

Praca doktorska

Maciej Domaszewski

PROGRAMOWANIE LINIOWE
I UOGÓLNIONE MACIERZE ODWROTNE
W ANALIZIE
SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH RAM

3/1982



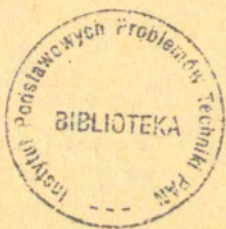
WARSZAWA 1982

ISSN 0208-5658

Praca doktorska

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 7 stycznia 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 3/1982



57071



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark. wyd. 9,4. Ark.druk. 12.

Oddano do drukarni w styczniu 1982 r.

Nr zamówienia 29/0/82 nr.160 Z - 108.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Maciej Domaszewski
Zakład Teorii Konstrukcji
IPPT PAN

PROGRAMOWANIE LINIOWE I UOGÓLNIONE MACIERZE ODWROTNE
W ANALIZIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH RAM

1. WPROWADZENIE

1.1. Cel i zakres pracy

Metody teorii plastyczności, a w szczególności teorii nośności granicznej, znalazły szerokie zastosowanie w obliczeniach wytrzymałościowych konstrukcji inżynierskich. Wynika to z faktu, że teoria ta pozwala ocenić zdolność konstrukcji do przenoszenia obciążeń w sposób o wiele bardziej logiczny niż teoria sprężystości. Jedynie teoria nośności granicznej pozwala na realną ocenę stopnia bezpieczeństwa konstrukcji, a tym samym daje możliwość lepszego wykorzystania materiału. Odzwierciedleniem tych dążeń jest chociażby wprowadzenie w nowej polskiej normie dla konstrukcji stalowych [105] koncepcji stanu granicznego, jako jednego z głównych elementów obliczeń wytrzymałościowych.

Podstawowym schematem konstrukcyjnym obiektów przemysłowych, biurowych oraz wysokich budynków mieszkalnych jest szkielet w postaci przestrzennej ramy. Dotychczas stosowane metody obliczania nośności granicznej konstrukcji prętowych odnoszą się jedynie do układów płaskich. Pominięcie przestrzennej pracy szkieletu powoduje nieracjonalne wykorzystanie materiału i nie pozwala określić rzeczywistego współczynnika bezpieczeństwa konstrukcji.

Celem pierwszej części pracy, obejmującej rozdziały 2 i 3, jest opracowanie dyskretnego modelu ramy przestrzennej oraz sformułowanie zadania nośności granicznej w sposób umożliwiający

jący efektywne numerycznie rozwiązywanie tego typu zagadnień i pozwalający na zautomatyzowanie obliczeń przy wykorzystaniu maszyn cyfrowych. Tradycyjne sformułowanie tego zadania w postaci dualnej pary zadań programowania liniowego, wywodzące się bezpośrednio z dwóch podstawowych twierdzeń teorii nośności granicznej, jest z powodzeniem stosowane w stosunku do płaskich układów ramowych. Natomiast podejście takie do obliczania nośności granicznej przestrzennych ram stwarza poważne trudności natury numerycznej. Powodem tego są przede wszystkim bardzo duże wymiary macierzy zadania. Wynika stąd konieczność poszukiwania specjalnych metod rozwiązywania, które uwzględniając specyficzną, blokowo-diagonalną strukturę macierzy, zwiększyłyby efektywność obliczeń i pozwoliłyby na praktyczne rozwiązywanie takich zagadnień.

Rozdział 2 poświęcony jest dyskretnemu opisowi elementu prętowego ramy przestrzennej. W punkcie 2.1 wyprowadzono, przy założeniu płaskich przekrojów, ogólne liniowe związki statyczne i geometryczne. Pomijając wpływ sił tnących na uplastycznienie przekroju oraz sprowadzając obciążenie zewnętrzne do węzłów, otrzymano praktycznie przydatny model pręta ramy przestrzennej. Rozpatrzone również przypadki szczególne tych związków, otrzymując model rusztu i tarczy prętowej. W punkcie 2.2, opierając się na zlinearyzowanej postaci warunku plastyczności dla przekroju, wyprowadzono globalny warunek plastyczności dla pręta. Uwzględniono interakcję momentów zginających, siły osiowej i momentu skręcającego. Podano sformułowanie tradycyjne - za pomocą równań hiperpłaszczyzn aproksymujących powierzchnię graniczną - oraz oryginalny opis wierzchołkowy, polegający na wyrażeniu wektora uogólnionych naprężeń dopuszczalnych w postaci kombinacji wypukłej wierzchołków obszaru granicznego.

Rozdział 3 dotyczy różnych metod rozwiązywania zagadnienia nośności granicznej przestrzennych ram. Wychodząc z wyprowadzonych w rozdziale drugim związków statycznych, kinematycznych i fizycznych dla elementu prętowego oraz korzystając z dwóch podstawowych twierdzeń nośności granicznej, otrzymano początkowe sformułowanie zagadnienia w postaci dualnej pary zadań programowania liniowego. Następnie badano efektywność różnych sposobów redukcji wymiarów macierzy zadania, w tym metodę

parametrów nadliczbowych oraz metodę, wykorzystującą wierzchołkowy opis warunku plastyczności. W rezultacie przedstawiono dwa programy numeryczne: GEN - według podejścia tradycyjnego, oraz GEW - według metody wierzchołkowej. Drugi z nich pozwala na szybsze obliczanie nośności granicznej ortogonalnych ram przestrzennych. Na przykładach porównano efektywność obydwu metod.

Celem drugiej części pracy, obejmującej rozdział 4, jest przedstawienie możliwości, jakie daje zastosowanie teorii uogólnionych odwrotności macierzy w analizie sprężysto-plastycznych ram. W wyniku traktowania macierzy zadania jako operatorów liniowych w przestrzeniach skończonego wymiaru i głębszego zbadania ich własności na bazie algebry liniowej i teorii optymalizacji, otrzymano nową metodę wyznaczania nośności granicznej oraz odpowiadającego jej stanu naprężeń dla konstrukcji wykonanej z materiału sprężysto-plastycznego.

Powszechne stosowanie w teorii nośności granicznej modelu sztywno-plastycznego wynika, z jednej strony, z istnienia twierdzeń, mówiących, że nośność graniczna nie zależy od tego, czy wybrany model jest sztywno-plastyczny czy sprężysto-plastyczny, z drugiej zaś - z możliwości wykorzystania dobrze opracowanych od strony numerycznej metod obliczeniowych opartych na programowaniu liniowym. Jednakże z chwilą, gdy chcemy otrzymać jednoznaczny rozkład naprężeń i odkształceń w rzeczywistej konstrukcji, należy stosować model sprężysto-plastyczny. Dotychczasowe, szeroko rozpowszechnione, przyrostowe metody rozwiązywania zagadnień geometrycznie liniowej analizy sprężysto-plastycznej bazują na koncepcji zmiennej sztywności bądź początkowych odkształceń lub naprężeń. Z numerycznego punktu widzenia polega to na wielokrotnym rozwiązywaniu układu równań liniowych w trybie iteracyjnym. Metody te są zatem dość czasochłonne. Inną możliwością jest stosowanie bezpośredniego podejścia energetycznego. Wówczas zagadnienie liniowej analizy sprężysto-plastycznej, przy założeniu niezależności końcowego stanu naprężeń i odkształceń od historii obciążania /tzw. założenie holonomiczności/, ma postać zadania programowania kwadratowego. Od strony numerycznej efektywność algorytmów rozwiązujących zadania programowania kwadratowego, jest jeszcze mało zbadana.

Wiele bowiem zależy od wielkości, struktury i własności macierzy zadania. W sytuacji, gdy chcemy znaleźć stan naprężeń i odkształceń w chwili zniszczenia, dodatkowym utrudnieniem jest konieczność wyznaczenia najpierw mnożnika obciążenia granicznego.. W dotychczasowych metodach rozwiązywania tego typu zagadnień postępowano dwuetapowo. Najpierw rozwiązywano zadanie programowania liniowego dla modelu sztywno-plastycznego, a następnie - dla znalezionej obciążenia granicznego - rozwiązywano zadanie programowania kwadratowego analizy sprężysto-plastycznej. Natomiast w zaproponowanej w pracy metodzie uniknięto w ogóle rozwiązywania zadania programowania kwadratowego. Dekomując transformacji zmiennych zadania, przy wykorzystaniu wierzchołkowego opisu powierzchni granicznej, oraz wprowadzając zmodyfikowaną uogólnioną odwrotność macierzową Botta-Duffina, sprowadzono problem jednoczesnego wyznaczenia nośności granicznej i odpowiadającego jej stanu naprężeń do jednokrotnego rozwiązania zadania programowania liniowego. Na przykładach numerycznych przedstawiono zastosowanie zaproponowanej metody. Pokazano również, jak stosowanie uogólnionych odwrotności macierzy w liniowej analizie sprężystej pozwala uzyskać w jednolity i zwarty matematycznie sposób znane rozwiązania metody przemieszczeń.

1.2. Przegląd literatury

Obliczanie nośności granicznej sztywno-plastycznych konstrukcji oparte jest na dwóch podstawowych twierdzeniach, statycznym i kinematycznym, teorii nośności granicznej [79,117]. Bezpośrednie zastosowanie tych twierdzeń pozwala uzyskać

oszacowania dolne i górne rzeczywistego mnożnika obciążenia granicznego [117, 98, 96, 97]. Znaleźnienie rozwiązania zupełnego i rzeczywistego mnożnika obciążenia granicznego może okazać się trudne, nawet w przypadku konstrukcji prętowych. Należy bowiem wówczas rozpatrywać wszystkie statycznie dopuszczalne pola uogólnionych naprężeń, bądź wszystkie kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia i wybrać takie, które dają największy mnożnik statyczny lub najmniejszy kinematyczny mnożnik obciążenia. W przypadku konstrukcji ramowych metoda taka jest możliwa jedynie dla niewielkich zginanych ram o małej liczbie parametrów [116]. Dla dużych konstrukcji i przy uwzględnianiu interakcji kilku sił wewnętrznych w warunku plastyczności dla przekroju postępowanie takie jest wręcz niemożliwe.

W literaturze istnieje wiele przybliżonych metod rozwiązywania zagadnień nośności granicznej konstrukcji prętowych. P.S. Symonds i B.G. Neal [122, 102] stosowali zarówno podejście statyczne, jak i kinematyczne do wyznaczania nośności granicznej płaskich ram z uwzględnieniem jedynie zginania. W podejściu kinematycznym stosowali metodę łączenia podstawowych mechanizmów zniszczenia. Teoretycznie należy zbadać wszystkie możliwe mechanizmy i wybrać - jako rzeczywisty - ten, który daje najmniejszy kinematyczny mnożnik obciążenia. Proces ten może być jednak skrócony przez wyznaczenie - dla dowolnie wybranego, kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia - rozkładu momentów, spełniającego równania równowagi, i sprawdzenie warunku plastyczności. Jeżeli nie jest on przekroczony w żadnym przekroju krytycznym, to obliczony mnożnik kinematyczny jest rzeczywistym mnożnikiem obciążenia granicznego. W przeciwnym wypadku jest on jedynie górnym oszacowaniem obciążenia granicznego. Chcąc uzyskać oszacowanie dolne, należy znaleźć minimum stosunku momentów plastycznych do istniejących momentów /otrzymanych ze statycznego rozkładu stowarzyszonego z wybranym mechanizmem zniszczenia/ i pomnożyć tę wartość przez obliczony kinematyczny mnożnik obciążenia. Stosując taką metodę prób i błędów do kolejnych mechanizmów, można uzyskać zawężenie przedziału między dolnym i górnym oszacowaniem rzeczywistego

mnożnika obciążenia granicznego.

M.R.Horne [70], opierając się na twierdzeniu statycznym, zaproponował metodę rozkładu momentów plastycznych do znalezienia statycznie dopuszczalnego pola momentów w płaskiej ramie i obliczenia w ten sposób statycznego mnożnika obciążenia granicznego.

J.F.Baker, M.R. Horne i J. Heyman [6] obliczali nośność graniczną płaskich ram, próbując uwzględnić w sposób iteracyjny wpływ sił osiowych. W metodzie tej najpierw oblicza się nośność graniczną ramy z uwzględnieniem tylko momentów zginających. Następnie, na podstawie otrzymanych momentów wyznacza się z warunków statyki siły osiowe, po czym następuje redukcja wartości momentów plastycznych, zgodnie z warunkiem plastyczności dla interakcji moment zginający - siła osiowa. Dla tych zredukowanych momentów plastycznych rozwiązuje się ponownie zagadnienie nośności granicznej z uwzględnieniem jedynie zginania. Proces iteracyjny prowadzi się do chwili, gdy wartości sił osiowych, obliczonych w kolejnych iteracjach, różnią się dostatecznie mało.

P.G. Hodge [64] również rozpatrywał przypadek interakcji momentu zginającego i siły osiowej. Stosował podejście statyczne. Uogólnione naprężenia w ramie / momenty zginające i siły osiowe / wyrażał w funkcji parametrów nadliczbowych i obciążenia zewnętrznego. Następnie znajdował mechanizm zniszczenia, rozwiązując zagadnienie nośności granicznej przy uwzględnieniu tylko momentów zginających w warunku plastyczności. Przy założeniu, że te same przekroje ulegną uplastycznieniu również przy uwzględnieniu sił osiowych, podstawiał wyrażenie na uogólnione naprężenia w funkcji parametrów nadliczbowych i obciążenia do warunku plastyczności, uwzględniającego interakcję moment zginający - siła osiowa, w uplastycznionych przekrojach ramy. Wyznaczał w ten sposób wartość mnożnika obciążenia granicznego oraz wartości momentów zginających i sił osiowych. Metoda taka jest możliwa jedynie w przypadku pełnego mechanizmu zniszczenia. Otrzymane rozwiązanie jest poprawne, jeżeli wpływ sił osiowych nie zmienia mechanizmu zniszczenia. W przeciwnym wypadku metoda taka powinna być stosowana w trybie iteracyjnym.

P.G.Hodge zajmował się także obliczaniem nośności granicznej płaskich rusztów. W pracy [68] stosował zlinearyzowany warunek plastyczności dla przypadku interakcji momentu zginającego i momentu skręcającego, a w [69] uwzględnił interakcję dwukierunkowego zginania ze skręcaniem. Przykłady obliczania nośności granicznej, w podejściu statycznym i kinematycznym prostych rusztów, pracujących na zginanie i skręcanie, zawarte są również w pracach J.Heymana [58, 59, 60, 61]. J.Bródka [21] rozpatrywał różne przypadki przestrzennych obciążeń prostych belek o przekroju dwuteowym. A.I.Strelbicka [121] badała wpływ skręcania na nośność graniczną ram, wynikający z asymetrycznego obciążenia rygla.

Pewne odmienne podejście do zagadnień obliczania nośności granicznej płaskich rusztów zaproponowali M.Kleiber i B.Boni w pracach [78, 10, 11]. Jest to rozszerzenie teorii ośrodka dyskretyzowanego [133, 55, 128] na zagadnienia związane z teorią plastycznego płynięcia materiałów i teorią nośności granicznej konstrukcji. Jednakże wadą przedstawionej metody jest konieczność przyjmowania z góry rozkładu momentów zginających i skręcających w postaci, która daje statycznie dopuszczalne pole uogólnionych naprężeń. W pracy [10] otrzymano dolne oszacowanie nośności granicznej prostokątnego rusztu swobodnie podpartego i zamocowanego oraz rozwiązanie ścisłe dla rusztu biegunowego.

Wszystkie powyższe prace dotyczyły bądź płaskich ram z uwzględnieniem co najwyżej momentów zginających i sił osiowych, bądź prostych rusztów, pracujących na zginanie i skręcanie. Przedstawione metody obliczania nośności granicznej były na ogół metodami przybliżonymi. W przypadku analizy plastycznej bardziej skomplikowanych konstrukcji, znajdujących się w złożonym stanie naprężenia, zachodzi potrzeba znalezienia odpowiedniego modelu matematycznego, który umożliwi efektywne rozwiązywanie tego typu zagadnień i pozwoli na zautomatyzowanie obliczeń przy wykorzystaniu maszyn cyfrowych. Jak się okazuje, dwa podstawowe twierdzenia teorii nośności granicznej można sformułować w postaci dualnej pary zadań programowania liniowego. Programowanie liniowe [37, 49, 136, 113, 71, 88],

będące działem programowania matematycznego, jest młodą, żywo rozwijającą się - wraz z teorią badań operacyjnych i analizą systemów - gałęzią nowoczesnej matematyki. Dotyczy ono, najogólniej mówiąc, warunkowych zadań ekstremalnych w przestrzeniach skończenie wymiarowych.

Po raz pierwszy zagadnienie nośności granicznej zostało sformułowane w postaci zadania programowania liniowego przez A.C.Charnesa i H.J.Greenberga [23]. Stosowali oni podejście statyczne, w którym poszukuje się maksimum mnożnika obciążenia w klasie statycznie dopuszczalnych pól uogólnionych naprężeń, tzn. spełniających warunki równowagi i warunków plastyczności. A.C. Charnes, C.E.Lemke i O.C.Zienkiewicz [24] pokazali, że dwa podstawowe twierdzenia, statyczne i kinematyczne, teorii nośności granicznej sprowadzają się do dualnej pary zadań programowania liniowego. Na zastosowanie programowania liniowego w teorii nośności granicznej zwrócili uwagę także W.Prager [106] i C.Gavarini [50]. D.E.Grierson i G.M.Gladwell [54] sformułowali kinematyczne twierdzenie nośności granicznej w języku programowania liniowego. M.Z.Cohn, S.K. Ghosh i S.R. Parimi [29] pokazali, że każdy problem analizy plastycznej może być sprowadzony do zadania programowania liniowego i rozwiązany na maszynie cyfrowej. Wiele prac [30, 46, 73, 126, 89, 134] dotyczy obliczania nośności granicznej konstrukcji dyskretnych metodą programowania liniowego; w zastosowaniu przede wszystkim do zginanych ram płaskich.

W sytuacji, gdy wektor uogólnionych naprężeń w przekroju pręta ma tylko jedną składową /np. moment zginający - dla belek bądź ram zginanych lub siła osiowa - dla kratownic/, wówczas warunek plastyczności dla całej konstrukcji przedstawia liniowy układ nierówności. Obliczanie nośności granicznej tego typu konstrukcji prowadzi w sposób naturalny do zadań programowania liniowego. Natomiast w ogólnym przypadku przekroju w złożonym stanie naprężenia warunek plastyczności jest nieliniową, wypukłą funkcją uogólnionych naprężeń przekrojowych. Zachodzi wówczas potrzeba formułowania zadań nośności granicznej za pomocą programowania nieliniowego. Problemom tym poświęcone są prace P.G.Hodge'a [65] i A.Borkowskiego z A.Čyrasem [14].

Programowanie nieliniowe stosowane było do obliczania nośności granicznej głównie konstrukcji ciągłych, jak powłoki [9], płyty [67] oraz w optymalizacji konstrukcji [87]. Liczba publikacji na temat zastosowań programowania nieliniowego w teorii konstrukcji jest ograniczona z uwagi na poważne trudności numeryczne.

Powszechnie stosowane są odcinkowo-liniowe aproksymacje powierzchni granicznej, zapewniające bezpieczeństwo na szczyblu przekroju. Wówczas zagadnienia nośności granicznej konstrukcji dyskretnych można formułować w postaci zadań programowania liniowego. Jednolite podejście do tego typu problemów przedstawił G.Maier [91, 92, 93]. Teoretyczne podstawy analizy konstrukcji plastycznych metodami programowania matematycznego rozwijane były również w pracach A.A. Čyrasa [34, 35, 36], A. Borkowskiego [15, 16, 17, 14, 18], M.Z. Cohna [28, 30, 29, 31]. Oddzielną grupą prac, dotyczących zastosowań programowania matematycznego w teorii konstrukcji, stanowią publikacje poświęcone zagadnieniom optymalnego projektowania. Nie będziemy ich jednak omawiać, gdyż tematyka ta wykracza poza zakres niniejszej pracy.

Przykłady zastosowań programowania liniowego do obliczania nośności granicznej konstrukcji prętowych w złożonym stanie naprężenia dotyczą płaskich ram bądź płaskich rusztów. T.Nonaka [103], stosując podejście kinematyczne, obliczał nośność graniczną płaskich ram przy uwzględnieniu wpływu siły osiowej na uplastycznienie przekroju. M.Z. Cohn i T. Rafay [31] również analizowali ortogonalne ramy płaskie zarówno przy odcinkowo-liniowym, jak i nieliniowym warunku plastyczności dla momentu zginającego i siły osiowej. Przedstawienie zlinearyzowanych postaci tego typu warunków plastyczności dla różnych przekrojów zawiera praca A. Borkowskiego [18], a numeryczną analizę wpływu sił osiowych i różnych metod linearyzacji krzywej granicznej na nośność graniczną płaskich ram zawierają prace M.Sarana i A.Borkowskiego [114, 115]. M.Askari [5] stosował metody programowania liniowego do analizy plastycznej większych rusztów ortogonalnych. Jednakże, przyjęta tam linearyzacja krzywej granicznej dla zginania i skręcania nie zapewni całko-

witego bezpieczeństwa na szczeblu przekroju.

Zagadnieniom analizy plastycznej przy obciążeniach nieproporcjonalnych poświęcone są prace [66 , 118] , a przy obciążeniach cyklicznych - praca [13] .

W pracy [42] podjęto próbę uwzględnienia zjawiska wyboczenia słupów przy obliczaniu nośności granicznej sztywno-plastycznych ram metodą programowania liniowego.

Wszystkie powyższe prace dotyczyły bądź płaskich ram z uwzględnieniem momentów zginających i sił osiowych, bądź płaskich rusztów, pracujących na zginanie i skręcanie. Natomiast brak jest, poza jedną pracą D.E. Griersona i S.B. Abdel - Baseta [53] , publikacji dotyczących obliczania nośności granicznej konstrukcji prętowych w złożonym stanie naprężenia, jakimi są przestrzenne ramy. Istnieje wiele prac z zakresu liniowej analizy sprężystej przestrzennych konstrukcji prętowych, opartej głównie na metodzie przemieszczeń [90 , 110 , 125 , 124 , 27 , 107 , 26] . Natomiast poważne trudności istnieją w otrzymaniu warunku plastyczności dla przekroju pod jednoczesnym działaniem momentów zginających, momentu skręcającego i siły osiowej.

Omówimy teraz prace dotyczące nośności granicznej przekroju w złożonym stanie naprężenia /por. [137] /, czyli analitycznych postaci warunków plastyczności dla przekroju. Najwięcej publikacji z tego zakresu dotyczy przypadku zginania z jednoczesnym skręcaniem. M.C. Steele [119] przeprowadził, jako pierwszy, całkowanie numeryczne równania Handelman - Hilla [56 , 62] oparte na funkcji naprężeń. Analizował on przekrój kwadratowy. E.O. Imegwu [72] , stosując podobną metodę , rozpatrywał przekrój kołowy i trójkątny. S. Piechnik i M.Życzkowski [104] zaproponowali podejście przemieszczeniowe prowadzące do dokładniejszych wyników niż metoda funkcji naprężeń. P.M. Miller i L.E. Malvern [99] całkowali numerycznie równanie przemieszczeniowe dla przekroju kwadratowego, natomiast w [104] rozważano przekrój kołowy. Przy pewnych założeniach upraszczających, jak hipoteza płaskich przekrojów, można uzyskać oszacowania górne nośności granicznej przekroju zginanego i skręcanego. Oszacowania takie podali R.Hill i M.P.L. Siebel [63] , A.R. Rżanicyn [112] oraz F.A. Gaydon i H. Nuttal [51] . Pewne ogólne metody oszacowań

ddolnych zaproponowali N.I.Biezuchow [8] oraz M.I.Erchow [45], który wykorzystywał koncepcje teorii nośności granicznej powłoki. G.S.A.Morris i S.J.Fenves [40] otrzymali oszacowania dolne powierzchni granicznej dla przypadku podwójnego zginania, skręcania i rozciągania w zależności od położenia osi obojętnej; rozpatrywano przekrój prostokątny, dwuteowy, skrzynkowy i rurowy. M.A.Wnuk [130] wyprowadził równanie przemieszczeniowe dla przypadku rozciągania ze skręcaniem prętów o przekrojach nieokrągłych //jest to nieliniowe równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu/. Natomiast w [131] podał krzywe graniczne dla przekrojów trójkątnego, kwadratowego, sześciokątnego, dowolnego wielobocznego regularnego, okrągłego, eliptycznego, pierścieniowego, kwadratowego z otworem okrągłym oraz cienkościennych. W.W.F.Chen i T.Atsuta [25] badali powierzchnie graniczne dla przekrojów: dwuteowych, skrzynkowych i rurowych dwuosowo zginanych i rozciąganych prętów. Y.Lescouarc'h [86, 96 - rozdz. 4] zajmował się nośnością graniczną przekrojów prostokątnych, dwuteowych i skrzynkowych pod działaniem siły osiowej, sił tnących oraz momentów zginających. Otrzymane krzywe porównywał z badaniami doświadczalnymi oraz ze wzorami zalecanymi we francuskich wytycznych do projektowania konstrukcji metalowych [[106]. T.A. Duffey i L.E. Romesberg [44] zaproponowali ogólną metodę konstruowania dolnych oszacowań n-wymiarowych powierzchni granicznych w przestrzeni uogólnionych naprężeń na podstawie znajomości powierzchni granicznych w przestrzeniach o mniejszej liczbie wymiarów.

D.E.Grierson i S.B.Abdel-Baset we wspomianej wcześniej pracy [53] otrzymali wierzchołki powierzchni granicznej dla przypadku jednoczesnej interakcji dwukierunkowego zginania ze skręcaniem i ściskaniem. Metoda ich, polegająca na zastosowaniu techniki programowania liniowego do obliczania nośności granicznej zdyskretyzowanego przekroju, zostanie omówiona w rozdziale 2.2. Otrzymany zlinearyzowany warunek plastyczności zastosowali w obliczaniu nośności granicznej przestrzennych ram.

Z analizą plastyczną ram przestrzennych związane są również poważne trudności natury numerycznej. Zagadnienia obliczania nośności granicznej tego typu konstrukcji, nawet niewielkich

prowadzą do zadań programowania liniowego o bardzo dużych macierzach. Jakkolwiek metody programowania matematycznego w analizie konstrukcji plastycznych są dobrze ugruntowane od strony teoretycznej, to jednak brak jest opracowań, dotyczących numerycznej efektywności obliczania dużych konstrukcji. Pewną koncepcję redukcji wymiarów zagadnienia nośności granicznej, wykorzystującą wierzchołkowy opis warunku plastyczności, podał A.Zavelani-Rossi [135]. Na temat metod rozwiązywania dużych zadań programowania liniowego istnieje wiele opracowań teoretycznych [81, 38], jednakże o numerycznej efektywności tych metod powiedziano bardzo ^{nie}wiele.

Osobną dziedziną zastosowań metod programowania matematycznego w mechanice stanowi analiza konstrukcji sprężysto-plastycznych. Podstawy teoretyczne zostały opracowane przez G.Maiera [91, 92, 93, 94], D.E.Griersona [52, 94], O. De Donato [39, 40]. Z matematycznego punktu widzenia zagadnienia analizy sprężysto-plastycznej sprowadzają się do zadań programowania kwadratowego [1, 132, 33, 114] - w przypadku tzw. analizy holonomicznej, bądź do parametrycznych zadań programowania liniowego [22] lub parametrycznych liniowych zadań komplementarnych [75, 76, 77, 32] - w przypadku przyrostowej analizy, tzw. nieholonomicznej.

Na koniec przeglądu należy jeszcze wspomnieć o przyrostowych metodach analizy sprężysto-plastycznej, opartych na koncepcji zmiennej sztywności bądź początkowych odkształceń lub naprężeń. Pierwsze programy [129, 74] analizy sprężysto-plastycznych ram bazaowały na liniowej metodzie przemieszczeń i uwzględniały wpływ jedynie momentu zginającego na uplastycznienie przekroju. W dalszych pracach [80, 95, 57, 3, 84, 85, 12] zaczęto uwzględniać również wpływ siły osiowej, a w [41] rozważano ruszty płaskie z uwzględnieniem zginania i skręcania. Ostatnie prace [4, 47, 48, 114] dotyczą nieliniowej /w zakresie dużych przemieszczeń/ sprężysto-plastycznej analizy płaskich konstrukcji prętowych z uwzględnieniem interakcji momentu zginającego i siły osiowej w warunku plastyczności. W pracy [127] przedstawiono proste przykłady sprężysto-plastycznych ram przestrzennych analizowanych, w zakresie liniowym, przyrostową metodą opartą na koncepcji zmiennej sztywności. Uwzględniono interakcję

dwukierunkowego zginania ze skręcaniem. W pracy [2] podjęta została próba porównania numerycznej efektywności metod przyrostowych z metodami programowania kwadratowego dla rozwiązań sprężysto-plastycznych.

2. OPIS ELEMENTU PRĘTOWEGO PRZESTRZENNEJ RAMY

2.1. Równania statyczne i geometryczne

Wyprowadzimy ogólne liniowe związki statyczne i geometryczne dla elementu prętowego ramy przestrzennej przy założeniu hipotezy płaskich przekrojów. Następnie, pomijając wpływ sił tnących na uplastycznienie przekroju oraz sprowadzając obciążenie zewnętrzne do węzłów, otrzymamy praktycznie stosowany model statyczny pręta, którego stan opisany będzie przez sześć uogólnionych naprężeń oraz dwanaście uogólnionych przemieszczeń. Podamy również pewne przypadki szczególne związków statycznych dla pręta rusztu i tarczy prętowej. Na końcu dokonamy transformacji otrzymanych równań do globalnego układu współrzędnych.

2.1.1. - w układzie lokalnym

W ogólnym modelu pręta ramy przestrzennej wektor uogólnionych naprężeń s^e ma 12 składowych

$$s^e = \begin{bmatrix} m_x^l & m_y^l & m_z^l & n^l & t_y^l & t_z^l & m_x^p & m_y^p & m_z^p & n^p & t_y^p & t_z^p \end{bmatrix}^T \quad /2.1/$$

gdzie

m_x^l, m_x^p - momenty skręcające na lewym i prawym końcu,

m_y^l, m_y^p - momenty zginające w płaszczyźnie Oxz na lewym i prawym końcu,

m_z^l, m_z^p - momenty zginające w płaszczyźnie Oxy na lewym i prawym końcu,

n^l, n^p - siły osiowe na lewym i prawym końcu,

t_y^l, t_y^p - siły poprzeczne w płaszczyźnie Oxy na lewym i prawym końcu,

t_z^1, t_z^p - siły poprzeczne w płaszczyźnie Oxz na lewym i prawym końcu.

Wektor obciążeń zewnętrznych p^e składa się z obciążeń działających w lewym i prawym węźle oraz z obciążeń na pręcie i ma w sumie 18 składowych

$$p^e = \begin{bmatrix} M_x^1 & M_y^1 & M_z^1 & N^1 & T_y^1 & T_z^1 & M_x^p & M_y^p & M_z^p \\ N^p & T_y^p & T_z^p & M_x & M_y & M_z & N & T_y & T_z \end{bmatrix}^T \quad /2.2/$$

gdzie poszczególne składowe oznaczają

- M_x - moment skręcający,
- M_y - moment zginający w płaszczyźnie Oxz ,
- M_z - moment zginający w płaszczyźnie Oxy ,
- N - siła osiowa,
- T_y - siła poprzeczna w płaszczyźnie Oxy ,
- T_z - siła poprzeczna w płaszczyźnie Oxz ;

indeks "1" u góry odnosi się do obciążeń w lewym węźle, indeks "p" u góry - do obciążeń w prawym węźle, a składowe bez indeksu oznaczają obciążenie na pręcie.

Wektor uogólnionych naprężeń s^e musi pozostawać w równowadze z wektorem obciążeń zewnętrznych p^e . Warunek ten sprowadza się do osiemnastu równań równowagi dla poszczególnych składowych:
/rys.2.1/ :

$$\begin{aligned} M_x^1 &= -m_x^1, & M_y^1 &= m_y^1, \\ M_z^1 &= m_z^1, & N^1 &= -n^1, \\ T_y^1 &= -t_y^1, & T_z^1 &= t_z^1, \\ M_x^p &= m_x^p, & M_y^p &= m_y^p, \\ M_z^p &= m_z^p, & N^p &= n^p, \\ T_y^p &= t_y^p, & T_z^p &= -t_z^p, \end{aligned}$$

/2:3/

$$M_x = m_x^l - m_x^p,$$

$$M_y = -m_y^l + \frac{L}{2} t_z^l - m_y^p + \frac{L}{2} t_z^p,$$

$$M_z = -m_z^l + \frac{L}{2} t_y^l - m_z^p + \frac{L}{2} t_y^p,$$

$$N = n^l - n^p,$$

$$T_y = -t_y^l + t_y^p,$$

$$T_z = -t_z^l + t_z^p.$$

c.d./2.3/

Układ 18-tu równań równowagi /2.3/ możemy zapisać macierzowo w postaci

$$C^{eT} s^e = p^e \quad /2.4/$$

gdzie $s^e \in R^{12}$, $p^e \in R^{18}$, a C^{eT} jest macierzą 18 x 12, przedstawioną na Rys.2.2 /puste miejsca oznaczają zera/.

Wprowadzając zmienne dualne: wektor uogólnionych odkształceń

$$q^e = \left[\varphi_x^l \quad \varphi_y^l \quad \varphi_z^l \quad e_x^l \quad e_y^l \quad e_z^l \quad \varphi_x^p \quad \varphi_y^p \quad \varphi_z^p \right. \\ \left. e_x^p \quad e_y^p \quad e_z^p \right]^T \quad /2.5/$$

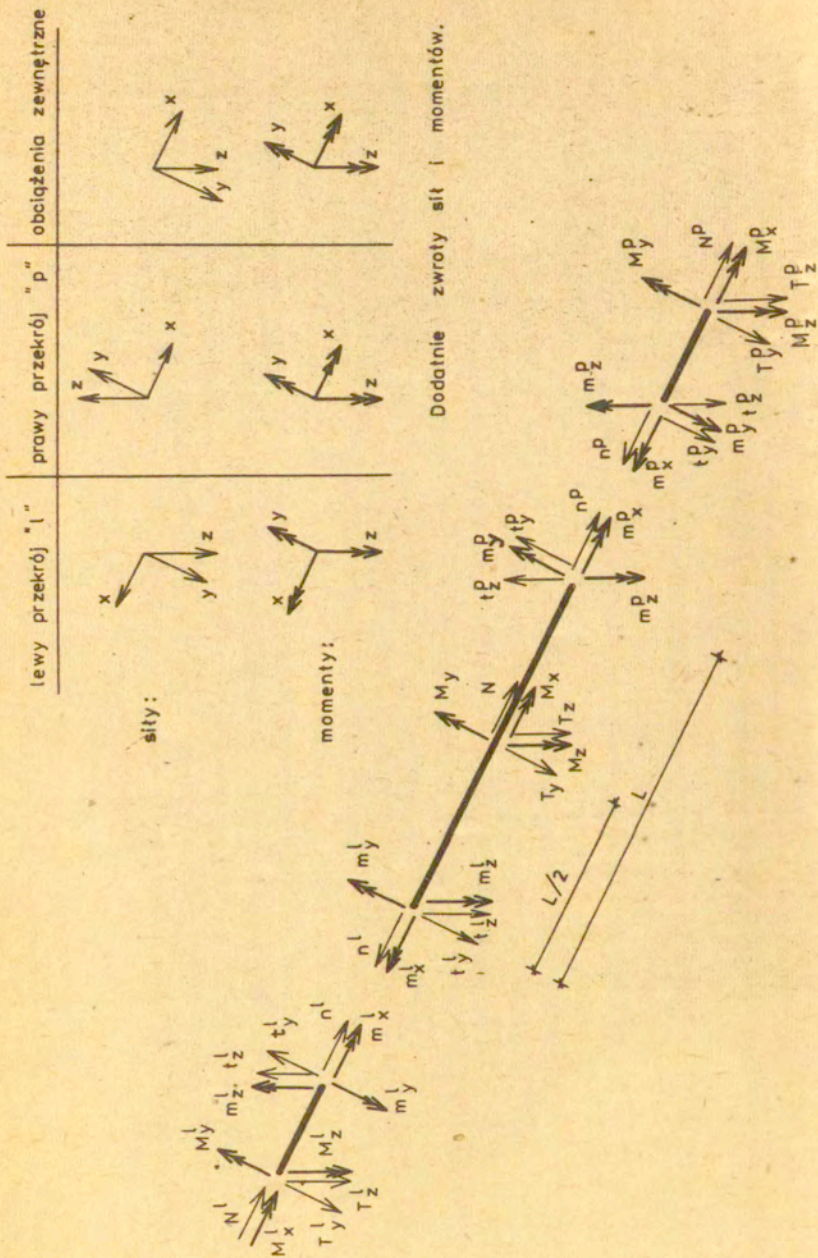
oraz wektor uogólnionych przemieszczeń

$$u^e = \left[\phi_x^l \quad \phi_y^l \quad \phi_z^l \quad E_x^l \quad E_y^l \quad E_z^l \quad \phi_x^p \quad \phi_y^p \quad \phi_z^p \right. \\ \left. E_x^p \quad E_y^p \quad E_z^p \quad \phi_x \quad \phi_y \quad \phi_z \quad E_x \quad E_y \quad E_z \right]^T \quad /2.6/$$

możemy zapisać równania geometryczne

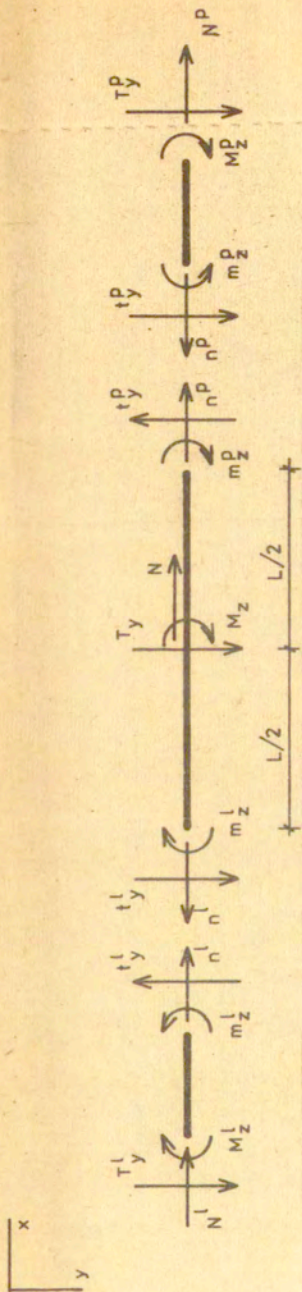
$$C^e u^e = q^e \quad /2.7/$$

W ten sposób otrzymaliśmy najbardziej ogólne związki statyczne i geometryczne dla pręta ramy przestrzennej /rys.2.2/. Jednakże przy pewnych dodatkowych założeniach możliwe jest zmniejszenie liczby parametrów występujących w powyższych związkach. Rozpatrzmy następujące przypadki:

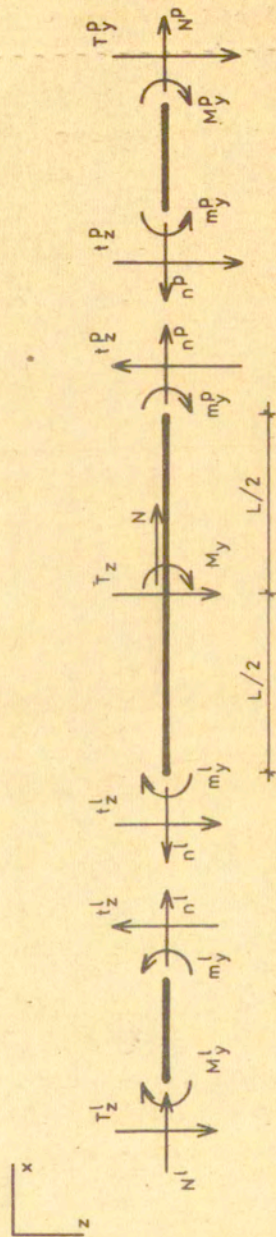


Dodatnie zwroty sił i momentów.

