

7/81

Tadeusz Płatkowski

STRUKTURA FALI UDERZENIOWEJ  
W MIESZANINACH GAZÓW  
JEDNOATOMOWYCH  
I DWUATOMOWYCH  
Z ROTACYJNYMI STOPNIAMI SWOBODY

P. 269



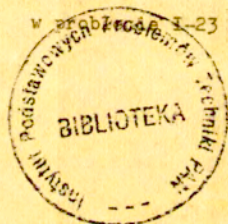
WARSZAWA 1981

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 lutego 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 7/1981

Praca została wykonana w ramach kooperacji



57133



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd. 4,8. Ark. druk. 8.

Oddano do drukarni w lutym 1981 r.

WDN zam.119/o/81 n.150

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8

STRUKTURA FALI UDERZENIOWEJ W MIESZANINACH  
GAZÓW JEDNOATOMOWYCH I DWUATOMOWYCH  
Z ROTACYJNYMI STOPNIAMI SWOBODY

WSTĘP

Celem pracy jest jakościowe zbadanie fali uderzeniowej w dwuskładnikowych mieszaninach gazów jednoatomowych i w mieszaninach gazu jednoatomowego i dwuatomowego z rotacyjnymi stopniami swobody oraz zbadanie wpływu różnych parametrów fizycznych na charakter struktury fali w takich mieszaninach.

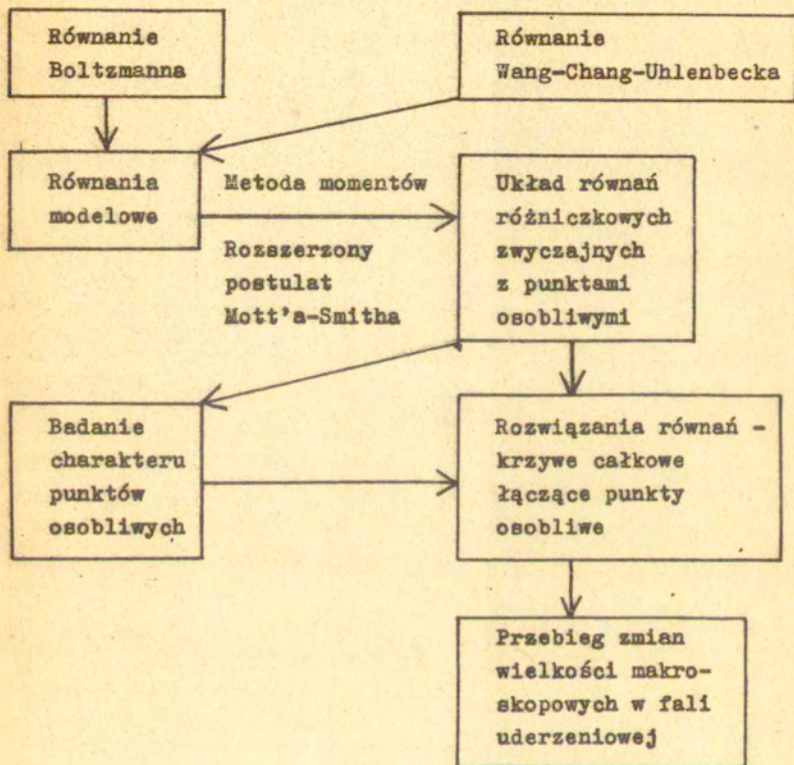
Praca składa się z wstępu, pięciu rozdziałów, dodatków i spisu literatury. W rozdziale I podano ogólną charakterystykę problemu, dokonano przeglądu literatury i przedstawiono aparat pojęciowy używany w dalszych rozdziałach. W rozdziale II zaproponowano metody wyznaczania nieznanych parametrów w równaniach modelowych opisujących fale uderzeniowe w badanych mieszaninach, ze szczególnym uwzględnieniem mieszanin o bardzo zróżnicowanych masach atomowych składników. W rozdziale III przedstawiono metodę rozwiązywania uzyskanego układu równań modelowych, opisującego fale uderzeniowe w mieszaninach gazów jednoatomowych. Przedyskutowano zastosowanie rozszerzonego postulatu Mott-Smitha do rozwiązywania równań na fale uderzeniowe w mieszaninach gazów jednoatomowych. Zbadano analitycznie strukturę osobliwości uzyskiwanych układów równań różniczkowych.

W rozdziale IV przeanalizowano przypadek, gdy jeden ze składników mieszaniny jest gazem dwuatomowym i są wzbudzone rotacyjne stopnie swobody. Zaproponowano modelowy układ równań do opisu fal uderzeniowych w takich mieszaninach, oraz metody rozwiązywania tego układu. Metody te są uogólnieniem metody użytej w przypadku mieszaniny gazów jednoatomowych.

W rozdziale IV przedyskutowano także struktury osobliwości uzyskanych układów równań różniczkowych w zależności od wymiaru związanych z nimi przestrzeni fazowych, a także metodę minimalizacji błędu popełnianego przy wyborze określonego układu momentów.

W rozdziale V uzyskane w poprzednich rozdziałach równania różniczkowe rozwiązano numerycznie, otrzymując funkcje rozkładu gazów w mieszaninie. Obliczając następnie odpowiednie momenty znalezionych w ten sposób funkcji rozkładu otrzymano następnie przebieg zmian wielkości makroskopowych opisujących mieszaninę gazów, w których rozchodzi się fala uderzeniowa. Uzyskano struktury fali uderzeniowej w całym zakresie stosunku gęstości liczbowych i mas atomowych składników mieszaniny. Szczególną uwagę zwrócono na mieszaniny gazów o bardzo zróżnicowanych masach atomowych składników. Wyniki porównano z eksperymentami i dotychczasowymi pracami teoretycznymi. Dokonano także porównania struktur fali, w mieszaninach gazów jednoatomowych i dwuatomowych. Przedyskutowano wpływ rotacyjnego stopnia swobody na różne makroskopowe charakterystyki mieszaniny, przez którą przechodzi fala uderzeniowa. W granicznym przypadku fali uderzeniowej w pojedynczym gazie dwuatomowym otrzymano przebieg gęstości i temperatur  $N_2$  i  $H_2$ , uzyskując dobrą zgodność z doświadczeniem.

