}, g_{12})$ jest pewnym wektorem podprzestrzeni $\mathcal{H}$ spełniającym warunki:

$$\text{a)} \qquad (\underline{g}, \underline{\tilde{\alpha}}) = \underline{0}$$

$$(1.28) \qquad \text{b)} \qquad -\ddot{g}_{11} + s^2 g_{22} - s\dot{g}_{12} = 0$$

a $\underline{\hat{\alpha}}$ jest pewnym wektorem spełniającym warunek nierozdzielności dwuwymiarowej teorii sprężystości.
Ponieważ wektor $\underline{\alpha}_{\varepsilon}$ dany wzorem (1.22) powinien należeć do $\mathcal{D}(\underline{A})$ to Konstrukcja $\underline{\alpha}_i$ sprowadza się do znalezienia $\underline{\hat{\alpha}}$ spełniającego warunki (1.27), (1.28) oraz $\underline{\hat{\alpha}} \in \mathcal{D}(\underline{A})$
Można pokazać, że wektor $\underline{\hat{\alpha}}$ jest postaci:

$$(1.29) \qquad \underline{\hat{\alpha}} = \begin{bmatrix} \int_0^\infty K_1(x_2,t)F(t)\,dt \\ \int_0^\infty K_2(x_2,t)F(t)\,dt \\ \int_0^\infty K_3(x_2,t)F(t)\,dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11}(x_2) \\ G_{22}(x_2) \\ G_{12}(x_2) \end{bmatrix}$$

gdzie

$$
(1.30)\qquad K_1(x_2,t) = \begin{cases}
l_3\exp[-\hat{h}_1(t-x_2)] + l_4\exp[-\hat{h}_2(t-x_2)] + \\
+ ca_1\exp[-\hat{h}_1(t+x_2)] + ca_2\exp[-(\hat{h}_1x_2+\hat{h}_2t)] + \\
- b_1\exp[-(\hat{h}_1t+\hat{h}_2x_2)] - b_2\exp[-\hat{h}_2(x_2+t)] \\
\qquad\qquad \text{dla} \quad t \geqslant x_2 \\
\\
l_3\exp[-\hat{h}_1(x_2-t)] + l_4\exp[-\hat{h}_2(x_2-t)] + \\
+ ca_1\exp[-\hat{h}_1(x_2+t)] + ca_2\exp[-(\hat{h}_2t+\hat{h}_1x_2)] + \\
- b_2\exp[-\hat{h}_2(x_2+t)] - b_1\exp[-(\hat{h}_2x_2+\hat{h}_1t)] \\
\qquad\qquad \text{dla} \quad x_2 \geqslant t
\end{cases}
$$

$$
(1.31) \quad K_2(x_2,t) = \begin{cases} l_1\exp[\hat{h}_1(x_2-t)] + l_2\exp[\hat{h}_2(x_2-t)] + \\ + a_1\exp[-\hat{h}_1(x_2+t)] + a_2\exp[-(\hat{h}_2 t + \hat{h}_1 x_2)] + \\ + b_1\exp[-(\hat{h}_1 t + \hat{h}_2 x_2)] + b_2\exp[-\hat{h}_2(t+x_2)] \\ \qquad\qquad \text{dla} \quad t \geqslant x_2 \\ \\ l_1\exp[-\hat{h}_1(x_2-t)] + l_2\exp[-\hat{h}_2(x_2-t)] + \\ + a_1\exp[-\hat{h}_1(x_2+t)] + a_2\exp[-(\hat{h}_2 t + \hat{h}_1 x_2)] + \\ + b_1\exp[-(\hat{h}_1 t + \hat{h}_2 x_2)] + b_2\exp[-\hat{h}_2(t+x_2)] \\ \qquad\qquad \text{dla} \quad x_2 \geqslant t . \end{cases}
$$

$$
(1.32)\quad K_3(x_2,t) = \begin{cases}
L_5 \exp[-\hat{h}_1(t-x_2)] + L_6 \exp[-\hat{h}_2(t-x_2)] + \\
+ a_1 L_7 \exp[-\hat{h}_1(x_2+t)] + a_2 L_7 \exp[-(\hat{h}_2 t + \hat{h}_1 x_2)] + \\
+ b_1 L_8 \exp[-(\hat{h}_1 t + \hat{h}_2 x_2)] + b_2 L_8 \exp[-\hat{h}_2(x_2+t)] \\
\qquad\qquad \text{dla} \quad t \geqslant x_2 \\
\\
-L_5 \exp[\hat{h}_1(t-x_2)] - L_6 \exp[\hat{h}_2(t-x_2)] + \\
+ a_1 L_7 \exp[-\hat{h}_1(x_2+t)] + a_2 L_7 \exp[-(\hat{h}_2 t + \hat{h}_1 x_2)] + \\
+ b_1 L_8 \exp[-(\hat{h}_1 t + \hat{h}_2 x_2)] + b_2 L_8 \exp[-\hat{h}_2(x_2+t)] \\
\qquad\qquad \text{dla} \quad x_2 \geqslant t
\end{cases}
$$

$$(1.33)\qquad F(t) = -\varrho_1 (D^2 - k_1^2) g_{22}(t) + \varrho_1 w_1^{-1} [2 - 2w_1 - 2x_1 + w_1 x_1] \cdot$$

$$\cdot (D^2 + k_2^2) g_{11}(t) + 2\varrho_1 s (2 - w_1)(1 - x_1) w_1^{-1} D g_{12}(t) ;$$

$$(D = d/dt)$$

$$(1.34)\qquad G_{11}(x_2) = 2\varrho_1 s^{-2} (w_1 - 2)^{-1} [g_{22}(t) - g_{11}(t)] ,$$

$$(1.35)\qquad G_{12}(x_2) = G_{22}(x_2) = 0$$

$$(1.36)\qquad \hat{h}_1 = s\sqrt{1 - w_1 x_1} , \quad \hat{h}_2 = s\sqrt{1 - w_1} , \quad w_1 = \tilde{w}(x_1)$$

Współczynniki $l_1, l_2, \ldots l_7, l_8 ; k_1^2 , k_2^2 , a_1$ a_2 , b_1 , b_2 oraz c występujące w równaniach (1.30) - (1.33) znajdują się w dodatku do rozdziału V.

Zatem ze wzorów (1.24) - (1.36) możemy sukcesywnie znaleźć parę $(\lambda_i , \underline{\alpha}_i)$: Ciąg λ_i wyznaczymy ze wzorów (1.25) , (1.26) itp. zaś ciąg $\underline{\alpha}_i$ ze wzoru

(1.29) , w którym w miejsce $\underline{q}$ kładziemy kolejno prawe strony równań $(1.24)_2$, $(1.24)_3$ ....

Dokonajmy teraz analizy wartości własnej λ_ε (por. wzór (1.21)) w przypadku, gdy funkcja $\hat{\varrho} = \hat{\varrho}(x_2)$ (por. wzór (1.9)) jest pewną monotoniczną funkcją głębokości półprzestrzeni. Załóżmy zatem, że

$$[\varrho(x_2)]^{-1} = \varrho_1^{-1} + \varepsilon \hat{\varrho}_\infty^{-1} [1 - \exp(-a x_2)], \quad (a \geqslant 0). \tag{1.37}$$

Ponieważ na mocy I. (1.3)

$$\frac{1}{\varrho_1} \leqslant \frac{1}{\varrho(x_2)} \leqslant \frac{1}{\varrho_0}$$

więc z jednej strony

$$\max_{x_2 \in [0,\infty)} \left[1/\varrho(x_2) \right] = 1/\varrho_1 + \varepsilon/\hat{\varrho}_\infty ,$$

z drugiej zaś strony

$$\max_{x_2 \in [0,\infty)} \left[1/\varrho(x_2) \right] = 1/\varrho_0$$

Porównując te wielkości otrzymujemy :

$$\varepsilon = \hat{\varrho}_\infty \left(1/\varrho_0 - 1/\varrho_1 \right) > 0 \tag{1.38}$$

Jeżeli zatem przyjąć, że

$$\varrho_1 / \varrho_0 \sim 1 \qquad (\varrho_1 \geqslant \varrho_0) \tag{1.39}$$

to ε jest miarą małych zmian $\varrho(x_2)$ dla $x_2 \geqslant 0$. Podstawiając (1.37) i (1.38) do (1.25) oraz uwzględniając związki