Rys.2.1a. Równowaga elementu prętowego ramy przestrzennej



Rys. 2.1b. Zginanie w płaszczyźnie Oxy.



Rys. 2.1c. Zginanie w płaszczyźnie Oxz.

m_x^l	m_y^l	m_z^l	n^l	t_y^l	t_z^l	m_x^p	m_y^p	m_z^p	n^p	t_y^p	t_z^p
---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------	---------	-------	---------	---------

ϕ_x^l	-1											M_x^l	
ϕ_y^l		1										M_y^l	
ϕ_z^l			1									M_z^l	
E_x^l				-1								N^l	
E_y^l					1							T_y^l	
E_z^l						1						T_z^l	
ϕ_x^p							1					M_x^p	
ϕ_y^p								1				M_y^p	
ϕ_z^p									1			M_z^p	
E_x^p										1		N^p	
E_y^p											-1	T_y^p	
E_z^p												-1	T_z^p
ϕ_x	1					-1						M_x^s	
ϕ_y		-1			$\frac{L}{2}$		-1				$\frac{L}{2}$	M_y^s	
ϕ_z			-1		$\frac{L}{2}$			-1		$\frac{L}{2}$		M_z^s	
E_x				1					-1			N	
E_y					-1					1		T_y^s	
E_z						-1					1	T_z^s	

||

ϕ_x^l	ϕ_y^l	ϕ_z^l	e_x^l	e_y^l	e_z^l	ϕ_x^p	ϕ_y^p	ϕ_z^p	e_x^p	e_y^p	e_z^p
------------	------------	------------	---------	---------	---------	------------	------------	------------	---------	---------	---------

Rys. 2.2. Równania równowagi $C^{eT} s^e = p^e$ i równania geometryczne $C^e u^e = q^e$.

1. pominięcie wpływu sił tnących i sprowadzenie obciążenia zewnętrznego do węzłów; wówczas $s^e, q^e \in R^6, p^e, u^e \in R^{12}, C^{eT}$ jest macierzą 12×6 ;
2. zał.1 oraz pominięcie wpływu siły osiowej; wówczas $s^e, q^e \in R^5, p^e, u^e \in R^{10}, C^{eT} : 10 \times 5$;
3. zał.1 oraz pominięcie wpływu momentu skręcającego; wówczas $s^e, q^e \in R^5, p^e, u^e \in R^{10}, C^{eT} : 10 \times 5$;
4. zał.1 oraz pominięcie wpływu siły osiowej i momentu skręcającego; wówczas $s^e, q^e \in R^4, p^e, u^e \in R^8, C^{eT} : 8 \times 4$;
5. zał.1 oraz pominięcie wpływu momentu zginającego m_z w płaszczyźnie Oxy, co prowadzi do modelu rusztu; wówczas $s^e, q^e \in R^4, p^e, u^e \in R^8, C^{eT} : 8 \times 4$;
6. zał.1 oraz pominięcie wpływu momentu zginającego m_y w płaszczyźnie Oxz, co daje model tarczy prętowej; wówczas $s^e, q^e \in R^4, p^e, u^e \in R^8, C^{eT} : 8 \times 4$.

ad 1. Zakładając brak odkształceń postaciowych, otrzymujemy z równań geometrycznych następujące związki

$$e_y^1 = 0 \Rightarrow -E_y + 0.5L\phi_z + E_y^1 = 0$$

$$e_z^1 = 0 \Rightarrow -E_z + 0.5L\phi_y + E_z^1 = 0$$

$$e_y^p = 0 \Rightarrow E_y + 0.5L\phi_z - E_y^p = 0$$

$$e_z^p = 0 \Rightarrow E_z + 0.5L\phi_y - E_z^p = 0$$

/2.8/

które pozwalają wyeliminować 4 stopnie swobody

$$\phi_z = (E_y^p - E_y^1) / L$$

$$\phi_y = (E_z^p - E_z^1) / L$$

/2.9/

$$E_z = 0.5(E_z^1 + E_z^p)$$

$$E_y = 0.5(E_y^1 + E_y^p)$$

Sprowadzenie obciążenia zewnętrznego tylko do węzłów prowadzi przy uwzględnieniu równań równowagi, do związków

$$M_x = 0 \Rightarrow m_x^1 = m_x^p$$

$$N = 0 \Rightarrow n^1 = n^p$$

$$T_y = 0 \Rightarrow t_y^1 = t_y^p$$

$$T_z = 0 \Rightarrow t_z^1 = t_z^p \quad /2.10/$$

$$M_y = 0 \Rightarrow t_z^p = (m_y^1 + m_y^p) / L$$

$$M_z = 0 \Rightarrow t_y^p = (m_z^1 + m_z^p) / L$$

Zatem, oznaczając $m_x = m_x^p / m_x^1$ oraz $n = n^p / n^1$, mamy w wektorze s^e 6 składowych; grupujemy je następująco

$$s^e = \begin{bmatrix} m_y^1 & m_z^1 & m_y^p & m_z^p & m_x & n \end{bmatrix}^T \quad /2.11/$$

Analogicznie grupujemy zmienne dualne q^e

$$q^e = \begin{bmatrix} \varphi_y^1 & \varphi_z^1 & \varphi_y^p & \varphi_z^p & \varphi_x & e_x \end{bmatrix}^T \quad /2.12/$$

Na skutek zredukowania dwóch zmiennych statycznych m_x^1 i m_x^p do jednej m_x musieliśmy wprowadzić również jedną zmienną dualną φ_x

$$\varphi_x = \varphi_x^1 + \varphi_x^p, \quad /2.13/$$

gdź wkład momentów skręcających do energii wyraża się wzorem

$$D_{m_x} = m_x^1 \varphi_x^1 + m_x^p \varphi_x^p = m_x (\varphi_x^1 + \varphi_x^p). \quad /2.14/$$

Z podobnych względów definiujemy zmienną dualną e_x

$$e_x = e_x^1 + e_x^p \quad /2.15/$$

Na skutek pominięcia wpływu sił tnących zredukowaliśmy o cztery liczbę stopni swobody $/\bar{\Phi}_z, \bar{\Phi}_y, E_z, E_y/$. Dodatkowo z zało-

żenia $M_x = 0$ i $N = 0$ eliminujemy dwa dalsze stopnie swobody ϕ_x , E_x . Zatem wektory uogólnionych przemieszczeń i obciążeń zewnętrznych mają po 12 składowych

$$u^e = \left[\phi_x^l \quad \phi_y^l \quad \phi_z^l \quad E_x^l \quad E_y^l \quad E_z^l \quad \phi_x^p \quad \phi_y^p \quad \phi_z^p \quad E_x^p \quad E_y^p \quad E_z^p \right]^T$$

$$p^e = \left[M_x^l \quad M_y^l \quad M_z^l \quad N^l \quad T_y^l \quad T_z^l \quad M_x^p \quad M_y^p \quad M_z^p \quad N^p \quad T_y^p \quad T_z^p \right]^T \quad /2.16/$$

Ostatecznie, równania równowagi $C^{eT} s^e = p^e$ i związki geometryczne $C^e u^e = q^e$ dla tego przypadku wyglądają następująco

		m_y^l	m_z^l	m_y^p	m_z^p	m_x	n			
ϕ_x^l							-1		M_x^l	
ϕ_y^l		1							M_y^l	
ϕ_z^l			1						M_z^l	
E_x^l							-1		N^l	
E_y^l			$\frac{1}{L}$		$\frac{1}{L}$				T_y^l	
E_z^l		$\frac{1}{L}$		$\frac{1}{L}$					T_z^l	
ϕ_x^p						1			M_x^p	
ϕ_y^p				1					M_y^p	
ϕ_z^p					1				M_z^p	
E_x^p							1		N^p	
E_y^p			$-\frac{1}{L}$		$-\frac{1}{L}$				T_y^p	
E_z^p		$-\frac{1}{L}$		$-\frac{1}{L}$					T_z^p	
=										
/2.17/										
II										
ψ_y		ψ_z		ψ_y^p		ψ_z^p		ψ_x		ψ_x

Równania równowagi i równania geometryczne dla praktycznie stosowanego modelu pręta ramy przestrzennej w układzie lokalnym.

ad 2. Utrzymując założenie z 1., postulujemy dodatkowo pominięcie wpływu siły osiowej /tzn.brak odkształceń osiowych, $e_x = 0/$. Powoduje to eliminację dwóch dalszych stopni

swobody E_x^1, E_x^p z poprzedniego modelu. Otrzymujemy wówczas

$$s^e = \begin{bmatrix} m_y^l & m_z^l & m_y^p & m_z^p & m_x \end{bmatrix}^T \in R^5$$

$$q^e = \begin{bmatrix} \psi_y^l & \psi_z^l & \psi_y^p & \psi_z^p & \psi_x \end{bmatrix}^T \in R^5$$

$$p^e = \begin{bmatrix} M_x^l & M_y^l & M_z^l & T_y^l & T_z^l & M_x^p & M_y^p & M_z^p & T_y^p & T_z^p \end{bmatrix}^T \in R^{10} \quad /2.18/$$

$$u^e = \begin{bmatrix} \phi_x^l & \phi_y^l & \phi_z^l & E_y^l & E_z^l & \phi_x^p & \phi_y^p & \phi_z^p & E_y^p & E_z^p \end{bmatrix}^T \in R^{10}$$

oraz związki statyczne w postaci:

m_y^l	m_z^l	m_y^p	m_z^p	m_x
---------	---------	---------	---------	-------

ϕ_x^l					-1	M_x^l
ϕ_y^l	1					M_y^l
ϕ_z^l		1				M_z^l
E_y^l		$\frac{1}{L}$		$\frac{1}{L}$		T_y^l
E_z^l	$\frac{1}{L}$		$\frac{1}{L}$			T_z^l
ϕ_x^p					1	M_x^p
ϕ_y^p			1			M_y^p
ϕ_z^p				1		M_z^p
E_y^p		$-\frac{1}{L}$		$-\frac{1}{L}$		T_y^p
E_z^p	$-\frac{1}{L}$		$-\frac{1}{L}$			T_z^p

/2.19/

ψ_y	ψ_z	ψ_y	ψ_z	ψ_x
----------	----------	----------	----------	----------

Uwaga: Na podstawie tej macierzy C^{eT} dla pręta nie można generować macierzy globalnej dla całej konstrukcji. Należy uwzględnić, że nieodkształcalność prętów w kierunku osiowym wymusza

jednakowe przemieszczenia kilku węzłów. W macierzy globalnej zbudowanej /oczywiście po transformacji obciążeń do układu globalnego/ na bazie tego typu macierzy dla pręta będą występowały liniowo zależne równania /odpowiednio, kolumny w macierzy geometrycznej C/, co powoduje sztuczne zawiżenie niezależnych stopni swobody. Uwaga powyższa odnosi się do wszystkich dalszych modeli.

ad 3. Utrzymując założenie 1., pomijamy dodatkowo wpływ momentu skręcającego /brak odkształceń skrętnych, $\psi_x = 0$ /. Daje to redukcję dwóch stopni swobody ϕ_x^1 i ϕ_x^p . Mamy wówczas

$$s^e = \begin{bmatrix} m_y^1 & m_z^1 & m_y^p & m_z^p & n \end{bmatrix}^T \in R^5$$

$$q^e = \begin{bmatrix} \varphi_y^1 & \varphi_z^1 & \varphi_y^p & \varphi_z^p & e_x \end{bmatrix}^T \in R^5 \quad /2.20/$$

$$p^e = \begin{bmatrix} M_y^1 & M_z^1 & N^1 & T_y^1 & T_z^1 & M_y^p & M_z^p & N^p & T_y^p & T_z^p \end{bmatrix}^T \in R^{10}$$

$$u^e = \begin{bmatrix} \phi_y^1 & \phi_z^1 & E_x^1 & E_y^1 & E_z^1 & \phi_y^p & \phi_z^p & E_x^p & E_y^p & E_z^p \end{bmatrix}^T \in R^{10}$$

oraz związki statyczne w postaci:

m_y^l	m_z^l	m_y^p	m_z^p	n
---------	---------	---------	---------	-----

ϕ_y^l	1					M_y^l
ϕ_z^l		1				M_z^l
ϵ_x^l					-1	N^l
ϵ_y^l		$\frac{1}{L}$		$\frac{1}{L}$		T_y^l
ϵ_z^l	$\frac{1}{L}$		$\frac{1}{L}$			T_z^l
ϕ_y^p			1			M_y^p
ϕ_z^p				1		M_z^p
ϵ_x^p					1	N^p
ϵ_y^p		$-\frac{1}{L}$		$-\frac{1}{L}$		T_y^p
ϵ_z^p	$-\frac{1}{L}$		$-\frac{1}{L}$			T_z^p

/2.21/

||

ψ_y	ψ_z	φ_y^p	φ_z^p	e^x
----------	----------	---------------	---------------	-------

ad 4. Przypadek ten jest połączeniem trzech poprzednich.
 Uwzględniamy jedynie odkształcenia od zginania.
 Otrzymujemy wówczas

$$s^e = \begin{bmatrix} m_y^l & m_z^l & m_y^p & m_z^p \end{bmatrix}^T \in R^4$$

$$q^e = \begin{bmatrix} \psi_y & \psi_z & \varphi_y^p & \varphi_z^p \end{bmatrix}^T \in R^4 \quad /2.22/$$

$$p^e = \begin{bmatrix} M_y^l & M_z^l & T_y^l & T_z^l & M_y^p & M_z^p & T_y^p & T_z^p \end{bmatrix}^T \in R^8$$

$$u^e = \begin{bmatrix} \phi_y^l & \phi_z^l & \epsilon_y^l & \epsilon_z^l & \phi_y^p & \phi_z^p & \epsilon_y^p & \epsilon_z^p \end{bmatrix}^T \in R^8$$

m_y^l	m_z^l	m_y^p	m_z^p
---------	---------	---------	---------

$\begin{matrix} \phi_y^l \\ \phi_z^l \\ E_y^l \\ E_z^l \\ \phi_y^p \\ \phi_z^p \\ E_y^p \\ E_z^p \end{matrix}$	=	$\begin{matrix} M_y^l \\ M_z^l \\ T_y^l \\ T_z^l \\ M_y^p \\ M_z^p \\ T_y^p \\ T_z^p \end{matrix}$	/2.23/
$\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{1}{L} & & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & & \frac{1}{L} & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & -\frac{1}{L} & & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & & -\frac{1}{L} & \end{matrix}$			
$\begin{matrix} \psi_y \\ \psi_z \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{matrix}$			

ad 5. Pominięcie momentu m_z zginającego w płaszczyźnie Oxy
 / $\psi_z^l = 0$ i $\psi_z^p = 0$ / prowadzi do modelu pręta rusztu.
 Mamy wówczas

$$s^e = \begin{bmatrix} m_y^l & m_y^p & m_x & n \end{bmatrix}^T \in R^4$$

$$q^e = \begin{bmatrix} \psi_y^l & \psi_y^p & \psi_x & e_x \end{bmatrix}^T \in R^4$$

/2.24/

$$p^e = \begin{bmatrix} M_x^l & M_y^l & N^l & T_z^l & M_x^p & M_y^p & N^p & T_z^p \end{bmatrix}^T \in R^8$$

$$u^e = \begin{bmatrix} \phi_x^l & \phi_y^l & E_x^l & E_z^l & \phi_x^p & \phi_y^p & E_x^p & E_z^p \end{bmatrix}^T \in R^8$$

m_y^l	m_{Ry}	m_x	n
---------	----------	-------	-----

ϕ_x^l
ϕ_y^l
E_x^l
E_z^l
ϕ_x^p
ϕ_y^p
E_x^p
E_z^p

		-1	
1			
			-1
$\frac{1}{L}$	$\frac{1}{L}$		
		1	
	1		
			1
$-\frac{1}{L}$	$-\frac{1}{L}$		

 $=$

M_x^l
M_y^l
N^l
T_z^l
M_x^p
M_y^p
N^p
T_z^p

/2.25//

ψ_y^l	ψ_y^p	ψ_x	e_x
------------	------------	----------	-------

ad 6. Pominięcie momentu m_y zginającego w płaszczyźnie Oxz
 / $\psi_y^l = 0$ i $\psi_y^p = 0$ / prowadzi do modelu tarczy prętowej,
 dla której związki statyczne mają postać następującą

$$s^e = \begin{bmatrix} m_z^l & n_z^p & m_x & n \end{bmatrix}^T \in R^4$$

$$q^e = \begin{bmatrix} \psi_z^l & \psi_z^p & \psi_x & e_x \end{bmatrix}^T \in R^4$$

/2.26//

$$p^e = \begin{bmatrix} M_x^l & M_z^l & N^l & T_y^l & M_x^p & M_z^p & N^p & T_y^p \end{bmatrix}^T \in R^8$$

$$u^e = \begin{bmatrix} \phi_x^l & \phi_z^l & E_x^l & E_y^l & \phi_x^p & \phi_z^p & E_x^p & E_y^p \end{bmatrix}^T \in R^8$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline \phi^l_x \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline \phi^l_z \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline e^l_x \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline e^l_y \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline \phi^p_x \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline \phi^p_z \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline e^p_x \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline e^p_y \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & -1 & \\ \hline 1 & & & \\ \hline & & & -1 \\ \hline \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & & 1 \\ \hline -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & & \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline M^l_x \\ \hline M^l_z \\ \hline N^l \\ \hline T^l_y \\ \hline M^p_x \\ \hline M^p_z \\ \hline N^p \\ \hline T^p_y \\ \hline \end{array}
 \quad /2.27/$$

$$=
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \psi^z \\ \hline \psi^x \\ \hline \psi^y \\ \hline e_x \\ \hline \end{array}$$

Uwaga: Dwa ostatnie modele mają takie same macierze C^{eT} w lokalnym układzie współrzędnych. Nie oznacza to wcale, że będą one identyczne w globalnym układzie współrzędnych, gdyż macierze transformacji dla obydwu modeli będą różne.

2.1.2. - w układzie globalnym

Przed przystąpieniem do scalania konstrukcji, tzn. ułożenia globalnych równań dla całej ramy na podstawie równań dla pręta, musimy ustalić globalny układ współrzędnych $Ox'y'z'$ i dokonać transformacji poprzednie ustalonych związków /2.17/ w lokalnym układzie $Oxyz$ dla pręta do układu globalnego $Ox'y'z'$

W ogólnym przypadku spośród czterech wektorów s^e , q^e , p^e , u^e , opisujących stan konstrukcji, jedynie wektor obciążeń zewnętrznych p^e oraz wektor uogólnionych przemieszczeń u^e mogą być transformowane.

Wektor obciążeń zewnętrznych p^e ustalony w lokalnym układzie współrzędnych $Oxyz$ dla danego pręta składa się z dwóch podwektorów: $p^e(1)$ - obciążeń działających w lewym węźle oraz $p^e(p)$ - obciążeń działających w prawym węźle rozważanego pręta

$$p^e = \begin{bmatrix} p^e(1) \\ p^e(p) \end{bmatrix} \quad /2.28/$$

Zajmiemy się dalej jednym węzłem, np. lewym, gdyż obciążenia w węźle prawym transformują się identycznie, jak w węźle lewym. W ogólnym przypadku ramy przestrzennej obciążenie węzłowe składa się z trzech momentów i trzech sił. W przestrzeni trójwymiarowej momenty /obroty małe / transformują się tak samo, jak siły /translacje/. Zatem wzory transformacyjne dla obciążeń zewnętrznych $p^e(1)$ z układu lokalnego $Oxyz$ do układu globalnego $Ox'y'z'$ mają postać

$$\begin{bmatrix} M_x^{1'} \\ M_y^{1'} \\ M_z^{1'} \\ N^{1'} \\ T_y^{1'} \\ T_z^{1'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{x'x} & \overline{x'y} & \overline{x'z} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{y'x} & \overline{y'y} & \overline{y'z} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{z'x} & \overline{z'y} & \overline{z'z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{x'x} & \overline{x'y} & \overline{x'z} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{y'x} & \overline{y'y} & \overline{y'z} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{z'x} & \overline{z'y} & \overline{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^1 \\ M_y^1 \\ M_z^1 \\ N^1 \\ T_y^1 \\ T_z^1 \end{bmatrix} \quad /2.29/$$

gdzie $\overline{x'x}$, $\overline{x'y}$, ... itd. oznaczają cosinusy kątów między odpowiednimi osiami współrzędnych dwóch układów. Oznaczając macierz cosinusów kierunkowych przez T, powyższy wzór możemy zapisać

$$p^{e(1)'} = T p^{e(1)} \quad /2.30/$$

Identycznie wygląda transformacja obciążeń w węźle prawym

$$p^{e(P)'} = T p^{e(P)} \quad /2.31/$$

Macierz przejścia T dla układów współrzędnych kartezjańskich jest ortogonalna /z wyjątkiem kratownic, dla których T nie jest macierzą kwadratową/, tzn.

$$T^{-1} = T^T \quad /2.32/$$

Możemy zatem wyrazić $p^{e(1)}$ /odp. $p^{e(P)}$ / za pomocą $p^{e(1)'}$, /odp. $p^{e(P)'}$ /,

$$p^{e(1)} = T^T p^{e(1)'}, \quad /odp. p^{e(P)} = T^T p^{e(P)'}/ \quad /2.33/$$

Używając tej samej macierzy T, możemy również transformować wektor uogólnionych przemieszczeń u^e /przy założeniu małości obrotów/. Wektor ten, podobnie jak p^e , dzielimy na dwa podwe-

który $u^{e(1)}$ i $u^{e(p)}$, z których każdy składa się z trzech obrotów i trzech translacji; i każdy transformuje się identycznie

$$u^{e(1)} = T^T u^{e(1)'}$$

$$u^{e(p)} = T^T u^{e(p)'}$$

/2.34/

Znając sposób transformacji obciążeń i przemieszczeń, możemy zapisać równania równowagi i dualne równania geometryczne /2.17/ dla rozważanego pręta w układzie globalnym $Ox'y'z'$. Podstawiając do związku /2.30/ $p^{e(1)}$ z równań równowagi, otrzymamy

$$p^{e(1)'} = T C^{e(1)T} s^e, \quad /2.35/$$

gdzie $C^{e(1)T}$ jest górną 6×6 podmacierzą macierzy C^{eT} /ze związków /2.17/ /.

Oznaczając

$$C^{e(1)T'} = T C^{e(1)T}, \quad /2.36/$$

możemy /2.35/ zapisać w formie

$$p^{e(1)'} = C^{e(1)T'} s^e. \quad /2.37/$$

Identyczne zależności mamy dla węzła prawego

$$p^{e(p)'} = C^{e(p)T'} s^e, \quad /2.38/$$

gdzie

$$C^{e(p)T'} = T C^{e(p)T}. \quad /2.39/$$

Łącząc z powrotem podmacierze $C^{e(1)T'}$ i $C^{e(p)T'}$ w macierz $C^{eT'}$, oraz podwektory $p^{e(1)'}$ i $p^{e(p)'}$ w wektor $p^{e'}$, otrzymamy równania równowagi pręta w układzie globalnym $Ox'y'z'$:

$$C^{eT'} s^e = p^{e'}, \quad /2.40/$$

Należy podkreślić, że wektor uogólnionych naprężeń s^e jest w dalszym ciągu odniesiony do lokalnego układu związanego z prętem.

Chcąc otrzymać równania geometryczne w układzie globalnym, rozbijamy najpierw u^e na podwektory $u^{e(1)}$ i $u^{e(p)}$

$$C^{e(1)} u^{e(1)} + C^{e(p)} u^{e(p)} = q^e, \quad / 2.41/$$

a następnie wykorzystujemy związki /2.34/, otrzymując w końcu

$$C^{e(1)'} u^{e(1)'} + C^{e(p)'} u^{e(p)'} = q^e, \quad / 2.42/$$

gdzie

$$C^{e(1)'} = C^{e(1)} \cdot T^T \quad / 2.43/$$

$$C^{e(p)'} = C^{e(p)} T^T .$$

Łącząc z powrotem $u^{e(1)}$, i $u^{e(p)}$, w u^e , oraz $C^{e(1)}$, i $C^{e(p)}$, w C^e , zapiszemy /2.42/ w postaci

$$C^{e'} u^{e'} = q^e \quad / 2.44/$$

Porównując /2.36/ i /2.39/ z /2.43/, widzimy, że i w układzie globalnym związki geometryczne są dualne w stosunku do równań równowagi /macierz związków geometrycznych /2.44/ jest rzeczywiście transpozycją macierzy równań równowagi /2.40/ /. Należy pamiętać, że w równaniach geometrycznych /2.44/ wektor uogólnionych odkształceń q^e pozostaje odniesiony do lokalnego układu współrzędnych dla pręta.

Wykonując mnożenia /2.36/ i /2.39/, znajdujemy ostatecznie postać macierzy C^{eT} , w układzie globalnym $Ox^i y^j z^k$:

m_y	m_z	m_{p_y}	m_{p_z}	m_x	n
-------	-------	-----------	-----------	-------	-----

$\phi_x^{l'}$	$x^l y$	$x^l z$		$-x^l x$		$M_x^{l'}$
$\phi_y^{l'}$	$y^l y$	$y^l z$		$-y^l x$		$M_y^{l'}$
$\phi_z^{l'}$	$z^l y$	$z^l z$		$-z^l x$		$M_z^{l'}$
$E_x^{l'}$	$\frac{x^l z}{L}$	$\frac{x^l y}{L}$	$\frac{x^l z}{L}$	$\frac{x^l y}{L}$	$-x^l x$	$N^{l'}$
$E_y^{l'}$	$\frac{y^l z}{L}$	$\frac{y^l y}{L}$	$\frac{y^l z}{L}$	$\frac{y^l y}{L}$	$-y^l x$	$T_y^{l'}$
$E_z^{l'}$	$\frac{z^l z}{L}$	$\frac{z^l y}{L}$	$\frac{z^l z}{L}$	$\frac{z^l y}{L}$	$-z^l x$	$T_z^{l'}$
$\phi_x^{p'}$		$x^p y$	$x^p z$	$x^p x$		$M_x^{p'}$
$\phi_y^{p'}$		$y^p y$	$y^p z$	$y^p x$		$M_y^{p'}$
$\phi_z^{p'}$		$z^p y$	$z^p z$	$z^p x$		$M_z^{p'}$
$E_x^{p'}$	$\frac{x^p z}{L}$	$\frac{x^p y}{L}$	$\frac{x^p z}{L}$	$\frac{x^p y}{L}$	$x^p x$	$N^{p'}$
$E_y^{p'}$	$\frac{y^p z}{L}$	$\frac{y^p y}{L}$	$\frac{y^p z}{L}$	$\frac{y^p y}{L}$	$y^p x$	$T_y^{p'}$
$E_z^{p'}$	$\frac{z^p z}{L}$	$\frac{z^p y}{L}$	$\frac{z^p z}{L}$	$\frac{z^p y}{L}$	$z^p x$	$T_z^{p'}$

=

$M_x^{p'}$
$M_y^{p'}$
$M_z^{p'}$
$N^{p'}$
$T_y^{p'}$
$T_z^{p'}$

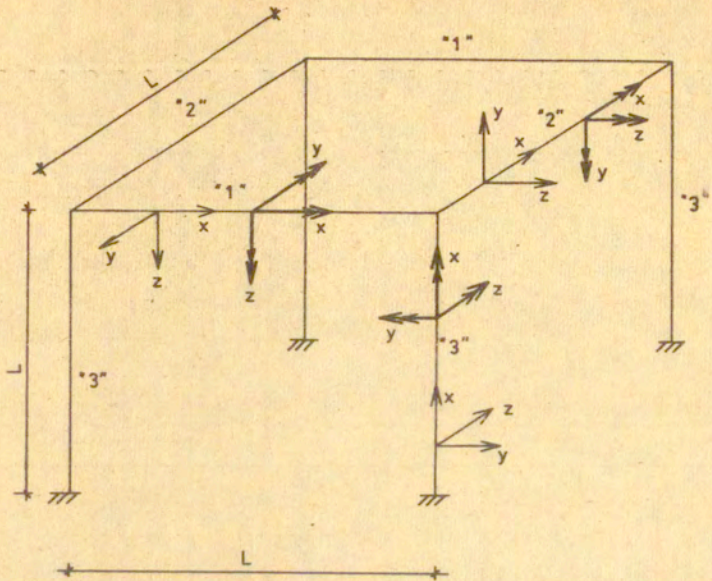
=

ϕ_x^x	$-y$	$-z$	p_y	p_z	q^x	q^x
------------	------	------	-------	-------	-------	-------

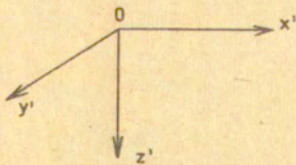
/2.45/

Równania równowagi i równania geometryczne dla praktycznie stosowanego modelu pręta ramy przestrzennej /związki /2.17// w układzie globalnym.

Podamy teraz globalne równania statyczne dla trzech typów prętów ortogonalnej ramy przestrzennej /rys.2.3a/.

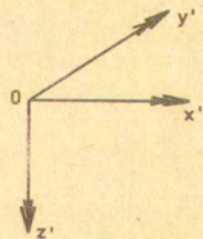


Rys.2.3a. Lokalne układy współrzędnych



Rys.2.3b.

Globalny układ współrzędnych dla sił



Rys.2.3c.

Globalny układ współrzędnych dla momentów

Przyjmując globalny układ współrzędnych $Ox'y'z'$ dla obciążeń zewnętrznych /rys.2.3b - dla sił, rys.2.3c - dla momentów/, wyróżniamy trzy rodzaje prętów ze względu na ich położenie w tym układzie

- pręty typu "1" - równoległe do osi Ox'
- pręty typu "2" - równoległe do osi Oy'
- pręty typu "3" /słupy/ - równoległe do osi Oz' .

Lokalne układy współrzędnych $Oxyz$ przyjmujemy tak, jak to pokazano na rys.2.3a.

Wypiszemy teraz wartości kątów, jakie tworzą osie globalnego układu z osiami układów lokalnych dla trzech rodzajów prętów:

Pręty typu "1":

dla momentów:

$$\begin{array}{lll} \angle x'x = 0^\circ & \angle x'y = -90^\circ & \angle x'z = 90^\circ \\ \angle y'x = 90^\circ & \angle y'y = 0^\circ & \angle y'z = 90^\circ \\ \angle z'x = -90^\circ & \angle z'y = -90^\circ & \angle z'z = 0^\circ \end{array}$$

dla sił:

$$\begin{array}{lll} \angle x'x = 0^\circ & \angle x'y = 90^\circ & \angle x'z = 90^\circ \\ \angle y'x = -90^\circ & \angle y'y = 0^\circ & \angle y'z = -90^\circ \\ \angle z'x = -90^\circ & \angle z'y = 90^\circ & \angle z'z = 0^\circ \end{array}$$

Pręty typu "2"

dla momentów:

$$\begin{array}{lll} \angle x'x = -90^\circ & \angle x'y = 90^\circ & \angle x'z = 0^\circ \\ \angle y'x = 0^\circ & \angle y'y = 90^\circ & \angle y'z = 90^\circ \\ \angle z'x = -90^\circ & \angle z'y = 0^\circ & \angle z'z = -90^\circ \end{array}$$

dla sił:

$$\alpha_{x'x} = -90^\circ \quad \alpha_{x'y} = -90^\circ \quad \alpha_{x'z} = 0^\circ$$

$$\alpha_{y'x} = 180^\circ \quad \alpha_{y'y} = 90^\circ \quad \alpha_{y'z} = -90^\circ$$

$$\alpha_{z'x} = -90^\circ \quad \alpha_{z'y} = 180^\circ \quad \alpha_{z'z} = -90^\circ$$

Pręty typu "3"

dla momentów:

$$\alpha_{x'x} = -90^\circ \quad \alpha_{x'y} = 180^\circ \quad \alpha_{x'z} = -90^\circ$$

$$\alpha_{y'x} = -90^\circ \quad \alpha_{y'y} = -90^\circ \quad \alpha_{y'z} = 0^\circ$$

$$\alpha_{z'x} = 180^\circ \quad \alpha_{z'y} = 90^\circ \quad \alpha_{z'z} = -90^\circ$$

dla sił:

$$\alpha_{x'x} = -90^\circ \quad \alpha_{x'y} = 0^\circ \quad \alpha_{x'z} = -90^\circ$$

$$\alpha_{y'x} = 90^\circ \quad \alpha_{y'y} = -90^\circ \quad \alpha_{y'z} = 180^\circ$$

$$\alpha_{z'x} = 180^\circ \quad \alpha_{z'y} = -90^\circ \quad \alpha_{z'z} = -90^\circ$$

Obliczając cosinusy tych kątów i wstawiając do /2.45/, otrzymujemy macierze C^{eT} , równań równowagi w układzie globalnym dla trzech rodzajów prętów:

m_y^l	m_z^l	m_y^p	m_z^p	m_x	n	
				-1		$M_x^{l'}$
1						$M_y^{l'}$
	1					$M_z^{l'}$
					1	$N^{l'}$
	$\frac{1}{L}$		$\frac{1}{L}$			$T_y^{l'}$
$\frac{1}{L}$		$\frac{1}{L}$				$T_z^{l'}$
				1		$M_x^{p'}$
		1				$M_y^{p'}$
			1			$M_z^{p'}$
					1	$N^{p'}$
	$-\frac{1}{L}$		$-\frac{1}{L}$			$T_y^{p'}$
$-\frac{1}{L}$		$-\frac{1}{L}$				$T_z^{p'}$

/2.46/

Pręty typu "1"

m_y^l	m_z^l	m_y^p	m_z^p	m_x	n	
	1					$M_x^{l'}$
				-1		$M_y^{l'}$
1						$M_z^{l'}$
$\frac{1}{L}$		$\frac{1}{L}$				$N^{l'}$
					1	$T_y^{l'}$
	$-\frac{1}{L}$		$-\frac{1}{L}$			$T_z^{l'}$
			1			$M_x^{p'}$
				1		$M_y^{p'}$
		1				$M_z^{p'}$
$-\frac{1}{L}$		$-\frac{1}{L}$				$N^{p'}$
					-1	$T_y^{p'}$
	$\frac{1}{L}$		$\frac{1}{L}$			$T_z^{p'}$

/2.47/

Pręty typu "2"

m_y^l	m_z^l	m_y^p	m_z^p	m_x	n
---------	---------	---------	---------	-------	-----

-1						$M_x^{l'}$
	1					$M_y^{l'}$
				1		$M_z^{l'}$
	$\frac{1}{L}$		$\frac{1}{L}$			$N_l^{l'}$
$-\frac{1}{L}$		$-\frac{1}{L}$				$T_y^{l'}$
					1	$T_z^{l'}$
		-1				$M_x^{p'}$
			1			$M_y^{p'}$
				-1		$M_z^{p'}$
	$-\frac{1}{L}$		$-\frac{1}{L}$			$N^{p'}$
$\frac{1}{L}$		$\frac{1}{L}$				$T_y^{p'}$
					-1	$T_z^{p'}$

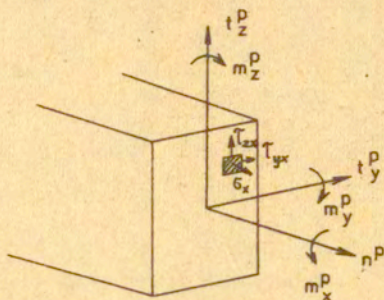
/2.48/

Pręty typu "3"

2.2. Warunek plastyczności dla pręta przy uwzględnieniu interakcji momentów zginających, momentu skręcającego i siły osiowej

Podstawowym problemem przy formułowaniu zagadnienia nośności granicznej ram przestrzennych jest wyznaczenie warunku plastyczności dla przekroju w złożonym stanie naprężenia. Otrzymanie analitycznych postaci powierzchni granicznej przy uwzględnieniu interakcji naprężeń stycznych i normalnych możliwe jest jedynie dla kilku szczególnych rodzajów przekrojów. W ogólnym przypadku należy dokonać numerycznego całkowania równania różniczkowego cząstkowego Handelman-Hilla [56,62], opartego na funkcji naprężeń, bądź równania przemieszczeniowego [104,99,130]. Prace dotyczące obydwu podejść w przypadku różnych przekrojów i przy uwzględnianiu interakcji różnych naprężeń zostały omówione w rozdziale 1.2.

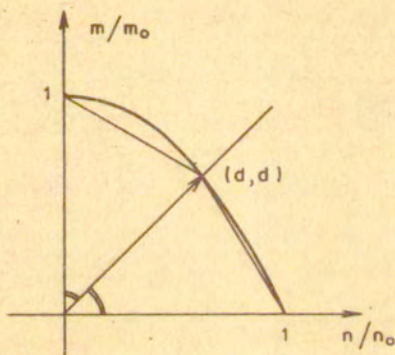
Mając na uwadze powszechny fakt stosowania odcinkowo-liniowych aproksymacji powierzchni granicznej, wykorzystamy w tym rozdziale alternatywne podejście wyznaczania nośności przekroju, oparte na metodzie programowania liniowego. W wyniku takiego podejścia otrzymuje się bezpośrednio wierzchołki obszaru granicznego. Sposób ten został zaproponowany przez D.E.Griersona i S.B. Abdel-Baseta [53] i jest analogiczny do metody obliczania nośności granicznej konstrukcji dyskretnej przy użyciu techniki programowania liniowego. Dokonuje się dyskretyzacji przekroju pręta, dzieląc go na elementy skończone /rys.2.4/. W każdym elemencie wektor naprężeń składa się z naprężeń normalnych oraz stycznych wywołanych złożonym obciążeniem przekroju w postaci czterech uogólnionych naprężeń: dwóch momentów zginających w płaszczyznach ortogonalnych, momentu skręcającego i siły osiowej. Dla każdego elementu stosowano sztywnoplastyczny model materiału ze zlinearyzowanym warunkiem plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego, przy czym pominięto wpływ naprężeń stycznych bezpośrednio od sił tnących na uplastycznienie elementu.



Rys.2.4

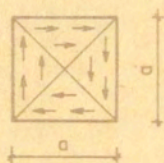
Zakłada się rozkład naprężeń stycznych od czystego skręcania zgodnie z analogią wzgórza piaskowego [101] /rys.2.6/. Można następnie, po scaleniu elementów, zapisać dla całego przekroju liniowe równania równowagi naprężeń z obciążeniem przekroju w postaci czterech uogólnionych naprężeń. W celu znalezienia wartości tych naprężeń, odpowiadających pełnemu uplastycznieniu przekroju, postępuje się następująco. Każdy wektor w przestrzeni uogólnionych naprężeń dla przekroju można przedstawić w postaci iloczynu pewnego skalarnego mnożnika przez wektor określający jego kierunek. Na rys.2.5 przedstawiono przypadek dwuwymiarowej przestrzeni uogólnionych naprężeń: moment zginający i siła osiowa; pokazano kierunek dwusiecznej dodatniej ówiartki, przecinający - w tym wypadku znaną - krzywą graniczną w postaci paraboli. Maksimum mnożnika /przy spełnieniu równań równowagi i warunku plastyczności w naprężeniach przekrojowych/ określa w przestrzeni uogólnionych naprężeń odległość - wzdłuż wybranego kierunku - od początku układu współrzędnych do punktu leżą-

cego na nieznannej powierzchni granicznej. Zatem, w celu znalezienia takiego punktu należy wyznaczyć maksimum mnożnika skalarnego przy spełnieniu warunków równowagi i warunku plastyczności dla naprężeń przekrojowych. Prowadzi to do zadania programowania liniowego - analogicznego, jak przy obliczaniu nośności granicznej konstrukcji dyskretnej w podejściu statycznym.