SCHEMAT PRACY



## FALE UDERZENIOWE W MIESZANINACH GAZÓW JEDNOATOMOWYCH

### Rozdział I

#### §1. Uwagi ogólne. Przegląd literatury.

Przy naddźwiękowych przepływach gazów mogą istnieć obszary, w których występują duże gradienty makroskopowych wielkości, opisujących stan gazu. Obszary takie nazywamy falami uderzeniowymi.

Rozważmy płaską falę uderzeniową w mieszaninie gazów, rozchodzącą się w kierunku, który przyjmiemy za jedną z osi trójwymiarowego układu współrzędnych. Strukturą płaskiej fali uderzeniowej nazywamy przebieg zmian wielkości opisujących makroskopowy stan gazu w funkcji położenia na tej osi.

Zależnie od wybranej makroskopowej charakterystyki stanu gazu uzyskujemy odpowiednio struktury gęstości, prędkości gazów czy też ich temperatur w fali uderzeniowej.

Fale uderzeniowe w mieszaninach gazów stały się od kilkunastu lat obiektem interesujących badań, zarówno teoretycznych jak i eksperymentalnych. Niejednakowe mikroskopowe własności poszczególnych składników (różne masy atomowe i cząsteczkowe gazów, różne przekroje czynne na zderzenia) powodują, że składniki mieszaniny ulegają separacji w fali uderzeniowej. Poszerzenie grubości fali w mieszaninie w porównaniu z grubością fali w czystych składnikach daje informacje o przebiegach procesów molekularnych zachodzących w układach nierówno-

wagowych. Porównując struktury fal uderzeniowych uzyskiwane doświadczalnie z rezultatami obliczeń opartych na modelach teoretycznych, można w szczególności uzyskać informacje o współczynnikach transportu w mieszaninach oraz o przekrojach czynnych na różne rodzaje międzycząsteczkowych oddziaływań w gazach. Z porównania przebiegu makroskopowych charakterystyk poszczególnych składników mieszaniny można też uzyskać informacje o czasach relaksacji odpowiednich wielkości makroskopowych do równowagi.

Uzyskiwane struktury fal uderzeniowych pozwalają na sprawdzanie poprawności stosowania modeli wykorzystywanych w dynamice gazów rozrzedzonych a także, przez porównanie z eksperymentem, poprawności różnych modeli oddziaływań w gazach. Fale uderzeniowe mają tę przewagę nad innymi przepływami przy testowaniu różnych modeli teoretycznych, że narzucone warunki brzegowe mają tu prostą postać - przepływ przed falą i za falą jest stacjonarny, a zatem znamy jawną postać funkcji rozkładu przed i za falą. W większości innych zagadnień dochodzi problem oddziaływania gazu z powierzchnią ograniczającą, co komplikuje postać warunków brzegowych.

W przypadku gazów z rotacyjnymi stopniami swobody, uzyskiwane rezultaty pozwalają, przez porównanie z eksperymentem, wnioskować o poprawności przybliżenia quasiklasycznego, polegającego na zamianie kwantowej struktury widma energetycznego na strukturę ciągłą. Mieszaniny gazów jednoatomowych i dwuatomowych można traktować jako modele rzeczywistych mieszanin gazów występujących w przyrodzie.

Strukturę fali uderzeniowej w gazach można opisywać

zarówno w oparciu o kinetyczną teorię gazów, ze szczególnym uwzględnieniem równania Boltzmann'a i równań modelowych, jak i na podstawie teorii ośrodką ciągłego, w szczególności równań Naviera-Stokes'a. Stosuje się też metody numeryczne oparte na symulacji ruchu cząstek.

W obecnej pracy będziemy się zajmować wyłącznie metodami teorii kinetycznej; o metodach numerycznych i równaniach Naviera-Stokes'a wspomnimy jedynie w przeglądzie literatury.

W dalszym ciągu krótko omówimy prace dotyczące struktury fali uderzeniowej w mieszaninach gazów jednoatomowych i w gazach dwuatomowych z rotacyjnymi stopniami swobody

#### a) Mieszaniny gazów jednoatomowych

Do lat dwudziestych b.stulecia matematycznym modelem fali uderzeniowej był nieciągły skok parametrów makroskopowych między dwoma stanami stacjonarnymi. W 1922 r.G.I. Taylor [38] wykazał, że uwzględniając współczynnik lepkości i przewodnictwa cieplnego, z równań Naviera-Stokes'a otrzymuje się gładki przebieg prędkości w fali uderzeniowej rozchodzącej się w pojedynczym gazie. Wyczerpujący przegląd prac i metod teoretycznych związanych ze strukturą fali uderzeniowej w pojedynczych gazach jednoatomowych można znaleźć w pracy W.Fiszdon'a [19].

Fale uderzeniowe w mieszaninach gazów stały się obiektem badań teoretycznych, w początkach lat czterdziestych. S.P.Dyakow i T.G.Cowling [15], [16] stwierdzili, że poszerzenie grubości fali jest spowodowane nie tylko lepkością i przewodnictwem cieplnym, lecz także, w przypadku gdy fala uderzeniowa rozchodzi się w mieszaninie, zjawiskiem dyfuzji.



W szeregu prac korzystających z metod mechaniki ośrodków ciągłych potwierdzono fakt, że wskutek występowania zjawisk dyssypatywnych i dyfuzji, grubość fali uderzeniowej w mieszaninie zwiększa się [13], [20], [37].

W równaniach opisujących mieszaniny występowała jedna temperatura, wspólna dla całej mieszaniny, oraz różne prędkości hydrodynamiczne składników. F.S.Sherman [37] dokonał obliczeń struktury i grubości fali uderzeniowej w mieszaninie Ar-He dla różnych procentowych składów mieszaniny, posługując się równaniami Naviera-Stokes'a. Procedura zastosowana przez Shermana jest poprawna jedynie dla słabych fal uderzeniowych. Sherman znalazł (rozwiązując numerycznie uzyskiwane w najniższych przybliżeniach układy równań) struktury fali dla różnych wielkości fizycznych i wykazał zależność grubości fali od procentowego składu mieszaniny. W przypadku, gdy cięższy gaz jest w śladowych ilościach, z równań tych wynika istnienie tzw. "przekroczenia prędkości" (velocity overshoot). Zjawisko to nie zostało zaobserwowane ani w eksperymentach, ani w dalszych pracach teoretycznych innych autorów [32], [33].