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon &= (c_R^2)_\varepsilon s^2 , \qquad \tilde{\lambda} = \tilde{c}_R^2 s^2 , \\ \lambda_1 &= (c_R^2)_1 s^2 , \qquad \varkappa_1 = \frac{1-2\nu_1}{2-2\nu_1} \end{aligned} \tag{1.40}$$

i ograniczając się do dwóch członów we wzorze (1.21) otrzymujemy dla kwadratu prędkości fali powierzchniowej związek

$$(c_R^2)_\varepsilon = \tilde{c}_R^2 + \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right) \frac{\mu_1 a}{2(1-\omega_1)} \cdot \tag{1.41}$$

$$\cdot \left[\frac{P_0(\omega_1)}{\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\left(a+2s\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\right)} + \frac{P_1(\omega_1)}{\sqrt{1-\omega_1}\left(a+2s\sqrt{1-\omega_1}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{P_2(\omega_1)}{\left(\sqrt{1-\omega_1}+\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\right)\left(a+s\sqrt{1-\omega_1}+s\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\right)} \right] \times$$

$$\times\left[\frac{P_3(\omega_1,\varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1}}+\frac{P_4(\omega_1,\varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}}+\frac{P_5(\omega_1,\varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1}+\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}}\right]^{-1}$$

gdzie wielomiany P_0 , P_1 , P_2 , ... P_5 są podane w dodatku do rozdziału V. Wprowadzając oznaczenia

(1.42) $$\varrho_1/\varrho_0=\theta\ ,\quad c_2^2=\mu_1/\varrho_1$$

$$a=\tfrac{1}{2\pi}\,\hat{a}\,,\quad \omega=(c_R^2)_\varepsilon/c_2^2$$

zapisujemy wzór (1.41) w postaci:

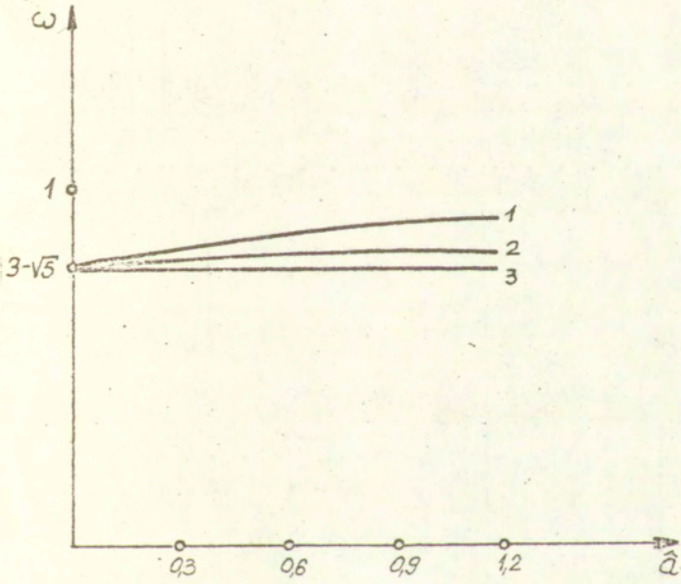
(1.43)
$$\omega=\omega_1+(\theta-1)\frac{\hat{a}}{2(1-\omega_1)}\left[\frac{P_0(\omega_1)}{\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\left(\hat{a}+4\pi\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\right)}+\right.$$
$$+\frac{P_2(\omega_1)}{\left(\sqrt{1-\omega_1}+\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\right)\left(\hat{a}+2\pi\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}+2\pi\sqrt{1-\omega_1}\right)}+$$
$$\left.+\frac{P_1(\omega_1)}{\sqrt{1-\omega_1}\left(\hat{a}+4\pi\sqrt{1-\omega_1}\right)}\right]\cdot\left[\frac{P_3(\omega_1,\varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1}}+\frac{P_4(\omega_1,\varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}}+\right.$$
$$\left.+\frac{P_5(\omega_1,\varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1}+\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}}\right]^{-1}.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja $\omega = \omega(\hat{a}; \theta, \varkappa_1)$ określona wzorem (1.43), dla każdego ustalonego θ i $\varkappa_1$ jest funkcją rosnącą zmiennej $\hat{a}$ $(\theta \geq 1)$ Na rysunku 2 przedstawiono wykresy tej funkcji dla trzech przypadków:

1/ $\varkappa_1 = 0,5$; $\theta = 1,1$

2/ $\varkappa_1 = 0,5$; $\theta = 1,01$

3/ $\varkappa_1 = 0,5$; $\theta = 1$



Rys. 2

UWAGA. Wektor $\hat{\underline{\alpha}}$ dany wzorem 1.29 można zapisać w postaci:

$$\hat{\underline{\alpha}}(x_2) = \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} K_{11}(x_2,t) & K_{12}(x_2,t) & K_{13}(x_2,t) \\ K_{21}(x_2,t) & K_{22}(x_2,t) & K_{23}(x_2,t) \\ K_{31}(x_2,t) & K_{32}(x_2,t) & K_{33}(x_2,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11}(t) \\ g_{22}(t) \\ g_{12}(t) \end{bmatrix} dt + \tag{1.44}$$

$$+ \begin{bmatrix} d_1 g_{11}(x_2) \\ 0 \\ d_2 \dot{g}_{11}(x_2) + d_3 g_{12}(x_2) \end{bmatrix}$$

gdzie

$$
(1.45)\qquad K_{11}(x_2,t)=\left[\begin{array}{l}
\tilde{a}_2\tilde{b}_1 e^{-s\sqrt{1-w_1\varkappa_1}(x_2-t)} + \dfrac{\tilde{a}_2\tilde{b}_1(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2}\,\cdot \\
\cdot\, e^{-s\sqrt{1-w_1\varkappa_1}(x_2+t} + \dfrac{2\tilde{a}_4\tilde{b}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-w_1}t+\sqrt{1-w_1\varkappa_1}x_2)} + \\
+\tilde{a}_4\tilde{b}_2 e^{-s\sqrt{1-w_1}(x_2-t)} + \dfrac{2\tilde{a}_2\tilde{b}_2\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s(\sqrt{1-w_1\varkappa_1}t+\sqrt{1-w_1}x_2)} + \\
+\dfrac{\tilde{a}_4\tilde{b}_2(\tilde{c}_2+\tilde{c}_1)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-w_1}(t+x_2)} \qquad \text{dla } 0\leq t\leq x_2\,, \\
\dfrac{\tilde{a}_2\tilde{b}_1(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-w_1\varkappa_1}(t+x_2)} + \tilde{a}_2\tilde{b}_1 e^{-s\sqrt{1-w_1\varkappa_1}(t-x_2)} + \\
+\dfrac{2\tilde{a}_4\tilde{b}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-w_1}t+\sqrt{1-w_1\varkappa_1}x_2)} + \dfrac{2\tilde{a}_2\tilde{b}_2\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2-c_1}\,\cdot \\
\cdot\, e^{-s(\sqrt{1-w_1\varkappa_1}t+\sqrt{1-w_1}x_2)} + \dfrac{\tilde{a}_4\tilde{b}_2(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-w_1}(t+x_2)} + \\
\tilde{a}_4\tilde{b}_2 e^{-s\sqrt{1-w_1}(t-x_2} \qquad \text{dla } x_2\leq t<+\infty
\end{array}\right.
$$

$$
(1.46)\qquad K_{12}(x_2,t) = \begin{cases}
\tilde{a}_3\tilde{b}_1 e^{-s\sqrt{1-w_1 x_1}(x_2-t)} + \dfrac{\tilde{a}_3\tilde{b}_1(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-w_1 x_1}(t+x_2)} + \\
+ \dfrac{2\tilde{a}_5\tilde{b}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-w_1}\,t + \sqrt{1-w_1 x_1}\,x_2)} + \tilde{a}_5\tilde{b}_2 e^{-s\sqrt{1-w_1}(x_2-t)} + \\
+ \dfrac{\tilde{a}_5\tilde{b}_2(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-w_1}(t+x_2)} + \dfrac{2\tilde{a}_3\tilde{b}_2\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} \cdot \\
\cdot\, e^{-s(\sqrt{1-w_1 x_1}\,t + \sqrt{1-w_1}\,x_2)} \qquad \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant x_2 , \\
\dfrac{\tilde{a}_3\tilde{b}_1(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-w_1 x_1}(t+x_2)} + \tilde{a}_3\tilde{b}_1 e^{-s\sqrt{1-w_1 x_1}(t-x_2)} + \\
+ \dfrac{2\tilde{a}_5\tilde{b}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-w_1}\,t + \sqrt{1-w_1 x_1}\,x_2)} + \dfrac{\tilde{a}_5\tilde{b}_2(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} \cdot \\
\cdot\, e^{-s\sqrt{1-w_1}(t+x_2)} + \tilde{a}_5\tilde{b}_2 e^{-s\sqrt{1-w_1}(t-x_2)} + \\
+ \dfrac{2\tilde{a}_3\tilde{b}_2\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s(\sqrt{1-w_1 x_1}\,t + \sqrt{1-w_1}\,x_2)} \\
\qquad\qquad \text{dla } x_2 \leqslant t < +\infty
\end{cases}
$$