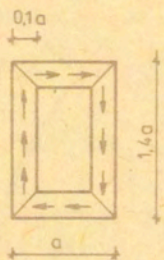


Rys.2.5

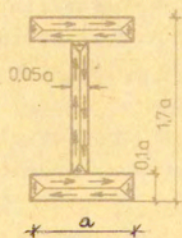
Od liczby wybranych kierunków w przestrzeni uogólnionych naprężeń na szczeblu przekroju zależy liczba otrzymanych punktów aproksymujących powierzchnię graniczną, a więc i dokładność aproksymacji. Najprostsza aproksymacja /dalej nazywana typem A/ polega na wybraniu jedynie kierunków pokrywających się z osiami układu współrzędnych w przestrzeni R^4 . W pracy [53] rozważano również bardziej dokładny sposób aproksymacji /nazywany dalej typem B/, polegający na wybraniu dodatkowych kierunków tworzących jednakowy kąt ze wszystkimi osiami. Otrzymano w ten sposób punkty na powierzchni granicznej, których wszystkie współrzędne są równe co do modułu. W pracy [53] rozpatrzono trzy rodzaje przekrojów: kwadratowy pełny, skrzynkowy i dwuteowy. Rozkład naprężeń stycznych wg analogii wzgórza piaskowego



$$d = 0,471$$



$$d = 0,461$$



$$d = 0,504$$

Rys. 2.6

oraz obliczoną bezwzględną wartość współrzędnych punktów powierzchni granicznej przedstawia rys.2.6.

Wyznaczone punkty, leżące na powierzchni granicznej, można traktować jako liniowo niezależne wierzchołki wielościanu wypukłego, będącego odcinkowo-liniową aproksymacją warunku plastyczności dla przekroju. Znajomość tych wierzchołków pozwala w bezpośredni sposób zapisać zlinearyzowaną postać warunku plastyczności bez potrzeby znajdowania równań hiperpłaszczyzn wielościanu. Metoda taka zostanie przedstawiona w punkcie 2.2.1. W punkcie tym wyprowadzimy również wierzchołkowy opis globalnego warunku plastyczności dla pręta. Pokażemy, że podejście takie - z numerycznego punktu widzenia - jest bardziej efektywne niż formułowanie dwóch niezależnych warunków dla przekroju lewego i prawego oddzielnie.

W punkcie 2.2.2. podamy tradycyjną postać zlinearyzowanego warunku plastyczności dla przekroju w formie nierówności. Na podstawie znajomości wierzchołków wielościanu wypukłego w R^4 wyprowadzimy równania jego hiperpłaszczyzn.

2.2.1. Opis za pomocą wierzchołków obszaru granicznego

Zazwyczaj zlinearyzowany warunek plastyczności dla elementu "e" zapisywany jest w postaci układu nierówności

$$N^e T s^e \leq k^e \quad /2.49/$$

gdzie

N^e - macierz gradientów powierzchni granicznej,

s^e - wektor uogólnionych naprężeń /w przypadku ram przestrzennych $s^e \in R^6$ /,

k^e - wektor modułów plastycznych / $k^e \in R^h$ /.

Poszczególne h^e nierówności /2.49/ przedstawiają w przestrzeni R^6 wypukły wielościan

$$B^e = \{s^e \in R^6 \mid N^e T s^e \leq k^e\} \quad /2.50/$$

Zakładając, że znamy jego wierzchołki $w_1^e / w_1^e \in R^6, 1=1,2,\dots,v^e$, możemy wyrazić wektor dopuszczalnych uogólnionych naprężeń $s^e \in B^e$ w postaci kombinacji wypukłej tych wierzchołków, tzn.

$$s^e = \sum_{i=1}^{v^e} \alpha_i^e w_i^e \quad /2.51/$$

z warunkiem

$$\sum_{i=1}^{v^e} \alpha_i^e = 1 \quad /2.52/$$

$$\alpha_i^e \leq 0, \quad i=1,2,\dots,v^e$$

Podobne podejście było stosowane przez A. Zavelani-Rossiego [135]. Jednakże warunek /2.52/₁ miał tam postać nierówności, co jest słuszne tylko w przypadku, gdy początek układu należy do wielościanu wypukłego \mathcal{B}^e . W ogólnym przypadku, stosując warunek $\sum_{i=1}^{v^e} \alpha_i^e \leq a = \text{const}$, otrzymuje się wielościany przekształcone przez jednokładność o stosunku a .

⊙ Niech kolumny $6 \times v^e$ macierzy W^e przedstawiają wierzchołki w_i^e wielościanu \mathcal{B}^e

$$W^e = \begin{bmatrix} w_1^e & w_2^e & \dots & w_{v^e}^e \end{bmatrix} \quad /2.53/$$

$$w_i^e \in R^6, \quad i=1,2,\dots,v^e$$

i niech składowe wektora $\alpha^e \in R^{v^e}$ będą współczynnikami α_i^e kombinacji wypukłej /2.51/, tzn.

$$\alpha^e = \begin{bmatrix} \alpha_1^e & \alpha_2^e & \dots & \alpha_{v^e}^e \end{bmatrix}^T \in R^{v^e} \quad /2.54/$$

Wówczas związki /2.51/ i /2.52/ możemy zapisać w postaci macierzowej

$$s^e = W^e \alpha^e$$

$$e^T \alpha^e = 1 \quad /2.55/$$

$$\alpha^e \leq 0,$$

gdzie stosowano standardowe oznaczenie dla wektora jedynek

$$e^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1] \in R^{v^e}.$$

Przejdźmy do liczbowych postaci macierzy W^0 . Skorzystamy z wyników pracy [53], w której wyznaczone w przestrzeni R^4 punkty powierzchni granicznej dla przekroju w interesującym nas przypadku interakcji dwóch momentów zginających, momentu skręcającego i siły osiowej. Punkty te określają wielościan wypukły, będący odcinkowo-liniową aproksymacją warunku plastyczności dla przekroju. Oznaczmy przez W^j macierz, której kolumny przedstawiają wierzchołki tego wielościanu, dla j-tego przekroju. Wektor uogólnionych naprężeń w j-tym przekroju $s^j = [m_x \ m_y \ m_z \ n]^jT$ można przedstawić w postaci ich kombinacji wypukłej, analogicznie jak /2.55/.

W przypadku najprostszej aproksymacji typu A, w której wzięto pod uwagę jedynie punkty na osiach układu współrzędnych, wymiar macierzy W^j wynosi 4 na 8. W przypadku bardziej dokładnej aproksymacji typu B brano pod uwagę - oprócz kierunków osi - również kierunki tworzące jednakowy kąt ze wszystkimi osiami. Otrzymano w ten sposób dodatkowe wierzchołki, których wszystkie współrzędne są równe co do wartości bezwzględnej. Są to punkty typu (d, d, d, d) , $(-d, d, d, d)$, ... itd. Jest ich w sumie $2^4 = 16$. Wartość d obliczoną w [53] dla trzech typów przekrojów podano na rys.2.6. W przypadku aproksymacji typu B wymiar macierzy W^j wynosi 4 na 24.

W zmiennych bezwymiarowych

$$x_1 = \frac{m_x}{m_{ox}}, \quad x_2 = \frac{m_y}{m_{oy}}, \quad x_3 = \frac{m_z}{m_{oz}}, \quad x_4 = \frac{n}{n_o} \quad /2.56/$$

gdzie w mianownikach występują odpowiednie moduły plastyczne, macierz W^j , grupująca wierzchołki wielościanu granicznego w postaci swoich kolumn, wygląda następująco

- dla aproksymacji typu A

$$W^j = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad /2.57/$$

- dla aproksymacji typu B

$$W^j = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \dots d & -d & d & d & d & -d & -d & -d \\ & d & d & -d & d & d & -d & d & d \\ & d & d & d & -d & d & d & -d & d \\ & d & d & d & d & -d & d & d & -d \dots \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \dots d & d & d & -d & -d & -d & d & -d \\ -d & -d & d & -d & -d & d & -d & -d \\ -d & d & -d & -d & d & -d & -d & -d \\ d & -d & -d & d & -d & -d & -d & -d \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \dots d \\ -d \\ -d \\ d \end{matrix}} \right] \quad /2.58/$$

Kolumny macierzy W^j stanowią wierzchołki wielościanu wypukłego w R^4 , będącego obszarem granicznym dla przekroju pręta ramy przestrzennej w stanie dwukierunkowego zginania, skręcania i rozciągania. Jeżeli rozpatrywany wielościan przetniemy hiperpłaszczyznami $m_x = 0$ i $m_y = 0$, to otrzymamy w R^2 warunek plastyczności dla interakcji momentu zginającego m_z i siły osiowej n . W przypadku aproksymacji typu A będzie to najprostszą rombowa linearyzacja, przedstawiona na rys.2.7a, a w przypadku bardziej dokładnej aproksymacji typu B - ośmiobok z rys.2.7b.

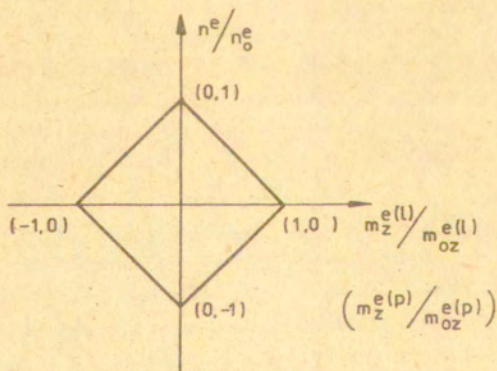
Macierz W^j postaci /2.57/ czy /2.58/ odnosi się do j -tego przekroju. Nas interesuje natomiast warunek plastyczności dla elementu prętowego. Można go otrzymać, zapisując niezależnie warunki dla przekroju lewego $j = 1$ i prawego $j = p$. Wówczas

macierz W^e /2.53/ miałyby wymiar 8×16 - w przypadku A oraz 8×48 - w przypadku B i byłyby postaci

$$W^e = \begin{bmatrix} W^{j=1} & \emptyset \\ \emptyset & W^{j=p} \end{bmatrix} \quad /2.59/$$

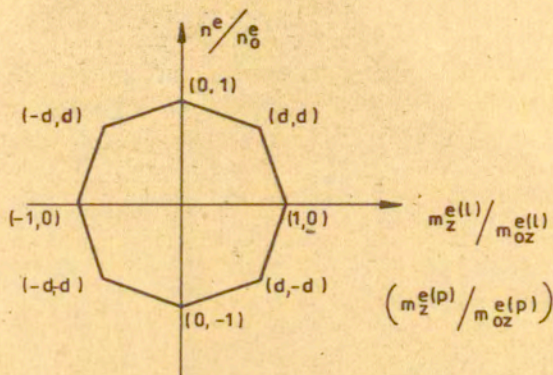
Wektor uogólnionych naprężeń dla pręta $s^e \in R^8$ miałby wtedy postać

$$s^e = \left[m_x^1 \quad m_y^1 \quad m_z^1 \quad n^1 \quad m_x^p \quad m_y^p \quad \underbrace{m_z^p}_{n^p} \right]^T \quad /2.60/$$



a/ najprostsza aproksymacja typu A/

Rys.2:7: Przecięcie hiperpłaszczyznami $m_x = 0$, $m_y = 0$ wielościanu w R^4 warunku plastyczności dla przekroju pręta przestrzennej ramy.



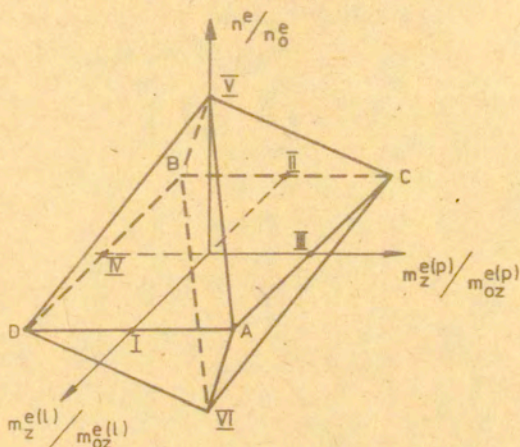
b/ bardziej dokładna aproksymacja typu B

Rys.2.7. Przecięcie hiperpłaszczyznami $m_x = 0$, $m_y = 0$ wielościanu w R^4 warunku plastyczności dla przekroju pręta przestrzennej ramy.

Postępowanie takie jest niewygodne, gdyż w przyjętym modelu /2.17/ statyki pręta wektor $s^e \in R^6$. Dla pręta występuje bowiem jedna siła osiowa $n = n^1 = n^p$ i jeden moment skracający $m_x = m_x^1 = m_x^p$. Chcąc stosować opis warunku plastyczności dla pręta za pomocą macierzy /2.59/, należałoby dołączyć do równań równowagi /2.17/ dwa dodatkowe równania w postaci: $n^1 = n^p$ oraz $m_x^1 = m_x^p$. Rozszerza to oczywiście wymiary macierzy zadania i jest niepożądane z numerycznego punktu widzenia.

Wyprowadzimy teraz globalny warunek plastyczności dla elementu prętowego w opisie wierzchołkowym /2.55/. Na podstawie znajomości punktów powierzchni granicznej w R^4 dla przekroju znajdziemy wierzchołki wielościanu granicznego w R^6 , przedstawiającego globalny warunek plastyczności dla pręta. Wyznaczymy w ten sposób - inną niż /2.59/ - postać macierzy W^e , zgodną z przyjętym modelem /2.17/ statyki pręta. Procedurę tę łatwiej

jest wytłumaczyć najpierw dla prostszego przypadku interakcji tylko momentu zginającego m_z i siły osiowej n . Rozpatrzmy najprostszą /typu A/, rombowa linearyzację tego warunku dla pręta, przedstawioną na rys.2.7a. Znamy wierzchołki dwuwymiarowego wieloboku granicznego dla lewego przekroju pręta /w przestrzeni zmiennych m_z^1 i n / oraz wierzchołki dwuwymiarowego wieloboku granicznego dla prawego przekroju /w przestrzeni zmiennych m_z^p i n /. Poszukujemy natomiast wielościanu, opisanego w zmiennych m_z^1 , m_z^p , n , w przestrzeni R^3 , przedstawiającego globalny warunek plastyczności dla pręta. W globalnym warunku dla pręta nie zachodzi interakcja między momentami zginającymi m_z^1 i m_z^p , gdyż uplastycznienie przekrojów lewego i prawego na skutek czystego zginania jest wzajemnie niezależne. Wynika stąd, że przecięcie poszukiwanego wielościanu granicznego w R^3 dowolną płaszczyzną $m_z^p = \text{const} < m_{oz}^p$ jest zawsze rombem z rys.2.7a. Tak samo, przecięcie dowolną płaszczyzną $m_z^1 = \text{const} < m_{oz}^1$ jest również rombem. Zatem poszukiwany wielościan stanowi część wspólną dwóch nieskończonych - w kierunku osi m_z^1 i m_z^p - graniastosłupów prostych o podstawie rombu z rys.2.7a. W rezultacie otrzymujemy ośmiościan pokazany na rys.2.8. Przedstawia on najprostszą /typu A/ linearyzację globalnego warunku plastyczności dla pręta w przypadku uwzględnienia interakcji momentu zginającego m_z i siły osiowej n na szczyblu przekroju. Wierzchołki tego wielościanu możemy wyznaczyć na podstawie znajomości wierzchołków wieloboków w dwuwymiarowych przestrzeniach zmiennych m_z^1 , n oraz m_z^p , n . Jest to możliwe, ponieważ w przecięciu wielościanu płaszczyzną $n = 0$ otrzymujemy wielobok, którego boki są równoległe do osi m_z^1 i m_z^p . Wynika to z nieistnienia interakcji między m_z^1 i m_z^p w globalnym warunku plastyczności dla pręta. Tak więc, oprócz sześciu punktów I, II, III, IV, V, VI /rys.2.9/ na osiach R^3 , wynikających z postaci rombów w przestrzeniach m_z^1, n i m_z^p, n z rys.2.7a, znajdujemy dodatkowe, nowe cztery punkty: A (1, 1, 0), B (-1, -1, 0), C (-1, 1, 0), D (1, -1, 0), leżące w płaszczyźnie $n = 0$. Jednocześnie odpadają cztery poprzednie punkty I, II, III, IV, gdyż wektory przez nie określone są liniowo zależne od nowo utworzonych wektorów wierzchołkowych OA, OB, OC, OD. Ostatecznie otrzymujemy $2^2 + 2 = 6$ wierzchołków A, B, C, D, V, VI ośmiościanu z rys.2.9, tworzących kolumny macie-



Rys.2.8. Najprostsza linearyzacja /typu A/ warunku plastyczności dla pręta w przypadku interakcji momentu zginającego m_z i siły osiowej n .

rzy W^e

$$W^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad /2.61/$$

Podobnie postępujemy w przypadku bardziej dokładnej /typu B/ linearyzacji warunku plastyczności z rys.2.7b. Oprócz wyżej wymienionych, dochodzi w tym wypadku $2^3 = 8$ dodatkowych wierzchołków w R^3 , których wszystkie współrzędne są równe co do wartości bezwzględnej. Zatem w sumie mamy $2^3 + 2^2 + 2 = 14$ wierzchołków wielościanu, przedstawiającego bardziej dokładną

/typu B/ linearyzację globalnego warunku plastyczności dla pręta w przypadku interakcji momentu zginającego m_z i siły osiowej n .

Wróćmy jednak do interesującego nas przypadku interakcji dwukierunkowego zginania ze skręcaniem i ściskaniem. Zgodnie z przyjętym modelem statyki wektor uogólnionych naprężeń dla pręta $s^e \in R^6$ ma postać /2.11/

$$s^e = \left[m_y^l \quad m_z^l \quad m_y^p \quad m_z^p \quad m_x \quad n \right]^T$$

Na podstawie wierzchołków /2.57/ - dla aproksymacji typu A, 1 /2.58/ - dla aproksymacji typu B, powierzchni granicznej w R^4 dla przekroju, znajdujemy w R^6 wierzchołki wielościanu globalnego warunku plastyczności dla pręta. Postępujemy analogicznie, jak w opisanym poprzednio przypadku dwuwymiarowego warunku plastyczności dla momentu zginającego i siły osiowej. Należy pamiętać, że obecnie w wektorze uogólnionych naprężeń s^e występują dwie pary składowych m_y^l, m_y^p oraz m_z^l, m_z^p , między którymi nie zachodzi interakcja w globalnym warunku plastyczności. Moment zginający m_y^l może powodować uplastycznienie lewego przekroju pręta niezależnie od tego, czy prawy przekrój jest uplastyczniony na skutek działania m_y^p . To samo odnosi się do momentów zginających m_z^l i m_z^p . Dla najprostszej aproksymacji /typu A/ otrzymujemy w R^6 : $2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \times 2 = 12$ wierzchołków. W zmiennych bezwymiarowych /mianowniki oznaczają odpowiednie moduły plastyczne/

$$x_1 = \frac{m_y^l}{m_{oy}^l}, \quad x_2 = \frac{m_z^l}{m_{oz}^l}, \quad x_3 = \frac{m_y^p}{m_{oy}^p}, \quad /2.62/$$

$$x_4 = \frac{m_z^p}{m_{oz}^p}, \quad x_5 = \frac{m_x}{m_{ox}}, \quad x_6 = \frac{n}{n_o}$$

macierz W^e /2.53/, grupująca te wierzchołki w postaci swoich kolumn wygląda następująco

$$W^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} /2.63/$$

Dla bardziej dokładnej aproksymacji /typu B/ oprócz wyżej wymienionych należy wygenerować dodatkowo $2^6 = 64$ wierzchołki, których wszystkie współrzędne są równe co do wartości bezwzględnej /wartość tę d podano za pracą [53] dla trzech typów przekrojów na rys.2.6/. Wierzchołki te wyznaczmy, dokonując wariacji znaków współrzędnych. Najpierw uwzględniamy wariacje znaków przy pierwszej i trzeciej współrzędnej /typu momentów zginających: m_y^1 - w lewym i m_y^p - w prawym przekroju/. Dla każdego z czterech takich układów dokonujemy wariacji znaków piątej i szóstej współrzędnej /typu momentu skręcającego i siły osiowej, które są wielkościami wspólnymi dla pręta/. Mamy w ten sposób 16 wierzchołków, dla każdego z których rozpatrujemy jeszcze po cztery wariacje znaków drugiej i czwartej współrzędnej /typu momentów zginających: m_z^1 - w lewym i m_z^p - w prawym przekroju/. Otrzymujemy w ten sposób 64 wierzchołki. Zatem, łącznie z 12 wierzchołkami identycznymi, jak dla aproksymacji typu A, otrzymujemy 76 wierzchołków. Wyznaczają one w R^6 wielościan, przedstawiający globalny warunek plastyczności dla pręta, w przypadku bardziej dokładnej aproksymacji, typu B. Postać macierzy W^e /2.53/, grupującej te wierzchołki, we współrzędnych bezwymiarowych /2.62/, zamieszczona jest w Dodatku A.

2.2.2. Opis za pomocą hiperpłaszczyzn

Wprowadzimy teraz zlinearyzowany warunek plastyczności dla pręta w tradycyjnej postaci układu nierówności

$$N^e{}^T s^e \leq k^e \quad /2.64/$$

Wektor $s^e \in R^6$ jest wektorem uogólnionych naprężeń dla pręta, zdefiniowanym wzorem /2.11/, a $k^e \in R^h$ jest wektorem modułów plastycznych. Macierz $N^e{}^T$ przedstawia współczynniki układu nierówności, określających wypukły wielościan w przestrzeni R^6 .

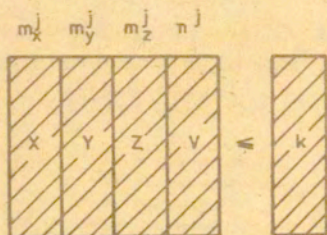
Liczba h^e tych nierówności określa liczbę jego ścian i zależy od dokładności aproksymacji powierzchni granicznej. Warunek plastyczności dla pręta w postaci /2.64/ otrzymuje się, zapisując niezależnie warunki dla lewego i prawego przekroju.

Należy przy tym pamiętać, że moment skręcający i siła osiowa są wielkościami wspólnymi dla pręta. Jeżeli warunek plastyczności dla przekroju ma postać, jak na rys.2.9, to warunek dla pręta tworzymy zgodnie ze schematem pokazanym na rys.2.10.

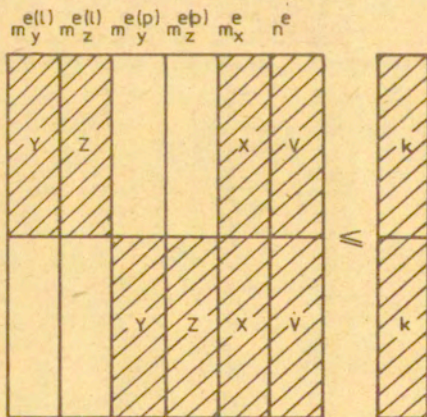
W obszarze niezakreskowanym występują współczynniki zerowe. Zatem w celu utworzenia macierzy $N^e{}^T$ należy wyznaczyć najpierw układ nierówności z rys.2.9, opisujących warunek plastyczności dla przekroju. Układ tych nierówności określa w przestrzeni R^4 uogólnionych naprężeń przekrojowych m_x, m_y, m_z, n wypukły wielościan. W poprzednim punkcie podano w zmiennych bezwymiarowych /2.56/ wierzchołki tego wielościanu, dla aproksymacji typu A - wzorem /2.57/ oraz dla aproksymacji typu B - wzorem /2.58/. Na podstawie tych wierzchołków wyprowadzimy równania ograniczających go trójwymiarowych hiperpłaszczyzn w R^4 . Określimy w ten sposób współczynniki układu nierówności /rys.2.9/ warunku plastyczności dla przekroju.

W przypadku najprostszej aproksymacji typu A, gdy rozpatrujemy jedynie wierzchołki na osiach układu współrzędnych w R^4 , oczywiste jest, że układ nierówności warunku plastyczności dla przekroju, w zmiennych bezwymiarowych, ma wtedy następującą postać

$$\left| \frac{m_x}{m_{ox}} \right| + \left| \frac{m_y}{m_{oy}} \right| + \left| \frac{m_z}{m_{oz}} \right| + \left| \frac{n}{n_0} \right| \leq 1 \quad /2.65/$$



Rys.2.9. Warunek plastyczności dla przekroju



Rys.2.10. Warunek plastyczności dla pręta.

Występuje tu w sumie 16 nierówności. Po rozpisaniu układu /2.65/ i wprowadzeniu następujących oznaczeń

$$a_x = \frac{m_{oy}}{m_{ox}}, \quad a_z = \frac{m_{oy}}{m_{oz}}, \quad a_n = \frac{m_{oy}}{n_o} \quad /2.66/$$

otrzymamy w zmiennych m_x, m_y, m_z, n pełną postać /rys.2.9/ warunku dla przekroju. Kolumnowe, 16-wymiarowe wektory X,Y,Z,V,k z rys.2.9 wyglądają następująco

X=	Y=	Z=	V=	k=	/2.67/
a _x	1	a _z	a _n	m _{oy}	
a _x	-1	a _z	a _n	m _{oy}	
a _x	1	-a _z	a _n	m _{oy}	
-a _x	1	a _z	a _n	m _{oy}	
a _x	1	a _z	-a _n	m _{oy}	
a _x	-1	-a _z	a _n	m _{oy}	
-a _x	-1	a _z	a _n	m _{oy}	
a _x	-1	a _z	-a _n	m _{oy}	
-a _x	1	-a _z	a _n	m _{oy}	
a _x	1	-a _z	-a _n	m _{oy}	
-a _x	1	a _z	-a _n	m _{oy}	
-a _x	-1	-a _z	a _n	m _{oy}	
a _x	-1	-a _z	-a _n	m _{oy}	
-a _x	-1	a _z	-a _n	m _{oy}	
-a _x	1	-a _z	-a _n	m _{oy}	
-a _x	-1	-a _z	-a _n	m _{oy}	

Z wektorów tych tworzymy kolumny macierzy N^{eT} i wektor k^e warunku plastyczności /2.64/ dla pręta według schematu pokazanego na rys.2.10. Miejsca niezakreskowane oznaczają kolumny zerowe. Tak więc, w przypadku najprostszej aproksymacji /typu A/ powierzchni granicznej, macierz N^{eT} dla pręta ma wymiar 32×6 .

W przypadku bardziej dokładnej aproksymacji /typu B/ powierzchni granicznej warunek plastyczności dla przekroju ma postać wielościanu o 24 wierzchołkach w przestrzeni R^4 . Wierzchołki te, w zmiennych bezwymiarowych /2.56/, podane są w postaci kolumn macierzy /2.58/. Zadanie nasze sprowadza się do znalezienia równań trójwymiarowych hiperpłaszczyzn w R^4 , ograniczających ten wielościan. Podzielmy 24 jego wierzchołki na dwie grupy:

1/ 8 punktów na osiach układu współrzędnych

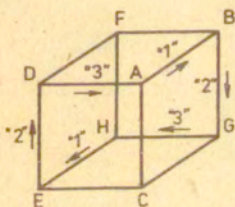
$$\begin{array}{ll} I \begin{pmatrix} 1,0,0,0 \end{pmatrix}, & I^- \begin{pmatrix} -1,0,0,0 \end{pmatrix}, \\ II \begin{pmatrix} 0,1,0,0 \end{pmatrix}, & II^- \begin{pmatrix} 0,-1,0,0 \end{pmatrix}, \\ III \begin{pmatrix} 0,0,1,0 \end{pmatrix}, & III^- \begin{pmatrix} 0,0,-1,0 \end{pmatrix}, \\ IV \begin{pmatrix} 0,0,0,1 \end{pmatrix}, & IV^- \begin{pmatrix} 0,0,0,-1 \end{pmatrix}, \end{array}$$

2/ pozostałe 16 punktów o równych co do modułu wszystkich współrzędnych, postaci (d,d,d,d) , $(-d,d,d,d)$, ... itd.

Dla każdego z ośmiu punktów pierwszej grupy wybieramy - spośród szesnastu punktów grupy drugiej - te, których znak współrzędnej, odpowiadającej niezerowej współrzędnej punktu grupy pierwszej, jest zgodny ze znakiem tej niezerowej współrzędnej. Weźmy np. punkt IV $(0,0,0,1)$. Spośród szesnastu punktów drugiej grupy wybieramy dla niego te, które mają czwartą współrzędną dodatnią. Są to następujące osiem punktów:

$$\begin{array}{lll} A \begin{pmatrix} d,d,d,d \end{pmatrix}, & B \begin{pmatrix} -d,d,d,d \end{pmatrix}, & C \begin{pmatrix} d,-d,d,d \end{pmatrix}, \\ D \begin{pmatrix} d,d,-d,d \end{pmatrix}, & E \begin{pmatrix} d,-d,-d,d \end{pmatrix}, & F \begin{pmatrix} -d,d,-d,d \end{pmatrix}, & /2.68/ \\ G \begin{pmatrix} -d,-d,d,d \end{pmatrix}, & H \begin{pmatrix} -d,-d,-d,d \end{pmatrix}. & & \end{array}$$

Należy z nich wybrać trójki punktów, które wraz z punktem IV $(0,0,0,1)$ wyznaczą trójwymiarowe hiperpłaszczyzny, ograniczające wypukły wielościan w R^4 . Nie rozpatrujemy wszystkich możliwych trójelementowych kombinacji punktów /2.68/, lecz tylko takie ich kombinacje, które po dołączeniu punktu IV określają hiperpłaszczyzny graniczne. Ponieważ punkty /2.68/ mają identyczną czwartą współrzędną, możemy je rozpatrywać w R^3 , pomijając chwilowo ostatnią współrzędną. Wówczas wyznaczają one sześć ścian przedstawiony na rys.2.11. Następujące trójki punktów: ABG, BGH, GHE, HED, EDA, DAB, określają sześć jego ścian. Dołączając do każdej takiej trójki punkt IV, otrzymujemy sześć



Rys.2.11

czwórek punktów IVABG, IVBGH, IVGHE, IVHED, IVEDA, IVDAB, które wyznaczają jednoznacznie sześć trójwymiarowych hiperpłaszczyzn w R^4 , przechodzących przez wierzchołek IV i ośmiem wierzchołków /2.68/. Określają one sześć ścian wielościanu wypukłego w R^4 .

Postępując analogicznie z pozostałymi siedmioma punktami pierwszej grupy, otrzymamy dla każdego z nich po sześć hiperpłaszczyzn. Zatem w sumie mamy 48 trójwymiarowych hiperpłaszczyzn w R^4 . Ograniczają one 48-ścian wypukły, przedstawiający

zlinearyzowany warunek plastyczności dla przekroju. Dzięki regularności wielościanu wystarczy obliczyć współczynniki tylko jednej hiperpłaszczyzny, np. wyznaczonej przez punkty IV, A, B, G. Równanie trójwymiarowej hiperpłaszczyzny, przechodzącej przez cztery punkty w R^4 , ma następującą postać [19]

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ IV_1 & IV_2 & IV_3 & IV_4 & 1 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 1 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 1 \\ G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad /2.69/$$

Wstawiając współrzędne punktów IV, A, B, G i przyrównując powyższy wyznacznik do zera, otrzymujemy w zmiennych bezwymiarowych /2.56/ następującą postać równania hiperpłaszczyzny IVABG

$$ex_3 + dx_4 = d, \quad /2.70/$$

gdzie oznaczono

$$e = 1 - d, \quad /2.71/$$

a wartość parametru d zależy od rodzaju przekroju /rys.2.6/.

Uzyskaliśmy równanie jednej z 48 ścian wielościanu. Dzięki temu, że jego wierzchołki są to bądź punkty leżące na osiach układu współrzędnych, bądź punkty o równych co do modułu współrzędnych, otrzymamy równania pozostałych ścian na podstawie /2.70/. W każdym równaniu występują dwie spośród czterech zmiennych. Istnieje więc $\binom{4}{2} = 6$ kombinacji zmiennych x_1, x_j .

$$(i, j) = \begin{cases} (1, 2) \\ (1, 3) \\ (1, 4) \\ (2, 4) \\ (3, 4) \\ (2, 3) \end{cases} \quad /2.72/$$

Z kolei, dla każdej pary zmiennych x_i, x_j istnieje osiem możliwości układu współczynników

$$\begin{array}{l}
 (\pm e, \pm d) \\
 (\mp e, \pm d) \\
 (\pm d, \pm e) \\
 (\pm d, \mp e)
 \end{array}
 \quad /2.73/$$

Postać tych współczynników łatwo można zrozumieć, jeśli dokona się przecięcia rozpatrywanego wielościanu dowolnymi dwiema hiperpłaszczyznami $x_1 = 0$, $x_j = 0$. Otrzymamy wtedy w R^2 ośmiobok Z_1 , którego równania boków mają współczynniki właśnie w postaci /2.73/. Wstawiając osiem możliwych układów współczynników /2.73/ dla każdej z sześciu kombinacji /2.72/ zmiennych x_1, x_j , otrzymamy ostatecznie 48 równań. Tak więc, warunek plastyczności dla przekroju w przypadku bardziej dokładnej aproksymacji określony jest przez 48 nierówności, które możemy zapisać, w zmiennych bezwymiarowych /2.56/, w następującej zwartej postaci

$$\begin{array}{l}
 |ex_1 + dx_j| \leq d \\
 |-ex_1 + dx_j| \leq d \\
 |dx_1 + ex_j| \leq d \\
 |dx_1 - ex_j| \leq d
 \end{array}
 \quad /2.74/$$

gdzie i, j określone są wzorem /2.72/, współczynnik $e = 1-d$, a wartość d - na rys.2.6. Pełna postać tego warunku, w zmiennych m_x, m_y, m_z, n , określona za pomocą 48-wymiarowych wektorów kolumnowych X, Y, Z, V i k z rys.2.9, zamieszczona jest w Dodatku A. Macierz N^{eT} warunku plastyczności /2.64/ dla pręta tworzona jest według schematu przedstawionego na rys.2.10. W przypadku bardziej dokładnej /typu B/ aproksymacji powierzchni granicznej, macierz ta ma wymiar 96×6 .

Na końcu tego rozdziału porównamy wymiary macierzy określających warunek plastyczności dla pręta, a mianowicie - macierzy W^e , przedstawiającej współrzędne wierzchołków wielościanu granicznego oraz macierzy N^{eT} , przedstawiającej współczynniki równań hiperpłaszczyzn ograniczających ten wielościan. Porównanie tych macierzy, dla najprostszej aproksymacji powierzchni granicznej - typu A oraz bardziej dokładnej - typu B, przed-

stawia Tabela 2.1.

typ aproksymacji macierz	A	B
W^e	6 x 12	6 x 76
N^{eT}	32 x 6	96 x 6

Tabela 2.1. Porównanie wymiarów macierzy W^e i N^{eT} .

3. OBLICZANIE NOŚNOŚCI GRANICZNEJ PRZESTRZENNYCH RAM METODĄ PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

3.1. Początkowa postać zagadnienia

Teoria nośności granicznej rozpatruje konstrukcje sztywno-plastyczne poddane obciążeniu narastającemu proporcjonalnie do jednego parametru

$$p_\mu = \mu p, \quad /3.1/$$

gdzie p jest ustalonym wektorem obciążenia odniesienia, a μ - skalarnym mnożnikiem.

Celem jej jest wyznaczenie granicznego mnożnika μ^* obciążenia, przy którym rozpoczyna się plastyczne płynięcie konstrukcji, tzn. przy którym konstrukcja przekształca się w mechanizm, będący w chwilowym ruchu. Wartość $\mu^* p$ charakteryzuje największy udźwig konstrukcji w określonych warunkach obciążenia. Rozwiązanie zupełne zagadnienia nośności granicznej polega na wyznaczeniu obciążenia granicznego $\mu^* p$ oraz odpowiadających mu: statycznie dopuszczalnego pola uogólnionych naprężeń i kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości uogólnionych przemieszczeń. Statycznie dopuszczalne pole uogólnionych naprężeń spełnia równania równowagi wewnętrznej i warunki brzegowe w naprę-

zeniach oraz warunek plastyczności. Kinematycznie dopuszczalne pole prędkości uogólnionych przemieszczeń spełnia narzucone konstrukcji kinematyczne warunki brzegowe i warunki ciągłości oraz pozwala otrzymać niezerowe wartości składowych wektora prędkości uogólnionych odkształceń. Ponadto pole to musi zapewnić dodatność mocy obciążeń zewnętrznych na prędkościach uogólnionych przemieszczeń. Mnożnik μ_s , z którym stowarzyszone jest statycznie dopuszczalne pole uogólnionych naprężeń, nazywany jest mnożnikiem statycznym. Natomiast mnożnik μ_k obciążenia, dla którego realizuje się kinematycznie dopuszczalne pole prędkości uogólnionych przemieszczeń, nazywany jest mnożnikiem kinematycznym. Dla konstrukcji, znajdującej się pod działaniem obciążeń, istnieje wiele statycznie dopuszczalnych pól uogólnionych naprężeń i wiele kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości uogólnionych przemieszczeń. Dwa podstawowe twierdzenia nośności granicznej [79] pozwalają określić oszacowania rzeczywistego mnożnika obciążenia granicznego konstrukcji, powodującego powstanie w niej mechanizmu chwilowego ruchu. Twierdzenie statyczne / o dolnej granicy nośności granicznej / mówi, że dowolny statyczny mnożnik obciążenia μ_s nie może być większy od rzeczywistego mnożnika obciążenia granicznego μ^* , tzn. $\mu_s \leq \mu^*$. Innymi słowy, największy spośród wszystkich statycznych mnożników obciążenia odpowiada rzeczywistemu mnożnikowi obciążenia : $\max \mu_s = \mu^*$. Twierdzenie kinematyczne / o górnej granicy obciążenia granicznego / stwierdza, że dowolny kinematyczny mnożnik μ_k nie może być mniejszy od rzeczywistego mnożnika obciążenia granicznego μ^* , tzn. $\mu_k \geq \mu^*$. Oznacza to, że najmniejszy spośród wszystkich kinematycznych mnożników określa rzeczywisty mnożnik obciążenia granicznego : $\min \mu_k = \mu^*$. Rzeczywisty mnożnik obciążenia granicznego μ^* , odpowiadający rozwiązaniu zupełnemu, jest więc zarówno mnożnikiem statycznie, jak i kinematycznie dopuszczalnym.