Powyższa procedura nie stosuje się do silnych fal uderzeniowych. Poprawność stosowania równań Naviera-Stokes'a do sytuacji, w których występują duże zmiany w obszarach rzędu średniej drogi swobodnej, jest bowiem dyskusyjna [30], [33]. W związku z tymi wątpliwościami szerokie zastosowanie uzyskały metody oparte na kinetycznej teorii gazów.

T. Fujimoto [17], stosując metodę Mott-Smitha [30] rozwiązał równania Boltzmana dla mieszaniny gazów jednoatomowych o zbliżonych masach atomowych składników

(Xe<sup>129</sup>-Xe<sup>132</sup>, Ar<sup>36</sup>-Ar<sup>40</sup>; Ne-Ar). Autor nie uwzględnił jednakże lokalnych równań zachowania energii i pędu, które powinny być spełnione w każdym punkcie fali. M.M.Oberai [33], [34] stosował podobny aparat matematyczny do rozwiązywania równań Boltzmanna dla cząstek oddziałujących zgodnie z potencjałem Maxwella. Oberai otrzymał numerycznie profil prędkości gazów w fali uderzeniowej i struktury gęstości jedynie w przypadku, gdy ciężkiego gazu jest bardzo mało (rozwijając równania w szereg potęg stosunku gęstości liczbowych). Profil prędkości nie wykazuje zjawiska "przekroczenia prędkości", zaobserwowanego przez Shermana [37]. W ogólnym przypadku (tzn. dla dowolnych gęstości obu gazów), M.Oberai podaje jedynie równania różniczkowe, których nie rozwiązuje. Numeryczne rozwiązania tych równań w ogólnym przypadku zostało podane dopiero w pracy Sinha, M.M.Oberai [34]. Autorzy znaleźli profile gęstości i temperatury dla mieszaniny Ar-He, rozwiązując wyprowadzone przez Oberai'a równania dla cząstek maxwello-wskich oraz dla sztywnych kul. Autorzy podają jedynie wyniki dla jednej mieszaniny (Ar-He), nie przeprowadzając ilościowej dyskusji wyników w zależności od przyjętych stałych oddziaływania, stosunku mas i liczb Macha.

Ostatnio M.Bratos i R.Herczyński [14] otrzymali strukturę fali uderzeniowej w mieszaninie He-Xe metodą minimalizacji funkcjonału kwadratowego związanego z równaniami Boltzmanna w mieszaninie gazów. Ich wyniki będą porównane z rezultatami prezentowanej tu teorii w rozdziale V obecnej pracy.

Równania Boltzmanna są także wykorzystywane w asympto-

tycznych metodach badania fal uderzeniowych w mieszaninach. W tym kontekście na uwagę zasługują przede wszystkim prace W.L.Harrisa i G.K.Bieńkowskiego [26], którzy zbadali asymptotyczną postać równań momentów równania Boltzmanna odpowiadających wydatkowi pędu, energii, strumienia ciepła i tensora napięć dla cząstek oddziałujących potencjałem Maxwella. Oba składniki mieszaniny mają różne prędkości hydrodynamiczne i temperatury. W uzyskanych w ten sposób równaniach występują dwa małe parametry - stosunek mas atomowych i stosunek gęstości liczbowych gazów. Odpowiednie rozwinięcia asymptotyczne pozwalają otrzymać informacje o różnych mechanizmach relaksacji, prędkości dochodzenia różnych składników do równowagi i procesach fizycznych odpowiedzialnych za różne skale relaksacyjne. Teoria asymptotyczna Harrisa i Bieńkowskiego została wykorzystana w pracy B.Hamela [25] do jakościowej analizy struktury fali uderzeniowej w mieszaninach gazów o bardzo zróżnicowanych masach atomowych. Podstawowymi równaniami są tutaj równania modelowe dla mieszaniny gazów, wyprowadzone we wcześniejszej pracy [25a] tego autora.

Trudności w uzyskaniu rozwiązań równań Boltzmanna spowodowały, że szerokie zastosowanie w badaniach fal uderzeniowych w mieszaninach gazów uzyskały równania modelowe typu BGK. Przeglądu ważniejszych istniejących modeli dokonano w pracy T.Płatkowski [35]. Modele równania Boltzmanna były pierwszy raz zastosowane do badania struktury fali uderzeniowej w mieszaninach gazów w pracach H.Oguchiego [32], i K.Abe [11]. W pracach tych równania modelowe BGK są rozwiązywane metodą iteracyjną.

Autorzy otrzymali wyniki jedynie dla mieszaniny Ar-He o różnych składach procentowych. W przypadkach, gdy argon występował w ilościach śladowych, zaobserwowano zjawisko "przekroczenia temperatury" ("temperature overshoot") argonu, polegające na tym, że temperatura cięższego gazu nie jest monotoniczną funkcją położenia w fali i przekracza wartość wynikającą z warunków Rankina-Hugoniota. Doświadczalna weryfikacja tego rezultatu nie jest na razie możliwa ze względu na trudności w pomiarze temperatur gazów w fali uderzeniowej.

W pracy W.Piszdon, T.Płatkowski [18] znaleziono struktury fal uderzeniowych w mieszaninach gazów jedno- i dwuatomowych, korzystając z równań BGK przy pewnych założeniach upraszczających w przypadku, gdy składniki mieszaniny mają zbliżone masy atomowe.

Struktury fal uderzeniowych w mieszaninach gazów jednoatomowych w ogólnym przypadku (tzn. w całym zakresie stosunku mas i liczbowych gęstości składników) nie były dotychczas badane.

Niezależnie od prac teoretycznych, fale uderzeniowe w mieszaninach są obiektami intensywnych badań eksperymentalnych i numerycznych. W szczególności G.A.Bird [59] znalazł struktury fali uderzeniowej w mieszaninie Ar-He posługując się metodą Monte-Carlo i uzyskując jakościową zgodność z eksperymentami E.Centera [60].