$$
(1.47)\qquad K_{13}(x_2,t)=\begin{cases}
\tilde a_1\tilde b_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}(x_2-t)}-\dfrac{\tilde a_1\tilde b_1(\tilde c_1+\tilde c_2)}{\tilde c_1-\tilde c_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}(t+x_2)}+\\[2ex]
+\dfrac{2\tilde a_1\tilde b_1\tilde c_2}{\tilde c_1-\tilde c_2}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}\,t+\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,x_2)}-\tilde a_1\tilde b_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2-t)}+\\[2ex]
+\dfrac{\tilde a_1\tilde b_2(\tilde c_1+\tilde c_2)}{\tilde c_2-\tilde c_1}e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}-\dfrac{2\tilde a_1\tilde b_2\tilde c_1}{\tilde c_2-\tilde c_1}\cdot\\[2ex]
\cdot e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,t+\sqrt{1-\omega_1}\,x_2)}\qquad \text{dla}\ \ 0\le t\le x_2\,,\\[4ex]
-\dfrac{\tilde a_1\tilde b_1(\tilde c_1+\tilde c_2)}{\tilde c_1-\tilde c_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}(t+x_2)}-\tilde a_1\tilde b_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}(t-x_2)}+\\[2ex]
+\dfrac{2\tilde a_1\tilde b_1\tilde c_2}{\tilde c_1-\tilde c_2}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}\,t+\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,x_2)}+\\[2ex]
+\dfrac{\tilde a_1\tilde b_2(\tilde c_1+\tilde c_2)}{\tilde c_2-\tilde c_1}e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t+x_2)}+\tilde a_1\tilde b_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t-x_2)}+\\[2ex]
-\dfrac{2\tilde a_1\tilde b_2\tilde c_1}{\tilde c_2-\tilde c_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,t+\sqrt{1-\omega_1}\,x_2)}\\[2ex]
\qquad\qquad \text{dla}\ \ x_2\le t<+\infty
\end{cases}
$$

(1.48)

$$K_{21}(x_2,t)=\begin{cases} \tilde{a}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1 x_1}(x_2-t)} + \dfrac{\tilde{a}_2(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-\omega_1 x_1}(t+x_2)} + \\ + \dfrac{2\tilde{a}_4\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1 x_1}\,x_2)} + \\ + \tilde{a}_4 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2-t)} + \dfrac{\tilde{a}_4(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t+x_2)} + \\ + \dfrac{2\tilde{a}_2\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1 x_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1}\,x_2)} \quad \text{dla } 0\le t\le x_2 \\ \\ \dfrac{\tilde{a}_2(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-\omega_1 x_1}(t+x_2)} + \tilde{a}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1 x_1}(t-x_2)} + \\ + \dfrac{2\tilde{a}_4\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1 x_1}\,x_2)} + \\ + \dfrac{\tilde{a}_4(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t+x_2)} + \tilde{a}_4 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t-x_2)} + \\ + \dfrac{2\tilde{a}_2\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1 x_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1}\,x_2)} \\ \qquad \text{dla } x_2\le t<+\infty \end{cases}$$

(1.49)

$$K_{22}(x_2,t) = \begin{cases} \tilde{a}_3 e^{-s\sqrt{1-\omega_1 x_1}(x_2-t)} + \dfrac{\tilde{a}_3(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-\omega_1 x_1}(t+x_2)} + \\ + \dfrac{2\tilde{a}_5\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1 x_1}\,x_2)} + \\ + \tilde{a}_5 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2-t)} + \dfrac{\tilde{a}_5(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t+x_2)} + \\ + \dfrac{2\tilde{a}_3\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1 x_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1}\,x_2)} \qquad \text{dla } 0 \le t \le x_2 \\ \\ \dfrac{\tilde{a}_3(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-\omega_1 x_1}(t+x_2)} + \tilde{a}_3 e^{-s\sqrt{1-\omega_1 x_1}(t-x_2)} + \\ + \dfrac{2\tilde{a}_5\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1 x_1}\,x_2)} + \\ + \dfrac{\tilde{a}_5(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t+x_2)} + \tilde{a}_5 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t-x_2)} + \\ + \dfrac{2\tilde{a}_3\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1 x_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1}\,x_2)} \qquad \text{dla } x_2 \le t < +\infty \end{cases}$$

$$K_{23}(x_2,t)=\begin{cases} \tilde{a}_1 e^{-s\sqrt{1-w_1\varkappa_1}(x_2-t)} - \dfrac{\tilde{a}_1(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-w_1\varkappa_1}(t+x_2)} + \\ + \dfrac{2\tilde{a}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-w_1}\,t+\sqrt{1-w_1\varkappa_1}\,x_2)} + \\ -\tilde{a}_1 e^{-s\sqrt{1-w_1}(x_2-t)} + \dfrac{\tilde{a}_1(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-w_1}(t+x_2)} + \\ - \dfrac{2\tilde{a}_1\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s(\sqrt{1-w_1\varkappa_1}\,t+\sqrt{1-w_1}\,x_2)} & \text{dla } x_2 \geqslant t \geqslant 0 \\ \\ -\dfrac{\tilde{a}_1(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-w_1\varkappa_1}(t+x_2)} - \tilde{a}_1 e^{-s\sqrt{1-w_1\varkappa_1}(t-x_2)} + \\ + \dfrac{2\tilde{a}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-w_1}\,t+\sqrt{1-w_1\varkappa_1}\,x_2)} + \\ + \dfrac{\tilde{a}_1(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-w_1}(t+x_2)} + \tilde{a}_1 e^{-s\sqrt{1-w_1}(t-x_2)} + \\ - \dfrac{2\tilde{a}_1\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s(\sqrt{1-w_1\varkappa_1}\,t+\sqrt{1-w_1}\,x_2)} & \text{dla } x_2 \leq t < +\infty \end{cases} \tag{1.50}$$

$$
(1.51)\qquad K_{31}(x_2,t)=\begin{cases}
\tilde{a}_2\tilde{c}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}(x_2-t)} + \dfrac{\tilde{a}_2(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)\tilde{c}_1}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}(t+x_2)} + \\
+ \dfrac{2\tilde{a}_4\tilde{c}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,x_2)} + \\
+ \tilde{a}_4\tilde{c}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2-t)} + \dfrac{\tilde{a}_4\tilde{c}_2(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t+x_2)} + \\
+ \dfrac{2\tilde{a}_2\tilde{c}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1}\,x_2)} \qquad \text{dla } 0\le t\le x_2 \\
\\
\dfrac{\tilde{a}_2\tilde{c}_1(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}(t+x_2)} - \tilde{a}_2\tilde{c}_1 e^{-\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}(t-x_2)} + \\
+ \dfrac{2\tilde{a}_4\tilde{c}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,x_2)} + \\
+ \dfrac{\tilde{a}_4\tilde{c}_2(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t+x_2)} - \tilde{a}_4\tilde{c}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t-x_2)} + \\
+ \dfrac{2\tilde{a}_2\tilde{c}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1}\,x_2)} \\
\qquad \text{dla } x_2\le t<+\infty\,;
\end{cases}
$$

$$
K_{32}(x_2,t) = \begin{cases}
\tilde{a}_3\tilde{c}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1 x_1}(x_2-t)} + \dfrac{\tilde{a}_3\tilde{c}_1(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-\omega_1 x_1}(t+x_2)} + \\[2ex]
+ \dfrac{2\tilde{a}_5\tilde{c}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1 x_1}\,x_2)} + \\[2ex]
+ \tilde{a}_5\tilde{c}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2-t)} + \dfrac{\tilde{a}_5\tilde{c}_2(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t+x_2)} + \\[2ex]
+ \dfrac{2\tilde{a}_3\tilde{c}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1 x_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1}\,x_2)} \qquad \text{dla } 0 \le t \le x_2 \\[4ex]
\dfrac{\tilde{a}_3\tilde{c}_1(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-\omega_1 x_1}(t+x_2)} - \tilde{c}_1\tilde{a}_3 e^{-s\sqrt{1-\omega_1 x_1}(t-x_2)} + \\[2ex]
+ \dfrac{2\tilde{a}_5\tilde{c}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1 x_1}\,x_2)} + \\[2ex]
+ \dfrac{\tilde{a}_5\tilde{c}_2(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t+x_2)} - \tilde{a}_5\tilde{c}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t-x_2)} + \\[2ex]
+ \dfrac{2\tilde{a}_3\tilde{c}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1 x_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1}\,x_2)} \qquad \text{dla } x_2 \le t < +\infty
\end{cases} \tag{1.52}
$$

$$
K_{33}(x_2,t) = \begin{cases}
\tilde{a}_1\tilde{c}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,(x_2-t)} - \dfrac{\tilde{a}_1\tilde{c}_1(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,(t+x_2)} + \\[2ex]
+ \dfrac{2\tilde{a}_1\tilde{c}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,x_2)} + \\[2ex]
- \tilde{a}_1\tilde{c}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}\,(x_2-t)} + \dfrac{\tilde{a}_1\tilde{c}_2(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-\omega_1}\,(t+x_2)} + \\[2ex]
- \dfrac{2\tilde{a}_1\tilde{c}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1}\,x_2)} \qquad \text{dla } 0 \leq t \leq x_2 \\[4ex]
- \dfrac{\tilde{a}_1\tilde{c}_1(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,(t+x_2)} + \tilde{a}_1\tilde{c}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,(t-x_2)} + \\[2ex]
+ \dfrac{2\tilde{a}_1\tilde{c}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1-\tilde{c}_2} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,x_2)} + \\[2ex]
+ \dfrac{\tilde{a}_1\tilde{c}_2(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2)}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s\sqrt{1-\omega_1}\,(t+x_2)} - \tilde{a}_1\tilde{c}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}\,(t-x_2)} + \\[2ex]
- \dfrac{2\tilde{a}_1\tilde{c}_1\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2-\tilde{c}_1} e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\,t + \sqrt{1-\omega_1}\,x_2)} \qquad \text{dla } x_2 \leq t < +\infty
\end{cases} \tag{1.53}
$$

Współczynniki występujące we wzorach (1.44) - (1.53) znajdują się w dodatku do rozdziału V.