Na powyższych twierdzeniach opierają się dwie podstawowe metody, statyczna i kinematyczna, rozwiązywania zagadnień nośności granicznej konstrukcji. W podejściu statycznym poszukujemy statycznie dopuszczalnego pola uogólnionych naprężeń, tzn.

takiego, które spełnia równania równowagi i warunków plastyczności. Wyznaczamy w ten sposób statyczny mnożnik obciążenia μ_s , który stanowi dolne oszacowanie rzeczywistego mnożnika granicznego μ^* . Jeżeli ze znalezionym, statycznie dopuszczalnym, polem uogólnionych naprężeń można stowarzyszyć kinematycznie dopuszczalne pole uogólnionych przemieszczeń, wówczas otrzymujemy rozwiązanie zupełne zagadnienia nośności granicznej, a więc obliczony mnożnik statyczny jest dokładnie równy rzeczywistemu mnożnikowi obciążenia granicznego. Rozwiązanie zupełne można również uzyskać, poszukując takiego statycznie dopuszczalnego pola uogólnionych naprężeń, któremu odpowiada największa wartość mnożnika statycznego μ_s . Metoda kinematyczna polega natomiast na wyznaczeniu kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości uogólnionych przemieszczeń oraz kinematycznego mnożnika μ_k , będącego górnym / a więc niebezpiecznym / oszacowaniem rzeczywistego mnożnika obciążenia granicznego μ^* . Jeżeli z tym polem można stowarzyszyć statycznie dopuszczalne pole uogólnionych naprężeń, wówczas otrzymane rozwiązanie jest zupełne, a obliczony mnożnik obciążenia jest najmniejszym spośród wszystkich kinematycznych mnożników i odpowiada rzeczywistemu mnożnikowi obciążenia granicznego μ^* . Wynika stąd, że dla rozwiązania zupełnego zagadnienia nośności granicznej istnieje wzajemne powiązanie podejścia statycznego z podejściem kinematycznym. Zostanie to uwypuklone z chwilą, gdy sformułujemy zagadnienie nośności granicznej w postaci dualnej pary zadań programowania liniowego i skorzystamy z twierdzeń o dualności.

Bezpośrednie stosowanie metody statycznej bądź kinematycznej pozwala otrzymać jedynie oszacowania, odpowiednio dolne lub górne, rzeczywistego mnożnika obciążenia granicznego. Jeżeli chcemy uzyskać rozwiązanie zupełne, należałoby systematycznie rozpatrywać wszystkie statycznie dopuszczalne pola uogólnionych naprężeń, bądź wszystkie kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia. Postępowanie takie jest możliwe jedynie w przypadku nieskomplikowanych konstrukcji w prostym stanie obciążenia, np. zginane belki czy małe ramy, pracujące

tylko na zginanie. Dla bardziej skomplikowanych konstrukcji, znajdujących się w złożonym stanie naprężenia, np. przestrzenne ramy, podejście takie jest wręcz niemożliwe. W tym wypadku koniecznym staje się znalezienie odpowiedniego modelu matematycznego, który umożliwi efektywne rozwiązywanie zagadnień nośności granicznej i pozwoli na zautomatyzowanie obliczeń przy wykorzystaniu maszyn cyfrowych. Gałęzią matematyki, w ramach której model taki sformułowano, jest programowanie liniowe [37, 49, 136]. Historyczny rozwój metod rozwiązywania zagadnień nośności granicznej konstrukcji prętowych przedstawiony został w rozdz.1.2.

Przejdźmy teraz do zagadnienia obliczania nośności granicznej ram przestrzennych. Zanim sformułujemy je w języku programowania liniowego, musimy mieć globalne związki statyczne, kinematyczne i fizyczne, opisujące pracę całej konstrukcji.

W rozdziale drugim podaliśmy dyskretny opis sztywno-plastycznego elementu prętowego przestrzennej ramy. Korzystając z tych związków, otrzymamy - po dokonaniu operacji scalania - globalne związki dla całej ramy. Operacji scalania dokonujemy na podstawie numeracji węzłów i prętów ramy oraz informacji o warunkach przylegania. Informacja ta zawiera globalne numery węzłów, przylegających do lewego i prawego końca każdego pręta i określa sposób łączenia prętów z węzłami. Oznaczmy przez

l - liczbę prętów, a przez w - liczbę węzłów ramy. Po ponumerowaniu prętów możemy napisać, że przestrzeń uogólnionych naprężeń /i jednocześnie odkształceń/ dla całej ramy jest l -krotnym iloczynem kartezjańskim przestrzeni R^6 , gdyż wektor uogólnionych naprężeń /odkształceń/ dla pręta ma 6 składowych - zgodnie z przyjętym w rozdziale 2.1 modelem statyki pręta przestrzennej ramy /wzory /2.11/ i /2.12/. Oznaczmy jej wymiar przez $n = 6l$.

$$R^n = R_1^6 \times R_2^6 \times \dots \times R_l^6 \quad /3.2./$$

Wówczas globalne wektory uogólnionych naprężeń $s \in R^n$ i uogólnionych odkształceń $q \in R^n$ tworzone są z wektorów $s_1^e \in R^6$ i $q_1^e \in R^6$ / $i = 1, 2, \dots, l$ /, zdefiniowanych wzorami /2.11/ i /2.12/, dla kolejnych prętów

$$s = \begin{bmatrix} s_1^e & s_2^e & \dots & s_l^e \end{bmatrix}^T \quad /3.3/$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1^e & q_2^e & \dots & q_l^e \end{bmatrix}^T$$

Natomiast liczba stopni swobody dla ramy przestrzennej wynosi $m = 6w$, jako że pojedynczy węzeł ma 6 stopni swobody.

Po ponumerowaniu węzłów przestrzeni uogólnionych przemieszczeń /obciążeń zewnętrznych/ można przedstawić w postaci

$$R^m = R_1^6 \times R_2^6 \times \dots \times R_w^6 \quad /3.4/$$

Globalne wektory uogólnionych przemieszczeń $u \in R^m$ i obciążenia zewnętrznego $p \in R^m$ tworzone są na podstawie wektorów przemieszczeń i obciążeń węzłowych, wchodzących w skład wektorów u^e i p^e , dla poszczególnych prętów, zgodnie ze wzorem /2.16/.

Związek między przestrzenią uogólnionych przemieszczeń R^m i przestrzenią uogólnionych odkształceń R^n określa liniowy operator C równań geometrycznych

$$u \in R^m \xrightarrow{C} R^n \ni q \quad /3.5/$$

Natomiast operator sprzężony C^T odwzorowuje przestrzeń uogólnionych naprężeń R^n w przestrzeń obciążeń zewnętrznych R^m i określa warunki równowagi

$$p \in R^m \xleftarrow{C^T} R^n \ni s. \quad /3.6/$$

Otrzymujemy zatem macierzową postać równań geometrycznych

$$C u = q \quad /3.7/$$

oraz równań równowagi

$$C^T s = p \quad /3.8/$$

Macierz C_m^T o wymiarach $m \times n$ tworzona jest z elementarnych macierzy C^e /2.45/ dla poszczególnych prętów podczas operacji scalania ramy, na podstawie znajomości numeracji jej węzłów i prętów i warunków przylegania. Równania /3.7/ i /3.8/ określają globalne związki kinematyczne i statyczne dla całej ramy. Do pełnego opisu pracy konstrukcji potrzebne są jeszcze związki fizyczne. W rozdziale 2.2.2 wyprowadziliśmy tradycyjną, nierównościową postać odcinkowo-liniowego warunku plastyczności /2.64/ dla elementu prętowego. Opisany on był za pośrednictwem hiperpłaszczyzn określających obszar naprężeń dopuszczalnych dla pręta /2.50/

$$B^e = \left\{ s^e \in R^6 \mid N^{eT} s^e \leq k^e \right\} \subset R^6$$

gdzie wektor modułów plastycznych $k^e \in R^{h^e}$ a macierz gradientów powierzchni granicznej N^e dla pręta ma wymiar $6 \times h^e$; h^e oznacza liczbę hiperpłaszczyzn.

Obszar naprężeń dopuszczalnych dla całej ramy jest iloczynem kartezjańskim obszarów warunku plastyczności dla poszczególnych prętów

$$B = B_1^e \times B_2^e \times \dots \times B_l^e \quad /3.9/$$

Wynika stąd, że globalny warunek plastyczności dla całej ramy, określający obszar B , można otrzymać, zapisując - w sposób niezależny - układy nierówności /2.64/ dla kolejnych prętów. Mamy zatem

$$B = \left\{ s \in R^n \mid N^T s \leq k \right\} \quad /3.10/$$

gdzie macierz N^T o wymiarach $h \times n$ ma blokowo-diagonalną strukturę. Na jej przekątnej znajdują się macierze N_i^{eT} dla kolejnych prętów $i = 1, 2, \dots, l$,

$$N^T = \text{diag} \left[N_1^{eT} \right], \quad i = 1, 2, \dots, l \quad /3.11/$$

a globalny wektor modułów plastycznych k zdefiniowany jest następująco

$$k = [k_1^e \quad k_2^e \quad \dots \quad k_l^e]^T \in R^h. \quad /3.12/$$

Liczbowe postacie macierzy M^e i wektora k^e dla pręta określone zostały w rozdziale 2.2.2 i Dodatku A /rys.2.10 i wzory /2.67/, /A.2//.

Została tym samym wprowadzona przestrzeń R^h modułów plastycznych / i jednocześnie mnożników plastycznych/, będąca l -krotnym iloczynem kartezjańskim przestrzeni R^{h^e} dla elementów

$$R^h = R_1^{h^e} \times R_2^{h^e} \times \dots \times R_l^{h^e} \quad /3.13/$$

Wymiar jej wynosi $h = h^e \cdot l$ /przy założeniu, że dla każdego pręta stosujemy typ linearyzacji warunku plastyczności o tej samej liczbie hiperpłaszczyzn ; w ogólnym zaś przypadku

$$h = \sum_{i=1}^l h_i^e \quad \text{i określa całkowitą liczbę hiperpłaszczyzn globalnego warunku plastyczności dla całej ramy.}$$

Możemy teraz sformułować zagadnienie nośności granicznej przestrzennych ram, opierając się na twierdzeniu statycznym. Poszukujemy maksymalnej wartości mnożnika μ proporcjonalnie narastającego obciążenia /3.1/ przy spełnieniu równań równowagi /3.8/ i warunku plastyczności /3.10/. Prowadzi to do następującego zadania

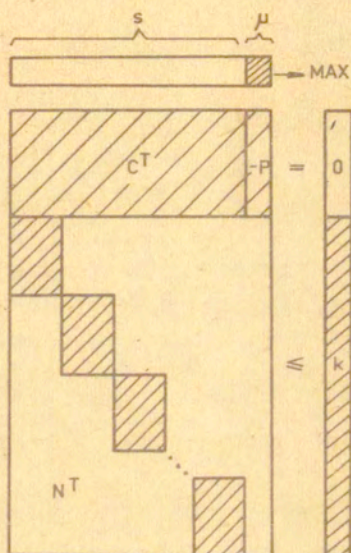
$$\text{znaleźć max } \mu \quad /a/$$

przy ograniczeniach

$$\mu p - C^T s = 0 \quad /b/ \quad /3.14/$$

$$N^T s \leq k \quad /c/$$

Zadaniem tego typu i metodami ich rozwiązywania zajmuje się dział matematyki zwany programowaniem liniowym [37,49,136]. Struktura macierzy zadania /3.14/ pokazana jest schematycznie na rys.3.1. Występuje tu w sumie $m + h$ ograniczeń oraz $n + 1$ zmiennych.



Rys.3.1. Struktura macierzy zadania /3.14/ nośności granicznej w podejściu statycznym.

Korzystając z teorii dualności w programowaniu liniowym, możemy formalnie zapisać zadanie dualne do /3.14/ w następującej postaci

$$\begin{aligned} & \text{znaleźć } \min k^T \dot{\lambda} & /a/ \\ & \text{przy ograniczeniach} & /3.15/ \\ & -C \dot{u} + N \dot{\lambda} = 0 & /b/ \\ & p^T \dot{u} = 1 & /c/ \\ & \dot{\lambda} \geq 0 & /d/ \end{aligned}$$

Macierz tego zadania jest transpozycją macierzy zadania pierwotnego /3.14/ z rys.3.1. Jak się okazuje, zadanie /3.15/ wyraża treść twierdzenia kinematycznego. Zmienne dualne

$\dot{u} \in R^m$ i $\dot{\lambda} \in R^h$ mają sens fizyczny prędkości uogólnionych przemieszczeń i prędkości mnożników plastycznych. Ograniczenia /b/ i /d/ - przy uwzględnieniu równań geometrycznych /3.7/ - przedstawiają stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia

$$\begin{aligned} \dot{q} &= N \dot{\lambda} \\ \dot{\lambda} &\geq 0 \end{aligned} \quad /3.16/$$

Warunek /c/ stanowi normalizację mocy obciążenia zewnętrznego i zapewnia tym samym dodatność mocy obciążeń na prędkościach uogólnionych przemieszczeń, co jest niezbędne do zapoczątkowania ruchu plastycznego. Zatem ograniczenia zadania /3.15/ określają kinematycznie dopuszczalne pole prędkości uogólnionych przemieszczeń. Z polem tym stowarzyszony jest kinematyczny mnożnik obciążenia, określony jako iloraz mocy dysypowanej przez moc obciążeń zewnętrznych. Przy warunku /c/ normalizacji mocy obciążeń jest on równy mocy dysypowanej

$$\mu_k = \frac{k^T \dot{\lambda}}{p^T \dot{u}} = k^T \dot{\lambda} \quad /3.17/$$

Wyrażenie to stanowi funkcję celu zadania /3.15/, która podlega minimalizacji. Tak więc, interpretacja mechaniczna zadania /3.15/ jest następująca. Poszukujemy najmniejszego mnożnika obciążenia w klasie kinematycznie dopuszczalnych mecha-

nizmów zniszczenia. Jest to właśnie treść twierdzenia kinematycznego.

Otrzymaliśmy w ten sposób sformułowanie zagadnienia nośności granicznej przestrzennych ram w postaci dualnej pary zadań programowania liniowego /3.14/, /3.15/. Do rozwiązywania zadań programowania liniowego służy tzw. metoda sympleksów [37, 49, 136]. Algorytm jej, mówiąc opisowo, polega na poruszaniu się po kolejnych wierzchołkach obszaru dopuszczalnego, zdefiniowanego przez ograniczenia zadania, w ten sposób, aby zapewnić nieujemne przyrosty funkcji celu. Pozwala to otrzymać rozwiązanie /lub stwierdzić brak jego istnienia lub nieograniczonosc funkcji celu/ w skończonej liczbie kroków, zwanych iteracjami sympleksowymi. Kroki te polegają na liniowych przekształceniach macierzy zadania, zwanej macierzą sympleksową, za pomocą tzw. transformacji Jordana [120, 136]. Metoda sympleksów pozwala rozwiązać jednocześnie oba zadania dualnej pary problemów /3.14/ , /3.15/ .

Rozwiązanie optymalne pary zadań /3.14 /, /3.15/ , czyli takie, które spełnia wszystkie ograniczenia i daje optymalną, skończoną wartość funkcji celu, odpowiada rozwiązaniu pełnemu $(\mu^*, s^*, \dot{u}^*, \dot{\lambda}^*)$ nośności granicznej. Jest więc zarówno statycznie, jak i kinematycznie dopuszczalne, a otrzymamy mnożnik obciążenia - równy optymalnej wartości zarówno pierwotnej /3.14a/ , jak i dualnej /3.15a / funkcji celu - przedstawia rzeczywisty mnożnik obciążenia granicznego. Rozwiązując natomiast jedynie układ równań i nierówności /bez warunku max czy min/, otrzymujemy tzw. rozwiązania dopuszczalne. Rozwiązanie dopuszczalne zadania /3.14/ określa statycznie dopuszczalne pole uogólnionych naprężeń i statyczny mnożnik obciążenia μ_s , będący oszacowaniem dolnym rzeczywistego mnożnika granicznego μ^* .

Rozwiązanie dopuszczalne zadania /3.15/ daje kinematycznie dopuszczalne pole prędkości uogólnionych przemieszczeń i kinematyczny mnożnik obciążenia μ_k , będący górnym oszacowaniem mnożnika granicznego μ^* z rozwiązania optymalnego.

Jeżeli rozwiązanie optymalne dualnej pary zadań /3.14/, /3.15/ jest niezdegenerowane, tzn. takie, dla którego $d + 1$

/gdzie $d = n - m$ jest stopniem statycznej niewyznaczalności konstrukcji/ ograniczeń nierównościowych /3.14 c/ jest spełnionych równościowo oraz $d + 1$ zmiennych $\dot{\lambda}^*$ zadania /3.15/ jest różnych od zera, wówczas mamy do czynienia z pełnym mechanizmem zniszczenia. Natomiast jeżeli rozwiązanie optymalne uaktywnia więcej niż $d + 1$ ograniczeń /3.14 c/, to otrzymujemy tzw. nadmechanizm, czyli mechanizm chwilowego ruchu o dodatkowych, zbędnych stopniach swobody. Wektor prędkości uogólnionych przemieszczeń \dot{u}^* , określający ten mechanizm, jest niejednoznaczny. Dla każdego takiego mechanizmu, optymalna wartość funkcji celu - a więc wartość mnożnika obciążenia granicznego μ^* - wyznaczona jest jednak jednoznacznie. W przypadku, gdy w rozwiązaniu optymalnym mniej niż $d + 1$ zmiennych $\dot{\lambda}^*$ jest różnych od zera, występuje wówczas tzw. lokalny mechanizm zniszczenia, co pociąga za sobą niejednoznaczny rozkład uogólnionych naprężeń. Natomiast dla każdego rozwiązania optymalnego wartość mnożnika obciążenia granicznego μ^* wyznaczona jest zawsze w sposób jednoznaczny.

Alternatywnym podejściem do rozwiązywania zagadnień nośności granicznej jest skorzystanie z twierdzenia Kuhna - Tuckera w stosunku do dualnej pary zadań /3.14/, /3.15/. Otrzymujemy następujący układ związków, zwany warunkami Kuhna - Tuckera,

$$C^T s = \mu p \quad /a/$$

$$C \dot{u} = N \dot{\lambda} \quad /b/ \quad /3.18/$$

$$p^T \dot{u} = 1 \quad /c/$$

$$N^T s \leq k \quad /d/$$

$$\dot{\lambda}^T [k - N^T s] = 0 \quad /e/$$

$$\lambda \geq 0 \quad /f/$$

którego spełnienie jest warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia rozwiązania optymalnego dualnej pary zadań /3.14/, /3.15/. Z mechanicznego punktu widzenia warunki te stanowią pełny komplet związków, opisujących stan graniczny dla dyskretniej konstrukcji z materiału sztywno-idealnie-plastycznego. Natomiast z matematycznego punktu widzenia, układ /3.18/ przedstawia tzw. liniowe zadanie komplementarne. Jednym z najbardziej zwanych algorytmów rozwiązywania tego typu zadań jest metoda Lemkego, oparta na technice eliminacji [33].

W naszym wypadku nie ma jednak sensu rozwiązywanie układu /3.18/. Wynika to chociażby z porównania liczby zmiennych i ograniczeń w nim występujących z wymiarami macierzy sympleksowej zadań /3.14/, /3.15/ z rys. 3.1. Lepiej jest rozwiązać dualną parę zadań programowania liniowego /3.14/, /3.15/. Można w tym celu korzystać z gotowych programów w formie standardowych pakietów, oferowanych przez większe firmy komputerowe, np. MPSX/370 [74] opracowany przez IBM lub ICL-owski pakiet LP MARK3 [88]. Opis innych istniejących pakietów i ich krótką charakterystykę można znaleźć w [113]. Wspomniane programy są dość efektywne i mogą rozwiązywać w miarę duże zadania przy wykorzystaniu stosunkowo niewielkiej pamięci operacyjnej maszyny cyfrowej. Dzieje się tak dzięki współpracy z pamięcią zewnętrzną /dyskową/, gdzie przechowywana jest macierz sympleksowa oraz pośrednie wyniki iteracji. Jednakże ze wzrostem wymiarów macierzy zadania wydłuża się znacznie czas obliczeń.

W naszym zadaniu obliczenia nośności granicznej ram przestrzennych, wg modelu /3.14/, /3.15/, wymiary macierzy sympleksowej są znaczne ze względu, przede wszystkim, na dużą liczbę ograniczeń nierównościowych /3.14 c/, opisujących warunek plastyczności dla tego typu konstrukcji. Wpływa to tym bardziej negatywnie na czas obliczeń, gdyż w algorytmach sympleksowych długość obliczeń w większym stopniu zależy od liczby ograniczeń niż od liczby zmiennych.

Jednocześnie macierz dualnej pary zadań /3.14/, /3.15/ ma specjalną, blokowo-diagonalną strukturę /rys.3.1/. Celowe jest zatem poszukiwanie takich metod rozwiązywania, które wykorzystywałyby tę strukturę i byłyby bardziej efektywne niż bezpośrednie rozwiązywanie zadania w początkowej postaci /3.14/, czy /3.15/. Na temat metod rozwiązywania dużych zadań programowania liniowego o regularnej strukturze istnieje wiele opracowań teoretycznych [81,38] .

Jednakże o numerycznej efektywności tych metod, nie mówiąc już o wynikach zastosowań do konkretnych dużych zadań, powiedziano bardzo niewiele. Ogólnie, są to metody dekompozycji, które polegają na rozbiciu dużego zadania - zgodnie z jego strukturą - na podproblemy o mniejszych wymiarach i iteracyjnym ich rozwiązywaniu łącznie z problemem głównym, w którym występują tylko ograniczenia łączące wszystkie zmienne /lub tylko zmienne wspólne dla wszystkich ograniczeń/. Metody takie są korzystne pod względem zaoszczędzenia pamięci maszyny cyfrowej. Istotne to jest szczególnie w sytuacji, gdy dysponujemy implementacją algorytmu sympleksowego, w której wszystkie macierze przechowywane są w pamięci operacyjnej. Natomiast pod względem skrócenia czasu obliczeń metody dekompozycji mogą okazać się mało efektywne.

W następnym punkcie przedstawimy metody redukcji wymiarów macierzy sympleksowej dualnej pary zadań /3.14/, /3.15/ metodą parametrów nadliczbowych. W punkcie trzecim, korzystając z wierzchołkowego opisu globalnego warunku plastyczności dla pręta, wyprowadzonego w rozdziale 2.2.1, dokonamy transformacji zmiennych /uogólnionych naprężeń/ zadania statycznego /3.14/. Otrzymamy w ten sposób nowe nieklasyczne sformułowanie zagadnienia nośności granicznej w postaci zadania programowania liniowego, którego wymiary macierzy będą znacznie zredukowane w porównaniu z początkową postacią macierzy z rys.3.1. Pokażemy następnie, na przykładach obliczeń przestrzennych ram, że podejście takie będzie bardzo efektywne pod względem skrócenia czasu obliczeń.

3.2. Redukcja wymiarów macierzy zadania metodą parametrów nadliczbowych

Rozważmy statyczne zadanie obliczania nośności granicznej przestrzennych ram, sformułowane w poprzednim punkcie w postaci /3.14/. Macierz C^T układu równań równowagi ma wymiar $m \times n$ i jest pełnego "wierszowego" rzędu m , gdyż wszystkie równania równowagi są liniowo niezależne. Rozpatrujemy konstrukcje, dla których stopień statycznej niewyznaczalności $d = n - m$ jest większy od zera. Wynika stąd, że niesprzeczny układ równań równowagi /3.14 b/

$$C^T s = \mu p$$

jest niedookreślony. Ogólne rozwiązanie tego układu wyraża się w postaci / por. Dodatek C.3./

$$s = C^{T/1/} (\mu p) + (I - C^T /1/ C^T) z, \quad /3.19/$$

gdzie

$C^T /1/$ - oznacza tzw. 1-szą uogólnioną odwrotność macierzy C^T , tzn. taką $n \times m$ macierz, która spełnia równanie macierzowe

$$C^T C^T /1/ C^T = C^T \quad /por.wzór /C.9/ /,$$

I - jest $n \times n$ macierzą jednostkową,

z - jest dowolnym wektorem $\in R^n$.

Jeżeli macierz jest pełnego "wierszowego" rzędu, co ma miejsce w przypadku macierzy C^T , wówczas jej 1-sza uogólniona odwrotność $C^T /1/$ redukuje się do tzw. prawej odwrotności, określonej przez równanie $C^T C^T /1/ = I_m / I_m - m \times m$ macierz jednostkowa/.Prawa odwrotność jest więc szczególnym przypadkiem 1-szej uogólnionej odwrotności.

Ogólne rozwiązanie układu /3.14 b/ w postaci /3.19/ jest sumą pewnego rozwiązania szczególnego

$$s_1 = C^T /1/ (\mu p) \quad /3.20/$$

oraz rozwiązania s_0 układu jednorodnego

$$s_0 = (I - C^T /1/ C^T) z. \quad /3.21/$$

Inaczej mówiąc, wektor s_0 należy do jądra operatora C^T , będącego podprzestrzenią liniową przestrzeni R^n ,

$$s_0 \in N(C^T) = \{s \in R^n \mid C^T s = 0\} \subset R^n \quad /3.22/$$

Zatem macierz $(I - C^T /1/ C^T)$ we wzorze / 3.21/ generuje jądro $N(C^T)$. Z mechanicznego punktu widzenia s_0 jest wektorem samonaprężeń, czyli naprężeń pozostających w równowadze z zerowym obciążeniem zewnętrznym.

W celu obliczenia 1-szej uogólnionej odwrotności $C^T /1/$, przedstawmy macierz C^T - po odpowiedniej permutacji kolumn i ewentualnie wierszy - w postaci

$$C^T = \left[\underbrace{\begin{bmatrix} C_z^T \\ \vdots \\ C_n^T \end{bmatrix}}_m \quad \underbrace{\quad}_d \right] \quad /3.23/$$

gdzie

C_z^T - $m \times m$ podmacierz kwadratowa rzędu m ,

C_n^T - $m \times d$ podmacierz rzędu m ,

$d = n - m$.

Wówczas za $C^T /1/$ możemy przyjąć następującą macierz

/por. wzór /C.14/ /

$$C^T /1/ = \left[\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{c} C_z^T \\ z \end{array} \right) & -1 \\ \hline & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} m \\ d \end{array} \quad /3.24/$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_m$

Dokonując permutacji składowych wektora s , identycznej jak dla kolumn macierzy C^T w /3.23/,

$$s = \left[s_z \mid s_n \right]^T, \quad /3.25/$$

gdzie $s_z \in R^m$, $s_n \in R^d$, $d = n - m$,

oraz podstawiając /3.23/ i /3.24/ do /3.19/, otrzymujemy ogólne rozwiązanie układu /3.14 b/ w postaci

$$\begin{array}{l} m \\ d \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} s_z \\ s_n \end{array} \right] = \mu \left[\begin{array}{c|c} C_z^T & -1 \\ \hline & 0 \end{array} \right] p + \left[\begin{array}{c|c} 0 & -C_z^T -1 \quad C_n^T \\ \hline 0 & I_d \end{array} \right] z \end{array} \right. \quad /3.26/$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_m \quad \underbrace{\hspace{10em}}_d$

Wprowadzając następujące oznaczenia

$$C_o^T = \left(\begin{array}{c} C_z^T \\ z \end{array} \right)^{-1} C_n^T \quad /3.27/$$

$$p_o = \left(C_z^T \right)^{-1} p$$

i rozpisując postać /3.26/ - z uwzględnieniem podziału wektora $z \in R^n$ na dwa podwektory $z_1 \in R^m$ i $z_2 \in R^d$, otrzymujemy

$$s_z = \mu p_o - C_o^T z_2$$

$$s_n = z_2$$

/3.28/

Następnie, podstawiając /3.28/₂ do /3.28/₁, uzyskujemy wyrażenie na s_z w funkcji s_n

$$s_z = \mu p_0 - C_0^T s_n \quad /3.29/$$

Staje się teraz jasny sens podziału /3.25/ wektora $s \in R^n$ na dwa podwektory $s_z \in R^m$ i $s_n \in R^d$. Wektor s_n przedstawia zmienne niezależne, a s_z - zmienne zależne. Wzór /3.29/ wyraża zmienne zależne w funkcji obciążenia i zmiennych niezależnych. Tym samym ogólna liczba n zmiennych /składowych wektora $s/$ została zredukowana do $d = n - m$ zmiennych niezależnych /składowych wektora $s_n/$.

Postępowanie takie znane jest w analizie sprężystej pod nazwą metody sił [111]. Pierwszy etap tej metody polega na wybraniu ustroju podstawowego. Odpowiada to dokonaniu podziału /3.25/ wektora uogólnionych naprężeń s na zmienne zależne s_z i zmienne niezależne s_n , inaczej zwane parametrami nadliczbowymi, których liczbę określa stopień statycznej niewyznaczalności układu $d = n - m$. Pozwala to następnie, po dokonaniu odpowiednich permutacji i podziałów w macierzy równań równowagi i macierzy sprężystości, wyprowadzić kanoniczny układ równań metody sił, z którego oblicza się wartości parametrów nadliczbowych s_n . Podstawiając s_n do wzoru /3.29/ wyznacza się pozostałe zmienne zależne s_z .

Metodę sił, polegającą na wyrażeniu części składowych s_z wektora uogólnionych naprężeń w funkcji obciążenia zewnętrznego i parametrów nadliczbowych s_n , możemy również stosować w zagadnieniach obliczania nośności granicznej, sformułowanych w postaci dualnej pary zadań programowania liniowego. Pozwala to zredukować wymiary macierzy sympleksowej zagadnienia. Rozważmy najpierw podejście statyczne /3.14/.

Dokonując przegrupowania kolumn macierzy N^T - identycznego, jak /3.23/ dla C^T -i podstawiając związek /3.29/ do warunku plastyczności /3.14 o/, zapisanego w formie

$$N^T z s + N^T_n s_n \leq k, \quad /3.30/$$

otrzymujemy następującą jego postać

$$\mu p' + \tilde{N}^T_n s_n \leq k, \quad /3.31/$$

gdzie

$$p' = N^T_z (C^T_z)^{-1} p \quad /3.32/$$

$$\tilde{N}^T_n = N^T_n - N^T_z C^T_o,$$

wymiar macierzy \tilde{N}^T_n wynosi $h \times d$

Zatem ostatecznie, po powyższych przekształceniach, możemy statyczne zagadnienie obliczania nośności granicznej /3.14/ zapisać w funkcji parametrów nadliczbowych s_n i mnożnika μ

znaleźć max μ
przy ograniczeniach

/3.33/

$$\mu p' + \tilde{N}^T_n s_n \leq k$$

W porównaniu z wyjściowym zadaniem /3.14/ uzyskaliśmy redukcję wymiarów macierzy sympleksowej o m ograniczeń /eliminacja równań równowagi/ i m zmiennych. Rozwiązując zadanie /3.33/, otrzymujemy mnożnik graniczny μ oraz s_n , na podstawie których obliczamy pozostałe zmienne zależne s_z według wzoru /3.29/.

Odpowiednikiem wyrugowania z równań równowagi zmiennych zależnych s_z , wg wzoru /3.29/, jest dla dualnych równań geometrycznych /3.7/, zapisanych w prędkościach,

$$C \dot{u} = \dot{q} \quad /3.34/$$

eliminacja wektora prędkości przemieszczeń \dot{u} . Po odpowiednim przegrupowaniu składowych $\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_z \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$,

gdzie $\dot{q}_z \in R^m$, $\dot{q}_n \in R^d$, dzielimy /3.34/ na dwie grupy równań

$$C_z \dot{u} = \dot{q}_z$$

$$C_n \dot{u} = \dot{q}_n$$

/3.35/

Po podstawieniu $\dot{u} = C_z^{-1} \dot{q}_z$ do /3.35/₂, otrzymujemy równanie zgodności odkształceń

$$C_o \dot{q}_z - \dot{q}_n = 0$$

/3.36/

gdzie C_o określona jest wzorem /3.27/₁.

Zapisując zadanie dualne do /3.33/, otrzymujemy zredukowaną postać zagadnienia kinematycznego /3.15/

znaleźć $\min k^T \dot{\lambda}$

przy ograniczeniach

$$\tilde{N}_n \dot{\lambda} = 0$$

$$p'^T \dot{\lambda} = 1$$

/3.37/

$$\dot{\lambda} \geq 0$$

gdzie \tilde{N}_n i p' określone są wzorem /3.32/

Postać tę możemy również uzyskać przez dołączenie do warunku zgodności odkształceń /3.36/ stowarzyszonego prawa płynięcia

$$\dot{q}_z = N_z \dot{\lambda}$$

$$\dot{q}_n = N_n \dot{\lambda}$$

/3.38/

i podstawieniu z /3.35/₁ $\dot{u} = C_z^{-1} N_z \dot{\lambda}$ do

warunku $p'^T \dot{u} = 1$. Jest to oczywiście równoważne z eliminacją

ū bezpośrednio z równań /b/ zadania dualnego /3.15/. Występuje tu identyczność, jak dla podejścia statycznego, redukcja wymiarów macierzy sympleksowej o m ograniczeń i m zmiennych.

Należy zdawać sobie sprawę, że w przedstawionej metodzie wybór parametrów nadliczbowych, spełniających tożsamościowo warunki równowagi statycznej, nie jest jednoznaczny. Podstawowym problemem do rozwiązania przy opracowaniu algorytmu redukcji jest automatyzacja podziału macierzy C^T na C_z^T i C_n^T . Można tego dokonać na różne sposoby, uzyskując różną dokładność i czasochłonność obliczeń. W pracy [43] autor badał różne sposoby selekcji zmiennych nadliczbowych celem wybrania metody optymalnej. Jako kryterium porównania testowanych algorytmów przyjęto wskaźnik uwarunkowania otrzymywanej podmacierzy kwadratowej C_z^T i czas obliczeń.

Rozpatrzono następujące metody :

1. metoda eliminacji Jordana [120]
 - a/ z częściowym wyborem elementu kierunkowego
 - b/ z pełnym wyborem elementu kierunkowego metodą J. Robinsona i G.W. Haggemachera [109]
2. metoda L.A. Rozina [111]
3. metoda rozkładu trójkątnego [123]
4. metoda Householdera rozkładu trójkątno-ortogonalnego [83] .

Na podstawie przeprowadzonych testów numerycznych dla płaskich ustrojów ramowych i kratowych stwierdzono, że do miana optymalnych /tzn. dających dobre uwarunkowanie macierzy kwadratowej C^T przy krótkich czasach obliczeń/ pretendować może metoda

eliminacji Jordana z wyborem elementu kierunkowego wg Robinsona i Haggemachera oraz metoda rozkładu trójkątno-ortogonalnego oparta na ortogonalnych transformacjach Householdera. Szczegółowe opisy algorytmów wraz z wynikami obliczeń numerycznych zawarte są w pracy [43] .

Należy jeszcze powiedzieć o celowości stosowania wstępnej redukcji wymiarów macierzy dualnej pary zadań /3.14/, /3.15/. Każda metoda, jakkolwiek szybka by nie była, wiąże się

z pewnym nakładem obliczeniowym i jest tym bardziej opłacalna, im większy daje zysk w zmniejszeniu wymiarów zadania. Dlatego należy zdawać sobie sprawę w stosunku do jakich typów konstrukcji warto taką redukcję stosować. W przypadku podejścia statycznego /3.14/ stosunek liczby wyeliminowanych zmiennych do całkowitej liczby uogólnionych naprężeń wynosi m/n . Natomiast udział wyeliminowanych ograniczeń równy jest

$\frac{m}{m+h}$ gdzie h - liczba hiperpłaszczyzn opisujących warunki

plastyczności. Możemy wyrazić te stosunki w zależności od liczby prętów " l " i liczby węzłów " w " konstrukcji. Dla ram przestrzennych liczba równań równowagi m /czyli liczba stopni swobody/ równa jest $m = 6 \cdot w$, a liczba uogólnionych naprężeń $n = 6 \cdot l$ - zgodnie z przyjętym w rozdz. 2 modelem statyki elementu prętowego. Natomiast dla ram płaskich /por.

[17,114,115] / liczby te wynoszą : $m = 3 \cdot w$, $n = 3 \cdot l$.

Zarówno więc, dla ram przestrzennych, jak i płaskich, redukcja liczby zmiennych wynosi $\frac{m}{n} = \frac{w}{l}$.

Jednakże w przypadku konstrukcji ortogonalnych stosunek ten jest mniejszy dla ustrojów przestrzennych niż dla płaskich. Wynika to z faktu, że dla ramy przestrzennej istnieją węzły, w których łączy się więcej prętów niż w dowolnym węźle ramy płaskiej.

Natomiast, jeśli chodzi o redukcję liczby ograniczeń, to wynosi ona $\frac{m}{m+h}$ i równa jest

- dla ram przestrzennych :
$$\frac{6w}{6w+h^e \cdot l}$$

- dla ram płaskich :
$$\frac{3 \cdot w}{3w + h^e \cdot l}$$

gdzie h^e jest liczbą hiperpłaszczyzn warunku plastyczności dla pręta. Ponieważ h^e dla pręta ramy przestrzennej jest znacznie większe niż dla pręta ramy płaskiej a stosunek w/l jest mniejszy dla ortogonalnych ustrojów przestrzennych w porównaniu z płaskimi, wynika stąd, że udział eliminowanych og-

raniczeń równościowych jest większy dla konstrukcji płaskich niż dla przestrzennych.

Zatem ogólny wniosek jest taki, że wstępna redukcja wymiarów zadania jest bardziej opłacalna w przypadku ustrojów płaskich.

Należy również pamiętać, że po dokonaniu takiej redukcji zostaje zaburzona blokowo-diagonalna struktura zadania. W zredukowanym modelu /3.33/, bądź dualnym /3.37/, cała macierz sympleksowa jest nieregularna. Jeżeli już decydujemy się na stosowanie powyższej metody w praktycznych obliczeniach, to korzystniej jest rozwiązywać zadanie dualne /3.37/, bowiem występuje w nim - w porównaniu z /3.33/ - większa redukcja ograniczeń niż zmiennych /zarówno dla płaskich, jak i przestrzennych ram/. A jak wiadomo, liczba iteracji sympleksowych jest proporcjonalna właśnie do liczby ograniczeń.

3.3. Redukcja wymiarów macierzy zadania metodą wierzchołkowego opisu powierzchni granicznej

W rozdziale 3.1 podane zostało tradycyjne sformułowanie zagadnienia obliczenia nośności granicznej w postaci dualnej pary zadań programowania liniowego /3.14/, /3.15/. Warunek plastyczności był tam opisany przez równania hiperpłaszczyzn ograniczających wypukły wielościan /3.10/

$$\mathcal{B} = \{ s \in \mathbb{R}^n \mid N^T s \leq k \}$$

Jednocześnie w rozdziale 2.2.1 pokazaliśmy, że warunek plastyczności dla pojedynczego elementu prętowego może być przedstawiony w postaci kombinacji wypukłej /2.55/ wierzchołków wielościanu granicznego /2.50/ dla pręta

$$\mathcal{B}^e = \{ s^e \in \mathbb{R}^6 \mid N^{eT} s^e \leq k^e \}$$

Korzystając ponownie z faktu, że obszar dopuszczalny dla całej konstrukcji jest iloczynem kartezjańskim /3.9/ obszarów dopuszczalnych dla poszczególnych prętów

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1^e \times \mathcal{B}_2^e \times \dots \times \mathcal{B}_l^e$$

gdzie l - liczba prętów,

możemy opisać wielościan \mathcal{B} na podstawie znajomości wierzchołków wielościanów \mathcal{B}_i^e ($i = 1, 2, \dots, l$) - bez potrzeby generowania bezpośrednio wszystkich wierzchołków \mathcal{B}_i^e .
 W tym celu, z macierzy W_i^e i wektorów jedynek e_i^e , występujących we wzorze /2.55/, tworzymy globalne macierze blokowo-diagonalne W i D dla całej konstrukcji

$$W = \text{diag} \left[W_i^e \right] \quad i = 1, 2, \dots, l \quad /3.39/$$

$$D = \text{diag} \left[e_i^e \right],$$

gdzie

W_i^e - $6 \times v^e$ macierz, której kolumny reprezentują wierzchołki wielościanu \mathcal{B}_i^e ;
 liczbowa postać W_i^e podana została w rozdziale 2.2.1 /wzór /2.63/ / - dla najprostszej aproksymacji powierzchni granicznej oraz w Dodatku A / wzór A.2 / - dla bardziej dokładnej aproksymacji ;

$$e_i^e = [1 \ 1 \ \dots \ 1] \in R^{v^e} ;$$

v^e - liczba wierzchołków wielościanu granicznego dla pręta.