Eksperymenty z falami uderzeniowymi w mieszaninach potwierdziły szereg rezultatów teoretycznych. E.Center [60] stwierdził, że dyfuzja powoduje znaczne pogrubienie fali uderzeniowej. A.E.Beylich [58] przeprowadził eksperymenty w mieszaninie wodoru z azotem stwierdzając, że grubość fali

uderzeniowej w takich mieszaninach jest znacznie większą od wartości teoretycznej, wynikającej z równań Naviera-Stokes'a. Przegląd prac eksperymentalnych dotyczących struktury fal uderzeniowych w mieszaninach, można znaleźć w pracach [20], [73].

W ostatnich latach badania eksperymentalne nad falami uderzeniowymi w mieszaninach gazów jedno- i dwuatomowych zostały podjęte przez zespół pracowników IPPT PAN-u. Uzyskano szereg ciekawych rezultatów (W.Piszdon, R.Herczyński [20], A.Gmurczyk, Z.Walenta, B.Tarczyński [73]). Szczególnie interesujące okazały się mieszaniny gazów o bardzo zróżnicowanych masach atomowych, w szczególności Xe-He. Szerzej o wynikach powyższych prac eksperymentalnych będzie mowa w rozdziale V obecnej pracy, przy porównaniu wyników obliczeń opartych na stosowanych równaniach modelowych z wynikami doświadczalnymi. Warto dodać, że były one bezpośrednią inspiracją rozważań teoretycznych, których wynikiem jest niniejsza praca.

b) Fale uderzeniowe w gazach z rotacyjnymi stopniami swobody.

W porównaniu z gazami jednoatomowymi, sytuacja jest tutaj znacznie bardziej skomplikowana, ze względu na występowanie zderzeń nieelastycznych.

Na polu teoretycznym badania rozwijają się w kilku kierunkach. Pierwszy polega na rozwiązywaniu równań kinetycznych uwzględniających istnienie wewnętrznych stopni swobody, z odpowiednimi warunkami brzegowymi.

Podstawowym równaniem, uwzględniającym skwantowanie poziomów energii wewnętrznej, jest równanie Wang-Chang-Uhlenbecka [54], [55]. Sytuację bardzo komplikuje tu fakt, że nie jest znane widmo przekrojów czynnych na zderzenia cząstek na różnych poziomach energetycznych.

Niezależnie rozwijają się metody rozwiązywania równania Boltzmann, zmodyfikowanego w celu uwzględnienia rotacyjnych stopni swobody. W tym kontekście należy wymienić przede wszystkim prace C.H.Haighta i T.S.Lundgren [44], w których autorzy przyjmują określony kształt geometryczny cząstek gazu dwuatomowego - sferocyndry, elipsoidy obrotowe lub kule o środku ciężkości różnym od środka geometrycznego. Analiza zderzeń takich cząstek prowadzi do zmodyfikowanego równania Boltzmann na funkcję rozkładu, zależną od położenia, czasu, prędkości liniowej i kątowej oraz od kierunku osi symetrii cząsteczki. Równanie to jest następnie rozwiązywane za pomocą tzw. trzymodalnego postulatu Mott-Smitha, w którym oprócz funkcji rozkładu przed i za falą, występuje funkcja rozkładu z czynnikiem Boltzmann odpowiadającym temperaturze rotacyjnej równej temperaturze mieszaniny przed falą. Po obliczeniu całek wielokrotnych uzyskiwane równania różniczkowe rozwiązano numerycznie, wyniki porównano z eksperymentami F.Robena i L.Talbota [71], w których znaleziono przebieg gęstości i rotacyjnej temperatury azotu w fali uderzeniowej. W podejściu C.H.Haighta i T.S.Lundgren występują parametry związane z geometrią cząsteczek; wyniki zależą w istotny sposób od wartości tych parametrów. Struktura wewnętrzna jest więc tu wynikiem braku symetrii

w geometrii cząstek. Obliczenia są prowadzone jedynie dla nieskończonej liczby Macha, co fizycznie odpowiada bardzo silnym falom uderzeniowym.

Ze względu na nieznaną przekrojów czynnych na zderzenia nieelastyczne, szerokie zastosowanie w problemach relaksacyjnych uwzględniających wewnętrzne stopnie swobody, znalazły równania modelowe typu BGK i równanie Fockera-Plancka.

Dotychczasowe prace korzystające z równań modelowych opisywały struktury fali uderzeniowej w pojedynczych gazach dwuatomowych.

Równanie modelowe typu BGK dla pojedynczego gazu dwuatomowego zostało zaproponowane w pracach T.F.Morse'a [46] i L.Holway'a [28], [42] (patrz też [47], [49]). Do zbadania struktury fali uderzeniowej w azocie równanie to było zastosowane po raz pierwszy w pracy L.Venkataraman i T.F.Morse [53]. Równanie modelowe zostało w tej pracy rozwiązane metodą momentów. Wybór momentów był arbitralny. Autorzy przedstawili wyniki dla kilku wybranych wartości liczby rotacyjnej i porównali wyniki z rezultatami doświadczeń P.Robena i L.Talbota [71].

Podobny, nieco ulepszony model - tzw. elipsoidalny model statystyczny (zaproponowany przez L.Holway'a [42]) - został zastosowany do opisu struktury fali uderzeniowej w azocie [44]. Istota uogólnienia polega na zastąpieniu rozkładu Maxwella w równaniach modelowych przez elipsoidalny rozkład prawdopodobieństwa w przestrzeni prędkości, z parametrami, które zostały wyznaczone z dodatkowych warunków.

Równania modelowe były rozwiązywane numerycznie metodą dyskretyzacji współrzędnych. Rezultaty zostały porównane z eksperymentami i z pracami teoretycznymi korzystającymi ze zwykłego równania BGK. Model elipsoidalny daje rezultaty nieco bliższe wynikom eksperymentalnym, niż model BGK, jednakże różnice nie są duże [1].

Struktura fali uderzeniowej w pojedynczym gazie dwuatomowym była też badana w pracach C.A.Brau [39] [40] w oparciu o równanie Fockera-Plancka. Równanie to było rozwiązane za pomocą trzymodalnego postulatu Mott-Smitha, analogicznego do stosowanego w pracy C.H.Haighta [44].

Autorzy zastosowali metodę momentów uzyskując, dla odpowiednio dobranej liczby rotacyjnej, dobrą zgodność z doświadczeniami F.Robena i L.Talbota [71].