§ 2. Analiza przypadku $1/\mu(x_2) = 1/\mu_1 + \varepsilon/\hat{\mu}(x_2)$
$\varrho(x_2) \equiv \varrho_1$, $\nu(x_2) \equiv \nu_1$ (por. [31] i [9]).

Przyjmijmy teraz, że

$$\frac{1}{\mu(x_2)} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\varepsilon}{\hat{\mu}(x_2)}, \quad \varrho(x_2) \equiv \varrho_1, \quad \nu \equiv \nu_1. \tag{2.1}$$

Podstawiając (2.1) do (1.3) otrzymujemy

$$\underline{A}_0(s;\varrho_1)\underline{\alpha} - \lambda[\underline{B}_0(\mu_1,\nu_1) + \varepsilon\underline{B}(\hat{\mu},\nu_1)]\underline{\alpha} = \underline{0} \tag{2.2}$$

Operatory $\underline{A}_0(s;\varrho_1)$ i $\underline{B}_0(\mu_1,\nu_1)$ są symetrycznymi w $\mathcal{H}$. Ponadto $\underline{B}(\hat{\mu},\nu_1)$ jest dodatnio określonym operatorem. Zatem (por. [13] str. 11 - 19) w pewnym otoczeniu pary $(\lambda_\varepsilon, \underline{\alpha}_\varepsilon)$ istnieje rozwiązanie $(\lambda_\varepsilon, \underline{\alpha}_\varepsilon)$ problemu własnego (2.2) będące funkcją analityczną parametru ε. Para $(\lambda_\varepsilon, \underline{\alpha}_\varepsilon)$ jest dana wzorami (1.21) i (1.22), zaś para $(\tilde{\lambda}, \underline{\tilde{\alpha}})$ jest dana wzorami (1.4) - (1.8) w których $\tilde{\varrho} \equiv \varrho_1$, $\tilde{\mu} \equiv \mu_1$, $\tilde{\nu} \equiv \nu_1$.
Podstawiając (1.21) i (1.22) do (2.2) oraz porów-
wielkości przy odpowiednich potęgach ε otrzymujemy układ:

$$\left[\underline{A}_o(s;\varrho_1) - \tilde{\lambda}\, \underline{B}_o(\mu_1,\nu_1) \right] \underline{\tilde{\alpha}} = \underline{0} \,, \tag{2.3}$$

$$\left[\underline{A}_o(s;\varrho_1) - \tilde{\lambda}\, \underline{B}_o(\mu_1,\nu_1) \right] \underline{\alpha}_1 =$$

$$= \left[\tilde{\lambda}\, \underline{B}(\hat{\mu},\nu_1) + \lambda_1 \underline{B}_o(\mu_1,\nu_1) \right] \underline{\tilde{\alpha}} \,,$$

$$\left[\underline{A}_o(s;\varrho_1) - \tilde{\lambda}\, \underline{B}_o(\mu_1,\nu_1) \right] \underline{\alpha}_2 =$$

$$= \tilde{\lambda}\, \underline{B}(\hat{\mu},\nu_1)\underline{\alpha}_1 + \lambda_1 \left[\underline{B}_o(\mu_1,\nu_1)\underline{\alpha}_1 + \right.$$

$$\left. + \underline{B}(\hat{\mu},\nu_1)\underline{\tilde{\alpha}} \right] + \lambda_2\, \underline{B}_o(\mu_1,\nu_1)\underline{\tilde{\alpha}} \,,$$

....

Mnożąc skalarnie pierwsze równanie (2.3) przez α_1, drugie przez $\tilde{\alpha}$ i odejmując stronami otrzymujemy:

$$\lambda_1 = -\tilde{\lambda}\, \frac{\left(\underline{B}(\hat{\mu},\nu_1)\underline{\tilde{\alpha}}\,,\underline{\tilde{\alpha}}\right)}{\left(\underline{B}_o(\mu_1,\nu_1)\underline{\tilde{\alpha}}\,,\underline{\tilde{\alpha}}\right)} \tag{2.4}$$

Postępując podobnie jak w części pierwszej tego rozdziału, dla dalszych wyrazów szeregu (1.21) otrzymujemy

(2.5)
$$\lambda_2 = -\tilde{\lambda}\,\frac{\left(\underline{B}(\hat{\mu},\nu_1)\underline{\alpha}_1,\underline{\tilde{\alpha}}\right)}{\left(\underline{B}_o(\mu_1,\nu_1)\underline{\tilde{\alpha}},\underline{\tilde{\alpha}}\right)} +$$

$$-\lambda_1\,\frac{\left\{\left(\underline{B}_o(\mu_1,\nu_1)\underline{\alpha}_1,\underline{\tilde{\alpha}}\right)+\left(\underline{B}(\hat{\mu},\nu_1)\underline{\tilde{\alpha}},\underline{\tilde{\alpha}}\right)\right\}}{\left(\underline{B}_o(\mu_1,\nu_1)\underline{\tilde{\alpha}},\underline{\tilde{\alpha}}\right)}$$

....

zaś dla dalszych wyrazów szeregu (1.22) mamy:

(2.6)
$$\underline{\alpha}_1 = \left[\underline{A}_o(s;\varrho_1)-\tilde{\lambda}\,\underline{B}_o(\mu_1,\nu_1)\right]^{-1}\circ\left\{\tilde{\lambda}\,\underline{B}(\hat{\mu},\nu_1)\underline{\tilde{\alpha}}+\lambda_1\underline{B}_o(\mu_1,\nu_1)\underline{\tilde{\alpha}}\right\}$$

$$\underline{\alpha}_2 = \left[\underline{A}_o(s;\varrho_1)-\tilde{\lambda}\,\underline{B}_o(\mu_1,\nu_1)\right]^{-1}\circ\left\{\tilde{\lambda}\,\underline{B}(\hat{\mu},\nu_1)\underline{\alpha}_1 +\right.$$

$$\left.+\lambda_1\left[\underline{B}_o(\mu_1,\nu_1)\underline{\alpha}_1+\underline{B}(\hat{\mu},\nu_1)\underline{\tilde{\alpha}}\right]+\lambda_2\underline{B}_o(\mu_1,\nu_1)\underline{\tilde{\alpha}}\right\},$$

....

Jeżeli założyć, że funkcja $\hat{\mu}(x_2)$ oraz parametr ε występujące w (2.1), dane są wzorami:

(2.7) $$1/\hat{\mu}(x_2) = 1/\hat{\mu}_\infty (1 - e^{-a x_2}) \quad (a \geqslant 0),$$

(2.8) $$\varepsilon = \hat{\mu}_\infty (1/\mu_0 - 1/\mu_1), \qquad \mu_1/\mu_0 \sim 1 \quad (\mu_1 \geqslant \mu_0)$$

to na mocy (1.21) i (2.4) kwadrat prędkości fali powierzchniowej w rozważanej niejednorodnej półprzestrzeni można przybliżyć wzorem /są to dwa wyrazy szeregu (1.21) /:

(2.9) $$(C_R^2)_\varepsilon = \tilde{C}_R^2 - \left(1/\mu_0 - \frac{1}{\mu_1}\right) \tilde{C}_R^2 a \mu_1 \cdot \left[\frac{P_3(\omega_1, \varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1}\,(a + 2s\sqrt{1-\omega_1})} + \frac{P_4(\omega_1, \varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1} + \sqrt{1-\omega_1 \varkappa_1}} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{a + s\sqrt{1-\omega_1} + s\sqrt{1-\omega_1 \varkappa_1}} + \frac{P_5(\omega_1, \varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1 \varkappa_1}\,(a + 2s\sqrt{1-\omega_1 \varkappa_1})} \right] \cdot$$
$$\cdot \left[\frac{P_3(\omega_1, \varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1}} + \frac{P_4(\omega_1, \varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1} + \sqrt{1-\omega_1 \varkappa_1}} + \frac{P_5(\omega_1, \varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1 \varkappa_1}} \right]^{-1}$$

gdzie wielomiany $P_3(\omega_1,\varkappa_1)$, $P_4(\omega_1,\varkappa_1)$ i $P_5(\omega_1,\varkappa_1)$ są określone w części pierwszej tego rozdziału.
Wprowadzając oznaczenia

$$\mu_1/\varrho_1 = c_2^2\,, \quad \theta = \mu_1/\mu_0\,, \quad a = \tfrac{1}{2\pi}\hat{a}\,, \quad \omega = (c_R^2)_\varepsilon / c_2^2 \tag{2.10}$$

można zapisać (2.9) w postaci:

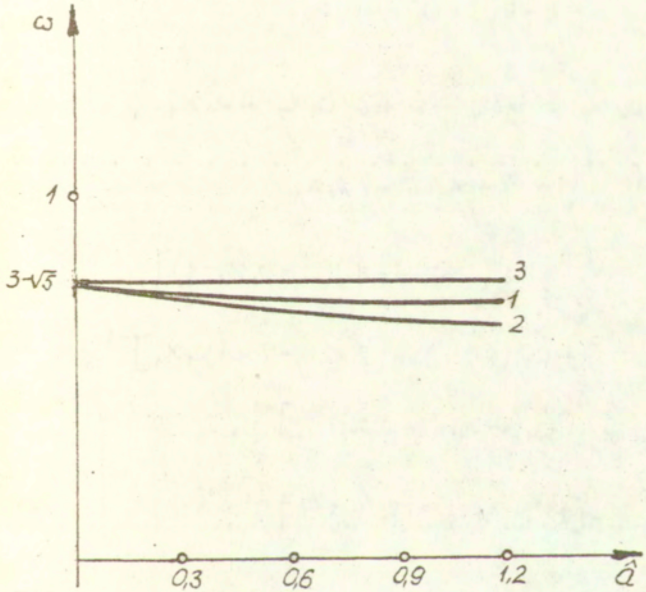
$$\omega = \omega_1 - \omega_1(\theta-1)\hat{a}\left[\frac{P_3(\omega_1,\varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1}\left(\hat{a}+\sqrt{1-\omega_1}\right)} + \frac{P_4(\omega_1,\varkappa_1)}{\left(\sqrt{1-\omega_1}+\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\right)\left(\hat{a}+2\pi\sqrt{1-\omega_1}+2\pi\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\right)} + \frac{P_5(\omega_1,\varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\left(\hat{a}+4\pi\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}\right)}\right] \times \left[\frac{P_3(\omega_1,\varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1}} + \frac{P_4(\omega_1,\varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1}+\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}} + \frac{P_5(\omega_1,\varkappa_1)}{\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}}\right]^{-1} \tag{2.11}$$

Funkcja $\omega = \omega(\hat{a}; \theta, x_1)$ dana wzorem (2.11) przy ustalonym θ i x_1 jest funkcją malejącą argumentu $\hat{a}$. Na rysunku 3 przedstawiono wykresy tej funkcji w trzech przypadkach:

1/ $x_1 = 0{,}5$; $\theta = 1{,}1$

2/ $x_1 = 0{,}5$; $\theta = 1{,}01$

3/ $x_1 = 0{,}5$; $\theta = 1$



Rys. 3

§ 3. Dodatek do rozdziału V.

$$P_0(\omega_1) = 2\omega_1^2(1-\omega_1) + \tfrac{1}{8}(2-\omega_1)^4\omega_1^2 \,,$$

$$P_1(\omega_1) = \tfrac{1}{2}\omega_1^2(1-\omega_1)(2-\omega_1)^2 + \tfrac{1}{2}(2-\omega_1)^4 \,,$$

$$P_2(\omega_1) = -\left[4\omega_1^2(1-\omega_1)(2-\omega_1) + (2-\omega_1)^4\omega_1\right],$$

$$P_3(\omega_1) = 8 - 4\omega_1 + \omega_1^2 - 4\omega_1\varkappa_1 \,,$$

$$P_4(\omega_1,\varkappa_1) = -32 + 8\omega_1 + 24\omega_1\varkappa_1 - 4\omega_1^2\varkappa_1 \,,$$

$$P_5(\omega_1,\varkappa_1) = 8 + \varkappa_1\omega_1^2 - 8\omega_1\varkappa_1 \,,$$

$$k_1^2 = \omega_1^{-1}\left[4s^2(1-\omega_1)(1-\varkappa_1)(\omega_1-\omega_1\varkappa_1-1)\right],$$

$$k_2^2 = s^2(1-\omega_1)(1-2\varkappa_1)\omega_1\left[2-2\omega_1-2\varkappa+\omega_1\varkappa_1\right]^{-1},$$

$$l_1 = \left[2s^3\omega_1(1-\varkappa_1)(1-\omega_1\varkappa_1)^{1/2}\right]^{-1},$$

$$l_2 = -\left[2s^3\omega_1(1-\varkappa_1)(1-\omega_1)^{1/2}\right]^{-1},$$

$$l_3 = \left[2(1-\omega_1\varkappa_1)+\omega_1\right]\left[2s^3(1-\varkappa_1)(\omega_1-2)\omega_1(1-\omega_1\varkappa_1)^{1/2}\right]^{-1},$$

$$l_4 = \left[2s^3\omega_1(1-\varkappa_1)(1-\omega_1)^{1/2}\right]^{-1},$$

$$L_5 = \left[-2(1-w_1x_1)(1-x_1)w_1 + (1-2x_1)(w_1-2)w_1 + \right.$$

$$\left. -4(w_1-2) - w_1^2(1-x_1) \right] \times$$

$$\times \left[8s^3(1-x_1)^2(w_1-1)(w_1-2)w_1 \right]^{-1},$$

$$L_6 = \left[8s^3(1-x_1)^2(w_1-1)w_1(w_1-2) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[-2(w_1-1)w_1 + 4(w_1-2) + w_1^2(1-x_1) + \right.$$

$$\left. -(1-2x_1)(w_1-2)w_1 \right],$$

$$L_7 = (1-w_1x_1)^{1/2} \left[4(1-x_1)(w_1-1)(w_1-2) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[2w_1(1-w_1x_1) + w_1(1-2x_1)(2-w_1) + w_1^2 + \right.$$

$$\left. + 4(1-x_1)(w_1-2) \right],$$

$$L_8 = (1-w_1x_1)^{1/2} \left[16(1-x_1)(w_1-1)(w_1-2)(1-w_1x_1) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[8 w_1 (1 - w_1 x_1)^2 - w_1 (1 - 2x_1)(w_1 - 2)^3 + \right.$$

$$\left. + 4(1 - x_1)(w_1 - 2)^3 + w_1^2 (w_1 - 2)^2 \right],$$

$$a_1 = \left[8 s^3 (1 - x_1)^2 (1 - w_1 x_1)^{1/2} (w_1 - 1)\, w_1 \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[2(1 - w_1 x_1) w_1 + (2 - w_1)(1 - 2x_1)\, w_1 + \right.$$

$$\left. + 2(w_1 - 2)(w_1 + 6)(1 - x_1) \right],$$

$$a_2 = \left[16 s^3 (1 - x_1)^2 (1 - w_1 x_1)^{1/2} (w_1 - 1) w_1 (w_1 - 2)^2 \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[-4(1 - w_1 x_1)\, w_1 (w_1 - 2)^2 + 2(w_1 - 2)^3 (1 - 2x_1)\, w_1 + \right.$$

$$+ 16(1 - w_1 x_1)(w_1 - 1)(1 - x_1) - 8(w_1 - 2)^3 (1 - x_1) +$$

$$\left. + w_1^2 (2 - w_1)(1 - x_1) \right],$$

$$b_1 = - \left[16 s^3 (1 - x_1)^2 (1 - w_1 x_1)^{1/2} (w_1 - 1)\, w_1 \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[4(1-\omega_1\varkappa_1)\omega_1(\omega_1-1) - 2(\omega_1-2)(1-2\varkappa_1)\omega_1 + \right.$$

$$\left. + 8(\omega_1-2)(1-\varkappa_1) + \omega_1^2(1-\varkappa_1) + 4(\omega_1-1)(1-\omega_1\varkappa_1)\right],$$

$$b_2 = \left[16 s^3 (1-\varkappa_1)^2 (1-\omega_1\varkappa_1)^{1/2} (\omega_1-1)\omega_1(\omega_1-2)^2\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[4(1-\omega_1\varkappa_1)\omega_1(\omega_1-2)^2 - 2(\omega_1-2)^3(1-2\varkappa_1)\omega_1 + \right.$$

$$+ 8(\omega_1-2)^3(1-\varkappa_1)\omega_1 + \omega_1^2(\omega_1-2)^2(1-\varkappa_1) +$$

$$\left. + 16(1-\omega_1\varkappa_1)(\omega_1-1)(1-\varkappa_1)\right],$$

$$c = \left[2(1-\omega_1\varkappa_1) + \omega_1\right](\omega_1-2)^{-1}.$$

$$\tilde{a}_1 = -\frac{\rho_1(2-\omega_1)}{2\omega_1^2(1-\varkappa_1)(1-\nu_1)s}$$