Wymiar macierzy W wynosi $n \times v$, a macierzy D - $l \times v$, gdzie $n = 6 \cdot l$, a $v = v^e \cdot l$. Liczba v jest sumą liczby wierzchołków wielościanów granicznych \mathcal{B}_i^e dla wszystkich prętów, tzn.

$v = \sum_{i=1}^l v_i^e$. Przy założeniu, że dla każdego pręta stosujemy ten sam typ linearyzacji powierzchni granicznej, możemy napisać $v = v^e \cdot l$.

Globalny wektor uogólnionych naprężeń s spełniający warunek plastyczności, tzn. $s \in \mathcal{B}$, możemy wyrazić w postaci

kombinacji wypukłej wierzchołków wielościanów granicznych B_i^e dla poszczególnych prętów. W postaci macierzowej zapisujemy to następująco

$$s = W \alpha$$

z warunkami

$$D \alpha = e$$

/3.40/

$$\alpha \geq 0$$

gdzie

$$\alpha \in R^V = R_1^{V^e} \times R_2^{V^e} \times \dots \times R_L^{V^e}$$

$$e = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in R^L$$

Wektor α przedstawia współczynniki kombinacji wypukłej wierzchołków wielościanów granicznych dla kolejnych prętów. Wzór /3.40/ określa transformację zmiennych $s \in R^n$ na

$\alpha \in R^V$. Stosując ją w statycznym zadaniu /3.14/ obliczania nośności granicznej, otrzymamy przekształconą jego postać

znaleźć $\max \mu$ /a/
przy ograniczeniach

$$\mu p - C^T W \alpha = 0 \quad /b/$$

/3.41/

$$D \alpha = e \quad /c/$$

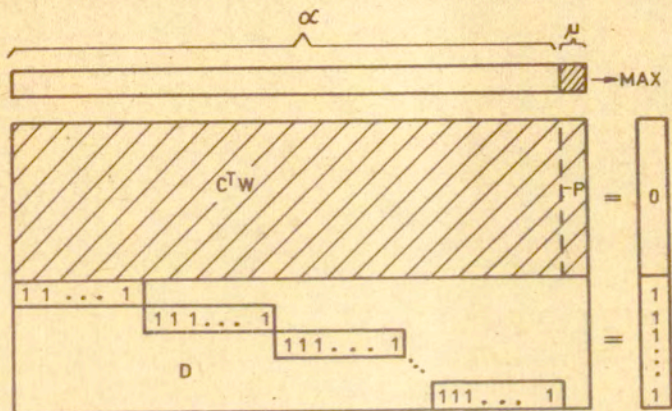
$$\alpha \geq 0 \quad /d/$$

W równaniach /b/ występuje iloczyn macierzy $C^T W$.

Możemy go obliczyć, układając najpierw, podczas operacji skalowania elementów ramy, globalne macierze C^T i W z macierzy dla prętów C^{eT} i W^e , a następnie wykonując mnożenie $C^T \cdot W$. Jednak, w praktyce numerycznej, jest to podejście nieoptymalne zarówno ze względu na konieczność przechowywania w pamięci komputera całych macierzy C^T i W , jak i ze względu na długi czas wykonywania operacji ich mnożenia. Bardziej celowe jest ge-

nerowanie iloczynu $C^T W$ na podstawie iloczynów macierzy C^{eT} , W^e dla poszczególnych prętów. Iloczyn C^{eT} , W^e możemy obliczyć, korzystając z liczbowych postaci macierzy C^{eT} , /2.45/ równań równowagi dla pręta i macierzy W^e //2.63/, /A.2// wierzchołków wielościanu granicznego dla pręta. Po wymnożeniu C^{eT} i W^e otrzymujemy liczbową postać iloczynu C^{eT} , W^e , zamieszczoną w Dodatku A. Iloczyn C^{eT} , W^e jest bezpośrednio zakodowany w programie w postaci jednej macierzy. Globalna macierz $C^T W$ tworzona jest na podstawie macierzy C^{eT} , W^e dla kolejnych prętów, podczas operacji scalania - podobnie, jak tworzona była globalna macierz równań równowagi C^T zadania /3.14/ w rozdziale 3.1. Szczegóły organizacji programu numerycznego, generującego macierze zadania /3.41/ przedstawione są w Dodatku B.

Zadanie programowania liniowego /3.41/ przedstawia nowe sformułowanie zagadnienia obliczenia nośności granicznej. W zadaniu tym występują nieujemne zmienne bezwymiarowe α oraz mnożnik obciążenia μ , podlegający maksymalizacji. Natomiast ograniczenia są tylko równościowe i jest ich znacznie mniej niż zmiennych. Struktura globalnej / $m + l$ / $x / v + 1$ / macierzy sympleksowej tego zadania pokazana jest na rys.3.2. Rozwiązując zadanie /3.41/, otrzymujemy mnożnik obciążenia granicznego i wektor α współczynników wypukłej kombinacji wierzchołków wielościanów granicznych dla poszczególnych prętów oraz wektor prędkości uogólnionych przemieszczeń \dot{u} , przedstawiający zmienne dualne do przekształconych równań równowagi /3.41 b/. Następnie obliczamy wartości uogólnionych naprężeń według wzoru $s = W \alpha$.



Rys.3.2. Struktura macierzy zadania /3.41/.

Porównamy teraz wymiary macierzy sympleksowych zadania w początkowej postaci /3.14/, w której warunek plastyczności opisany był za pośrednictwem hiperpłaszczyzn, i zadania przekształconego w postaci /3.41/, w której wykorzystano wierzchołkowy opis warunku plastyczności. W obu zadaniach występuje tyle samo / m / ograniczeń, przedstawiających równania równowagi. Różnica istnieje w pozostałej liczbie ograniczeń, reprezentujących warunek plastyczności. W tradycyjnym sformułowaniu /3.14/ mamy $h^e \cdot l$ nierówności /3.14 c/, gdzie l jest liczbą prętów, a h^e - liczbą hiperpłaszczyzn warunku plastyczności dla pręta, zależną od dokładności aproksymacji powierzchni granicznej. W opisie wierzchołkowym istnieje l równań /3.41 c/, wyrażających warunek wypukłej kombinacji wierzchołków wielościanów granicznych, w postaci której wyrażony jest wektor uogólnionych naprężeń dopuszczalnych. Tak więc, w sformułowaniu /3.41/ występuje w sumie o $l \cdot (h^e - 1)$

mniej ograniczeń. Różnica ta wynosi $3l$ dla najprostszej aproksymacji /typu A/ i $95l$ dla bardziej dokładnej /typu B/ aproksymacji powierzchni granicznej. Natomiast, jeżeli chodzi o liczbę zmiennych, to sytuacja jest odwrotna: W sformułowaniu tradycyjnym /3.14/ występuje $6l$ uogólnionych naprężeń / po 6 uogólnionych naprężeń dla każdego pręta/, a w /3.41/ mamy $v^e l$ nieujemnych współczynników α . Zatem, przekształcając problem /3.14/ do postaci /3.41/, powiększamy liczbę zmiennych o $6l$ bądź o $70l$ - w zależności od dokładności linearyzacji powierzchni granicznej. Wyniki porównania wymiarów macierzy obu zadań zebrane są w Tabeli 3.1. Widzimy więc, że w zadaniu /3.41/ występuje zawsze mniej ograniczeń, ale za to więcej zmiennych. Przy czym liczba zredukowanych ograniczeń jest większa niż liczba dodatkowych zmiennych. Mając na uwadze fakt, że czas obliczeń przy rozwiązywaniu zadań programowania liniowego metodą sympleksów zależy w głównym stopniu od liczby ograniczeń, należy oczekiwać, że z numerycznego punktu widzenia sformułowanie wierzchołkowe /3.41/ powinno być bardziej korzystne niż /3.14/.

W tabeli 3.1 przedstawione są również wyniki porównania wymiarów macierzy zadania /3.41/ z wymiarami macierzy zadania kinematycznego /3.15/. Różnica w liczbie ograniczeń wynosi $m - 5l - 1$. Biorąc pod uwagę, że liczba stopni swobody ramy przestrzennej wynosi $m = 6w$, gdzie w jest liczbą węzłów, widzimy, że w zadaniu /3.41/ występuje mniej ograniczeń niż w /3.15/, jeżeli między liczbą węzłów i liczbą prętów l zachodzi następująca nierówność

$$w < \frac{5}{6} \cdot l + \frac{1}{6}$$

Natomiast, jeżeli $w \geq \frac{5}{6} \cdot l + \frac{1}{6}$, co ma miejsce, gdy stosunek liczby węzłów do liczby prętów jest bliski jedności /oczywiście zawsze $\frac{w}{l} \leq 1$ /, czyli gdy np. obciążenie ciągłe na pręcie zastępujemy obciążeniem skupionym, wprowadzając przy tym dodatkowe węzły poza naturalnymi połączeniami prętów, wówczas w zadaniu /3.41/ występuje więcej ograniczeń niż

	wymiary zad./3.41/	wymiary zad./3.14/	różnica wymiarów /3.41/ - /3.14/	wymiary zad./3.15/	różnica wymiarów /3.41/ - /3.15/
liczba ograniczeń	$m+1$	$m+h^e l$	$-1(h^e-1) = \begin{cases} -311 & \text{dla A/} \\ -951 & \text{dla B/} \end{cases}$	$6l+1$	$m-5l-1$ dla A/ i B/
liczba zmiennych	$v^e l+1$	$6l+1$	$l(v^e-6) = \begin{cases} 6l & \text{dla A/} \\ 70l & \text{dla B/} \end{cases}$	$m+h^e l$	$l(v^e-h^e)-m+1 =$ $= -20l-m+1$ dla A/ i B/

Oznaczenia:

- l - liczba prętów
- h^e - liczba hiperpłaszczyzn warunku plastyczności dla pręta
- v^e - liczba wierzchołków warunku plastyczności dla pręta
- m - liczba stopni swobody ramy
- A/ - mniej dokładna aproksymacja warunku plastyczności : $h^e = 32$, $v^e = 12$
- B/ - bardziej dokładna aproksymacja warunku plastyczności : $h^e = 96$, $v^e = 76$

Tabela 3.1. Porównanie wymiarów zadania /3.41/ z /3.14/ i /3.15/.

w /3.14/. Jeżeli chodzi o liczbę zmiennych, to w /3.41/ jest ich zawsze znacznie mniej.

Z powyższej analizy wynika, że w praktycznych obliczeniach nośności granicznej przestrzennych ram najbardziej celowe jest rozwiązywanie zadania w postaci /3.41/, wykorzystującej wierzchołkowy opis powierzchni granicznej.

3.4. Przykłady obliczeń

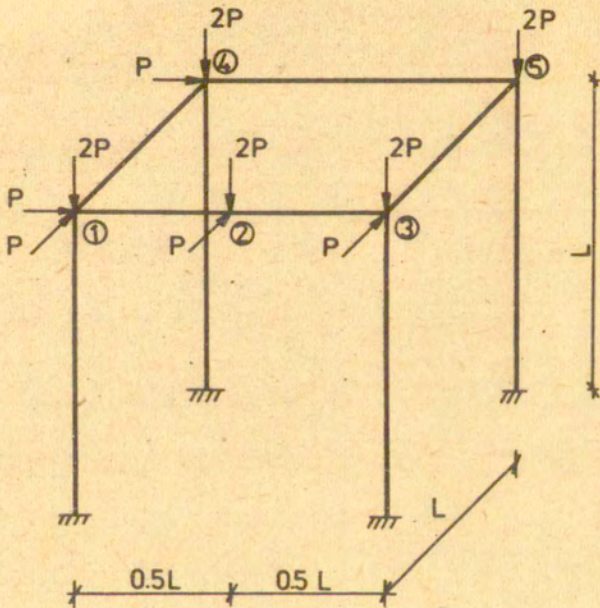
Na przykładach ortogonalnych ram przestrzennych pokażemy teraz zastosowanie przedstawionych w rozdziałach 3.1 i 3.3 metod rozwiązywania zagadnienia nośności granicznej. Rozważać będziemy sformułowanie zagadnienia w tradycyjnej postaci /3.14/ oraz sformułowanie /3.41/, w którym wykorzystano wierzchołkowy opis warunku plastyczności. Porównamy efektywność obydwu metod zarówno przy stosowaniu najprostszej, typu A, aproksymacji powierzchni granicznej, jak i bardziej dokładnej, typu B. Obliczenia przeprowadzono, wykorzystując napisane programy numeryczne GEN i GEW /patrz Dodatek B/, generujące macierze sympleksowe zadań /3.14/ i /3.41/. Zadania programowania liniowego rozwiązywano przy użyciu programu XDLA [88].

Przykład 3.4.1 dotyczy ramy przestrzennej pokazanej na rys.3.3. Wszystkie pręty mają przekrój dwuteowy i jednakowe moduły plastyczne. Nośność graniczna liczona była przy stosowaniu dwóch typów aproksymacji powierzchni granicznej /por. rozdz.2.2/:

typu A - najprostszej aproksymacji /2.57/

typu B - bardziej dokładnej /2.58/

Program GEN generuje macierz sympleksową zadania w tradycyjnej postaci /3.14/, a program GEW - zadania w opisie wierzchołkowym /3.41/. Struktura i wymiary tych macierzy wraz z danymi, dotyczącymi przebiegu rozwiązywania zadań programowania liniowego przez program XDLA, przedstawione są na rys.3.4 A - w przypadku stosowania najprostszej aproksymacji, typu A, powierzchni granicznej oraz na rys.3.4B - w przypadku bardziej dokładnej aproksymacji, typu B. W przypadku bardziej dokładnej



$$L = 1$$

$$m_{ox} = 15$$

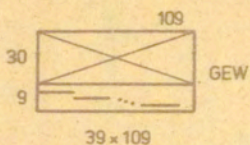
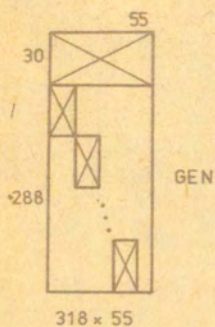
$$m_{oy} = 2$$

$$m_{oz} = 2$$

$$n_o = 90$$

Rys. 3.3

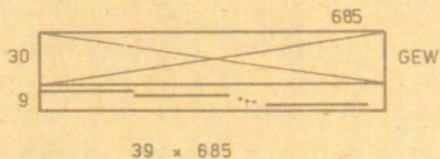
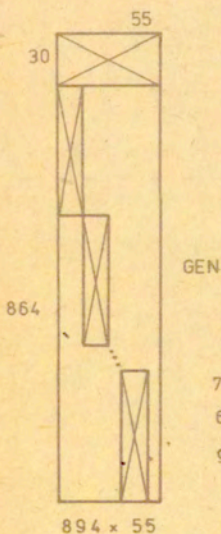
A/



55 sek.
55 iteracji
gęstość 8,04 %

1 min. 53 sek.
56 iteracji
gęstość 7,28 %

B/



3 min. 05 sek.
97 iteracji
gęstość 20,21%

7 min. 15 sek.
69 iteracji
gęstość 3,76 %

Rys.3.4. Wymiary macierzy sympleksowych dla ramy z rys.3.3.

aproksymacji występuje znaczne powiększenie wymiarów macierzy. W sformułowaniu tradycyjnym /3.14/ liczba ograniczeń wzrosła prawie trzykrotnie, a w sformułowaniu wierzchołkowym /3.41/ liczba zmiennych zwiększyła się przeszło sześciokrotnie. Powoduje to wydłużenie czasu obliczeń - w modelu tradycyjnym prawie czterokrotnie oraz w modelu wierzchołkowym ponad trzykrotnie.

Porównując czasy rozwiązywania zadania programowania liniowego w obydwu metodach, widzimy, że nastąpiło ponad dwukrotne przyspieszenie obliczeń w przypadku stosowania opisu wierzchołkowego - zarówno dla mniej dokładnej, jak i bardziej dokładnej aproksymacji powierzchni granicznej.

Ostateczne rozwiązania obydwu metod są oczywiście identyczne. Mnożniki obciążenia granicznego wynoszą

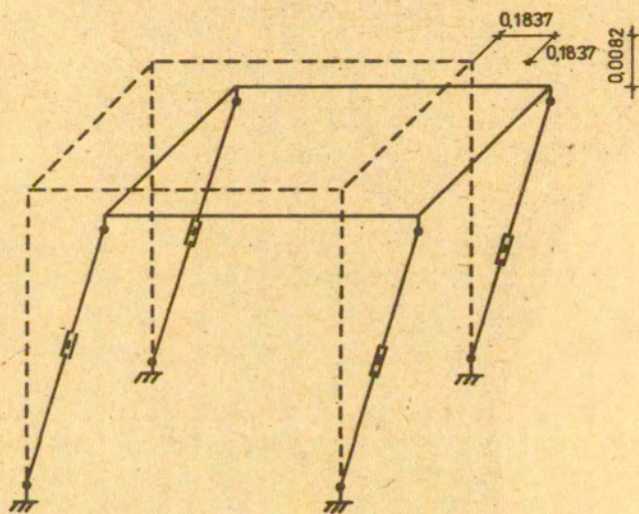
$$\mu = 2.9388 \text{ dla aproksymacji typu A}$$

oraz

$$\mu = 3.2204 \text{ dla aproksymacji typu B.}$$

Tak więc, przy dokładniejszej linearyzacji powierzchni granicznej nastąpiło podwyższenie obciążenia granicznego o 9.6%. Rys.3.5 pokazuje mechanizm zniszczenia dla aproksymacji typu A, a rys.3.6 - dla B. Mechanizm z rys.3.5 utworzył się wskutek powstania w słupach uogólnionych przegubów plastycznych z udziałem momentów zginających w dwóch płaszczyznach oraz siły osiowej. Natomiast moment skręcający nie bierze udziału w dysypacji. W przypadku dokładniejszej aproksymacji warunku plastyczności tworzą się analogiczne przeguby plastyczne, lecz nie występuje skrócenie plastyczne słupów /rys.3.6/.

Wartości sił wewnętrznych, prędkości uogólnionych odkształceń i przemieszczeń ^{podane} są w tabelach 3.2 - 3.7. Oznaczenia i znakowanie zgodne są z przyjętym w rozdz.2.1 modelem statyki. Numeracja węzłów pokazana jest na rys.3.3, przy czym wszystkie węzły podbrowe mają numer 0. Pręt identyfikowany jest przez podanie lewego i prawego węzła.



$$\mu = 2.9388$$

Rys.3.5. Mechanizm zniszczenia ramy z rys.3.3 -
przy najprostszej aproksymacji, typu A,
powierzchni granicznej.

pręt:		uogólnione naprężenia				
węzeł l-p	m_y^l	m_z^l	m_y^p	m_z^p	m_x	n
0-1	-0.2093	-1.7214	-1.9307	0.0	0.0	-3.1185
0-3	-1.7928	0.0	-0.7343	-1.0585	0.0	-9.3243
0-4	-0.3185	-1.4722	-1.7907	0.0	0.0	-9.4185
0-5	-1.3057	-0.5270	-0.7343	-1.0985	0.0	-7.5266
1-2	0.0	0.0	-0.4812	0.7347	0.0	-1.0585
2-3	0.4812	-0.7347	1.9765	0.0	0.0	-1.0585
4-5	0.0	-0.1589	0.1805	0.0	0.0	-1.6255
1-4	0.0	-1.9307	0.1589	-1.7907	0.0	-2.2681
3-5	0.0	-0.7343	0.0	-0.7343	0.9180	-1.8811

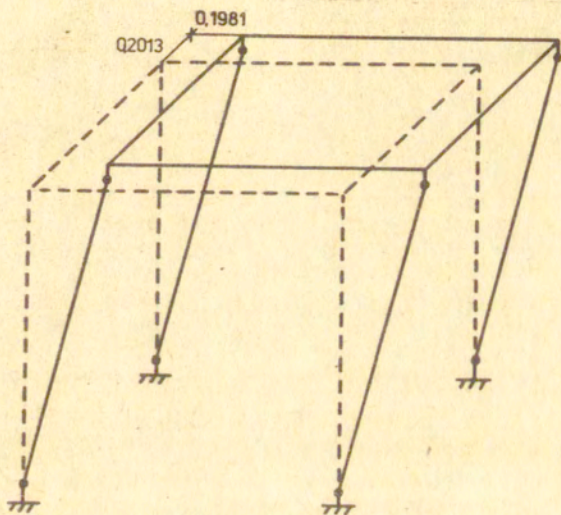
Tab.3.2. Uogólnione naprężenia w ramie z rys.3.5
 dla $\mu = 2.9388$ /najprostsza aproksymacja,
 typu A, powierzchni granicznej/

węzeł $l-p$	prędkości uogólnionych odkształceń					
	ψ_y^l	ψ_z^l	ψ_y^p	ψ_z^p	ψ_x	e_x
0-1						
0-3	-0.1837	-0.1837	-0.1837	-0.1837	0.0	-0.0082
0-4						
0-5						
1-2						
2-3						
4-5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1-4						
3-5						

Tab.3.3. Prędkości uogólnionych odkształceń dla ramy z rys.3.5.

nr węzła	prędkości uogólnionych przemieszczeń					
	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	E_x	E_y	E_z
1,2,3,4,5	0.0	0.0	0.0	0.1837	-0.1837	0.0082

Tab.3.4. Prędkości uogólnionych przemieszczeń dla ramy z rys.3.5.



$$\mu = 3.2204$$

Rys.3.6. Mechanizm zniszczenia ramy z rys.3.3 przy bardziej dokładnej, typu B, aproksymacji powierzchni granicznej.

pręt: węzeł $l-p$	uogólnione naprężenia					
	m_y^l	m_z^l	m_y^p	m_z^p	m_x	n
0-1	-1.0080	-1.0080	-1.5756	-0.4313	0.3234	-4.6347
0-3	-1.7848	-0.2187	-1.0080	-1.0080	0.0	-9.8403
0-4	-1.0080	-1.0080	-1.0080	-1.0080	0.0	-8.2644
0-5	-1.0128	-1.0031	-1.2561	-0.7559	0.0	-9.4651
1-2	0.4313	0.0	-0.9439	0.8051	0.0	-1.4577
2-3	0.9439	-0.8051	1.7639	0.0	0.0	-1.4577
4-5	1.0080	0.0	0.0	-0.2311	-0.2480	-1.5279
1-4	0.3234	-1.5756	0.0	-1.2560	0.0	-2.2471
3-5	0.0	-1.0080	0.2311	-1.0082	0.7559	-2.0379

Tab. 3.5. Uogólnione naprężenia w ramie z rys.3.6
dla $\mu = 3.2204$ /bardziej dokładna, typu B,
aprosymacja powierzchni granicznej/.

pręt: węzeł l-p	prędkości uogólnionych odkształceń					
	ψ_y^l	ψ_z^l	ψ_y^p	ψ_z^p	ψ_x	e_x
0-1 0-3 0-4 0-5	-0.2013	-0.1981	-0.2013	-0.1981	0.0	0.0
1-2 2-3 4-5 1-4 3-5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

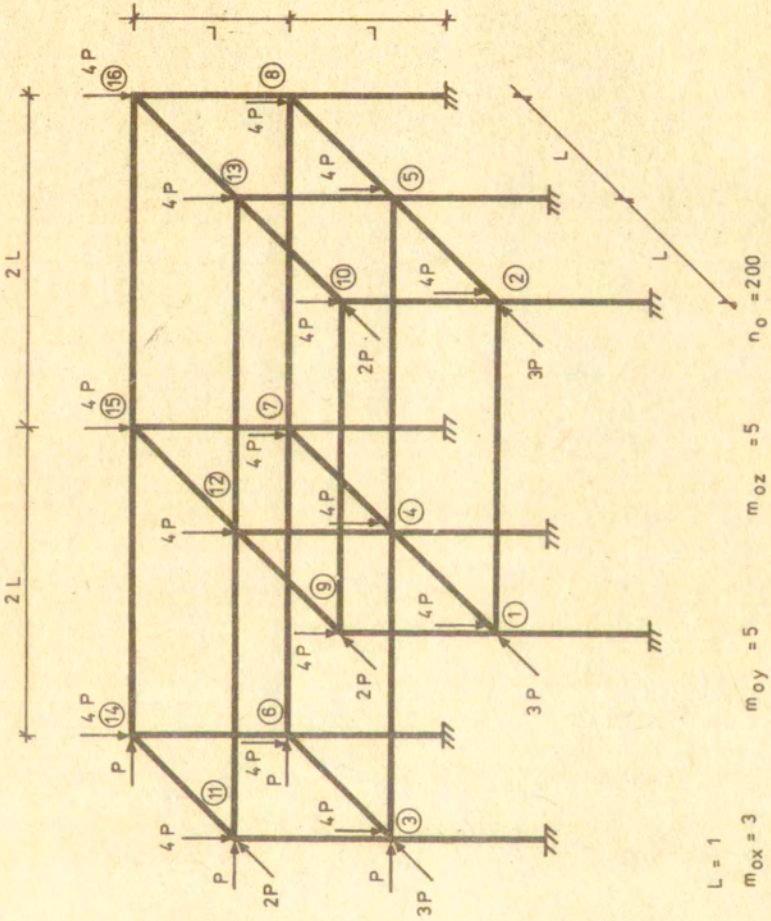
Tab. 3.6. Prędkości uogólnionych odkształceń dla ramy z rys.3.6.

nr węzła	prędkości uogólnionych przemieszczeń					
	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	E_x	E_y	E_z
1,2,3, 4,5	0.0	0.0	0.0	0.1981	-0.2013	0.0

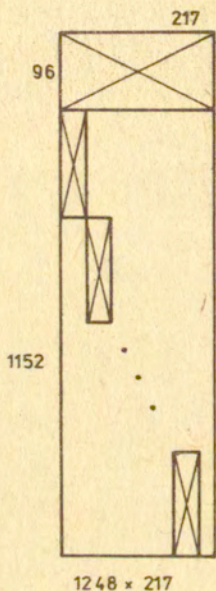
Tab. 3.7. Prędkości uogólnionych przemieszczeń dla ramy z rys.3.6.

Przykład 3.4.2 dotyczy nieregularnej ramy ortogonalnej pokazanej na rys. 3.7. Rama liczy 36 prętów o przekroju dwuteowym i jednakowych modułach plastycznych. Jej nośność graniczna wyznaczona była według modelu tradycyjnego i wierzchołkowego celem porównania czasów obliczeń. Stosowano najprostszą aproksymację powierzchni granicznej. Wymiary macierzy sympleksowych generowanych przez programy GEN i NEW oraz dane dotyczące przebiegu rozwiązywania zadań programowania liniowego programem XDLA przedstawia rys. 3.8. W metodzie wierzchołkowej nastąpiło prawie pięciokrotne przyspieszenie obliczeń. W wyniku otrzymujemy mnożnik obciążenia granicznego $\mu = 3.6036$ oraz mechanizm zniszczenia z rys. 3.9. Wartości uogólnionych naprężeń dla 36 prętów, prędkości uogólnionych odkształceń i przemieszczeń zawierają tabele 3.8.- 3.10. Widzimy, że w analizowanej ramie następuje zniszczenie wszystkich słupów parteru przez powstanie uogólnionych przegubów plastycznych z udziałem momentów zginających w dwóch płaszczyznach oraz siły osiowej. Natomiast skrętne odkształcenia plastyczne są zerowe.

Przykład 3.4.3 dotyczy pięciopiętrowej ramy z rys. 3.10. Wszystkie 45 prętów mają przekrój dwuteowy, przy czym słupy i belki dwóch najniższych kondygnacji mają dwukrotnie większe moduły plastyczne niż pozostałe. Rys. 3.11 pokazuje strukturę i wymiary macierzy sympleksowych. Nośność graniczna obliczana była przez rozwiązanie zadania programowania liniowego w sformułowaniu wierzchołkowym dla najprostszej aproksymacji warunku plastyczności. Otrzymany mnożnik obciążenia granicznego wynosi $\mu = 0.2226$. Mechanizm zniszczenia pokazany jest w rzutach z przodu, z boku i z góry, na rys. 3.12. Wartości prędkości uogólnionych odkształceń plastycznych i przemieszczeń podane są w Tab. 3.11 i Tab. 3.12.

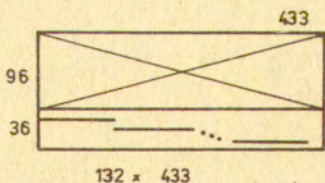


Rys. 3.7



GEN

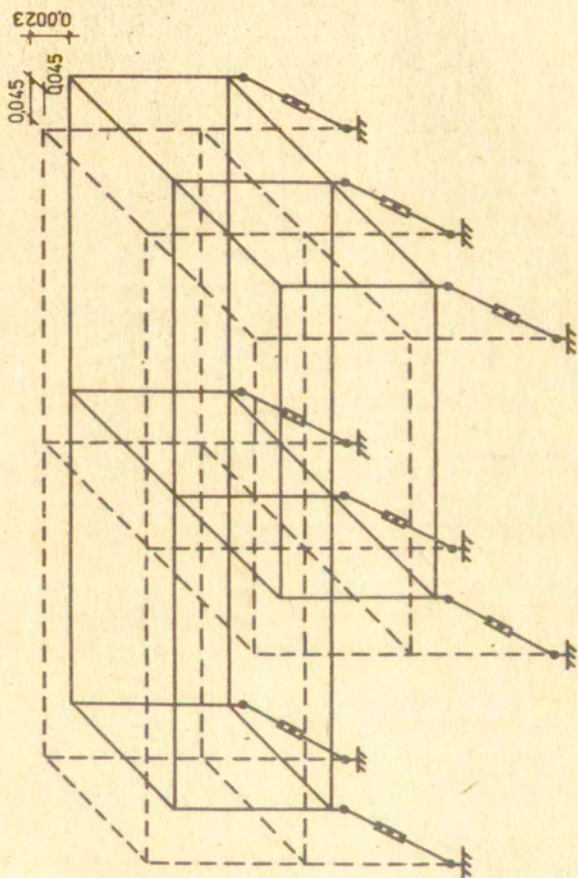
29 min. 11 sek.
182 iteracje
gęstość 1,9 %



GEW

6 min. 12 sek.
211 iteracji
gęstość 2,59 %

Rys.3.8. Wymiary macierzy sympleksowych dla ramy z rys.3.7.



$\mu = 3.6036$

Rys. 3.9

pręt: węzeł l-p	uogólnione naprężenia					
	m_y^I	m_z^I	m_y^P	m_z^P	m_x	n
0-1	-4.5041	0.0	-4.5041	0.0	0.0	-19.8366
0-2	-4.6587	0.0	-3.4706	-1.1881	0.0	-13.6521
0-3	-4.7038	0.0	-4.7038	0.0	0.0	-11.8497
0-4	-2.1486	-2.1135	-4.2621	0.0	0.0	-29.5152
0-5	-3.9581	-3.9581	-3.9581	0.0	0.0	-41.6754
0-6	-3.9184	0.0	-3.9184	0.0	0.0	-43.2624
0-7	0.0	-4.0853	-2.7876	-1.2977	0.0	-36.5861
0-8	0.0	-4.1437	-2.5576	-1.5861	0.0	-34.2530
1-2	0.0	0.0	1.1881	0.0	0.0	0.0
3-4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	- 5.6175
4-5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	- 3.5040
6-7	0.0	0.0	3.0772	-1.8327	0.0	- 3.6036
7-8	0.0	1.8327	5.0	0.0	0.0	0.0
1-4	0.0	-4.5041	0.0	-4.8560	0.0	- 5.7594
2-5	0.0	-4.7796	-1.1881	-3.5915	0.0	- 8.8152
3-6	0.0	-4.8927	0.0	-3.9184	0.0	- 4.2926
4-7	0.0	0.0	0.0	-3.7425	0.0	0.0
5-8	2.3159	-0.3666	0.0	-2.5576	0.0	- 3.4739
1-9	0.0	0.0	-3.9568	0.0	0.0	-15.3764
2-10	-1.3090	0.0	-4.8246	0.0	0.0	- 7.0148
3-11	-0.1889	0.0	-2.7004	-2.0139	0.0	- 6.2464
4-12	-0.5939	0.0	-0.0574	0.0	0.0	- 9.4833
5-13	0.0	0.0	-2.5750	0.0	-1.1278	-21.8141
5-14	0.0	0.0	-4.4606	0.0	0.0	-21.5754
7-15	-0.9549	-1.7795	0.0	0.0	0.0	-19.3905
8-16	0.0	-3.4139	0.0	0.0	0.0	-14.4144
9-10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
11-12	2.0139	2.1881	0.0	-1.9026	0.0	- 3.7778
12-13	0.0	1.9026	0.0	-4.9056	0.0	- 3.7778
14-15	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	- 1.4155
15-16	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.3639
9-12	0.0	-3.9568	0.0	4.9187	0.0	- 3.2504

Tab.3.8. Uogólnione naprężenia w ramie z rys.3.9.

pręt: węzeł 1-p	uogólnione naprężenia					
	m_y^l	m_z^l	m_y^p	m_z^p	m_x	n
10-13	0.0	-4.8246	0.0	-2.5730	0.0	-1.0735
11-14	-2.1881	-2.7004	0.0	-4.4606	0.0	-4.4606
12-15	0.0	-4.9761	0.0	0.0	0.0	-0.9549
13-16	3.7778	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

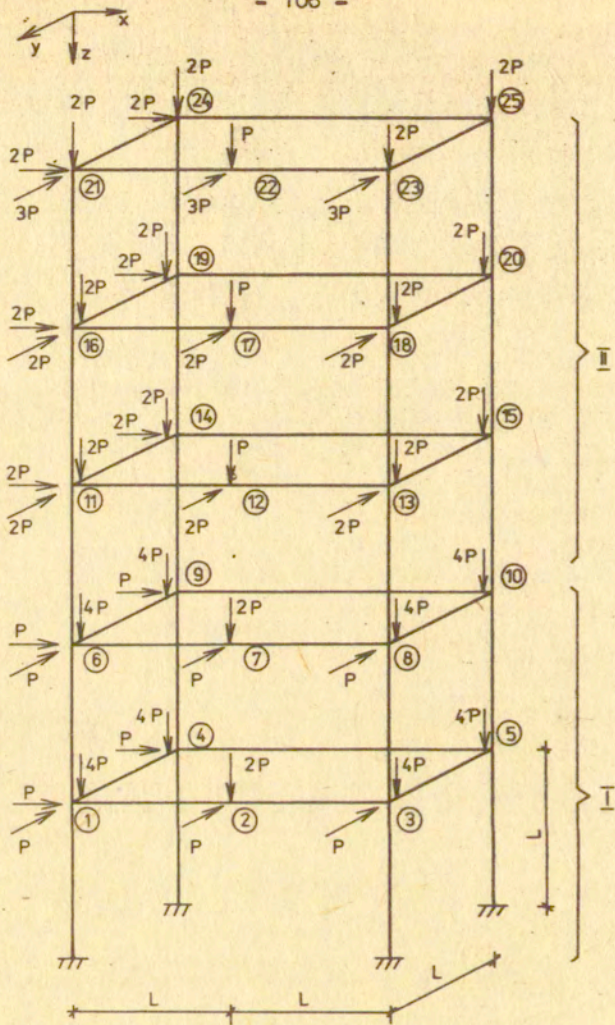
c.d. Tab.3.8.

pręt: węzeł 1-p	prędkości uogólnionych odkształceń					
	φ_y^l	φ_z^l	φ_y^p	φ_z^p	φ_x	e_x
0-1						
0-2						
0-3						
0-4						
0-5	-0.0450	-0.0450	-0.0450	-0.0450	0.0	-0.0023
0-6						
0-7						
0-8						
pozostałe	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tab.3.9: Prędkości uogólnionych odkształceń
dla ramy z rys.3.9.

nr węzła	prędkości uogólnionych przemieszczeń					
	ϕ_x	ϕ_y	ϕ_z	E_x	E_y	E_z
1 ÷ 16	0.0	0.0	0.0	0.0450	-0.0450	0.0023

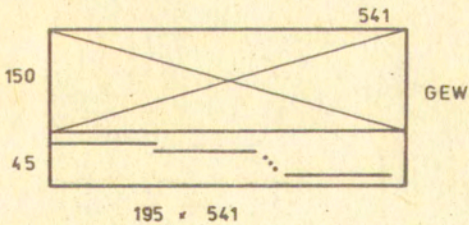
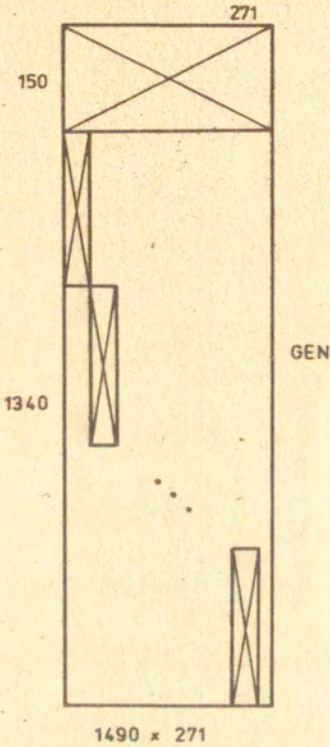
Tab.3.10. Prędkości uogólnionych przemieszczeń
dla ramy z rys.3.9.