Niezależnie od metod kinetycznej teorii gazów, struktura fali uderzeniowej w gazie dwuatomowym była także badana metodami mechaniki ośrodków ciągłych, w oparciu o równania Naviera-Stokes'a, uzupełnione dodatkowym równaniem relaksacyjnym uwzględniającym różnicę pomiędzy temperaturą translacyjną i rotacyjną. Należy tu wymienić prace L.Talbota i S.M.Scali [51], D.L.Turcotte'a [52].

Ponieważ w dalszym ciągu zajmujemy się głównie metodami kinetycznej teorii gazów, więc podejścia korzystającego z równań Naviera-Stokes'a nie będziemy tu bliżej omawiać.

Mieszanki gazu dwuatomowego z jednoatomowym, a także mieszanki gazów dwu- i więcej atomowych, są znacznie słabiej zbadane. Problem ten skupia w sobie zarówno trudności występujące w opisie pojedynczego gazu dwuatomowego (w szczegól-



ności - w poprawnym uwzględnieniu jego struktury wewnętrznej),  
jak i trudności, występujące w opisie mieszaniny gazów  
(w szczególności - przy opisie wzajemnego oddziaływania  
gazów). Autorowi nie są znane prace badające struktury fal  
uderzeniowych w takich mieszaninach.

§2. Opis modelu fizycznego. Równanie Boltzmana  
a równanie modelowe.

Będziemy się posługiwać aparatem kinetycznej teorii  
gazów. Do opisu mikroskopowej struktury gazów zastosujemy  
mechanikę klasyczną, o kwantowej naturze rotacyjnych stopni  
swobody wspominając szerzej w §1 rozdz. IV.

Zakładamy, że-pozza rotacyjnymi- nie są wzbudzone żadne  
inne wewnętrzne stopnie swobody, tzn. energia gazów jest  
sumą kinetycznej energii ruchu translacyjnego i obrotowego,  
nie zachodzą reakcje chemiczne pomiędzy składnikami miesza-  
ny, atomy i cząsteczki nie oscylują, nie ulegają dysocjacji  
i jonizacji.

Z fizycznego punktu widzenia założenia takie odpowiadają np.  
mieszaninom gazów: Ar, He, Ne, Xe, Kr, N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub> w tempera-  
turach pokojowych.

Przy opisie gazów metodami teorii kinetycznej, podstawową  
rolę odgrywa jednocząstkowa funkcja rozkładu

$F_1(q, p, t)$  ( $i = 1, 2$  - numer składnika mieszaniny).

Jest to gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki typu  
 $i$  w punkcie  $(p, q)$  przestrzeni fazowej w chwili  $t$ .

Za pomocą tak zdefiniowanych jednocząstkowych funkcji rozkła-  
du można wyrazić wszystkie interesujące nas wielkości makro-

skopowe, zarówno dla poszczególnych składników jak i dla mieszaniny. Odpowiednie definicje będą podane niżej.

W dalszym ciągu zagadnienie opisu fali uderzeniowej w mieszaninie gazów sprowadza się do ułożenia i rozwiązania równań, spełnianych przez jednocząstkowe funkcje rozkładu przy warunkach granicznych i początkowych odpowiadających określonej sytuacji fizycznej.

W dynamice gazów rozrzedzonych, podstawowym równaniem na jednocząstkowe funkcje rozkładu  $F_1$  jest równanie Boltzmanna [ 2 ] :

$$\frac{DF_1}{Dt} = \left( \frac{\delta F_1}{\delta t} \right) \text{ zderz} \quad (1)$$

gdzie  $\frac{D}{Dt}$  - operator przepływu swobodnomolekularnego, mający w przypadku braku sił zewnętrznych postać

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}}$$

$\left( \frac{\delta F_1}{\delta t} \right) \text{ zderz}$  jest operatorem zderzeniowym, opisującym zmianę  $F_1$

spowodowaną zderzeniami cząstek typu "i" zarówno z cząstkami typu "i" jak i z cząstkami innych składników.

Dla dwuskładnikowej mieszaniny gazów jednoatomowych układ równań Boltzmanna na jednocząstkowe funkcje rozkładu  $F_1$  i  $F_2$  ma następującą postać [ 2 ]

$$\frac{DF_i}{Dt} = \sum_{j=1}^2 J_{ij} \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

gdzie

$$J_{ij} = \iiint [F_i(v')F_j(v'_1) - F_i(v)F_j(v_1)] |v-v_1| d\omega d^3v_1 \quad d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

$v$  i  $v_1$  (odpowiednio  $v'$  i  $v'_1$ ) są prędkościami cząstek przed

zderzeniem (odpowiednio - po zderzeniu) przy czym  $v$  i  $v'$  są prędkościami cząstki "i" natomiast  $v_1$  i  $v_1'$  - prędkościami cząstki "j". W celu uproszczenia oznaczeń będziemy pomijać zależność  $F_1$  od czasu i położenia oraz symbole wielkości wektorowych i granice całkowania, standardowe w całkach tego typu.  $J_{i,j}$  jest więc składnikiem członu zderzeniowego, opisującym zderzenia cząstek "i" z cząstkami "j".

Odpowiedni układ równań dla mieszaniny gazów z rotacyjnymi stopniami swobody będzie opisany w rozdziale IV.

Ze względu na trudności występujące przy rozwiązywaniu równania Boltzmann'a, szczególnie istotne [50] w przypadku gazów ze strukturą wewnętrzną (brak danych o przekrojach czynnych na zderzenia nieelastyczne, zmieniające energie wewnętrzne cząstek, występowanie całek wielokrotnych) szerokie zastosowanie przy rozwiązywaniu konkretnych problemów gazowej dynamiki znajdują równania modelowe typu BGK (Bhatnagera, Grossa, Krooka) [12], [21]. W przypadku mieszaniny gazów jednoatomowych można je otrzymać w sposób formalny z układu równań Boltzmann'a (2) definiując:

$$\frac{1}{\tau_{ii}} = \iint F_1(v_1^{(i)}) g \, d\omega dv_1 \quad g = |v - v_1^{(i)}| \quad (3)$$

$$\frac{1}{\tau_{ij}} = \iint F_j(v_1^{(j)}) g \, d\omega dv_1 \quad g = |v^{(i)} - v_1^{(j)}|^{1,j} \quad j = 1, 2$$

zamieniając dwie pozostałe całki wyrażeniami

$$\iint F_1(v^{(i)}) F_1(v_1^{(i)}) g \, d\omega dv_1 = \frac{1}{\tau_{ii}} M_{ii} \quad (4)$$

$$\iint F_1(v^{(i)}) F_j(v_1^{(j)}) g \, d\omega dv_1 = \frac{1}{\tau_{ij}} M_{ij}$$