$$\tilde{a}_2 = \frac{1}{2s^3\omega_1(1-\varkappa_1)\sqrt{1-\omega_1\varkappa_1}}\left[\frac{-s^2(1-\omega_1)\rho_1(2-\omega_1)}{\omega_1(1-\nu_1)} + \right.$$

$$- \frac{s^2 \varrho_1 (1-w_1)\left[w_1(1-\nu_1)-2\right]}{w_1(1-\nu_1)} + s^2(1-w_1 \varkappa_1)\left(\frac{\varrho_1(2-w_1)}{w_1(1-\nu_1)} + \varrho_1\right)\Big] ,$$

$$\tilde{a}_3 = \frac{1}{2s^3 w_1 (1-\varkappa_1)\sqrt{1-w_1\varkappa_1}} \Big[-\varrho_1 s^2 (1-w_1\varkappa_1) +$$

$$+ \frac{s^2 \varrho_1 (1-w_1)\left[w_1(1-\nu_1)-2\right]}{w_1(1-\nu_1)} \Big] ,$$

$$\tilde{a}_4 = \frac{-1}{2w_1 s^3 (1-\varkappa_1)\sqrt{1-w_1}} \Big[\frac{-s^2(1-w_1)\varrho_1(2-w_1)}{w_1(1-\nu_1)} +$$

$$+ s^2(1-w_1)\left(\frac{\varrho_1(2-w_1)}{w_1(1-\nu_1)} + \varrho_1\right) - \frac{s^2(1-w_1)\left[w_1(1-\nu_1)-2\right]\varrho_1}{w_1(1-\nu_1)} \Big] ,$$

$$\tilde{a}_5 = \frac{-1}{2w_1 s^3 (1-\varkappa_1)\sqrt{1-w_1}} \Big[-\varrho_1 s^2 (1-w_1) +$$

$$+ \frac{s^2(1-w_1)\left[w_1(1-\nu_1)-2\right]\varrho_1}{w_1(1-\nu_1)} \Big] ,$$

$$\tilde{b}_1 = \frac{2(1-w_1\varkappa_1)}{w_1-2} + \frac{w_1}{w_1-2} ,$$

$$\tilde{b}_2 = \frac{2(1-w_1)}{w_1-2} + \frac{w_1}{w_1-2} ,$$

$$\tilde{c}_1 = \Big[\left(-s\sqrt{1-w_1 x_1}\right)^3 \left(- \frac{w_1(1-\nu_1)}{s^3(w_1-1)(w_1-2)} \right) +$$

$$- s\sqrt{1-w_1 x_1} \left(\frac{w_1\nu_1 - 2}{2s(w_1-1)} - \frac{w_1^2(1-\nu_1)}{2s(w_1-1)(w_1-2)} \right) \Big],$$

$$\tilde{c}_2 = \Big[\left(-s\sqrt{1-w_1}\right)^3 \left(- \frac{w_1(1-\nu_1)}{s^3(w_1-1)(w_1-2)} \right) +$$

$$+ s\sqrt{1-w_1} \left(\frac{2-w_1\nu_1}{2s(w_1-1)} + \frac{w_1^2(1-\nu_1)}{2s(w_1-1)(w_1-2)} \right) \Big],$$

$$d_1 = \frac{2\varrho_1(2w_1\nu_1 - w_1 - 2)}{s^2 w_1(w_1-2)(1-\nu_1)} ,$$

$$d_2 = \frac{2\varrho_1(2-\nu_1 w_1)}{s^3(w_1-1)(w_1-2)} ,$$

$$d_3 = \frac{-2\varrho_1}{s^2(w_1-1)} .$$

Zakończenie

Przedstawiona praca analizuje propagację fal powierzchniowych w niejednorodnej, izotropowej półprzestrzeni sprężystej posługując się naturalnym, naprężeniowym sformułowaniem zagadnienia [4]. Przyjęto, że niejednorodność jest opisana trójką funkcji: $\varrho = \varrho(x_2)$, $\mu = \mu(x_2)$ i $\nu = \nu(x_2)$, gdzie ϱ, μ i ν oznaczają kolejno gęstość, moduł ścinania i liczbę Poissona, zaś x_2 jest osią skierowaną w głąb półprzestrzeni $x_2 \geqslant 0$.

Stosując B-holomorficzną teorię perturbacji liniowych operatorów, zaproponowaną przez T. Kato [25] pokazano że dla dowolnych gładkich funkcji $\varrho(x_2)$, $\mu(x_2)$ i $\nu(x_2)$ prędkość propagacji oraz amplituda fali powierzchniowej są funkcjami analitycznymi liczby falowej, o ile taka fala istnieje w rozważanej półprzestrzeni / rozdz. II /.

W przypadku gdy $\varrho(x_2)$ = const, $\mu(x_2)$ =const oraz $\nu = \nu(x_2) \in C^2[0, \infty)$ udowodniono w oparciu o twierdzenie C. Olecha [28], że w rozważanej półprzestrzeni istnieje co najmniej jedna fala powierzchniowa, oraz przeprowadzono jakościową analizę tej fali / rozdz. III / Podano też iteracyjną metodę poszukiwania takiej fali, bazując na teorii funkcji Greena dla liniowego, zwyczajnego równania różniczkowego drugiego rzędu ze zmiennymi współczynnikami / rozdz. IV /.

Wreszcie stosując metodę perturbacji według Friedrichsa [13] podano efektywne wzory określające przybliżoną prędkość i amplitudę fali powierzchniowej w półprzestrzeni, w której dwie spośród trzech funkcji $\varrho(x_2)$, $\mu(x_2)$ $\nu(x_2)$ są stałe, zaś trzecia jest "słabo" zmienną wzdłuż głębokości.

Otrzymane wyniki: o analityczności fali powierzchniowej względem liczby falowej, iteracyjna metoda znalezienia fali dla zmiennej liczby Poissona oraz efektywne wzory perturbacyjne mogą być wykorzystywane w celu ilościowej analizy fal powierzchniowych w półprzestrzeni w której niejednorodność jest opisana szeroką klasą funkcji $\varrho(x_2)$, $\mu(x_2)$ i $\nu(x_2)$.

Wydaje się również, że podejście użyte w pracy dla analizy prostego zagadnienia fal powierzchniowych w półprzestrzeni niejednorodnej może być wykorzystana w przypadku odwrotnego zagadnienia fal powierzchniowych gdy zadane są pewne parametry rozważanej fali / np. jej prędkość propagacji otrzymana z pomiarów doświadczalnych / i należy znaleźć zmienność jednej z trzech funkcji, określającyh niejednorodność półprzestrzeni.

DODATEK A

Wykaz ważniejszych twierdzeń i definicji wykorzystanych w pracy.

Definicja 1. /zbioru gęstego/ ([25] str. 167)

Zbiór S jest gęsty w przestrzeni X $\Leftrightarrow$ domknięcie $\bar{S}$ zbioru S pokrywa się z X, czyli gdy $\bar{S} = X$.

Definicja 2. operatora symetrycznego /([25] str. 338)

Operator T jest symetryczny $\Leftrightarrow$ gdy jest określony na zbiorze gęstym i dla każdego $u,v \in \mathcal{D}(T)$

$$(Tu,v) = (u,Tv)$$

Definicja 3. /formy/ (por. [25] str. 386)

Niech będzie dana funkcja $t[u,v]$ przyjmująca wartości zespolone i taka, że

i/ dla każdego $u \in D \subset H$ i przy każdym ustalonym $v \in D \subset H$; $t[u,v]$ jest liniowa / tzn $t[\alpha u + \beta u,v] = \alpha t[u,v] + \beta t[u,v]$ dla każdego $u \in D \subset H$, ustalonego $v \in D$ i skalarów zespolonych α, β /.

ii/ Dla każdego $v \in D \subset H$ i przy każdym ustalonym $u \in D$ $t[u,v]$ jest półliniowa / sesquilinear/, to znaczy $t[u, \alpha v + \beta v] = \bar{\alpha} t[u.v] + \bar{\beta} t[u,v]$ dla każdego $v \in D \subset H$, dla każdego ustalonego $u \in D$ i skalarów zespolonych α, β.

Funkcja $t[u,v]$ spełniająca warunki i/ oraz ii/ nazywa się formą półtoraliniową, zaś zbiór $D \subset H$ nazywa się dziedziną tej formy.

Definicja 4 / gęsto określonej formy / (por. [25] str. 387).

Jeżeli dziedzina $D(t)$ formy $t[u,v]$ jest zbiorem gęstym w przestrzeni H to mówimy, że forma jest gęsto określona.

Definicja 5 / formy symetrycznej / (por. [25] str.387)

Formę t nazywa się symetryczną $\Longleftrightarrow$ dla każdego $u,v \in D(t)$ zachodzi równość:

$$t[u,v] = \overline{t[v,u]} .$$

Definicja 6 / formy kwadratowej / (por. [25] str. 388).

Formę $t[u] = t[u,u]$ nazywa się formą kwadratową stowarzyszoną z $t[u,v]$.