$L = 1$

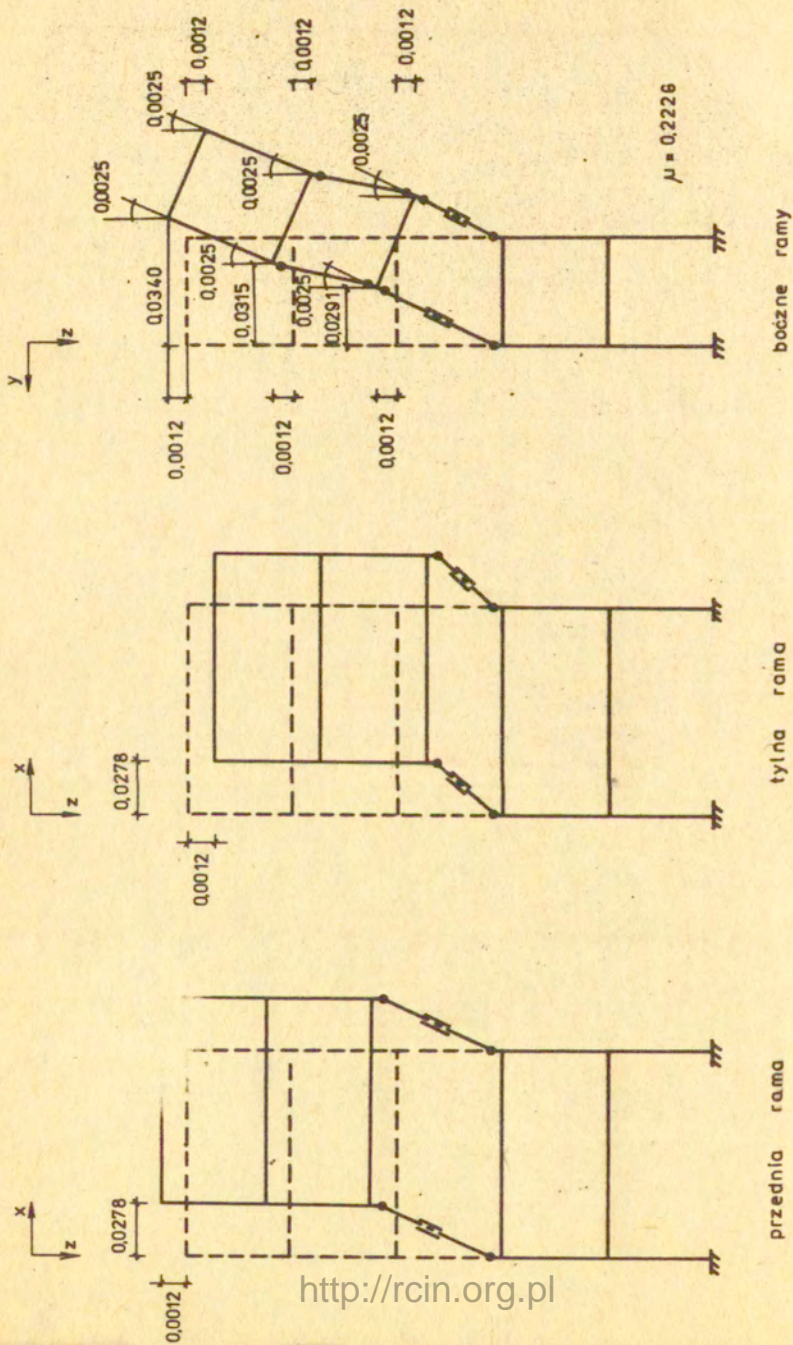
	I	II
m_{ox}	1,5	0,75
m_{oy}	2	1
m_{oz}	2.	1
n_o	90	45

Rys. 3. 10

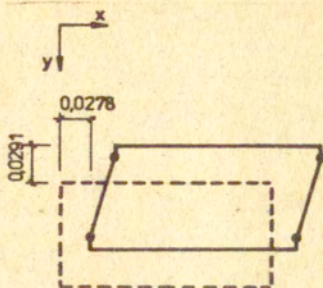


23 min. 50 sek.
525 iteracji
gęstość 1,86 %

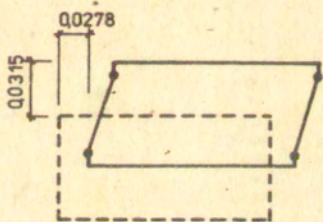
Rys.3.11. Wymiary macierzy sympleksowych dla ramy z rys.3.10.



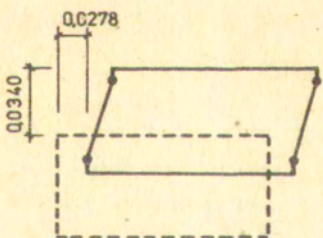
Rys. 3.12



III piętrowy



IV piętrowy



V piętrowy

d) poziome ramy

$$\mu = 0,2226$$

Rys. 3.12 d.

pręt: węzeł l - p	prędkości uogólnionych odkształceń					
	φ_y^l	φ_z^l	φ_y^p	φ_z^p	φ_x	e_x
0-1						
0-3						
0-4						
0-5						
1-2						
2-3						
4-5						
1-4						
3-5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1-6						
3-8						
4-9						
5-10						
6-7						
7-8						
9-10						
6-9						
8-10						
6-11						
8-13	-0.0291	-0.0278	-0.0266	-0.0278	0.0	0.0012
9-14						
10-15	-0.0291	-0.0278	-0.0266	-0.0278	0.0	-0.0012
11-12						
12-13	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
14-15						
11-14						
13-15	0.0	-0.0001	0.0	-0.0001	0.0	0.0
11-16						
13-18						
14-19	0.0001	0.0	0.0001	0.0	0.0	0.0
15-20						
16-17						
17-18	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
19-20						
16-19						
18-20	0.0	-0.0001	0.0	-0.0001	0.0	0.0
16-21						
18-23						
19-24						
20-25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
21-22						
22-23						
24-25						
21-24	0.0	-0.0001	0.0	-0.0001	0.0	0.0
23-25						

Tab. 3.11. Prędkości uogólnionych odkształceń dla ramy z rys. 3.12

nr węzła	prędkości uogólnionych przemieszczeń					
	$\dot{\phi}_x$	$\dot{\phi}_y$	$\dot{\phi}_z$	E_x	E_y	E_z
1+10	0.0	0.0	0.0.	0.0.	0.0.	0.0.
11,12,13	-0.0025	0.0	0.0	0.0278	-0.0291	-0.0012
14,15	-0.0025	0.0	0.0	0.0278	-0.0291	0.0012
16,17,18	-0.0025	0.0	0.0	0.0278	-0.0315	-0.0012
19,20	-0.0025	0.0	0.0	0.0278	-0.0315	0.0012
21,22,23	-0.0025	0.0	0.0	0.0278	-0.0340	-0.0012
24,25	-0.0025	0.0	0.0	0.0278	-0.0340	0.0012

Tab.3.12. Prędkości uogólnionych przemieszczeń dla ramy z rys. 3.12.

3.5. Wnioski

Z przedstawionych w poprzednim punkcie przykładów numerycznych wynika, że metoda wierzchołkowego opisu /3.41/ powierzchni granicznej przy obliczaniu nośności granicznej przestrzennych ram jest o wiele bardziej efektywna niż stosowanie tradycyjnego, nierównościowego opisu /3.14/ warunku plastyczności za pośrednictwem hiperpłaszczyzn. Zadanie programowania liniowego /3.41/ jest rozwiązywane w znacznie krótszym czasie niż zadanie /3.14/. Skrócenie czasu obliczeń wynika nie tylko z redukcji globalnych wymiarów macierzy sympleksowej, lecz przede wszystkim, ze zmniejszenia liczby ograniczeń w modelu wierzchołkowym /3.41/ w stosunku do tradycyjnego modelu /3.41/. Przyspieszenie obliczeń jest tym większe, im większa jest rama lub im dokładniejszą stosujemy aproksymację powierzchni granicznej. Jak wiadomo, nakład obliczeniowy w metodach sympleksowych zależy w dużej mierze od liczby ograniczeń. W zagadnieniach obliczania nośności granicznej przestrzennych ram w sformułowaniu tradycyjnym warunek plastyczności opisany jest przez bardzo dużą liczbę nierówności. Stosowanie wierzchołkowego opisu powierzchni granicznej pozwala istotnie zredukować ich liczbę, kosztem zwiększenia liczby zmiennych. Przy czym liczba dodatkowych zmiennych jest mniejsza niż liczba zredukowanych ograniczeń. Ponadto w modelu wierzchołkowym występują tylko ograniczenia typu równościowego. Należy zaznaczyć, że czasy generowania macierzy sympleksowych dla modelu wierzchołkowego i tradycyjnego, programami GEW i GEN, są zbliżone. Rozwiązując zadanie według modelu z wierzchołkowym opisem powierzchni granicznej, należy jedynie na końcu wykonać dodatkowe mnożenie w celu obliczenia uogólnionych naprężeń $s = W \sigma$. Jednakże czas tej operacji jest minimalny w porównaniu z czasem rozwiązania zadania programowania liniowego i może być pominięty w ostatecznym rozrachunku.

Tak więc podsumowując, należy stwierdzić, że przedstawiona w rozdz.3.3. metoda obliczania nośności granicznej ram przestrzennych, wykorzystująca ideę wierzchołkowego opisu

Przykład	Liczba ograniczeń		Liczba zmien- nych	gęstość macierzy %	Czas rozw. zad. progr. liniowego /sek./		$\frac{t_k}{t_w}$
	całko- wita	nierównoś- ciowych			t_k	t_w	
3.4.1A	318	288	55	7.28	t_k 113		2.05
	39	-	109	8.04	t_w 55		
	894	864	55	3.76	t_k 435		2.35
3.4.1B	39	-	685	20.21	t_w 185		
	1248	1152	217	1.9	t_k 1751		4.71
3.4.2	132	-	433	2.59	t_w 372		
3.4.3	195	-	541	1.86	t_w 1430		-

Tabela 3.13. Porównanie wymiarów macierzy i czasów obliczeń.

warunku plastyczności, znacznie zwiększa efektywność obliczeń, zarówno pod względem wymaganej pamięci maszyny, jak i czasu rozwiązywania zadania programowania liniowego. W przypadku dużych ram przestrzennych jest to jedyna skuteczna metoda rozwiązywania tego typu zagadnień.

Jeśli chodzi o kwestię dokładności aproksymacji warunku plastyczności, to, jak widzieliśmy na przykładzie prostej ramy z rys.3.3, stosowanie bardziej dokładnej aproksymacji wydłużyło czas obliczeń ponad trzykrotnie. Różnica w mnożniku granicznym wynosiła prawie 10%. Stosując bardziej dokładną aproksymację powierzchni granicznej przy obliczaniu większych ram, należy się spodziewać znacznie większego wzrostu nakładu obliczeniowego w stosunku do nieznacznego polepszenia wartości mnożnika obciążenia granicznego. Zatem, jeśli nie jest wymagana duża dokładność obliczeń, można stosować najprostszy typ linearyzacji warunku plastyczności, otrzymując przy tym nieco zaniżone obciążenie graniczne. Przyspiesza to natomiast znacznie proces obliczeń.

4. ZASTOSOWANIE UOGÓLNIONYCH ODWROTNOŚCI MACIERZY W ANALIZIE RAM.

4.1. Wprowadzenie

Celem tego rozdziału jest zaproponowanie nowej metody wyznaczania nośności granicznej oraz odpowiadającego jej stanu, przy uwzględnieniu sprężysto-idealnie-plastycznego modelu materiału. Wykorzystamy przy tym pewne fakty z teorii uogólnionych odwrotności macierzy [7]. Stosować będziemy zwłaszcza tzw. odwrotność Botta-Duffina. W następnym punkcie pokażemy na przykładzie liniowej analizy sprężystej, jak podejście takie pozwala w matematycznie zwarty sposób otrzymać znane rozwiązania metody przemieszczeń. Natomiast stosowanie tego samego formalizmu w analizie sprężysto-plastycznej pozwoli uzyskać nowe rezultaty.

W punkcie 4.3 sformułujemy zagadnienie holonomicznej analizy sprężysto-plastycznej w postaci zadania programowania kwadratowego. Stosując wierzchołkowy opis warunku plastyczności z rozdziału 2.2.1, dokonamy transformacji tego zadania - podobnie, jak to uczyniliśmy z zadaniem programowania liniowego dla analizy sztywno-plastycznej w rozdziale 3. Następnie, wprowadzając uogólnioną odwrotność macierzową Botta - Duffina, otrzymamy jawną postać rozwiązania wyjściowego problemu analizy sprężysto-plastycznej przy zadanym poziomie obciążenia.

W punkcie 4.4, wykorzystując ten wynik, sprowadzimy zagadnienie wyznaczania nośności granicznej oraz stanu naprężeń sprężysto-plastycznej konstrukcji do jednokrotnego rozwiązania zadania programowania liniowego. Dotychczas, chcąc rozwiązać tego typu zagadnienie, postępowano dwuetapowo [94, 114]. Najpierw wyznaczano mnożnik obciążenia granicznego, rozwiązując zadanie programowania liniowego dla modelu sztywno-plastycznego, a następnie - dla znalezionej obciążenia granicznego rozwiązywano zadanie programowania kwadratowego analizy sprężysto-plastycznej. Należy pamiętać, że w rozpatrywanej klasie zagadnień przyjęte zostało założenie holonomiczności, czyli niezależności końcowego stanu granicznego od historii obciążenia, co będzie szczegółowo omówione w punkcie 4.3.1.

4.2. Rozwiązanie sprężyste za pomocą odwrotności Botta - Duffina.

Kompletny układ równań opisujących zagadnienie liniowej analizy sprężystej ma postać:

$$C^T s = p$$

$$C u = q$$

/4.1/

$$E^{-1} s = q$$

gdzie

$s \in R^n$ - wektor uogólnionych naprężeń

$p \in R^m$ - wektor obciążeń zewnętrznych

- $u \in R^m$ - wektor uogólnionych przemieszczeń
- $q \in R^n$ - wektor uogólnionych odkształceń
- C - $n \times m$ macierz równań geometrycznych
- E^{-1} - $n \times n$ symetryczna, dodatnio-określona macierz sprężystości

Związki /4.1/, przedstawiające równania równowagi, równania geometryczne i prawo fizyczne, są warunkami Kuhna-Tuckera dla funkcji siodłowej /typu Reissnera/

$$L(s, u) = \frac{1}{2} s^T E^{-1} s + u^T p - u^T C^T s, \quad /4.2/$$

z której otrzymujemy parę dualnych zasad ekstremalnych:

$$\text{znaleźć } \max_u (L - s^T L, s)$$

przy ograniczeniach

$$L, s = 0$$

czyli

$$\text{znaleźć } \max_u \left(-\frac{1}{2} q^T E q + u^T p \right)$$

przy ograniczeniach

/4.3/

$$C u = q$$

oraz

$$\text{znaleźć } \min_s (L - u^T L, u)$$

przy ograniczeniach

$$L, u = 0$$

czyli

$$\text{znaleźć } \min \left(\frac{1}{2} s^T E^{-1} s \right)$$

przy ograniczeniach

/4.4/

$$C^T s = p$$

Dalej zajmiemy się podejściem statycznym /4.4/ wyrażającym zasadę minimum energii komplementarnej przy spełnieniu warunków równowagi. Przedstawiamy rozwiązanie ogólne niedookreślonego układu równań $C^T s = p$ w postaci sumy pewnego rozwiązania szczególnego s_1 i rozwiązania układu jednorodnego s_0 , tzn.

$$s = s_1 + s_0$$

$$s_0 \in N(C^T) = \{ s_0 \in R^n \mid C^T s_0 = 0 \} \quad /4.5/$$

$N(C^T)$ oznacza jądro operatora C^T .

Z mechanicznego punktu widzenia s_0 reprezentuje samonaprężenia. Korzystając z /4.5/, przekształcamy minimalizowaną funkcję w /4.4/ do postaci

$$f(s_0) = \frac{1}{2} s_0^T E^{-1} s_0 + s_1^T E^{-1} s_0 + \frac{1}{2} s_1^T E^{-1} s_1. \quad /4.6/$$

Traktując s_1 jako ustalone rozwiązanie szczególne układu $C^T s = p$, problem /4.4/ sprawdza się do zadania minimalizacji funkcji kwadratowej, której argumentami są samonaprężenia s_0

$$\begin{aligned} \min f(s_0) \\ s_0 \in N(C^T) \end{aligned} \quad /4.7/$$

W punkcie optymalnym gradient $\nabla f(s_0)$ musi należeć do dopełnienia ortogonalnego podprzestrzeni liniowej $N(C^T)$.

Korzystając ze znanego faktu, że dopełnienie ortogonalne jądra operatora liniowego jest podprzestrzenią liniową, będącą obrazem operatora sprzężonego oraz oznaczając gradient

$\nabla f(s_0)$ przez q , otrzymujemy

$$q \in N(C^T)^\perp = R(C) \quad /4.8/$$

gdzie

$$R(C) = \{ q \in R^n \mid \exists u \in R^m, q = C u \}$$

jest obrazem operatora $C : R^m \rightarrow R^n$.

Na podstawie /4.6/ obliczamy gradient $\nabla f(s_0)$

$$q = E^{-1} s_0 + E^{-1} s_1. \quad /4.9/$$

Zatem rozwiązanie optymalne zadania /4.7/ musi spełniać następujący układ warunków

$$E q - s_0 = s_1$$

$$s_0 \in N(C^T) \quad /4.10/$$

$$q \in R(C)$$

Analogiczny układ związków badany był przez R. Botta i R.J. Duffina [20] w zastosowaniu do obwodów elektrycznych. Jego rozwiązanie wyraża się w postaci

$$q = \begin{matrix} E^{-1} \\ (R(C)) \end{matrix} s_1 \quad /4.11/$$

$$s_0 = \left(\begin{matrix} E \\ (R(C)) \end{matrix} E^{-1} - I \right) s_1$$

gdzie

$$\begin{matrix} E^{-1} \\ (R(C)) \end{matrix} = P_{R(C)} \left(\begin{matrix} E & P_{R(C)} \\ & P_{N(C^T)} \end{matrix} \right)^{-1} \quad /4.12/$$

nazywana jest odwrotnością Botta-Duffina macierzy E , lub ograniczoną odwrotnością macierzy E względem podprzestrzeni liniowej $R(C)$.

Operatory $P_{R(C)}$ i $P_{N(C^T)}$ oznaczają rzutowania ortogonalne na podprzestrzenie liniowe, odpowiednio na obraz $R(C)$ i jądro $N(C^T)$. Sposób otrzymania rozwiązania /4.11/ został przedstawiony w Dodatku 3. /por. [7] /.

W sytuacji, gdy znamy bazę podprzestrzeni $R(C)$, odwrotność Botta-Duffina można wyrazić w prostszej niż /4.12/ postaci /por. [7] /. W naszym wypadku macierz C^T jest pełnego, "wierszowego" rzędu, ponieważ wszystkie równania równowagi są liniowo niezależne. Zatem bazę podprzestrzeni obrazu $R(C)$ stanowią wszystkie wektory kolumnowe macierzy C .

Wówczas

$$E^{-1}/(R(C)) = C (C^T E C)^{-1} C^T \quad /4.13/$$

Korzystając z tej postaci oraz wstawiając s_0 dane wzorem /4.11/₂ do /4.5/, otrzymujemy rozwiązanie pierwotnego problemu /4.4/ w uogólnionych naprężeniach

$$s = E C (C^T E C)^{-1} C^T s_1 \quad /4.14/$$

Ponieważ s_1 jest pewnym szczególnym rozwiązaniem układu $C^T s = p$, zatem mamy ostatecznie

$$s = E C (C^T E C)^{-1} p \quad /4.15/$$

Jest to znany wzór na obliczenie naprężeń metodą przemieszczeń. Macierz $K = C^T E C$ jest macierzą sztywności konstrukcji, iloczyn $K^{-1} p$ przedstawia przemieszczenia, a $CK^{-1} p$ - odkształcenia.

Tak więc, przedstawiona metoda rozwiązania zagadnienia liniowej analizy sprężystej, poza zwartym zapisem, od strony merytorycznej nie wnosi nic nowego. Natomiast w następnym punkcie pokażemy, jak idea stosowania uogólnionych odwrotności macierzy pozwala wyrazić rozwiązanie zadania analizy sprężysto-plastycznej w postaci jawnej. Ponadto stosowanie tego samego formalizmu dla analizy sprężystej i sprężysto-plastycznej umożliwi jednolity zapis i uwidoczni różnice i podobieństwa w matematycznej strukturze obydwu zagadnień.

4.3. Rozwiązanie sprężysto-plastyczne.

4.3.1. Sformułowanie zagadnienia.

Kompletny układ związków opisujących sprężysto-idealnie-plastyczne zachowanie konstrukcji przy odcinkowo-liniowym prawie konstytutywnym ma postać [91, 92] :

$$\begin{aligned} q &= q_e + q_p && /a/ \\ s &= E q_e && /b/ \\ C^T s &= p && /c/ \\ C u &= q && /d/ \quad /4.16/ \\ -\dot{\phi} &= k - N^T s && /e/ \\ -\dot{\phi} &\geq 0 && /f/ \\ \dot{q}_p &= N \dot{\lambda} && /g/ \\ \dot{\lambda} &\geq 0 && /h/ \\ \dot{\phi}^T \dot{\lambda} &= 0 && /i/ \end{aligned}$$

gdzie

q_e - wektor uogólnionych odkształceń sprężystych,

q_p - wektor uogólnionych odkształceń plastycznych,

$\dot{\phi}$ - równanie wektorowe powierzchni granicznej,

związki /g/, /h/, /i/ określają stowarzyszone prawo płynięcia,

kropka oznacza pochodną czasową, względem parametru μ .

Przy warunku początkowym

$$\lambda = 0 \text{ dla } \mu = 0 \quad /4.17/$$

równanie /4.16/ /g/ można zapisać bez pochodnych

$$q_p = N \lambda \quad /4.18/$$

Zakładamy proporcjonalny wzrost obciążenia

$$p_\mu = \mu p \quad /4.19/$$

gdzie p jest ustalonym obciążeniem odniesienia, a

μ - skalarnym parametrem czasu wzrastającym od 0

do pewnego μ^* , odpowiadającemu obciążeniu zniszczenia.

Następnie przedstawiamy naprężenia s w postaci sumy naprężeń sprężystych s_e i samozrównoważonych naprężeń wywołanych odkształceniami plastycznymi q_p / por. [40,91,92] /

$$s = \mu s_e + Z q_p \quad , \quad /4.20/$$

gdzie

$$Z = -B + ECK^{-1}C^TE \quad /4.21/$$

jest ujemnie półokreśloną $n \times n$ macierzą współczynników wpływu, a $K = C^TEC$ - symetryczną, dodatnio określoną $m \times m$ macierzą sztywności konstrukcji.

Podstawiając s wyrażone przez /4.20/ - przy uwzględnieniu /4.18/ - do równania /4.16/ /e/, otrzymujemy następujący podstawowy układ związków opisujący historię sprężysto-idealnieplastycznego zachowania się konstrukcji w procesie obciążania

$$-\dot{\phi} = k - \mu N^T s_e - N^T Z N \lambda \quad /a/$$

$$-\dot{\phi} \geq 0 \quad /b/$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad /c/ \quad /4.22/$$

$$\phi^T \dot{\lambda} = 0 \quad /d/$$

z warunkiem początkowym $\lambda = 0$ dla $\mu = 0$ /e/

Rozwiązując układ /4.22/, znajdujemy stan odkształceń i naprężeń nie dla danego obciążenia, lecz dla danej drogi obciążania. Jest to zatem tzw. analiza nieholonomiczna [39], dla której obowiązuje nieodwracalny związek fizyczny w postaci prawa płynięcia. Iteracyjna metoda rozwiązywania tego typu zagadnień w sformułowaniu /4.22/ została przedstawiona przez I. Kaneko w pracach [75,77,76].

W dalszej części ograniczymy nasze rozważania do analizy holonomicznej, tzn. takiej, dla której przyjęte zostało założenie o regularnym rozwoju odkształceń plastycznych. Mianowicie, zakłada się, że w procesie obciążania wektor naprężeń w danym przekroju raz osiągając warunek plastyczności, pozostaje na powierzchni granicznej i nie ma możliwości powrotu

w obszar sprężysty. Inaczej mówiąc, z chwilą pojawienia się przegubu plastycznego w pewnym przekroju ramy przekrój ten pozostaje uplastyczniony aż do zniszczenia całej konstrukcji, czyli, że w trakcie obciążania nie może wystąpić lokalne odciążenie. Założenie holonomiczności określone jest przez warunek

$$\dot{\Phi}^T \lambda = 0 \quad /4.23/$$

Wraz z warunkiem /4.22/ /d/ oraz warunkiem początkowym /4.22/ /e/ prowadzi to do związku

$$\Phi^T \lambda = \int_0^{\mu^*} \dot{\Phi}^T \lambda \, d\mu + \int_0^{\mu^*} \dot{\Phi}^T \dot{\lambda} \, d\mu = 0 \quad /4.24/$$

Całkując po czasie również warunek /4.22/ /c/, dochodzimy ostatecznie do następującego układu związków holonomicznej analizy sprężysto-plastycznej

$$-\Phi = k - \mu N^T s_e - N^T Z N \lambda \quad /a/$$

$$-\Phi \geq 0 \quad /b/$$

$$\lambda \geq 0 \quad /c/ \quad /4.25/$$

$$\Phi^T \lambda = 0 \quad /d/$$

Zgodnie z przyjętym założeniem holonomiczności /4.23/, rozwiązanie powyższego układu dla danego μ określa stan naprężeń i odkształceń w konstrukcji niezależnie od drogi obciążenia. Układ /4.25/ opisuje klasę zagadnień, które mogą być rozpatrywane w ramach deformacyjnej teorii plastyczności z odwracalnym prawem konstytutywnym.

Zajmiemy się teraz metodami rozwiązywania układu /4.25/. Z matematycznego punktu widzenia stanowi on parametryczne liniowe zadanie komplementarne ze zmiennymi wektorami Φ i λ oraz parametrem μ .

Przy założeniu niewystąpienia lokalnego odciążenia poszukujemy rozwiązań monotonicznych $\lambda(\mu)$ tego zadania [32].

Jeżeli interesuje nas stan naprężeń i odkształceń jedynie w chwili zniszczenia, możemy maksymalizować parametr μ

przy ograniczeniach /4.25/. Otrzymane zadanie można rozwiązywać metodami programowania liniowego z tzw. ograniczoną bazą / restricted basis linear programming /. Polega to na dołączeniu warunku ortogonalności /4.25/ /d/ zmiennych przy zmianie baz w standardowym algorytmie sympleksowym. Metody tego typu zostały zainicjowane przez P. Wolfe'a [132] do rozwiązywania zadań programowania kwadratowego. W sprężysto-plastycznej analizie konstrukcji były natomiast stosowane przez G. Maiera, D.E. Griersona i in. [94,1] .

Jeżeli chcemy rozwiązać zadanie analizy sprężysto-plastycznej /4.25/ dla zadanego poziomu obciążenia /tzn. dla ustalonego μ /, wówczas mamy do czynienia z liniowym zadaniem komplementarnym. Zagadnienie analizy sprężysto-plastycznej przy ustalonym obciążeniu można również sformułować w języku programowania kwadratowego. Wówczas związki /4.25/ będą warunkami Kuhna-Tuckera istnienia rozwiązania optymalnego. W ogólności możliwe są cztery równoważne postacie zadań programowania kwadratowego, w zależności od wyboru zmiennych [39] . Do dalszych rozważań wybieramy sformułowanie naprężeniowe w postaci

$$\min \left(\frac{1}{2} s^T E^{-1} s \right) \quad /a/$$

przy ograniczeniach

$$C^T s = p \quad /b/ \quad /4.26/$$

$$N^T s \leq k \quad /c/$$

Istnieją różne metody rozwiązywania zadań programowania kwadratowego oparte głównie na technice eliminacji, bądź stosowaniu algorytmu Lemkego do równoważnego liniowego zadania komplementarnego [33] . Należy jednak pamiętać, że wymiary zadania /4.26/ są znaczne, przede wszystkim, ze względu na dużą liczbę ograniczeń nierównościowych, opisujących warunków plastyczności.

Ponadto ograniczenia te mają specyficzną blokowo-diagonalną strukturę - identyczną, jak dla zadania nośności granicznej w rozdz.3.1 /por.rys.3.1/. Uwzględnienie tego faktu jest

celowe z numerycznego punktu widzenia.

W następnym punkcie dokonamy transformacji problemu /4.26/, wykorzystując wierzchołkowy opis warunku plastyczności. Otrzymamy nowe zadanie programowania kwadratowego, którego rozwiązanie będziemy następnie poszukiwać w jawnej postaci.

4.3.2. Transformacja zmiennych.

Identycznie, jak w rozdz. 3.3, wyrażamy wektor uogólnionych naprężeń s spełniający warunek plastyczności

$$s \in \mathcal{B} = \{ s \in \mathbb{R}^n \mid N^T s \leq k \}$$

w postaci kombinacji wypukłej /3.40/ wierzchołków obszaru dopuszczalnego \mathcal{B}

$$s = W \alpha$$

$$D \alpha = e$$

$$\alpha \geq 0.$$

Stosujemy oznaczenia wprowadzone w rozdz. 3.3 /wzór /3.39/ /. Po takiej transformacji zmiennych zadanie programowania kwadratowego /4.26/ przyjmie postać

$$\min \left(\frac{1}{2} \alpha^T \tilde{E} \alpha \right) \quad /a/$$

przy ograniczeniach /4.27/

$$\tilde{C}^T \alpha = \tilde{p} \quad /b/$$

$$\alpha \geq 0 \quad /c/$$

gdzie

$\tilde{E} = W^T E^{-1} W$ - symetryczna, dodatnio półokreślona
w x v macierz

$$\tilde{C}^T = \begin{bmatrix} C^T W \\ D \end{bmatrix} \quad - /m + l/ \text{ x v macierz}$$

$$\tilde{p} = \begin{bmatrix} p \\ e \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+l}$$

$$e = [11 \dots 1]^T \in R^l$$

W zadaniu przekształconym /4.27/ występuje więcej zmiennych, jednakże zredukowana została liczba ograniczeń - w porównaniu z /4.26/. Ponadto ograniczenia są tylko równościowe oraz zmienne nieujemne.

Macierz $\tilde{E} = W^T E^{-1}$ w formy kwadratowej jest dodatnio półokreślona, ponieważ W ma wymiar $n \times v$, przy czym $n < v$, a E^{-1} jest dodatnio określoną macierzą kwadratową rzędu n . Właśnie dodatnia półokreśloność \tilde{E} oraz nieujemność zmiennych w sformułowaniu /4.27/ zagadnienia analizy sprężysto-plastycznej stanowią istotną różnicę w porównaniu z zadaniem /4.4/ analizy sprężystej. Tym niemniej, postaramy się potraktować zadanie /4.27/ w podobny sposób, jak /4.4/.

Rozwiązanie ogólne układu równań $\tilde{C}^T \alpha = \tilde{p}$ wyrazimy w postaci sumy rozwiązania α_0 układu jednorodnego i pewnego rozwiązania szczególnego α_1

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \quad , \quad /4.28/$$

gdzie

$$\alpha_0 \in N(\tilde{C}^T) = \{ \alpha_0 \in R^v \mid \tilde{C}^T \alpha_0 = 0 \} \quad /4.29/$$

oraz, z uwagi na nieujemność zmiennych $\alpha \geq 0$, spełniony musi być warunek

$$\alpha_0 \geq -\alpha_1 \quad /4.30/$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia

$$L = N(\tilde{C}^T) \subset R^v$$

$$K_1 = \{ \alpha_0 \in R^v \mid \alpha_0 \geq -\alpha_1 \} \quad /4.31/$$

$$K = L \cap K_1$$

L jest podprzestrzenią liniową jądra operatora \tilde{C}^T .

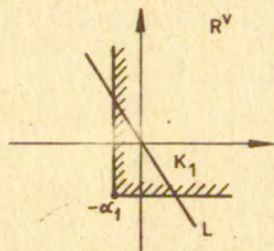
Zbiór K_1 definiuje pewien stożek w R^v . Zbiór K jako przecię-

cie podprzestrzeni liniowej ze stożkiem jest również stożkiem. Korzystając z tych oznaczeń, zapiszemy warunki /4.29/, /4.30/ w postaci

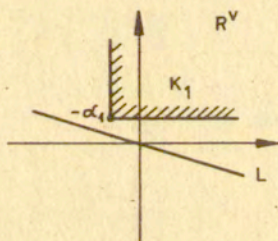
$$\alpha_0 \in K.$$

$$/4.32/$$

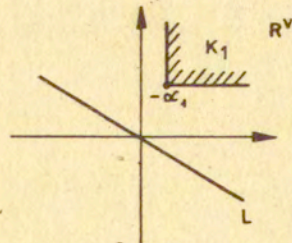
Musimy zapewnić niepustość zbioru $K = L \cap K_1$. Warunek $K \neq \emptyset$ oznacza, że dla podprzestrzeni liniowej jądra dowolnego operatora \tilde{C}^T musi istnieć co najmniej jeden punkt wspólny ze stożkiem $K_1 = \{ \alpha_0 \mid \alpha_0 \geq -\alpha_1 \}$. Ponieważ dowolna podprzestrzeń liniowa L przechodzi przez zero, warunek $L \cap K_1 \neq \emptyset$ będzie spełniony, jeżeli stożek K_1 zawiera zero. Wynika stąd, że wierzchołek stożka K_1 , tzn. wektor $-\alpha_1$, musi być wtedy niedodatni, czyli $\alpha_1 \geq 0$. Zostało to schematycznie zobrazowanie na rys.4.1.



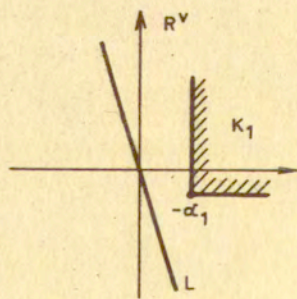
$$-\alpha_1 \leq 0 \Rightarrow L \cap K_1 \neq \emptyset, \forall L$$



$$L \cap K_1 = \emptyset$$



$$L \cap K_1 = \emptyset$$



$$L \cap K_1 = \emptyset$$

Rys.4.1.

Tak więc do dalszych rozważań, stożek K_1 definiujemy następująco

$$K_1 = \left\{ \alpha_0 \in R^V \mid \alpha_0 \geq -\alpha_1, \text{ dla } \alpha_1 \geq 0 \right\} \quad /4.33/$$

Wówczas automatycznie spełniony będzie warunek $K = L \cap K_1 \neq \emptyset$. Gdyby nie zakładać $K \neq \emptyset$, tzn. gdyby α_1 było dowolnym rozwiązaniem szczególnym układu $\tilde{C}^T \alpha_1 = \tilde{p}$, a nie spełniałoby warunku $\alpha_1 \geq 0$, wówczas nie reprezentowałoby współczynników wypukłej kombinacji wierzchołków obszaru warunku plastyczności i zadanie przekształcone /4.27/ nie byłoby równoważne pierwotnemu problemowi /4.26/.

Wykorzystując związek /4.28/ oraz traktując $\alpha_1 \geq 0$ jako ustalone, wyrażamy funkcję celu /4.27 a/ w zmiennych α_0

$$f(\alpha_0) = \frac{1}{2} \alpha_0^T \tilde{E} \alpha_0 + \alpha_1^T \tilde{E} \alpha_0 + \frac{1}{2} \alpha_1^T \tilde{E} \alpha_1 \quad /4.34/$$

W rezultacie, zadanie /4.27/ możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} & \min f(\alpha_0) \\ & \alpha_0 \in K \end{aligned} \quad /4.35/$$

Zauważmy formalną analogię tego zadania z zadaniem analizy sprężystej /4.7/. Różnica natomiast polega na tym, że w /4.7/ minimalizowaliśmy funkcję wypukłą na podprzestrzeni liniowej, a w /4.35/ minimalizujemy funkcję quasiwypukłą /dodatnia półokreśloność macierzy \tilde{E} / na stożku K .

4.3.3. Rozwiązanie za pomocą zmodyfikowanej uogólnionej odwrotności Botta - Duffina.

Poszukujemy rozwiązania zadania /4.35/. W punkcie optymalnym gradient $\nabla f(\alpha_0)$ należy do stożka polarnego K^*

$$\tilde{q} = \nabla f(\alpha_0) \in K^{\mathbb{R}} \quad /4.36/$$

gdzie z definicji $K^{\mathbb{R}} = \{ y \mid y^T x \leq 0, \forall x \in K \}$.

Gradient funkcji $f(\alpha_0)$ danej wzorem /4.34/ wynosi

$$\tilde{q} = \tilde{E} \alpha_0 + \tilde{E} \alpha_1. \quad /4.37/$$

Zatem w celu znalezienia rozwiązania optymalnego zadania /4.35/ musimy rozwiązać następujący układ /związki /4.37/, /4.32/, /4.36//

$$\tilde{E} \alpha_0 - \tilde{q} = - \tilde{E} \alpha_1$$

$$\alpha_0 \in K \quad /4.38/$$

$$\tilde{q} \in K^{\mathbb{R}}$$

Zauważmy, że układ ten jest podobny do analogicznych związków /4.10/ dla analizy sprężystej. Różnice polegają na tym, że zamiast podprzestrzeni liniowych występują tu stożki oraz, że macierz nie jest dodatnio określona, lecz dodatnio półokreślona. Chcąc wyrazić rozwiązanie układu /4.38/ w podobnej postaci, jak /4.11/, należy dokonać pewnych modyfikacji odwrotności Botta-Duffina. Z uwagi na dodatnią półokreśloność macierzy \tilde{E} trzeba wprowadzić uogólnioną odwrotność Botta-Duffina /patrz Dodatek 3/. Podobnie zresztą, postępuje się przy rozwiązywaniu układu równań liniowych z dowolną /prostokątną lub kwadratową osobliwą/ macierzą, wprowadzając jej uogólnioną odwrotność [7].

Następnie należy zastąpić operatory rzutowań na podprzestrzeń liniową i jej dopełnienie ortogonalne rzutowaniami na stożek K i stożek polarny $K^{\mathbb{R}}$. W ten sposób otrzymamy uogólnioną odwrotność macierzy \tilde{E} względem stożka K , która będzie odpowiednikiem uogólnionej odwrotności Botta-Duffina, czyli odwrotności macierzy względem podprzestrzeni liniowej.

Mając na względzie powyższe uwagi, możemy zapisać rozwiązanie układu /4.38/ w postaci

$$\alpha_0 = P_K \left\{ \left(\tilde{E} P_K + P_{K^\pi} \right) /1/ \left(-\tilde{E} \alpha_1 \right) + \left[I - \left(\tilde{E} P_K + P_{K^\pi} \right) /1/ \left(\tilde{E} P_K + P_{K^\pi} \right) \right] z \right\} \quad /4.39/$$

$$\tilde{q} = \tilde{E} \alpha_0 + \tilde{E} \alpha_1$$

gdzie

$z \in R^V$ - dowolny wektor

P_K, P_{K^π} - operatory rzutowań ortogonalnych na K i K^π

I - $v \times v$ macierz jednostkowa

indeks /1/ u góry macierzy, np. $A /1/$, oznacza tzw. 1-szą uogólnioną odwrotność macierzy A , tzn. taką która spełnia równanie macierzowe $AA /1/ A = A$ /por. [7] oraz Dodatek C.3/.