(Zakładamy przy tym, że wszystkie występujące we wzorach (3)

i (4) całki istnieją [4]),

gdzie

$$M_{ii} = N_i (2\pi R_i T_i)^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v-U_i)^2}{2R_i T_i} \right] \quad (5)$$

jest lokalnie równowagową funkcją rozkładu Maxwella dla gazu "i" ( $i = 1, 2$ ), natomiast

$$M_{ij} = N_i (2\pi R_i T_{ij})^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v-U_{ij})^2}{2R_i T_{ij}} \right] \quad (6)$$

dla  $i \neq j$

$$R_i = \frac{k}{m_i} \quad (i = 1, 2)$$

Wielkości  $U_{ij}$  i  $T_{ij}$  występujące we wzorach (6) są nieznanymi funkcjami, które należy wyznaczyć z dodatkowych warunków. W dalszym ciągu wielkości te będziemy nazywali parametrami krzyżowymi.

Funkcje  $N_i$ ,  $U_i$ ,  $T_i$  we wzorach (5) i (6) są momentami szukanej funkcji rozkładu  $F_i$  i odpowiadają kolejno gęstości liczbowej, prędkości hydrodynamicznej i temperaturze gazu "i" dla  $i = 1, 2$  :

$$\begin{aligned} N_i(x) &= \int F_i(x, v) dv \\ U_i(x) &= \frac{1}{N_i} \int v F_i(x, v) dv \\ T_i(x) &= \frac{m_i}{3kN_i} \int (v-U_i)^2 F_i(x, v) dv \end{aligned} \quad (7)$$

Po skorzystaniu z definicji (3) - (7), układ równań Boltzmann'a (2) przechodzi w następujący układ równań modelowych :

$$\frac{DF_1}{Dt} = \frac{1}{\tau_{11}} (M_{11} - F_1) + \frac{1}{\tau_{12}} (M_{12} - F_1)$$

$$\frac{DF_2}{Dt} = \frac{1}{\tau_{22}} (M_{22} - F_2) + \frac{1}{\tau_{21}} (M_{21} - F_2)$$
(8)

Parametry  $\tau_{11}$  oraz  $\tau_{1j}$  interpretujemy jako czasy relaksacji funkcji  $F_1$  do lokalnie maxwellowskiej funkcji rozkładu  $M_{11}$  (odpowiednio  $M_{1j}$ ) w wyniku zderzeń typu  $i-j$  (odpowiednio  $i-j$ ).

Otrzymane równania modelowe (8) nie są prostsze od wyjściowego układu równań Boltzmann (2), gdyż nieliniowość występuje zarówno w mianownikach, jak i w wykładnikach funkcji eksponent w modelowych operatorach zderzeniowych (nieznane funkcje występują np. w wyrażeniach podcałkowych definiujących  $N_1, U_1, T_1$ ). Jest ono jednakże dogodniejsze do rozwiązywania za pomocą zarówno iteracyjnych procedur numerycznych, jak i pewnych przybliżonych metod teoretycznych.

W dalszym ciągu zagadnienie znalezienia struktury fali uderzeniowej w mieszaninie gazów jednoatomowych sprowadzać się będzie do :

1) wyspecyfikowania nieznanymi parametrów zderzeniowych występujących w równaniach modelowych (8) [tzn. do wyrażenia tych parametrów za pomocą funkcji  $N_1, U_1, T_1$  (gęstości, prędkości i temperatur gazów) oraz mas atomowych i przekrojów czynnych na poszczególne rodzaje zderzeń].

2) rozwiązanie układu równań modelowych na funkcje rozkładu  $F_1 / i=1,2/$  z następującymi warunkami brzegowymi:  
 $/ F_1 = F_1 / x, v / /$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F_1 = n_1(\pm\infty) \left[ 2\pi R_1 kT(\pm\infty) \right]^{-3/2} \exp \left[ -\frac{1}{2R_1 T(\pm\infty)} (v-u(\pm\infty))^2 \right]$$

dla  $i = 1, 2$  (9)

gdzie  $(-\infty)$  odpowiada stanowi stacjonarnemu przed falą,  $(+\infty)$  - stanowi stacjonarnemu za falą. Warunków początkowych nie określamy, gdyż przez odpowiedni wybór układu współrzędnych zagadnienie sprowadzi się do problemu stacjonarnego (patrz §1 rozdział III).

Mając dane funkcje  $F_1$  i  $F_2$  - rozwiązania modelowego układu równań (8), znajdziemy, posługując się definicjami (7), odpowiednie charakterystyki fali uderzeniowej w mieszaninie.

W przypadku mieszanin gazów jednoatomowych szczególnie interesujące - i dotychczas mało zbadane - są mieszaniny gazów o skrajnie różnych masach atomowych,  $m_1 \gg m_2$  (przez  $m_2$  będziemy zawsze masę atomową lżejszego składnika lub też, gdy jeden składnik jest dwuatomowy, masę cząsteczkową składnika dwuatomowego). W tych mieszaninach istotną rolę odgrywają duże, w sensie odpowiednich norm, odchylenia funkcji rozkładu składników od równowagowych funkcji rozkładu, a zatem szeroko stosowane w dynamice gazów i w teorii kinetycznej metody typu Chapmana-Enskoga, Hilberta nie wydają się uzasadnione. Potwierdzeniem jest fakt, iż oparta na metodzie Chapmana-Enskoga procedura obliczania czasów relaksacji w równaniach modelowych BGK (8), stosowana w pracach H.Oguchiego [32] i K.Abe [11] daje dla mieszaniny Xe/He ( $m = m_2/m_1 = 0.03$ ) rezultaty niezgodne z doświadczeniem (patrz rozdział V obecnej pracy).