Definicja 7 / formy ograniczonej / (por. [25] str. 388).

Symetryczna forma t nazywa się ograniczoną z dołu $\Longleftrightarrow$ istnieje $\gamma \in R$, taka że dla każdego $u \in D(t)$ zachodzi nierówność:

$$t[u] \geqslant \gamma \|u\|^2$$

Rozpatrzmy teraz formę niesymetryczną $t[u]$.

Niech $\Theta(t)$ oznacza liczbowy zbiór wartości tej formy.

Definicja 8 / formy sektorialnej / (por. [25] str. 389).

Formę niesymetryczną $t[u]$ nazywa się sektorialną gdy liczbowy zbiór wartości $\Theta(t)$ tej formy jest podzbiorem płaszczyzny zespolonej ζ postaci:

$$\begin{cases} |\arg(\zeta - \gamma)| \leq \theta \\ 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad , \quad \operatorname{Re} t \geq \gamma \end{cases}$$

gdzie γ jest pewną liczbą rzeczywistą.

Uwaga 1. Każda forma symetryczna jest sektorialna.

Definicja 9 / ciągu t-zbieżnego / (por. [25] str. 392).

Niech t jest sektorialną formą. Ciąg $u_n \in H$ będziemy nazywać t-zbieżnym do elementu $u \in H$ wtedy i tylko wtedy gdy

$u_n \in D(t) \subset H$, $u_n \to u$ oraz $t[u_n - u_m] \to 0$ dla $n,m \to +\infty$.

Zapisujemy $u_n \xrightarrow[t]{} u$

Definicja 10 / formy domykalnej / (por. [25] str. 395).

Sektorialna forma t jest domykalną $\Longleftrightarrow$ dla każdego $u_n \in D(t)$ warunek $u_n \xrightarrow[t]{} 0$ implikuje warunek $t[u_n] \to 0$.

Definicja 11 / formy domkniętej / (por. [25] str. 392).

Sektorialna forma t nazywa się domkniętą

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{u_n \in D(t)} \left(u_n \xrightarrow[t]{} u \Rightarrow u \in D(t) \quad \text{i} \quad t[u_n - u] \to 0 \right)$$

Uwaga 2. Sektorialna forma t nazywa się domykalną jeśli ma domknięte przedłużenie / [25] str. 395 /

Każda forma symetryczna jest domykalną.

Definicja 12 /holomorficznej rodziny typu a / ([25] str. 494).

Niech będzie dana rodzina $t(z)$ półtoraliniowych form, określonych dla $z \in D_0$. Rodzinę tę nazywamy holomorficzną typu a jeśli:

i/ każda forma $t(z)$ jest sektorialna i domknięta,

ii/ dziedzina formy $D(t)$ nie zależy od parametru z i jest gęsta w przestrzeni H.

iii/ dla każdego $u \in D(t)$ forma $t(z)$ jest funkcją holomorficzną parametru $z \in D_0$.

Definicja 13 / maksymalnego symetrycznego operatora / (por. [25] str. 340).

Maksymalnym symetrycznym operatorem nazywa się operator symetryczny nieposiadający przedłużeń symetrycznych.

Podobnie:

Definicja 14 / maksymalnego sektorialnego operatora / (por. [25] str. 351, 404).

Operator T nazywa się sektorialnym jeśli forma (Tu,u) jest sektorialna.

Operator sektorialny, który nie ma przedłużeń nazywa się maksymalnym.

Definicja 15 / holomorficznej rodziny operatorów typu B / (por. [25] str. 494).

Niech $t(z)$ będzie holomorficzną rodziną form typu a, niech $T(z)$ dla każdego $z \in D_0$ będzie maksymalnym sektorialnym operatorem odpowiadającym formie $t(z)$, to znaczy

$$t(z) = \left(T(z)u,u\right).$$

Wtedy rodzinę operatorów $T(z)$ będziemy nazywać holomorficzną typu 3.

TWIERDZENIE 1. / kryterium B-holomorficzności / (por. [25] str. 497).

Niech $t^{(n)}$, dla $n=0, 1, 2 \ldots$ będzie ciągiem półtoraliniowych form w przestrzeni H. Załóżmy, że forma $t^{(0)}$ jest sektorialna, domykalna i gęsto określona w H. Niech $D = D(t)$ oznacza dziedzinę formy $t^{(0)}$. Jeśli dla $n \geq 1$ $D(t^{(0)}) \subset D(t^{(n)})$ i istnieją liczby $c > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ takie, że

$$|t^{(n)}[u]| \leq c^{n-1}\left(a\|u\|^2 + b \operatorname{Re} t[u]\right) \qquad \text{dla } u \in D,$$

to forma

$$t(z)[u] = \sum_{n=0}^{\infty} t^{(n)}[u](z-z_0)^n \,; \quad D(t(z)) = D$$

określona jest dla $|z - z_0| < 1/c$ i jest ona formą sektorialną i domykalną.

Domknięcie $\widetilde{t(z)}$ form $t(z)$ generuje rodzinę operatorów $T(z)$ typu 3.

TWIERDZENIE 2. / pierwsze twierdzenie o reprezentacji/ (por. [25] str. 404).

Niech $t[u,v]$ będzie gęsto określoną, domkniętą sektorialną półtoraliniową formą w przestrzeni H. Istnieje taki maksymalny sektorialny operator T, że $D(T) \subset D(t)$ oraz $t[u,v] = (Tu,v)$ dla każdego $u \in D(T)$ i $v \in D(t)$. Jeśli $u \in D(t)$ w H i jest spełniona równość $t[u,v] = (w,v)$ dla każdego $v \in D(T)$, to $u \in D(t)$ i $Tu=w$.

Uwaga 3.

Z twierdzenia o reprezentacji widać, że dziedzina operatora D(T) jest na ogół podzbiorem dziedziny D(t) formy t związanej z operatorem T. Innymi słowami dziedzina formy zawiera w sobie dziedzinę operatora związanego z nią.

TWIERDZENIE 3 /por. [25] str. 523-527 /.

Rozważmy równanie własne

$$(1) \qquad T(z)u = \lambda(z)\hat{A}(z)u$$

gdzie T(z) jest B-holomorficznym operatorem, $\hat{A}(z)$ domkniętym, ograniczono-holomorficznym / bounded holomorphic / operatorem w przestrzeni zespolonej Hilberta H, określonymi w otoczeniu punktu z=0. Załóżmy, że istnieje do operatora $\hat{A}(z)$ oprator odwrotny $\hat{A}^{-1}(z)$ będący operatorem ograniczonym. Wtedy wartości własne $\lambda(z)$ i odpowiadające im wektory własne u są funkcjami analitycznymi parametru z. Równanie (1) jest równoważne równaniu własnemu:

$$(2) \qquad \hat{A}^{-1}(z)T(z)u = \lambda(z)u$$

ODSYŁACZE

1/ por. J. Ignaczak [4].

2/ Oznaczanie różniczkowania kropką w równaniu (1.8) nie należy mylić z różniczkowaniem po czasie w równaniu (1.1).

3/ por. [6].

4/ Warunek nierozdzielności (1.22) zawężony do pola $\underline{\tau}$ danego wzorami (1.5) ma postać:

$$\left\{\mu^{-1}\left[(1-\nu)\alpha_{11}-\nu\alpha_{22}\right]\right\}^{\cdot\cdot} - s\left\{\mu^{-1}\left[(1-\nu)\alpha_{22}-\nu\alpha_{11}\right]\right\} + 2s\left\{\mu^{-1}\alpha_{12}\right\}^{\cdot} = 0 \; ; \quad \left(\cdot = d/dx_2\right)$$

5/ W dalszym ciągu liczba rzymska stojąca przed numerem wzoru wskazuje numer rozdziału.

6/ Wprowadzenie zespolonej przestrzeni H do naszych rozważań wynika z założeń B-holomorficznej teorii perturbacji liniowych operatorów (por. [25] str. 492 - 515).

7/ por. [25] str. 73, 322, 337, 338 lub definicję 1 w Dodatku A.

8/ por. [25] str. 167 lub definicję 2 w Dodatku A.

9 Wartości własne macierzy $\underline{B}$ są równe odpowiednio:

$$(1-2\nu)(2\mu)^{-1}, \quad (2\mu)^{-1}, \quad \mu^{-1}.$$

Symetryczna macierz $\underline{B}$ jest dodatnio określona, gdy wszystkie jej wartości własne λ_i są dodatnie oraz

$$(\underline{B}\underline{\alpha},\underline{\alpha}) \geqslant \min_i \lambda_i (\underline{\alpha},\underline{\alpha})$$

(por. [26]).

10/ por [25] str. 22, 27, 385, 392, 435, a także definicję 3 w Dodatku A.