Rozwiązanie /4.39/ dane jest w postaci jawnej. Jednakże występujących tu operatorów rzutowań na stożki nie można wyrazić bezpośrednio w formie macierzowej tak, jak jest to możliwe w przypadku rzutowania na podprzestrzeń liniową. W celu uniknięcia tej niedogodności zauważmy, że stożek K - jako iloczyn $L \cap K_1$ - jest zbiorem domkniętym zawartym w podprzestrzeni L . Pozwala to /por. twierdzenie 2.2.6 w [82], str. 46/ zastąpić rzutowanie na K następującym złożeniem rzutowań - najpierw na L , następnie na K

$$P_K = P_K \circ P_L \quad /4.40/$$

Tak więc, rzutując najpierw na podprzestrzeń liniową L ,

co sprowadza się do zastąpienia we wzorze /4.39/

$$P_K \text{ i } P_{K^\perp} \text{ przez } P_L \text{ i } P_{L^\perp} \text{ /gdzie } L = N(\tilde{C}^T),$$

$$L^\perp = R(\tilde{C}) / \text{ , otrzymujemy pewien wektor } \hat{\alpha}_0 \in L$$

$$\hat{\alpha}_0 = P_L \left\{ \left(\tilde{E} P_L + P_{L^\perp} \right)^{-1} \left(- \tilde{E} \alpha_1 \right) + \right. \\ \left. + \left[I - \left(\tilde{E} P_L + P_{L^\perp} \right)^{-1} \left(\tilde{E} P_L + P_{L^\perp} \right) \right] z \right\} \quad /4.41/$$

W ogólności mogą zajść dwa przypadki :

$$1^\circ. \quad \hat{\alpha}_0 \in K_1 \implies \hat{\alpha}_0 \in K \text{ /gdyż } K = L \cap K_1 / ,$$

czyli $\alpha_0 = \hat{\alpha}_0$ jest rozwiązaniem problemu /4.38/ ;

$$2^\circ \quad \hat{\alpha}_0 \notin K_1 , \text{ wówczas rozwiązanie zadania /4.38/}$$

otrzymujemy, rzutując $\hat{\alpha}_0$ na K

$$\alpha_0 = P_K \hat{\alpha}_0 \quad /4.42/$$

Ale ponieważ $K = L \cap K_1$ i $\hat{\alpha}_0 \in L$, zatem rzutowanie ortogonalne na K możemy zastąpić rzutowaniem na K_1 wzdłuż podprzestrzeni L , co zapisujemy w postaci

$$\alpha_0 = P_{K_1 ; L} \hat{\alpha}_0 . \quad /4.43/$$

W drugim przypadku możemy postąpić też inaczej, nie wykonując w ogóle rzutowania. Wektor $\hat{\alpha}_0$ dany wzorem /4.41/ jest określony niejednoznacznie ze względu na dowolność wektora z . Zatem możemy tak dobrać z , aby $\hat{\alpha}_0 \in K_1$. Wówczas $\hat{\alpha}_0$ będzie również należało do K , czyli będzie poszukiwanym rozwiązaniem α_0 zadania /4.38/. Mając na uwadze definicję /4.33/ stożka

$$K_1 = \left\{ \hat{\alpha}_0 \mid \hat{\alpha}_0 \geq -\alpha_1 , \text{ dla } \alpha_1 \geq 0 \right\} ,$$

gdzie α_1 jest szczególnym rozwiązaniem układu $\tilde{C}^T \alpha_1 = \tilde{p}$,
oraz wprowadzając następujące oznaczenia

$$G = I - P_L \left(\tilde{E} P_L + P_{L^+} \right) /1/ \tilde{E} \quad /4.44/$$

$$H = P_L \left[I - \left(\tilde{E} P_L + P_{L^+} \right) /1/ \left(\tilde{E} P_L + P_{L^+} \right) \right],$$

opisane postępowanie sprowadza się do rozwiązania względem z
i α_1 następującego układu nierówności i równań

$$G \alpha_1 + Hz \geq 0$$

$$\tilde{C}^T \alpha_1 = \tilde{p} \quad /4.45/$$

$$\alpha_1 \geq 0$$

Mając wyznaczone z i α_1 , znajdujemy rozwiązanie α zadania
/4.27/ według wzoru

$$\alpha = G \alpha_1 + Hz. \quad /4.46/$$

Następnie obliczamy uogólnione naprężenia $s = W\alpha$, będące
rozwiązaniem problemu /4.26/ analizy sprężysto-plastycznej.

4.4. Wyznaczenie nośności granicznej.

W poprzednim punkcie zagadnienie holonomicznej analizy
sprężysto-plastycznej zostało sprowadzone do rozwiązania
układu równań i nierówności /4.45/. Istnienie rozwiązania
tego układu zależy od prawej strony \tilde{p}

$$\tilde{p} = \begin{bmatrix} p \\ e \end{bmatrix}, \quad e = [11\dots 1]^T \in R^l,$$

$p \in R^m$ - obciążenie zewnętrzne.

Z chwilą, gdy obciążenie zewnętrzne p przekracza obciążenie graniczne, układ /4.45/ staje się sprzeczny. Interesuje nas teraz problem wyznaczenia obciążenia granicznego dla konstrukcji sprężysto-plastycznej. Zakładając proporcjonalny wzrost obciążenia, tzn. przyjmując /4.19/

$$p_\mu = \mu p$$

gdzie p jest ustalonym obciążeniem odniesienia, a μ - skalarnym mnożnikiem, problem ten sprowadza się do znalezienia maksymalnej wartości mnożnika μ , dla której istnieje rozwiązanie układu /4.45/. Otrzymujemy zatem następujące zadanie programowania liniowego

znaleźć $\max \mu$
przy ograniczeniach

$$G \alpha_1 + H z \geq 0$$

$$\tilde{C}^T \alpha_1 - \mu \tilde{p} = b \quad /4.47/$$

$$\alpha_1 \geq 0$$

gdzie

$$\tilde{p} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{m+1}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} \in R^{m+1}$$

$$e = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in R^1$$

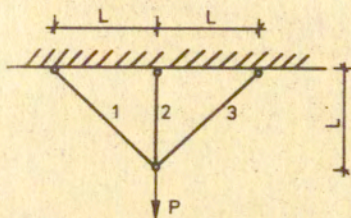
Po rozwiązaniu otrzymujemy mnożnik obciążenia granicznego oraz wektory ϵ_1 i z . Obliczamy ϵ według wzoru /4.46/, a następnie uogólnione naprężenia sprężysto-plastyczne $s = W \epsilon$, odpowiadające obciążeniu granicznemu.

4.5. Przykłady obliczeń.

Na przykładzie prostych konstrukcji prętowych przedstawiamy teraz zastosowanie zaproponowanej w poprzednim punkcie metody wyznaczania nośności granicznej w stanie sprężysto-plastycznym. Otrzymane wyniki porównamy z rozwiązaniami przyrostową metodą przemieszczeniową przy użyciu programu PEP liniowej analizy sprężysto-plastycznej [85], opracowanego przez francuski Ośrodek Konstrukcji Metalowych /CTICM/.

Testowane konstrukcje oraz wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 4.2. - 4.5. W kratownicach z rys. 4.2. i rys. 4.4. uogólnione naprężenia s stanowią siły osiowe w prętach, a w belce z rys. 4.3. - momenty zginające w przekrojach. Dla ramy z rys. 4.5. uwzględniono interakcję momentu zginającego i siły osiowej; stosowano romboidalny warunek plastyczności dla przekroju sandwiczowego.

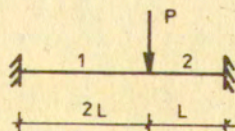
Przedstawiona w poprzednim punkcie metoda wyznaczenia nośności granicznej konstrukcji sprężysto-plastycznej polega na rozwiązaniu zadania programowania liniowego w postaci /4.47/. Zadanie to było rozwiązywane przy użyciu pakietu ICL-u [88] na maszynie cyfrowej Odra 1305. Dane w postaci macierzy G , H , \tilde{C}^T i wektorów \tilde{p} , b generowane były automatycznie programem napisanym w FORTRANIE na podstawie macierzy C^T równań równowagi, macierzy W wierzchołków warunku plastyczności, macierzy sprężystości E^{-1} i wektora p obciążenia odniesienia. Przy obliczaniu macierzy G i H , zdefiniowanych wzorem /4.44/ wykorzystano macierzowe przedstawienie operatorów rzutowań ortogonalnych P_L i P_{L^\perp} na jądro $N(\tilde{C}^T)$ i obraz $R(\tilde{C})$ w postaci zamieszczonej w Dodatku C /wzory /C.29/, /C.30//. Uogólniona odwrotność macierzowa:



$$\begin{aligned} L &= 1 \\ EA &= 1 \\ P &= 1 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{LP (4.47)} \\ \text{PEP [85]} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_g = 2.4142 \\ N_1 = N_2 = N_3 = N_p \end{array}$$

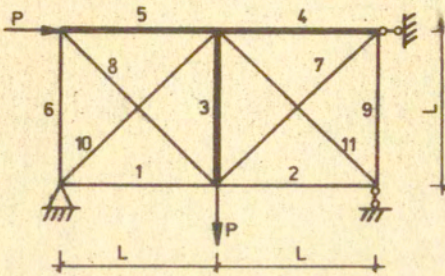
Rys.4.2



$$\begin{aligned} L &= 1 \\ EJ &= 1 \\ P &= 1 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{LP (4.47)} \\ \text{PEP [85]} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_g = 3 \\ \left| M_1^I \right| = \left| M_1^P \right| = \left| M_2^I \right| = \left| M_2^P \right| = M_p \end{array}$$

Rys.4.3



[T , cm]

L = 200

E = 2100

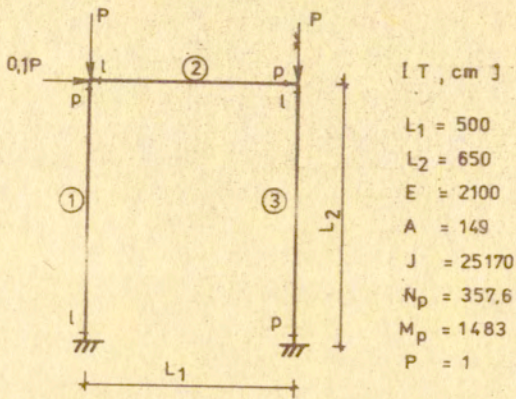
A = 10

$N_p = 24$

P = 1

	LP [4, 47)	PEP [85]
$\cdot_s \cdot$	$P_g = 28$	$P_g = 28$
1	23,9734	24.
2	11,9856	12.
3	24.	24.
4	- 24.	- 24.
5	- 24.	- 24.
6	3,9984	4.
7	11,3376	11,3137
8	- 5,6592	- 5,6569
9	- 7,9872	- 8.
10	- 16,9776	- 16,9706
11	- 16,9584	- 16,9706

Rys. 4.4



	LP (4, 47)	PEP [85]
	$P_g = 72,689$	$P_g = 72,711$
"s"		
① {		
M^l	- 12,0110	- 12,0108
M^p	- 12,0106	- 12,0122
N	- 67,9798	- 67,9842
② {		
M^l	12,0108	12,0122
M^p	11,6193	11,6202
N	- 3,5760	- 3,5752
③ {		
M^l	- 11,6193	- 11,6202
M^p	- 11,6193	- 11,6187
N.	- 77,4204	- 77,4372

Rys. 4.5

występująca w /4.44/, liczona była według wzoru /C.14/.

Z rozwiązania zadania programowania liniowego /4.47/ otrzymujemy mnożnik obciążenia granicznego oraz współczynniki kombinacji wypukłej aktywnych wierzchołków warunku plastyczności, na podstawie których obliczamy naprężenia sprężysto-plastyczne.

Natomiast analiza przyrostowa za pomocą programu PEP [85] prowadzona była aż do chwili zniszczenia, przy czym w analizowanych przykładach nie stwierdzono wystąpienia lokalnego odciążenia na kolejnych przyrostach obciążeń. Zatem założenie o niezależności końcowego stanu granicznego od drogi obciążenia jest spełnione i wyniki powinny być takie same, jak dla analizy holonomicznej. I rzeczywiście, z porównania rezultatów obu metod /rys. 4.2. - rys. 4.5/ można twierdzić, że z dokładnością do błędów numerycznych, są one identyczne.

5. WNIOSKI KOŃCOWE

W istniejącej literaturze, dotyczącej komputerowego ujęcia zagadnień nośności granicznej konstrukcji ramowych, rozpatrywano dotychczas jedynie układy płaskie. Celem pierwszej części niniejszej pracy było opracowanie efektywnych numerycznie metod obliczania nośności granicznej przestrzennych ram z materiału sztywno-plastycznego bez wzmocnienia. Na podkreślenie zasługują następujące rezultaty:

1. Przedstawiono dyskretny opis statyki pręta przestrzennej ramy, odpowiedni do zagadnień nośności granicznej przy sztywno-plastycznej idealizacji materiału.
2. Wyprowadzono globalny warunek plastyczności dla pręta, wykorzystując ideę wierzchołkowego opisu powierzchni granicznej dla przekroju. Uwzględniono interakcję momentów zginających w płaszczyznach ortogonalnych, momentu skręcającego i siły osiowej. Wyprowadzono także tradycyjną postać warunku plastyczności w postaci układu nierówności oraz porównano wymiary macierzy obydwu opisów.
3. Wykorzystując wierzchołkowy opis warunku plastyczności, sformułowano zagadnienie obliczania nośności granicznej przestrzennych ram w nowej postaci zadania programowania liniowego. Stwierdzono, że w ujęciu tym występuje znaczna redukcja wymiarów macierzy zadania w stosunku do tradycyjnego sformułowania, opartego bezpośrednio na dwóch twierdzeniach nośności granicznej.
4. Na bazie nowego sformułowania zagadnienia nośności granicznej opracowano program numeryczny, pozwalający na efektywne obliczanie nośności granicznej ortogonalnych ram przestrzennych. Zwrócono przy tym uwagę na oszczędny sposób wprowadzania danych początkowych i automatyzację procesu obliczeń z wykorzystaniem współpracy z pamięcią zewnętrzną komputera. Opracowano również program oparty na tradycyjnym sformułowaniu zagadnienia nośności granicznej, w którym warunek plastyczności ma

postać układu nierówności. Na przykładach przestrzennych konstrukcji ramowych wykazano wyższość metody wierzchołkowej zarówno pod względem czasu obliczeń, jak i wymaganej pamięci komputera.

W drugiej części pracy przedstawiono możliwości, jakie daje zastosowanie teorii uogólnionych odwrotności macierzy w analizie konstrukcji prętowych z materiału sprężysto-plastycznego bez wzmocnienia. Rozpatrywano zagadnienie analizy przy dowolnym poziomie obciążenia oraz przy obciążeniu granicznym. Przyjęto założenie o niewystąpieniu lokalnego odciążenia w procesie obciążania. Badano metody rozwiązywania zagadnienia analizy sprężysto-plastycznej w naprężeniowym sformułowaniu, wynikającym z podejścia energetycznego. Uzyskano następujące nowe rezultaty:

1. Zastosowano ideę wierzchołkowego opisu powierzchni granicznej. W wyniku otrzymano nowe sformułowanie zagadnienia analizy sprężysto-plastycznej przy dowolnym obciążeniu w postaci przetransformowanego zadania programowania kwadratowego. Na gruncie algebry liniowej i teorii optymalizacji zbadano własności macierzy tego zadania, traktowanych jako operatory liniowe w przestrzeniach skończone wymiarowych.
2. Zaproponowano nową metodę rozwiązywania przetransformowanego zadania programowania kwadratowego. Wprowadzono w tym celu zmodyfikowaną uogólnioną odwrotność macierzową Botta-Duffina. Otrzymane rozwiązanie określa stan naprężeń sprężysto-plastycznej konstrukcji przy dowolnym, zadanym poziomie obciążenia.
3. Wykorzystując otrzymaną postać rozwiązania sprężysto-plastycznego dla dowolnego obciążenia, opracowano nową metodę jednoczesnego wyznaczania nośności granicznej i odpowiadającego jej stanu naprężeń dla konstrukcji z materiału sprężysto-plastycznego. Metoda ta sprowadza się do jednokrotnego rozwiązania zadania programowania liniowego. Uniknięto w ten sposób bezpośredniego rozwiązywania zadania programowania kwadratowego.

Na bazie otrzymanych w pracy wyników istnieje możliwość prowadzenia dalszych prac badawczych. Ważnym zagadnieniem związanym z analizą plastyczną przestrzennych ram, lecz wymagającym dalszych studiów, jest uwzględnienie możliwości paczeczenia się przekrojów, co jest szczególnie istotne w przypadku przekrojów cienkościennych. Spowoduje to wprowadzenie dodatkowej składowej wektora uogólnionych naprężeń dla przekroju w postaci bimomentu oraz modyfikację związków statycznych i geometrycznych. Wymagać to będzie również znalezienia efektywnej numerycznie metody wyznaczenia nośności granicznej przekroju w celu otrzymania warunku plastyczności dla pręta. Istotne jest także zbadanie, w jakich przypadkach można pominąć wpływ siły tnącej na uplastycznienie przekroju. Problemem związanym z przedstawioną w drugiej części pracy metodą analizy konstrukcji sprężysto-plastycznych, lecz wymagającym dalszych badań, jest odejście od założenia o niewystąpieniu lokalnego odciążenia w procesie obciążania i przyjęcie rzeczywistego modelu sprężysto-plastycznego materiału ze wzmocnieniem w ramach teorii plastycznego płynięcia.

L I T E R A T U R A

1. ABDEL-BASET S.B., BEST M.J., DE DONATO O.,
FRANCHI A., GRIERSON D.E., Mc FALL N.A.,
PATERLINI F., RITTER K., Quadratic programming
applications, in : Engineering Plasticity by Mathematical
Programming, M.Z. COHN, G. MAIER, D.E.GRIERSON /eds./,
Proc. NATO-ASI, Waterloo, August 1977, Pergamon Press,
New York, 1978.
2. ANAND S.C., WEISGERBER F.E., SHAW H., Direct solution vs
quadratic programming technique in elastic-plastic finite
element analysis, Int. J. Comput. Struct. 7, 221-228,
1977.
3. ARIBERT J.M., JOUVE P., Simulation du comportement
elasto-plastique d'une ossature en flexion-plane,
Construction Métallique, No. 3, 5-16, 1972.
4. ARIBERT J.M., JOUVE P., Etude du comportement non linéaire
des ossatures à plan moyen, Construction Métallique,
No. 2, 20-36, 1974.
5. ASKARI M., Calcul de la charge ultime des grillages
compte tenu de la rigidité à la torsion des poutres,
Construction Métallique, No. 1, 39-57, 1974.
6. BAKER J.F., HORNET M.R., HEYMAN J., The Steel Skeleton,
vol.2, Combridge Univ. Press, 1956.
7. BEN-ISRAEL A., GREVILLE T.N.E., Generalized Inverses.
Theory and Applications, J.Wiley, New York, 1974.
8. BIEZUCHOW N.I., Wlijanije oczerednosti nagruženija na
niesusozozuju sposobnost' seczenija pri složnom napražennom
sostojanii, Izd. Art. Akad. t. 8, 1953.

9. BIRON A., Nonlinear programming method for limit analysis of rotationally symmetric shells, Int. J. Nonlin. Mech. 3 , 201-213, 1968.
10. BONI B., KLEIBER, Limit analysis of plane bending-and-torque supporting grids, Arch. Inż. Łąd. 21, 69-87, 1975.
11. BONI B., KLEIBER M., Numerical plastic collapse analysis of plane bending-and-torque supporting grids, Comp.Meths. Appl. Mech. Eng. 19 , 1-19, 1979.
12. BONI B., SARAN M., Numerical plastic analysis of plane frames with axial forces taken into account, Arch.Inż. Łąd. 24 , 4, 1978.
13. BORKAUSKAS A., ATKOČIUNAS J., Optimal design for cyclic loading, Proc. IUTAM Symp. Optim. Struct. Desing, Warsaw 1973, Springer, Berlin, 1975, 433-440.
14. BORKAUSKAS A.E., ČYRAS A.A., Dwoistwiennost' w nieliniejnych zadaczach rasczeta konstrukcii po sostojaniju predelnogo rawnowiesija, Litowskii Mechaniczeskii Sbornik 3 , 55-67, 1968.
15. BORKAUSKAS A.E., ČYRAS A.A., Dwoistwiennyje zadaczi optimizacii w teorii predelnogo rawnowiesija spłosznoj sredy, Stroitel'naja Mechanika i Rasczet Soruženii, Nr 4, 5-10, 1969.
16. BORKOWSKI A., On the limit load optimization problem, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. 23, 525-530, 1975.
17. BORKOWSKI A., Programowanie matematyczne w zagadnieniach nieliniowej statyki. Praca habilitacyjna, Prace IPPT, nr 36/1978.

18. BORKOWSKI A., Metoda sztywno-plastycznych elementów skończonych w analizie i optymalizacji ram, Komputer i Mechanika 1, 125-138, 1978.
19. BORSUK K., Geometria Analityczna Wielowymiarowa wyd. III, PWN, Warszawa, 1966.
20. BOTT R., DUFFIN R.J., On the algebra of networks, Trans. Amer. Math. Soc. 74, 99-109, 1953.
21. BRÓDKA J., Zginanie i skręcanie dwuteownika cienkościennego w fazie odkształceń sprężysto-plastycznych, Inż. Bud. 18, 395-401, 1961.
22. CASCIATI F., Elastic-plastic deformation analysis: a parametric linear programming method, J. de Méc. appl. 2, 269-290, 1978.
23. CHARNES A.C., GREENBERG H.J., Plastic collapse and linear programming, Bull, Amer. Math. Soc. 57, p.480, 1951.
24. CHARNES A.C., LEMKE C.E., ZIENKIEWICZ O.C., Virtual work, linear programming and plastic limit analysis, Proc. Roy. Soc. ser. A 251, 110-116, 1959.
25. CHEN W.F., ATSUTA T., Interaction equation for biaxially loaded sections, J. Struct. Div. ASCE 98, ST5, 1035-1052, 1972.
26. CHOBOT K., Matrix, analysis of general space frameworks, Acta Techn. ČSAV, No. 3, 420-473, 1971.
27. COATES R.C., COUTIE M.G., KONG F.K., Structural Analysis, Nelson, London, 1972.
28. COHN M.Z., Introduction to engineering plasticity by mathematical programming, in: Engineering Plasticity by Mathematical Programming, M.Z. COHN, G. MAIER, D.E. GRIERSON /eds/, Proc. NATO-ASI, Waterloo, August 1977, Pergamon Press, New York, 1978.

29. COHN M.Z., GOSH S.K., PARIMI S.R., Unified approach to the theory of plastic structures, J. Eng. Mech. Div. ASCE 98, EM5, 1133-1158, 1972.
30. COHN M.Z., GRIERSON D.E., Further results on the equilibrium method of limit desing, Proc. Inst. Civ. Eng. 46, 143-168, 1970.
31. COHN M.Z., RAFAY T., Collapse load analysis of frames considering axial forces, J. Eng. Mech. Div. ASCE 100, EM4, 773-794, 1974.
32. COTTLE R.W. Monotone solutions of the parametric linear complementarity, problem, Math. Prog. 3, 210-224, 1972.
33. COTTLE R.W., Fundamentals of quadratic programming and linear complementarity, in: Engineering Plasticity by Mathematical Programming, M.Z. COHN, G.MAIER, D.E. GRIERSON /eds./, Proc. NATO-ASI Waterloo, August 1977, Pergamon Press, New York, 1978.
34. ČYRAS A.A., Metody Liniejnogo Programmirowanija pri Rasczete Uprugo-Plasticzeskich Sistem, Strojizdat, Leningrad, 1969.
35. ČYRAS A.A., Teorija Optimizacii w Predelnom Analizie Twerdogo Deformirujemnego Tela, Mintis, Vilnius, 1971.
36. ČYRAS A.A., BORKAUSKAS R.P., Teorija i Metody Optimizacii Uprugo-Plasticzeskich Sistem, Strojizdat, Leningrad, 1974.
37. DANTZIG G.B., Linear Programming and Extensions, Princeton Univ. Press, 1963.
38. Decomposition of Large-Scale Problems, ed. D.M.HIMMELBLAU, North-Holland, Amsterdam, 1973.
39. DE DONATO, O., Fundamentals of elastic-plastic analysis, in: Engineering Plasticity by Mathematical Programming, M.Z. COHN, G.MAIER, D.E. GRIERSON /eds./, Proc. NATO-ASI, Waterloo, August 1977, Pergamon Press, New York, 1978.

40. DE DONATO E., MAIER G., Mathematical programming methods for the inelastic analysis of reinforced concrete frames allowing for limited rotation capacity, Int. J. Numer. Meths. Eng. 4, 307-329, 1972.
41. DINNO K.S., SAFFARINI A.R., An elastic-plastic analysis of grid structures, 2 nd Int. Conf. on Space Structures, Univ. of Surrey, Guildford, England, 1975, 589-597.
42. DOMASZEWSKI M., Uwzględnienie wyboczenia słupów przy obliczaniu nośności granicznej ram metodą programowania liniowego, Prace IPPT, nr 69/1979.
43. DOMASZEWSKI M., BORKOWSKI A., On automatic selection of redundancies, Int. J. Comput. Struct. 10, 577-582, 1979.
44. DUFFEY T.A., ROMESBERG L.E., SCHREYER H.L., The construction and use of n-dimensional lower bound failure surfaces, Int. J. Comput. Struct. 6, 355-361, 1976.
45. ERCHOW M.I., Predelnoje rawnowiesije idealno-plasticzeskich sterzniej proizwolnogo seczenija, Stroit. i Arch. 4, 151-167, 1961.
46. FENVES S.J., GONZALEZ-CARO A., Network-topological formulation of analysis and design of rigid-plastic framed structures, Int. J. Numer. Meths. Eng. 3, 425-441, 1971.
47. GACHON H., GALEA Y., Modèle d'analyse non linéaire des structures à barres. Méthode d'approche du seuil de bifurcation d'équilibre, Construction Métallique, No. 2, 1978.
48. GALEA Y., Programme d'analyse élasto-plastique non linéaire de structures planes à barres, Construction Métallique, No. 4, 3-16, 1978.
49. GASS S.I., Programowanie Liniowe, wyd. IV, PWN Warszawa, 1980.

50. GAVARINI C., Fundamental plastic analysis theorems and duality in linear programming, Ingegneria Civile, No. 18, 1966.
51. GAYDON F.A., NUTTAL H., On the combined bending and twisting of beams of various sections, Int. J. Mech. Phys. Solids 6, 17-26, 1957.
52. GRIERSON D.E., Deformation analysis of elastic-plastic frames, J. Struct. Div. ASCE 98, ST10, 2247-2267, 1972.
53. GRIERSON D.E., ABDEL-BASET S.B., Plastic analysis under combined stresses, J. Eng. Mech. Div. ASCE 103, EM5, 837-854, 1977.
54. GRIERSON D.E., GLADWELL G.M.L., Collapse load analysis using linear programming, J. Struct. Div. ASCE 97, ST5, 1561-1573, 1971.
55. GUTKOWSKI W., Regularne Konstrukcje, ^{Pretowe} PWN, Warszawa, 1973.
56. HANDELMAN G.H., A variational principle for a state of combined plastic stress, Quart. J. Appl. Math. 1, 351-353, 1944.
57. HARUNG H.S., MILLAR M.A., General failure analysis of skeletal plane frames, J. Struct. Div. ASCE 99, ST6, 1051-1074, 1973.
58. HEYMAN J., The limit desing of space frames, J. Appl. Mech. 18, 157-162, 1951.
59. HEYMAN J., The limit desing of transversely loaded square grid, J. Appl. Mech. 19, 1952.
60. HEYMAN J., Plastic Desing of Frames, vol. 2: Applications, Cambridge Univ. Press, 1971.
61. HEYMAN J., Overcomplete mechanism of plastic collapse, J. Optim. Theor. Appl. 15, 27-35, 1975.

62. HILL R., A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity, *Quart. J. Appl. Math.* 1, 18-28, 1948.
63. HILL R., SIEBEL M.P.L., On the plastic distortion of solid bars by combined bending and twisting, *J. Mech. Phys. Solids* 1, 207-214, 1953.
64. HODGE P.G., *Plastic Analysis of Structures*, Mc Graw-Hill, New York, 1959.
65. HODGE P.G., Yield point load determination by non-linear programming, *Proc. 10th IUTAM Congr. Munich 1964*, Springer, Berlin, 1966, 554-561.
66. HODGE P.G., Limit analysis with multiple load parameters, *Int. J. Solids Structures* 6, 661-675, 1970.
67. HODGE P.G., BELYTSCHKO T., Numerical methods for limit analysis of plates, *J. Appl. Mech.* 35, 797-802, 1969.
68. HODGE P.G., SANKARANARAYANAN R., On the use of linearized yield conditions for combined stresses in beams, *J. Mech. Phys. Solids* 7, 22-36, 1958.
69. HODGE P.G., SANKARANARAYANAN R., The determination of safe loads of beams subjected to combined twisting and biaxial bending moments, *J. Appl. Mech.* 26, ser.E, 442-447, 1959.
70. HORNE M.R., A moment distribution method for the analysis and design of structures by the plastic theory, *Proc. Inst. Civ. Engs.* 3, 51-98, 1954.
71. IBM Mathematical Programming System Extended /370 / MPSX/370/. Program Reference Manual SH19-1095-2, IBM France, 1977.
72. IMEGWU E.O., Combined plastic bending and torsion, *J. Mech. Phys. Solids* 10, 277-282, 1962.
73. JAIN R.D., Plastic analysis of plane frames using linear programming, *Cem. Concr.* 12, 116-122, 1971.

74. JENNINGS A., MAJID K., An elastic-plastic analysis by computer for framed structures loaded up to collapse, *Struct. Eng.* 43, 407-412, 1965.
75. KANEKO I., A mathematical programming method for the inelastic analysis of reinforced concrete frames, *Int. J. Numer. Meths. Eng.* 11, 1137-1154, 1977.
76. KANEKO I., A parametric linear complementarity problem involving derivatives, *Math. Prog.* 15, 146-154, 1978.
77. KANEKO I., Complete solutions for a class of elastic-plastic structures, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* 21, 193-209, 1980.
78. KLEIBER M., Podstawy teorii plastycznego płynięcia ciał dyskretyzowanych. *Rozp. Inż.* 21, 279-292, 1973.
79. KOITER W.T., General theorems for elastic-plastic solids, chap. IV of *Progress in Solid Mechanics* 1, North-Holland, Amsterdam, 1960.
80. KORN A., GALAMBOS T., Behaviour of elastic-plastic frames, *J. Struct. Div. ASCE* 94, ST5, 1968.
81. LASDON L.S., *Optimization Theory for Large Systems*, Macmillan, New York, 1970.
82. LAURENT P.J., *Approximation et Optimisation*, Herman, Paris, 1972.
83. LAWSON C.L., HANSON R.J., *Solving Least Squares Problems*, Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
84. LESCOUARCH Y., Developpement des methodes de calcul en plasticité des structures à barres, *Annales ITBTP*, No. 326, 1-19, 1975.
85. LESCOUARCH Y., Programme de calcul en élasto-plasticité des structures planes, *Construction Métallique*, No. 1, 40-50, 1976.

86. LESCEUARCH Y., Capacité de resistance d'une section soumise à divers types de sollicitations, Construction Métallique, No. 2, 3-17, 1977.
87. LESNIAK Z.K., Zastosowanie metody programowania nieliniowego przy użyciu maszyn matematycznych do kształtowania wytrzymałościowego konstrukcji, IX Konf. Krynicka, Gliwice, 1963.
88. Linear Programming Mark 3, ICL Technical Publication 4147, London, 1975.
89. LIVESLEY R.K., A compact FORTRAN sequence for limit analysis, Int. J. Numer. Meths. Eng. 5, 446-449, 1973.
90. LIVESLEY R.K. Matrix Methods of Structural Analysis, 2nd edn., Pergamon, London, 1976.
91. MAIER G., A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes, Meccanica 5, 54-66, 1970.
92. MAIER G., Metody programowania matematycznego w analizie konstrukcji sprężysto-plastycznych, Arch.Inż.Ląd. 21, 387-411, 1975.
93. MEIER G., Future directions in engineering plasticity, in: Engineering Plasticity by Mathematical Programming, M.Z. COHN, H.MAIER, D.E.GRIERSON /eds./, Proc. NAPO-ASI, Waterloo, August 1977, Pergamon Press, New York, 1978.
94. MAIER G., GRIERSON D.E., BEST M.J., Mathematical programming methods for deformation analysis at plastic collapse, Int. J. Comput. Struct. 7, 599-612, 1977.
95. MAJID K. ANDERSON D., The computer analysis of large multistory framed structures, Struct.Eng. 46, 357-365, 1968.
96. Manuel pour calcul en plasticité des constructions en acier, CTICM, Puteaux, 1978.

97. MASSONNET C., SAVE M., Calcul Plastique des Constructions
vol. 1: Structures dependant d'un paramètre, 3e éd.,
Nelissen, Liège, 1976.
98. Méthodes de calcul aux états-limites des structures à
barres, CTICM, Puteaux, 1972.
99. MILLER P.M., MALVERN L.E., Numerical solution of
Piechnik's equation for the combined bending and torsion
of rigid-plastic bars, 10 th Midw. Mech. Conf., Colorado
State Univ., 1967, 571-580.
100. MORRIS G.A., FENVES S.J., Approximate yield surface
equations, J. Eng. Mech. Div. ASCE 95, 937-954, 1969.
101. NADAI A., Theory of Flow and Fracture of Solids, 2 nd
edn., vol. 1, Mc Graw-Hill, New York, 1950.
102. NEAL B.G., The Plastic Methods of Structural Analysis,
2 nd edn., Chapman and Hall, London, 1963.
103. NONAKA T., A kinematical approach to the plastic collapse
load of a rectangular ^{frame} with consideration of axial forces,
Proc. Symp. on Plastic Analysis of Structures, Jassy,
Romania, vol.2, 1972.
104. PIECHNIK S., ŻYCZKOWSKI M., On the plastic interaction
curve for bending and torsion of a circular bar, Arch.
Mech. Stos. 13, 669-692, 1961.
105. PN-76/B-03200, Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne
i projektowanie, Wyd. Norm., Warszawa, 1977.
106. PRAGER W., Programmation linéaire en théorie des
constructions, Mémoires du CERES, vol. 3, 33-49,
Liège, 1962.
107. PRZEMIENIECKI J.S., Theory of Matrix Structural Analysis,
Mc Graw-Hill, New York, 1968.
108. Recommandations pour le calcul en plasticité des
constructions en acier, Construction Métallique,
No. 4, 53-100, 1975.

109. ROBINSON J., HAGGENMACHER G.W., Optimization of redundancy selection in the finite element force method, AIAA J. 8, 1429-1433, 1970.
110. ROZIN L.A., Sterżniowe systemy jako systemy koniecznych elementów, Izd. Leningradzkiego Uniwersytetu, Leningrad, 1976.
111. ROZIN L.A., O metodzie sił w konstrukcyjnej mechanice, Metod koniecznych elementów i konstrukcyjna mechanika, Trudy LPI, No. 349, 5-15, Leningrad, 1976.
112. RZANICYN A.R., Pribliżennyye resheniya zadach teorii plastycznosti, Issled. Stroit.Mech.Theor. Plasticznosti, 6-65, Moskwa, 1965.
113. SALKIN H.M., SAHA J., An introduction to linear programming, in: Studies in Linear Programming, North-Holland, Amsterdam, 1975.
114. SARAN M., Analiza sprężysto-plastycznych ram w zakresie małych i dużych przemieszczeń. Praca doktorska, Prace IPPT, nr 63/1979.
115. SARAN M., BORKOWSKI A., Nośność graniczna ram w ujęciu komputerowym, Arch.Inż.Ląd., 24, 645-657, 1978.
116. SAWCZUK A., Nośność graniczna ram płaskich, Arkady, Warszawa, 1964.
117. SAWCZUK A., JANAS M., KÖNIG J.A., Analiza plastyczna konstrukcji, Ossolineum, Wrocław, 1972.
118. SMITH D.L., MUNRO J., Plastic analysis and synthesis of frames subjected to multiple loadings, Eng.Optim. 2, 145-157, 1976.
119. STEELE M.C., The plastic bending and twisting of square members, J.Mech.Phys.Solids., 3, 156-166, 1954.
120. STIEFEL E., Note on Jordan elimination, linear programming and Tchebycheff approximation, Numer. Math. 2, 1-17, 1960.

121. STRELBICKA A.I., Predelnoje sostojanije ram iz tonkostien-nych sterzniej pri izgibie s kruczeniem, Naukowa Dumka, Kijów, 1964.
122. SYMONDS P.S., NEAL B.G., Recent progress in the plastic methods of structural analysis, J. Franklin Inst., No 5: 383-407, No 6: 469-492, 1951.
123. System/360 Scientific Subroutine Package /360A-CM-03X/, version III. Programmers Manual, IBM Technical Public. Depart., New York.
124. SZMELTER J., DACKO M., DOBROCIŃSKI S., WIECZOREK M., Programy metody elementów skończonych, Arkady, Warszawa, 1973.
125. SZMELTER J., DACKO M., PYRAK S., Analiza statyczna przestrzennych układów prętowych, Inż., Bud. 7/1972.
126. TELEGA J.J., Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji, Mech. Teor. Stos. 9, 7-52, 1971.
127. UEDA Y., YAMAKAWA T., AKAMATSU T., MATSUIISHI M., A new theory on elastic-plastic analysis of framed structures, Technology Reports of the Osaka Univ. 19, No 875, 263-276, 1969.
128. WAH T., CALCOTE L.R., Structural Analysis by Finite Difference Calculus, Van Nostrand Reinhold Comp., New York, 1970.
129. WANG C.K., General computer analysis for limit analysis, J. Struct. Div. ASCE 89, ST6, 101-117, 1963.
130. WNUK M., Limit state of a bar with arbitrary cross-section under tension and torsion, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. 10, 221-230, 1962.
131. WNUK M., Yield curves for bars of various cross-sections under combined torsion and tension, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. 11, 371-378, 1963.
132. WOLFE P., The simplex method for quadratic programming, Econometrica 27, 382-398, 1959.

133. WOŹNIAK Cz., Podstawy mechaniki ciał dyskretyzowanych, Mech.Teor.Stos., 11, 47-61, 1973.
134. YANG W.H., On a class of optimization problems for framed structures, Comp.Meths.Appl.Mech.Eng., 15, 85-97, 1978.
135. ZAVELANI-ROSSI A., A new linear programming approach to limit analysis, Proc.Int.Symp.on Variational Methods in Engineering, C. BREBBIA, H. TOTENHAM /eds./, Southampton Univ.Press, 1973, vol.2, chap.8.
136. ZUCHOWICKIJ S.I., AWDIEJEWA L.I., Liniejnoje i wypukłoje programmirowanije, Nauka, Moskwa, 1967.
137. ŻYCKOWSKI M., Obciążenia złożone w teorii plastyczności, PWN, Warszawa, 1973.

DODATEK A.

POSTACIE MACIERZY W^e , N^{eT} , C^{eT} , W^e .

Macierz W^e o wymiarach 6×76 , występująca we wzorze /2.53/ , której kolumny przedstawiają wierzchołki wielościanu globalnego warunku plastyczności dla pręta, w przypadku bardziej dokładnej aproksymacji, typu B, powierzchni granicznej, ma - we współrzędnych bezwymiarowych / 2:62/ - następującą postać

$$W^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \dots 0 & 0 & 0 & 0 & d & d & -d & -d & d & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & d & d & d & d & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & -d & d & -d & d & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & d & d & d & d & d \\ 1 & -1 & 0 & 0 & d & d & d & d & -d & -d \\ 0 & 0 & 1 & -1 & d & d & d & d & d & d \dots \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \dots -d & -d & d & d & -d & -d & d & d & -d & -d \\ d & d & d & d & d & d & d & d & d & d \\ d & -d & d & -d & d & -d & d & -d & d & -d \\ d & d & d & d & d & d & d & d & d & d \\ -d & -d & d & d & d & d & -d & -d & -d & -d \\ d & d & -d & -d & -d & -d & -d & -d & -d & -d \dots \end{matrix}$$

...	d	d	-d	-d	d	d	-d	-d	d	d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d	d	d
	d	d	d	d	d	d	d	d	-d	-d...

...	-d	-d	d	d	-d	-d	d	d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	d	d	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d...

...	d	d	-d	-d	d	d	-d	-d	d	d
	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d
	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d	-d	-d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d	-d	-d...

...	-d	-d	d	d	-d	-d	d	d	-d	-d
	d	d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d
	-d	-d	d	d	d	d	d	d	d	d
	-d	-d	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	-d	-d	d	d	d	d	d	d	d	d...

$$\begin{array}{cccccccc}
 \dots & d & d & -d & -d & d & d & -d & -d \\
 -d & -d & -d & -d & -d & -d & -d & -d & -d \\
 d & -d & d & -d & d & -d & d & -d & \\
 d & d & d & d & d & d & d & d & \\
 d & d & d & d & -d & -d & -d & -d & \\
 -d & -d & -d & -d & -d & -d & -d & -d &
 \end{array} \quad /A.1/$$

Waga : wartość parametru d dla trzech typów przekrojów podano na rys.2.6.