Mieszanki gazów o skrajnie różnych masach atomowych były badane zarówno w kontekście fal uderzeniowych (patrz przegląd literatury w §2 obecnego rozdziału) jak też i w kontekście ogólnym. Należy tu wymienić prace E.Johnson [27], wspomniane już wcześniej prace W.L.Harrisa i G.K.Bieńkowskiego [26], [27], B.Hamela [25].

W rozdziale II i III obecnej pracy będziemy się zajmowali mieszaninami gazów jednoatomowych o istotnie różnych masach atomowych składników, badając mieszaniny gazów o zbliżonych masach atomowych jedynie dla ilustracji i sprawdzenia poprawności metody w przypadkach granicznych (równych mas lub braku jednego ze składników).

SPECYFIKACJA PARAMETRÓW ZDERZENIOWYCH  
W RÓWNIANIACH MODELOWYCH

Rozdział II

§1. Relacje symetrii i równania zachowania dla mieszaniny gazów jednoatomowych.

Od zapostulowanych w §2 poprzedniego rozdziału równań modelowych (8) wymagamy, aby zachowywały takie cechy wyjściowych równań Boltzmanna, jak spełnianie równań zachowania masy, pędu i energii.

Warunki tego typu narzucają ograniczenia na nieznanne parametry zderzeniowe w równaniach modelowych. Porównując równania relaksacyjne, otrzymywane z równań Boltzmanna, z równaniami relaksacyjnymi, otrzymywanymi z równań modelowych, można otrzymać równania na poszukiwane parametry zderzeniowe.

Rozważmy najpierw układ (2) równań Boltzmanna z §2 rozdziału I. W celu uproszczenia zapisu definiujemy :

$$[\cdot] \equiv [F_i(v')F_j(v_1') - F_i(v)F_j(v_1)]$$

Relacje symetrii mają postać : ( [1] , [2] ) :

$$\int \varphi(v) J_{ij} dv = \frac{1}{2} \int [\varphi(v) - \varphi(v')] [\cdot] g d\omega dv dv_1 \quad (1)$$

$$\sum_{i,j} \int \varphi_i(v) J_{ij} dv = \frac{1}{4} \sum_{i,j} \int \left[ \varphi_i(v) + \varphi_j(v_1) - \varphi_i(v') - \varphi_j(v_1') \right] [\cdot] g d\omega dv dv_1 \quad (2)$$

gdzie  $\varphi(v)$  jest dowolną funkcją prędkości cząstki  $v$  taką, że powyższe całki istnieją.

Całkując równania Boltzmanna (2) z §2 rozdziału I po prze-



strzeni prędkości  $dv$  i korzystając z relacji symetrii (1), otrzymujemy równanie zachowania mas poszczególnych składników:

$$\int J_{i1} dv + \int J_{ij} dv = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \\ j \neq i \end{array} \quad (3)$$

Mnożąc równania Boltzmann (2) odpowiednio: pierwsze przez

$\psi_1(v) = m_1 v$  a drugie przez  $\psi_2(v) = m_2 v$ , dodając stronami, całkując i korzystając z relacji symetrii (2), otrzymujemy równanie zachowania całkowitego pędu mieszaniny :

$$\int J_{11} \psi_1 dv + \int J_{12} \psi_1 dv + \int J_{21} \psi_2 dv + \int J_{22} \psi_2 dv = 0 \quad (4)$$

Przeprowadzając tę samą procedurę dla  $\psi_1(v) = \frac{1}{2} m_1 v^2$  i  $\psi_2(v) = \frac{1}{2} m_2 v^2$ , otrzymujemy równanie zachowania całkowitej energii mieszaniny :

$$\int J_{11} \psi_1 dv + \int J_{12} \psi_1 dv + \int J_{21} \psi_2 dv + \int J_{22} \psi_2 dv = 0 \quad (5)$$

W przypadku gdy składnik  $m_2$  jest gazem dwuatomowym, równania zachowania masy (3) i pędu (4) nie ulegają zmianie, natomiast ulega zmianie równanie zachowania całkowitej energii (5). Odpowiednie wyrażenia będą podane w rozdziale IV.

[równanie (1) §3 rozdział IV].

## §2. Wyznaczanie parametrów krzyżowych w równaniach modelowych.

### 1. Metoda oparta na porównaniu z równaniem Boltzmann.

Wyrażenia na parametry krzyżowe można otrzymać żądając aby równania na prędkości relaksacji różnic prędkości hydrodynamicznych obu składników mieszaniny oraz na prędkości relaksacji różnic ich temperatur kinetycznych, wyprowadzone

z równań Boltzmanna pokrywały się z odpowiednimi równaniami wyprowadzonymi z równań modelowych (8) z §3 rozdziału I.

Równania relaksacji różnic prędkości hydrodynamicznych  $U_2 - U_1$  oraz różnic temperatur  $T_2 - T_1$ , wyprowadzone z równań Boltzmanna dla cząstek oddziałujących potencjałem Maxwella lub potencjałem sztywnych kul, mają postać ([31], patrz też dodatek I) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (U_2 - U_1) &= -\alpha_E \frac{m_0}{\epsilon} (U_2 - U_1) (\rho_2^{-1} - \rho_1^{-1}) - \frac{U_2}{N_2} \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{U_1}{N_1} \frac{\partial N_1}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} (T_2 - T_1) &= -\alpha_E \left[ (T_2 - T_1) (N_1^{-1} + N_2^{-1}) + \frac{1}{3kN_2} (U_2 - U_1)^2 \right] - \\ &\quad - \frac{U_2}{N_2} \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{U_1}{N_1} \frac{\partial N_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie  $m_0 = m_1 + m_2$ , współczynnik  $\alpha_E$  zależy od potencjału oddziaływania i jest zdefiniowany w dodatku I.