11/ Forma $\mathfrak{A}^{(n)}(s_0)[\underline{\alpha}]$ jest pochodną rzędu n formy $(\underline{A}(s)\underline{\alpha},\underline{\alpha})$ względem parametru rzeczywistego s w punkcie $s = s_0$, to znaczy

$$\mathfrak{A}^{(1)}(s_0)[\underline{\alpha}] = \lim_{s\to s_0} \frac{(\underline{A}(s)\underline{\alpha},\underline{\alpha}) - (\underline{A}(s_0)\underline{\alpha},\underline{\alpha})}{s-s_0}$$

$$\mathfrak{A}^{(2)}(s_0)[\underline{\alpha}] = \lim_{s\to s_0} \frac{\mathfrak{A}^{(1)}(s)[\underline{\alpha}] - \mathfrak{A}^{(1)}(s_0)[\underline{\alpha}]}{s-s_0}$$

....

$$\mathfrak{A}^{(n)}(s_0)[\underline{\alpha}] = \lim_{s\to s_0} \frac{\mathfrak{A}^{(n-1)}(s)[\underline{\alpha}] - \mathfrak{A}^{(n-1)}(s_0)[\underline{\alpha}]}{s-s_0}$$

12/ por. [25] str. 497 , a także kryterium B-holomorficzności w Dodatku A.

13/ por. [25] str. 392, 437 lub definicję 11 w Dodatku A.

14/ por. [25] str. 386, 387 lub definicję 3 w Dodatku A.

15/ por. [25] str. 395 lub definicję 10 w Dodatu A.

16/ por. [25] pierwsze twierdzenie o reprezentacji str. 404, oraz twierdzenie 2 w Dodatku A.

17/ Aby dowieść relacje II. (1.13) i II. (1.14) stosujemy nierówność (por. [29] str. 74 - 75)

$$\left| \int_0^\infty \sum_i u_i v_i \, dx \right| \leqslant \left(\int_0^\infty \sum_i |u_i|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^\infty \sum_i |v_i|^2 dx \right)^{1/2}$$

oraz

$$2ab \leqslant \varepsilon a^2 + {}^1/_\varepsilon \, b^2$$

gdzie u_i , v_i są pewnymi funkcjami zespolonymi, a , b są funkcjami zmiennej rzeczywistej, zaś $\varepsilon > 0$.

18/ por. [25] str. 389 lub definicję 8 w Dodatku A.

19/ por. [25] str. 183 - 185, 187, 340, 375, a także por. definicję 13 oraz 14 w Dodatku A.

20/ por. [25] str. 526, 527 oraz por. twierdzenie 3 w Dodatku A.

21/ por. [32] str. 41

22/ por. [30] str. 128

23/ Warunek $q<1$ jest spełniony dla dużych λ , to znaczy dla fal krótkich (por. Rozdział I) .

24/ Para $(\tilde{\lambda}(\varrho_1,\mu_1,\nu_1), \tilde{\underline{\alpha}}(\varrho_1,\mu_1,\nu_1))$ jest otrzymana z pary $(\tilde{\lambda}, \tilde{\underline{\alpha}})$, danej wzorami (1.4) - (1.8) w których $\tilde{\varrho} = \varrho_1$, $\tilde{\mu} = \mu_1$, $\tilde{\nu} = \nu_1$.

Literatura

1. VICTOROV I.A., Tipy zvukovych povierchostnych vołn v tvierdych tiełach, Akust. żurnał XXV, 1979, no 1
2. ERINGEN A.C., SUHUBI E.S., Elastodynamics vol. II, Linear theory, Academic Press, New York, San Francisco, London 1975.
3. BEN-MENAHEM A., SINGH S.J., Seismic and Sources, Springer Verlag, New York Inc. /1981/.
4. IGNACZAK J., Upper and lower bounds on the velocity of surface waves in a nonhomogeneous isotropic elastic semi-space, Arch. Mech. Stos. 23, 789 - 800, /1971/.
5. IGNACZAK J., Rayleigh waves in a nonhomogeneous isotropic elastic semi-space, Arch. Mech. Stos. 15, 341 - 345, /1963/.
6. RAO C.R.A., Separation of the Stress Equation of Motion in Nonhomogeneous Elastic Media, J.A.S.A., vol. 41, no3, 612 - 614, /1967/.
7. RAO C.R.A., Separation of the Stress Equation of Motion in Nonhomogeneous Isotropic Elastic Media, Doctorial Thesis submitted to Monash University, Australia 1969.
8. RAO C.R.A., Wave propagation in elastic media with prescribed variation in the parameters. Modern problems in elastic wave propagation, Symposium held at Northwestern University, Evanston, Illinois USA, A.WILLEY, Interscience Publication, 1978.

9. ROŻNOWSKI T., Surface Waves in an Isotropic Elastic Semispace with Small Nonhomogeneity, Bull. Pol. Sci. Tech. 25, 67 - 77, /1977/.

10. ALENITSYN A.G., Rayleigh waves in an inhomogeneous elastic semi-space /in Russian/, Prik. Mat. Mech. 27, no3, 547 - 550, /1963/.

11. ALENITSYN A.G., Rayleigh waves in an inhomogeneous elastic semispace of wave guide type /in Russian/, Prik. Mat. Mech. 31, no 2, 222 - 230, /1967/.

12. BREKHOVSKIJ L.M., Volny v słoistych sredach, Nauka Moskva, 1973.

13. FRIEDRICHS K.O., Perturbation spectra in Hilbert space, American Mathematical Society, Prcvdence, Rhode Island, 1965.

14. NOWACKI W., Dynamiczne zagadnienia termosprężystości PWN Warszawa, 1966.

15. GULAJEV J.V., Povierchnostnyje elektrozvukovyje volny w twierdych tiełach, Ż.E.T.F. 9, 163 - 165, /1969/.

16. BLEUSTEIN J.L., A new surface wave in piezoelectrical materials, Appl. Phys. letters, 13, no 12, 412 - 413,

17. RYMARZ C., Surface waves in Cosserats medium, Bull. Ac. Pol. Sci. ser tech. 15, no 3, 177, /1967/.

18. HAYES M. RIVLIN R.S., A note on the secular equation for Rayleigh waves, ZAMP, 13, 80 - 83, /1962/.

19. IGNACZAK J., Spectrum of surface waves in a nonhomogeneous bounded elastic solid, Arch.Mech. Stos. 21, no3,

353 - 367, /1969/.

20. PIETROVSKIJ I.G., O nikotorych problemach uravnie- z czastnymi proizvodnymi, UMN, 1, 3 - 4, str. 13 - 14, 44 - 70, /1956/.
21. KUPRADZE V.D., Triechmiernyje zadaci matiematiceskoj teorii uprugosti i termouprugosti, Nauka Moskwa, /1976/.
22. BERS L. SCHECHTER J.F., Partial Differential equations, Interscience Publ. New York-London-Syney, /1964/.
23. GELFAND I.M. PIETROVSKIJ I.G. SIŁOV G.E., Teoria sistem differencjalnych uravnienij z czastnymi proizvod- nymi, Trudy III vsiesojuznogo matiematiceskogo Sjezda, 3, Izdatielstwo A.N. SSSR, Moskva 65 - 72, /1958/.
24. KLECHA T., Analytical dependence of velocity and amplitude of a stress surface wave on the wave number, Bull. Ac. Pol. Sci. ser. tech. 29, no 5 - 6, /1981/
25. KATO T., Perturbation theory for linear operators, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, /1966/. /in Russian/.
26. STRANG G., Linear algebra and its applications, Academic Press, New York, 1976 /in Russian Nauka, Moskva 1980/.
27. KLECHA T., Existence of serface waves in nonhomogeneous isotropic elastic semispace with arbitrary variation of Poisson s ratio, Bull. Ac. Pol. Sci. tech. 25, no 11, /1977/.
28. OLECH C., Asymptotic behaviour of the solutions of seco- nd order differential equation, Bull. Ac. Pol. Sci. ser.

math. 7, no 6, 319 - 326, /1959/.

29. ŁADYŻENSKA O.A., SOŁONNIKOV V.A. URALCEVA N.N., Liniejnyje i quasiliniejnyje urawnienia paraboliceskogo tipa, Nauka Moskva, 1967.

30. KOSTIUCENKO A.G. SARGSJAN I.S., Rozprłedielenie sobstviennych znacenij, Nauka Moskva, 1979.

31. KLECHA T., Surface waves in weakly nonhomogeneous isotropic elastic halfspace, Bull, Ac. Pol. Sci. ser tech. 29, no 5 - 6, /1981/.

32. SCHWARTZ L., Kurs analizy matematycznej , t II, PWN Warszawa, 1980.

33. NIRENBERG L., Topics in nonlinear functional analysis, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1974, /in Russian str. 25/.

34. KNOPP K., Theory of functions, Parts. I, II, New York, Dover, /1945, 1947/.

35. Nonlinear waves, edited by Leibovich and Seebas, Cornell University Press, Ithaca and London 1974. /in Russian, Mir Moskva 1977, str 151/

36. KLECHA T. , Effective form of amplitude of a stress surface waves in a nonhomogeneous isotropic elastic halfspace, Bull. Pol. Ac. Sci. Tech. 32, no 9 - 10, /1984/.