Macierz N^{eT} współczynników układu nierówności /2.64/, opisujących warunek plastyczności dla pręta, zdefiniowana jest za pomocą wektorów kolumnowych X, Y, Z, V, k /patrz rys.2.9 i 2.10/. W przypadku bardziej dokładnej aproksymacji, typu B, powierzchni granicznej wektory te mają po 48 składowych i są następującej postaci

$$X = \begin{bmatrix}
 e_x & -e_x & -e_x & e_x & d_x & -d_x & d_x & -d_x \\
 e_x & -e_x & -e_x & e_x & d_x & -d_x & d_x & -d_x \\
 e_x & -e_x & -e_x & e_x & d_x & -d_x & d_x & -d_x \\
 \underbrace{0 & 0 & \dots & 0}_{24 \text{ razy}} & & & &
 \end{bmatrix}^T \quad /A.2/$$

$$Y = \begin{bmatrix}
 d & -d & d & -d & e & -e & -e & e \\
 \underbrace{0 & 0 & \dots & 0}_{16 \text{ razy}} & e & -e & -e & e \\
 d & -d & d & -d & \underbrace{0 & 0 & \dots & 0}_{8 \text{ razy}} \\
 e & -e & -e & e & d & -d & d & -d
 \end{bmatrix}^T$$

$$Z = \begin{bmatrix} \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{8 \text{ razy}} & d_z & -d_z & d_z & -d_z \\ e_z & -e_z & -e_z & e_z & \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{16 \text{ razy}} \\ e_z & -e_z & -e_z & e_z & d_z & -d_z & d_z & -d_z \\ d_z & -d_z & d_z & -d_z & e_z & -e_z & e_z & -e_z \end{bmatrix}^T$$

c.d./A.2/

$$V = \begin{bmatrix} \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{16 \text{ razy}} & d_n & -d_n & d_n & -d_n \\ e_n & -e_n & -e_n & e_n & d_n & -d_n & d_n & -d_n \\ e_n & -e_n & -e_n & e_n & d_n & -d_n & d_n & -d_n \\ e_n & -e_n & -e_n & e_n & \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{8 \text{ razy}} \end{bmatrix}^T$$

$$k = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{oy} & d_{oy} & \dots & d_{oy} \end{bmatrix}}_{48 \text{ razy}}^T$$

przy oznaczeniach

$$\begin{aligned} e_x &= e a_x, & e_z &= e a_z, & e_n &= e a_n, \\ d_x &= d a_x, & d_z &= d a_z, & d_n &= d a_n, \\ d_{oy} &= d m_{oy}, & e &= 1-d & & \text{/wartość parametru } d \text{ dla} \end{aligned}$$

trzech typów przekrojów podano na rys.2.6/,

$$a_x = \frac{m_{oy}}{m_{ox}}, \quad a_z = \frac{m_{oy}}{m_{oz}}, \quad a_n = \frac{m_{oy}}{n_o}.$$

Macierz iloczynu $C^{eT}W^e$ dla pręta, na podstawie której tworzona jest globalna macierz C^TW , występująca we wzorze /3.41/, można obliczyć, przemnażając macierz równań równowagi C^{eT} , określoną wzorem /2.45/, przez macierz wierzchołków W^e , określoną wzorem /2.63/ - dla najprostszej aproksymacji, typu A, powierzchni granicznej, oraz wzorem /A.2/ - dla bardziej dokładnej, typu B. Ponieważ program przeznaczony jest do obliczania przestrzennych ram o ortogonalnej siatce prętów, podamy od razu postać iloczynu $C^{eT}W^e$ dla trzech typów prętów o kierunkach ortogonalnych /patrz rys.2.3/. W wyniku przemnożenia odpowiednich macierzy C^{eT} , /2.46/, /2.47/, /2.48/ przez W^e otrzymujemy następujące postacie iloczynu $C^{eT}W^e$ w układzie globalnym

— aproksymacja typu A

pręty typu "1" /patrz rys.2.3a/ :

$$C^{eT}W^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/L & -2/L & 0 \\ 2/L & -2/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2/L & 2/L & 0 \\ -2/L & 2/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{cccccc} \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}} \right]$$

pręty typu "2" :

$$C^T W^e = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 2/L & -2/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -2/L & 2/L & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 -2/L & 2/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2/L & -2/L & 0 \dots
 \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pręty typu "3" :

$$C^{eT} W^e = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/L & -2/L & 0 \\ -2/L & 2/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2/L & 2/L & 0 \\ 2/L & -2/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{cccccc}} \right]$$

— aproksymacja typu B

pręty typu "1" :

$$C^e T_w e = \left[\begin{array}{ccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2/L & -2/L & 0 \\
 2/L & -2/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -2/L & 2/L & 0 \\
 -2/L & 2/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots
 \end{array} \right]$$

...	0	-1	1	0	0	-d	-d	-d
	0	0	0	0	0	d	d	-d
	1	0	0	0	0	d	d	d
	0	0	0	-1	1	-d	-d	-d
	0	0	0	0	0	2d/L	2d/L	2d/L
	0	0	0	0	0	2d/L	0	0
	0	1	-1	0	0	d	d	d
	0	0	0	0	0	d	-d	d
-1	0	0	0	0	0	d	d	d
0	0	0	1	-1	d	d	d	d
0	0	0	0	0	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L
0	0	0	0	0	-2d/L	0	0	0 ...

...	-d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	-d	d	d	-d	-d	d	d	-d
	d	d	d	d	d	d	d	d
	-d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L
	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0
	d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d
	d	d	d	d	d	d	d	d
	d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L
	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0 ...

...	-d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	-d	d	d	-d	-d	d	d	-d
	d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L
	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0
	d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d
	d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	2d/L	2d/L	2d/L
	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0 ...

...	-d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	-d	d	d	-d	-d	d	d	-d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L
	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0
	d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L
	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0 ...

...	-d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	-d	d	d	-d	-d	d	d	-d
	-d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	d	d	d	-d	d	-d	-d	-d
	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	0	0	0
	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0
	d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	0	0	0
	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0...

...	-d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	-d	d	d	-d	-d	d	d	-d
	d	d	d	d	d	d	d	d
	-d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0
	d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0...

...	-d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	-d	d	d	-d	-d	d	d	-d
	d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0
	d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d
	-d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	-d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0...

...	-d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	-d	d	d	-d	-d	d	d	-d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0
	d	-d	-d	-d	-d	d	d	d
	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d
	d	d	d	d	d	d	d	d
	d	d	d	d	d	-d	-d	-d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0...

$$\begin{array}{cccccc}
 \dots & -d & d & d & d & d \\
 & -d & d & d & -d & -d \\
 & -d & -d & -d & -d & -d \\
 & d & d & d & d & d \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & -2d/L & 2d/L & 0 & 0 & -2d/L \\
 & d & -d & -d & -d & -d \\
 & -d & d & -d & d & -d \\
 & d & d & d & d & d \\
 & -d & -d & -d & -d & -d \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 2d/L & -2d/L & 0 & 0 & 2d/L
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{cccccc}} \right]$$

pręty typu "2" :

$$c_{e_i w}^T = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2/L & -2/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -2/L & 2/L & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -2/L & 2/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2/L & -2/L & 0 & 0\dots
 \end{bmatrix}$$

...	0	0	0	0	-d	d	d	d
	-1	1	0	0	-d	-d	-d	-d
	0	0	0	0	d	d	-d	-d
	0	0	0	0	2d/L	0	0	-2d/L
	0	0	1	-1	d	d	d	d
	0	0	0	0	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L
	0	0	0	0	d	d	d	d
	1	-1	0	0	d	d	d	d
	0	0	0	0	d	-d	d	-d
	0	0	0	0	-2d/L	0	0	2d/L
	0	0	-1	1	-d	-d	-d	-d
	0	0	0	0	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L...

...	d	d	d	d	d	d	d	d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	d	d	-d	-d	d	d	-d	-d
	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L
	d	d	d	d	d	d	d	d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d
	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L...

...	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	d	d	d	-d	-d	-d	-d	-d
	d	d	-d	-d	d	d	-d	-d
	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d
	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L...

...	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	d	d	-d	-d	d	d	-d	-d
	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d
	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L...

...	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	d	d	-d	-d	d	d	-d	-d
	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	0	0	0	0
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d
	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	0	0	0	0...

...	d	d	d	d	d	d	d	d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	d	d	-d	-d	d	d	-d	-d
	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d
	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	0	0	0	0	0	0	0	0...

...	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	d	d	-d	-d	d	d	-d	-d
	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d
	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	0	0	0	0	0	0	0	0...

...	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	d	d	-d	-d	d	d	-d	-d
	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	d	d	d	d	d	d	d	d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	d	-d	d	-d	d	-d	d	-d
	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	0	0	0	0	0	0	0	0...

$$\begin{array}{cccc}
 \dots & -d & -d & -d & -d \\
 & d & d & d & d \\
 & d & d & -d & -d \\
 & 2d/L & 0 & 0 & -2d/L \\
 & -d & -d & -d & -d \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & d & d & d & d \\
 & -d & -d & -d & -d \\
 & d & -d & d & -d \\
 & -2d/L & 0 & 0 & 2d/L \\
 & d & d & d & d \\
 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{cccc} \dots & -d & -d & -d & -d \end{array}} \right]$$

pręty typu "3" :

$$c^e, w^e = \begin{bmatrix}
 -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2/L & -2/L & 0 & 0 \\
 -2/L & 2/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -2/L & 2/L & 0 & 0 \\
 2/L & -2/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\dots
 \end{bmatrix}$$

...	0	0	0	0	-d	-d	d	d
	0	0	0	0	d	d	d	d
	1	-1	0	0	d	d	d	d
	0	0	0	0	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L
	0	0	0	0	-2d/L	0	0	2d/L
	0	0	1	-1	d	d	d	d
	0	0	0	0	-d	d	-d	d
	0	0	0	0	d	d	d	d
-1	1	0	0	0	-d	-d	-d	-d
0	0	0	0	0	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L
0	0	0	0	0	2d/L	0	0	-2d/L
0	0	-1	1	0	-d	-d	-d	-d...

...	-d	-d	d	d	-d	-d	d	d
	d	d	d	d	d	d	d	d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L
	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d
	d	d	d	d	d	d	d	d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L
	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d...

...	-d	-d	d	d	-d	-d	d	d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L
	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L
	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d...

...	-d	-d	d	d	-d	-d	d	d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L
	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L
	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d...

...	-d	-d	d	d	-d	-d	d	d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	-2d/L	-2d/L	-2d/L	-2d/L	0	0	0	0
	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	2d/L	2d/L	2d/L	2d/L	0	0	0	0
	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d...

...	-d	-d	d	d	-d	-d	d	d
	d	d	d	d	d	d	d	d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d...

....	-d	-d	d	d	-d	-d	d	d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d...

...	-d	-d	d	d	-d	-d	d	d
	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	-2d/L	0	0	2d/L	-2d/L	0	0	2d/L
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	-d	d	-d	d	-d	d	-d	d
	d	d	d	d	d	d	d	d
	d	d	d	d	-d	-d	-d	-d
	0	0	0	0	0	0	0	0
	2d/L	0	0	-2d/L	2d/L	0	0	-2d/L
	-d	-d	-d	-d	d	d	d	d...

...	-d	-d	d	d
	-d	-d	-d	-d
	-d	-d	-d	-d
	0	0	0	0
	-2d/L	0	0	2d/L
	-d	-d	-d	-d
	-d	d	-d	d
	d	d	d	d
	d	d	d	d
	0	0	0	0
	2d/L	0	0	-2d/L
	d	d	d	d

/A.3/

DODATEK B.

OPIS PROGRAMOW GEN I GEW

B.1. Przeznaczenie

Przy obliczaniu nośności granicznej ram przestrzennych metodami przedstawionymi w rozdz.3 nieuniknione jest korzystanie z systemowych pakietów do rozwiązywania zadań programowania liniowego [71,88]. Wówczas zasadniczą sprawą staje się automatyczne generowanie danych w odpowiedniej formie, wymaganej przez dany pakiet. W obliczeniach wykorzystano z systemu LP MARK3 opracowanego przez ICL [88]. W tym celu napisano dwa programy GEN i GEW, generujące macierz sympleksową zadania w ujęciu tradycyjnym /3.14/ i zadania z wierzchołkowym opisem powierzchni granicznej /3.41/. Programy te zrealizowano w języku FORTRAN na EMC Odra 1305 ze współpracą z pamięcią zewnętrzną. Zwrócono przy tym uwagę na istotne z użytkowego punktu widzenia wymaganie oszczędnego wprowadzania danych początkowych, określających jednoznacznie obliczaną ramę. Oczywiście, zawsze trzeba dokonać wyboru między ilością danych początkowych a rozpiętością klasy analizowanych konstrukcji. Opracowane programy przeznaczone są do obliczania ram przestrzennych, które - oprócz założeń modelu statyki i prawa fizycznego, przedstawionych w rozdz.2 - spełniają następujące warunki:

- topologia ramy oparta jest na ortogonalnej siatce przestrzennej, niekoniecznie regularnej;
- wszystkie pręty ramy połączone są w sposób sztywny oraz wszystkie podpory stanowią sztywne utwierdzenia;
- pręty mają przekrój stały. Uwzględniono trzy rodzaje przekrojów: dwuteowy, kwadratowy pełny, skrzynkowy /mogą one być różne dla różnych prętów/;
- każdy pręt ma stałe moduły plastyczne;
- dla wszystkich prętów ramy obowiązuje ten sam typ linearyzacji warunku plastyczności. Uwzględniono dwa typy: A/ - mniej dokładną i B/ - bardziej dokładną /por.rozdz.2.2/;
- obciążenie zadane jest w postaci momentów i sił skupionych, których punkt przyłożenia jest ustalony. Każdy taki punkt

traktowany jest jako dodatkowy węzeł.

W opracowanych programach nie istnieje ograniczenie /ze strony wielkości pamięci operacyjnej/ na liczbę węzłów i prętów ramy.

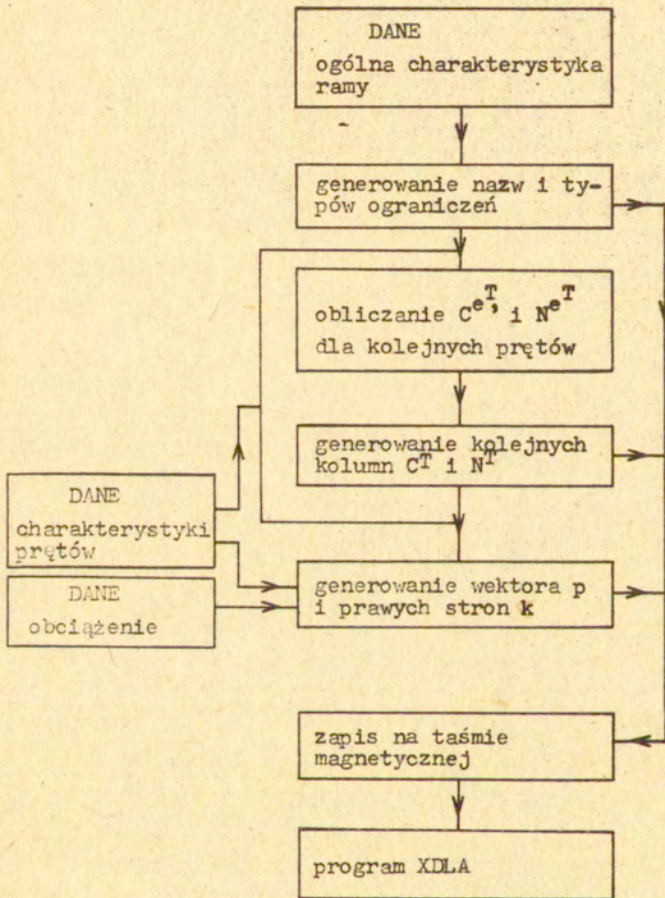
B.2. Krótka charakterystyka -

Podstawową cechą obu programów jest to, że wymagają one stałej objętości pamięci operacyjnej bez względu na wielkość obliczanej ramy i wymiary generowanych macierzy sympleksowych. Program GEN zajmuje 10368 słów, a program GEW - 14272 słów pamięci operacyjnej. Dzieje się tak dzięki generowaniu jedynie niezerowych elementów, identyfikowanych przez ich współrzędne położenia w macierzy, i przesyłaniu do składowania w pamięci zewnętrznej maszyny cyfrowej.

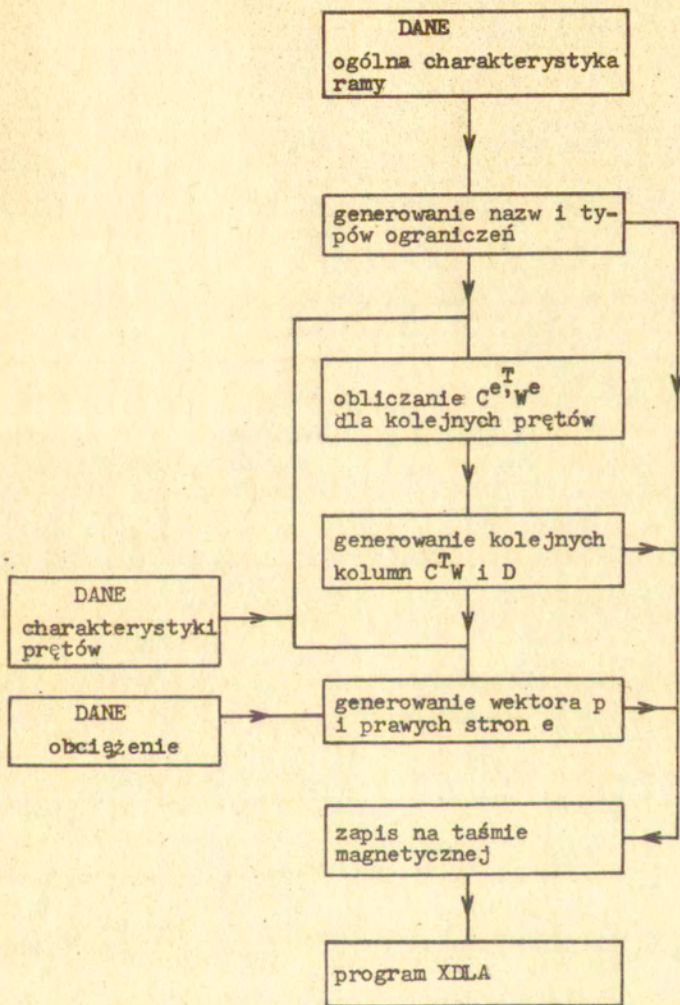
Program GEN generuje macierz sympleksową zadania /3.14/. Na podstawie danych początkowych, dotyczących ogólnej charakterystyki ramy, jak liczba węzłów, liczba prętów, typ aproksymacji warunku plastyczności, generowana jest najpierw informacja o liczbie i typie ograniczeń oraz ich nazwy. Następnie na podstawie numeracji węzłów i charakterystyk poszczególnych prętów obliczane są macierze równań równowagi C^{eT} , i macierze warunku plastyczności N^{eT} dla elementów. Określone są również współrzędne ich położenia w globalnej macierzy sympleksowej przez przypisanie odpowiednich nazw ograniczeń i zmiennych. Dane te zapisywane są na taśmie magnetycznej w postaci wymaganej przez program XDLA z pakietu LP MARK3 [88]. Postępując tak dla kolejnych prętów, określone są kolejne kolumny macierzy C^T i N^T . Na końcu, w podobny sposób, generowane są: współczynnik funkcji celu i niezerowe wartości wektora obciążenia zewnętrznego oraz wektora prawych stron. Informacje zapisane w ten sposób na nośniku magnetycznym tworzą zbiór danych wejściowych dla programu XDLA, rozwiązującego zadanie programowania liniowego. Schemat blokowy programu GEN pokazany jest na rys. B.1.

Program GEW na podstawie identycznych danych początkowych o konstrukcji generuje w podobny sposób macierz sympleksową zadania w sformułowaniu wierzchołkowym /3.41/. Istotną cechą jest to, że przy tworzeniu iloczynu macierzy $C^T W$ nie wykonuje się

explicitie tego mnożenia nawet na poziomie elementu. Iloczyn macierzy C^{eT}, W^e dla elementu jest bezpośrednio zakodowany w programie, w postaci jednej macierzy, na podstawie znajomości wierzchołków powierzchni granicznej dla pręta. Wczytując charakterystyki kolejnych prętów, obliczane są współczynniki poszczególnych macierzy C^{eT}, W^e bez wykonywania mnożenia. Dalsza organizacja programu podobna jest do organizacji programu GEN. Schemat blokowy programu GEW pokazany jest na rys.B.2. Czasy działania obu programów są zbliżone. Jedynie nieco dłużej trwa kompilacja programu GEW. Po utworzeniu na nośniku magnetycznym zbioru danych wejściowych uruchamiany jest program XDLA, rozwiązujący zadanie programowania liniowego. W metodzie wierzchołkowej, chcąc otrzymać wartości uogólnionych naprężeń, należy dodatkowo wykonać mnożenie $s = W \cdot c$. Operacja ta jest wykonywana nie dla całej konstrukcji jednocześnie, lecz kolejno dla poszczególnych prętów $s^e = W^e \cdot c^e$. W sumie czas obliczenia uogólnionych naprężeń jest minimalny w stosunku do czasu rozwiązania zadania programowania liniowego.



Rys.B.1. Schemat blokowy programu GEN.



Rys.B.2. Schemat blokowy programu GEW.

B.3. Wprowadzanie danych

Przed przystąpieniem do wprowadzania danych należy dokonać numeracji węzłów ramy. Jedyną zasadą jest to, że wszystkie węzły podporowe mają numer 0. Numeracja pozostałych węzłów jest dowolna. Należy pamiętać, że każdy punkt przyłożenia obciążenia traktowany jest jako węzeł. Numeracja prętów jest również dowolna i zależy od kolejności podania kart określających topologię i geometrię ramy /karty typu 4. - poniżej/. Każdy pręt identyfikowany jest przez podanie numeru lewego i prawego węzła. W celu zaoszczędzenia ilości danych początkowych wprowadzono pojęcie klasy plastycznej /karty typu 3. - poniżej/. Pręty mające te same moduły plastyczne m_{ox} , m_{oy} , m_{oz} , n_o tworzą jedną klasę plastyczną. Dzięki temu nie podaje się czterech charakterystyk materiałowych dla każdego pręta oddzielnie. Obciążenie zewnętrzne określa się przez podanie jedynie niezerowych wartości składowych w obciążonych węzłach.

Poniżej podano sposób przygotowania danych, który jest identyczny zarówno dla programu GEN, jak i GEW. Wszystkie dane liczbowe wprowadzone są w tzw. formacie swobodnym. Kolejność kart jest następująca

1. Karta tytułowa

co najwyżej ośmioznakowa informacja alfanumeryczna, służąca do identyfikacji zadania

2. Karta ogólnej charakterystyki ramy /5 liczb/

liczba węzłów, liczba prętów, typ aproksymacji warunku plastyczności, liczba klas plastycznych, liczba obciążeń

typ aproksymacji war.pl. = $\begin{cases} 0 & \text{mniej dokładna typu A} \\ 1 & \text{bardziej dokładna typu B} \end{cases}$
/por.rozdz.2.2./

3. Karty klas plastycznych

numer klasy plastycznej, rodzaj przekroju, moduł pl. m_{ox} , moduł pl. m_{oy} , moduł pl. m_{oz} , moduł pl. n_o

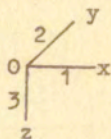
rodzaj przekroju = $\begin{cases} 1 & \text{dwuteowy} \\ 2 & \text{kwadratowy pełny} \\ 3 & \text{skrzynkowy} \end{cases}$ /por.rys.2.6/

Jedna karta /6 liczb/ dla jednej klasy plastycznej.
Rosnąca numeracja klas plastycznych.

4. Karty określające topologię, geometrię i charakterystyki materiałowe ramy przez podanie numerów lewego i prawego węzła pręta, jego kierunku w ortogonalnej siatce przestrzennej oraz numeru klasy plastycznej, do której należy dany pręt

nr lewego węzła pręta, nr prawego węzła pręta, kierunek, długość, nr klasy plastycznej

$$\text{kierunek pręta} = \begin{cases} 1 - \text{kierunek } O_x \\ 2 - \text{kierunek } O_y \\ 3 - \text{kierunek } O_z \end{cases}$$



nr klasy plastycznej - wg numeracji wprowadzonej w kartach 3.
Jedna karta /5 liczb/ dla jednego pręta.

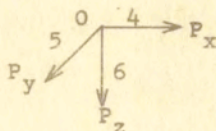
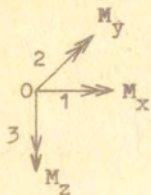
Kolejność, w jakiej podane są te karty automatycznie określa numerację prętów.

5. Karty obciążeń węzłowych

nr obciążonego węzła, typ obciążenia, wartość

$$\text{typ obciążenia} = \begin{cases} 1 & \text{moment } M_x \\ 2 & \text{moment } M_y \\ 3 & \text{moment } M_z \\ 4 & \text{siła } P_x \\ 5 & \text{siła } P_y \\ 6 & \text{siła } P_z \end{cases}$$

Dodatknie zwroty momentów i sił są następujące



Jedna karta /3 liczby/ dla jednej składowej obciążenia.
Obowiązuje niemalejąca numeracja węzłów.

Przykład

Dla ramy analizowanej w przykładzie 3.4.1A /rys.3.3/ postać danych wygląda następująco:

RA	1				
5	9	0	1	10	
1	1	1.5	2.	2.	90.
0	1	3	1	1	
0	3	3	1	1	
0	4	3	1	1	
0	5	3	1	1	
1	2	1	0.5	1	
2	3	1	0.5	1	
4	5	1	1	1	
1	4	2	1	1	
3	5	2	1	1	
1	4	1			
1	5	-1			
1	6	2			
2	5	-1			
2	6	2			
3	5	-1			
3	6	2			
4	4	1			
4	6	2			
5	6	2			

DODATEK C.

UOGÓLNIONE ODWROTNOŚCI MACIERZY

C.1. Odwrotność Botta-Duffina.

Rozpatrujemy następujący układ równań

$$\begin{aligned} E x + y &= b \\ x &\in L \\ y &\in L^\perp \end{aligned} \quad /C.1/$$

gdzie

E - $n \times n$ symetryczna, dodatnio określona macierz

$L \subset \mathbb{R}^n$ - podprzestrzeń liniowa przestrzeni

$L^\perp \subset \mathbb{R}^n$ - dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni L

$b \in \mathbb{R}^n$

Niesprzeczność układu /C.1/ równoważna jest niesprzeczności następującego układu

$$(EP_L + P_{L^\perp}) w = b \quad /C.2/$$

gdzie

P_L - operator rzutowania ortogonalnego na L ,

$P_{L^\perp} = I - P_L$ - operator rzutowania ortogonalnego na L^\perp
/I - $n \times n$ macierz jednostkowa/;

postać macierzowa P_L podana jest w punkcie C.4.

Wektor $[x \ y]^T$ jest rozwiązaniem układu /C.1/ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} x &= P_L x w \\ y &= P_{L^\perp} w = b - EP_L w \end{aligned} \quad /C.3/$$

gdzie w jest rozwiązaniem układu /C.2/.

Jeżeli macierz $(EP_L + P_{L^\perp})$ jest nieosobliwa, to układ /C.1/ jest niesprzeczny dla każdego $b \in \mathbb{R}^n$ i jego rozwiązanie w postaci

$$\begin{aligned} x &= P_L (EP_L + P_{L^\perp})^{-1} b \\ y &= b - Ex \end{aligned} \quad /C.4/$$

jest jednoznaczne.

Odwzorowanie $P_L (EP_L + P_{L^\perp})^{-1}$ było wprowadzone i badane w zastosowaniu do obwodów elektrycznych przez R. Botta i R.J. Duffina w pracy [20]. Operator ten nazywany był przez nich ograniczoną odwrotnością macierzy E względem podprzestrzeni liniowej L . W dalszym ciągu odwrotność tę przyjęło się nazywać odwrotnością Botta-Duffina macierzy E i oznaczać symbolem $E_{(L)}^{-1/}$

$$E_{(L)}^{-1/} = P_L (EP_L + P_{L^\perp})^{-1} \quad /C.5/$$

C.2. Uogólniona odwrotność Botta-Duffina.

Odwrotność Botta-Duffina /C.5/ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $(EP_L + P_{L^\perp})$ jest nieosobliwa. W ogólnym przypadku, gdy warunek ten nie jest spełniony, można wprowadzić uogólnioną odwrotność Botta-Duffina macierzy E , oznaczaną symbolem $E_{(L)}^{/1/}$ i zdefiniowaną następująco

$$E_{(L)}^{/1/} = P_L (EP_L + P_{L^\perp})^{/1/} \quad /C.6/$$

Indeks /1/ u góry wyrażenia w nawiasie okrągłym w /C.6/ oznacza uogólnioną odwrotność, niekiedy zwaną 1-szą odwrotnością lub g - odwrotnością. Zostanie to zdefiniowane w punkcie C.3.

Uogólniona odwrotność Botta-Duffina $E_{(L)}^{/1/}$ istnieje dla dowolnej macierzy E i dowolnej podprzestrzeni liniowej L . Jeżeli układ /C.1/ jest niesprzeczny, to jego rozwiązanie ogólne wyrażone jest w postaci

$$x = P_L \left\{ (EP_L + P_{L^\perp})^{/1/} b + \left[I - (EP_L + P_{L^\perp})^{/1/} (EP_L + P_{L^\perp}) \right] z \right\} \quad /C.7/$$

$$y = b - Ex$$

gdzie

$z \in R^n$ - dowolny wektor

I - $n \times n$ macierz jednostkowa.

C.3. Uogólniona odwrotność macierzy.

Dany jest układ równań liniowych z dowolną macierzą A o wymiarach $m \times n$, rzędu r

$$Ax = b$$

$$x \in R^n \quad /C.8/$$

$$b \in R^m$$

Jeśli X jest dowolną $n \times m$ macierzą, spełniającą równanie macierzowe

$$AXA = A, \quad /C.9/$$

to rozwiązanie układu /C.8/ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AXb = b. \quad /C.10/$$

Wówczas rozwiązanie ogólne układu /C.8/ wyrażone jest w postaci

$$x = Xb + (I - XA)y, \quad /C.11/$$

gdzie

$y \in R^n$ - dowolny wektor

I - $n \times n$ macierz jednostkowa.

Macierz X spełniająca równanie /C.9/ nazywana jest uogólnioną odwrotnością /lub 1-szą odwrotnością, lub g - odwrotnością/ macierzy A i oznaczana jest symbolem $A^{/1/}$. W ogólnym przypadku jest ona określona niejednoznacznie. Używając symbolu $A^{/1/}$ mamy na myśli dowolną uogólnioną odwrotność macierzy A

$$A^{/1/} \in \{ X \mid AXA = A \} \quad /C.12/$$

Jeśli chodzi o obliczeniowe aspekty wyznaczenia dowolnej uogólnionej odwrotności $A^{/1/}$, to można tego dokonać w następujący sposób. Po odpowiedniej permutacji wierszy i kolumn macierz A może być przedstawiona w postaci

$$PAQ = \left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & & A_2 & \\ \hline & & & \\ \hline A_3 & & A_4 & \\ \hline & & & \end{array} \right] \begin{array}{l} r \\ \\ m-r \end{array} \quad /C.13/$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_r \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n-r}$

gdzie A_1 jest kwadratową macierzą nieosobliwą, a P i Q macierzami permutacji wierszy i kolumn A .

Wówczas najprościej jest wybrać jako uogólnioną odwrotność $A^{-1/}$ macierzy A /tzn. taką, która spełnia równanie $AA^{-1/}A=A/$ następującą macierz

$$A^{-1/} = Q \left[\begin{array}{c|c} A_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] P \quad \left. \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \right\} \quad /C.14/$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_r \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n-r}$

C.4. Operator rzutowania ortogonalnego na podprzestrzeń liniową.

Niech n -wymiarowa przestrzeń wektorowa R^n przedstawiona będzie w postaci sumy prostej dwóch jej podprzestrzeni liniowych L i M

$$\begin{aligned} R^n &= L \oplus M \\ L &\subset R^n \\ M &\subset R^n \end{aligned} \quad /C.15/$$

Wówczas każdy wektor $z \in R^n$ może być przedstawiony jednoznacznie w postaci

$$\begin{aligned} z &= x + y \\ x &\in L \\ y &\in M \end{aligned} \quad /C.16/$$

Wektor x jest rzutem wektora z na L wzdłuż M . Odwzorowanie przyporządkowujące wektorowi z jego rzut x oznaczamy symbolem $P_{L,M}$. Zatem możemy napisać

$$x = P_{L,M} z \quad /C.17/$$

Z definicji operatora $P_{L,M}$ zachodzą związki

$$\begin{aligned} P_{L,M} x &= x & x \in L \\ P_{L,M} y &= 0 & y \in M \end{aligned} \quad /C.18/$$

Wprowadzimy teraz bazę $\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$ podprzestrzeni L oraz bazę $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ podprzestrzeni M . Niech wektory baz zgrupowane będą jako kolumny macierzy X i Y

$$X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_l], \quad Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_k] \quad /C.19/$$

Operator $P_{L,M}$ jest wówczas jednoznacznie określony przez związek

$$P_{L,M} x_i = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad /C.20/$$

$$P_{L,M} y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

które są równoważne następującej postaci macierzowej

$$P_{L,M} \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & 0 \end{bmatrix} \quad /C.21/$$

Ponieważ $\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}$ jest macierzą nieosobliwą, zatem rozwiązując /C.21/, otrzymujemy w sposób jednoznaczny macierzową postać operatora rzutowania na podprzestrzeń L wzdłuż podprzestrzeni M

$$P_{L,M} = \begin{bmatrix} X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}^{-1} \quad /C.22/$$

W sytuacji, gdy M jest dopełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni L , tzn. $M = L^\perp$, mamy do czynienia z rzutowaniem ortogonalnym. Wówczas zamiast pisać P_{L,L^\perp} będziemy używać symbolu P_L . Z uwagi na fakt, że $L \oplus L^\perp = R^n$, rzutowanie ortogonalne na L^\perp określa wzór

$$P_{L^\perp} = I_n - P_L \quad /C.23/$$

gdzie I_n jest jednostkową macierzą rzędu n .

Dalej zajmiemy się sprawą wyznaczenia P_L w przypadku, gdy podprzestrzeń L jest jądrem pewnego operatora reprezentowanego w ustalonej bazie przez macierz A o wymiarach $m \times n$, rzędu r

$$L = N(A) = \{x \in R^n \mid Ax = 0\} \quad /C.24/$$

Dopełnienie ortogonalne jądra operatora A jest obrazem operatora sprzężonego A^T

$$L^\perp = R(A^T) = \{y \in R^n \mid y = A^T x, \quad x \in R^m\} \quad /C.25/$$

Chcąc zastosować wzór /C.22/ do wyznaczenia $P_{N(A)}$, należy znać bazy $N(A)$ i $R(A^T)$. Znajdujemy je w następujący sposób. Niech ma-

cierz A po odpowiedniej permutacji wierszy i kolumn będzie przedstawiona w postaci /C.13/, gdzie A_1 jest nieosobliwą macierzą kwadratową rzędu r . Zdefiniujemy macierz A_0 o wymiarach $r \times n-r$, rzędu r , następująco

$$A_0 = A_1^{-1} A_2 \quad /C.26/$$

Wówczas bazę jądra $N(A)$ tworzą wektory kolumnowe następującej macierzy X o wymiarach $n \times n-r$, rzędu $n-r$

$$X = Q \begin{bmatrix} -A_0 \\ \hline I_{n-r} \end{bmatrix} \quad /C.27/$$

gdzie I_{n-r} jest jednostkową macierzą rzędu $n-r$, a Q macierzą permutacji, występującą w /C.13/. Natomiast bazę obrazu $R(A^T)$ tworzą kolumny macierzy Y o wymiarach $n \times r$, rzędu r

$$Y = Q \begin{bmatrix} I_r \\ \hline A_0^T \end{bmatrix} \quad /C.28/$$

gdzie I_r jest jednostkową macierzą $r \times r$.

Wstawiając X i Y do wzoru /C.22/, otrzymujemy operator rzutowania ortogonalnego na jądro operatora A w postaci macierzy $n \times n$

$$P_{N(A)} = Q \begin{bmatrix} -A_0 \\ \hline I_{n-r} \end{bmatrix} (I_{n-r} + A_0^T A_0)^{-1} \begin{bmatrix} -A_0^T \\ \hline I_{n-r} \end{bmatrix} Q^T \quad /C.29/$$

Macierzową postać operatora rzutowania ortogonalnego na obraz operatora sprzężonego uzyskujemy zgodnie ze wzorem /C.23/

$$P_{R(A^T)} = I_n - P_{N(A)} \quad /C.30/$$

SPIS TREŚCI

1. WPROWADZENIE	
1.1. Cel i zakres pracy.....	3
1.2. Przegląd literatury.....	6
2. OPIS ELEMENTU PRĘTOWEGO PRZESTRZENNEJ RAMY	
2.1. Równania statyczne i geometryczne.....	15
2.1.1. - w układzie lokalnym.....	15
2.1.2. - w układzie globalnym.....	30
2.2. Warunek plastyczności dla pręta przy uwzglę-	
dnienu interakcji momentów zginających,	
momentu skręcającego i siły osiowej.....	41
2.2.1. Opis za pomocą wierzchołków obszaru granicznego..	45
2.2.2. Opis za pomocą hiperpłaszczyzn.....	55
3. OBLICZANIE NOŚNOŚCI GRANICZNEJ PRZESTRZENNYCH RAM	
METODĄ PROGRAMOWANIA LINIOWEGO	
3.1. Początkowa postać zagadnienia.....	62
3.2. Redukcja wymiarów macierzy zadania metodą	
parametrów nadliczbowych.....	75
3.3. Redukcja wymiarów macierzy zadania metodą	
wierzchołkowego opisu powierzchni granicznej.....	83
3.4. Przykłady obliczeń.....	90
3.5. Wnioski.....	112
4. ZASTOSOWANIE UOGÓLNIONYCH ODWROTNOŚCI MACIERZY	
W ANALIZIE RAM	
4.1. Wprowadzenie.....	114
4.2. Rozwiązanie sprężyste za pomocą odwrotności	
Botta-Duffina.....	115

4.3. Rozwiązanie sprężysto-plastyczne.....	119
4.3.1. Sformułowanie zagadnienia.....	119
4.3.2. Transformacja zmiennych.....	124
4.3.3. Rozwiązanie za pomocą zmodyfikowanej uogólnio- nej odwrotności Botta-Duffina.....	127
4.4. Wyznaczenie nośności granicznej.....	131
4.5. Przykłady obliczeń.....	133
5. WNIOSKI KOŃCOWE.....	138
LITERATURA.....	141
DODATEK A. Postacie macierzy W^e , N^{eT} i $C^{eT}W^e$	154
DODATEK B: Opis programów GEN i GEW.....	177
B.1. Przeznaczenie.....	177
B.2. Krótka charakterystyka.....	178
B.3. Wprowadzanie danych.....	182
DODATEK C. Uogólnione odwrotności macierzy.....	185
C.1. Odwrotność Botta-Duffina.....	185
C.2. Uogólniona odwrotność Botta-Duffina.....	186
C.3. Uogólniona odwrotność macierzy.....	187
C.4. Operatory rzutowania ortogonalnego na podprzestrzeń liniową.....	188