Równania relaksacji różnic prędkości hydrodynamicznych i temperatur dla równań modelowych otrzymujemy mnożąc modelowe równania na  $F_1$  i  $F_2$  przez  $v$  [odpowiednio przez  $\frac{m_1}{2}(v-U_1)^2$ ], całkując po przestrzeni prędkości i odejmując stronami. Mają one postać :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (U_2 - U_1) &= \frac{1}{\tau_{21}} (U_{21} - U_2) - \frac{1}{\tau_{12}} (U_{12} - U_1) - \frac{U_2}{N_2} \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{U_1}{N_1} \frac{\partial N_1}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} (T_2 - T_1) &= \frac{N_1}{\tau_{12}} \left[ \frac{T_{21}}{N_2} - \frac{T_{12}}{N_1} - \frac{T_2}{N_2} + \frac{T_1}{N_1} + \frac{\mu(\rho_1 - \rho_2)}{3kN_1N_2} (U_2 - U_1)^2 \right] - \\ &\quad - \frac{U_2}{N_2} \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{U_1}{N_1} \frac{\partial N_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (2)$$

Porównując odpowiednie równania układów (1) i (2)

otrzymujemy dwa równania na nieznanne parametry krzyżowe  $U_{12}$ ,  $U_{21}$ ,  $T_{12}$  i  $T_{21}$  (patrz dodatek I).

Dwa dodatkowe równania na parametry krzyżowe otrzymujemy narzucając warunek, aby równania modelowe spełniały prawa zachowania energii i pędu, wyprowadzone w §1 bieżącego rozdziału. Mają one postać równań (3) i (4) z §1, w których operatory zderzeniowe  $J_{ij}$  Boltzmanna zostały zastąpione przez odpowiednie operatory zderzeniowe w równaniach modelowych (8). Jawna postać równań na parametry krzyżowe jest podana w dodatku I.

Zakładając, że odwrotność czasu relaksacji  $\tau_{ij}$  jest równa częstości  $\nu_{ij}$  zderzeń (patrz dodatek I) typu "i-j" (to znaczy jest liczbą zderzeń typu "i-j" przypadających na jedną cząstkę typu "i" w jednostce czasu i w jednostce objętości) i wykorzystując równość  $N_1 \nu_{12} = N_2 \nu_{21}$ , będącą bilansem liczby zderzeń międzycząstkowych, otrzymujemy rozwiązanie układu czterech równań na parametry krzyżowe w postaci:

$$U_{12} = \frac{m_1 U_1 + m_2 U_2}{m_1 + m_2}$$

$$U_{21} = U_{12}$$

$$T_{12} = T_1 + \frac{2\mu}{m_1 + m_2} \left[ T_2 - T_1 + \frac{m_2}{6k} (U_2 - U_1)^2 \right] \quad (3)$$

$$T_{21} = T_2 + \frac{2\mu}{m_1 + m_2} \left[ T_1 - T_2 + \frac{m_1}{6k} (U_2 - U_1)^2 \right]$$

W ogólnym przypadku dowolnych czasów relaksacji rozwiązanie układu czterech równań z czterema niewiadomymi parametrami krzyżowymi  $U_{12}$ ,  $U_{21}$ ,  $T_{12}$  i  $T_{21}$  jest podane w dodatku I. Warto dodać, że z podanego tam rozwiązania wynika, iż  $\tau_{ii}$  nie wpływają na wartości parametrów krzyżowych.

### § 3 Wyznaczanie czasów relaksacji.

Wzory na parametry krzyżowe  $U_{ij}$  i  $T_{ij}$ , pokrywające się z wyrażeniami (3) z końca poprzedniego paragrafu, otrzymał także B.Hamel [25a] nieco inną metodą, stosując obcięcie potencjału oddziaływania i dodatkowe warunki o niejasnej interpretacji fizycznej (patrz T.Płatkowski [35], gdzie zostały omówione różnice i ograniczenia poszczególnych metod).

Jak się okazało w wyniku obliczeń numerycznych opartych na wzorach (3) z poprzedniego paragrafu, otrzymywane struktury fal uderzeniowych były dla gazów o bardzo zróżnicowanych masach atomowych niezgodne z rezultatami eksperymentów Z.A. Walenty, A.S.Gmurczyka i M.Tarczyńskiego [73]. (patrz rozdział V obecnej pracy). Wiąże się to z faktem, że interpretowanie odwrotności czasów relaksacji  $\tau_{ij}$  jako częstości zderzeniowych  $\nu_{ij}$  nie są poprawne w przypadku takich mieszanin. Czasy relaksacji do równowagowych funkcji rozkładu, związane ze zderzeniami krzyżowymi cząstek lekkich z ciężkimi ( $\tau_{21}$ ) oraz ciężkich z lekkimi ( $\tau_{12}$ ) są bowiem znacznie większe niż odpowiednie czasy relaksacji w mieszaninach gazów o porównywalnych masach atomowych. Ewolucja nierównowagowych funkcji rozkładu gazów do równowagowych funkcji Maxwella (w gazach ze strukturą wewnętrzną - do rozkładu Maxwella - Boltzmana) przebiega w kilku studiach, a zatem występuje kilka skal relaksacyjnych (jest to tzw. hipoteza relaksacyjna H.Grada [23]):

1. W pierwszym stadium funkcja rozkładu cząstek lekkich  $F_2$

ewoluuje do lokalnie równowagowej funkcji rozkładu Maxwella.

2. Funkcja rozkładu cząstek ciężkich  $F_1$  dochodzi następnie do rozkładu lokalnie maxwellowskiego wskutek zderzeń pomiędzy cząstkami ciężkimi - wpływ cząstek lekkich na funkcję rozkładu cząstek ciężkich jest w tej skali zaniedbywalny.

3. W ostatnim stadium ewolucji do równowagi, w wyniku zderzeń pomiędzy cząstkami lekkimi i ciężkimi, następuje wyrównanie temperatur obu gazów i osiągnięcie rozkładu Maxwella, skupionego wokół równowagowych wartości prędkości i temperatury, wspólnych dla obu gazów.

W przypadku mieszanin gazów o bardzo zróżnicowanych masach atomowych mamy właśnie taką sytuację - funkcje rozkładu obu gazów ewoluują do funkcji równowagowych w kilku skalach czasowych. Metody obliczania czasów relaksacji, oparte na założeniu (1)  $\nu_{ij} = \tau_{ij}^{-1}$  są w tym wypadku niepoprawne, gdyż wynika z nich jednakowy wpływ zderzeń własnych i krzyżowych (tzn. 2 - 2 i 2 - 1) na funkcję rozkładu cząstek lekkich  $F_2$ . Porównując bowiem wyrażenia na  $\nu_{22}$  i  $\nu_{21}$  otrzymane w dodatku II, otrzymujemy, dla  $m_2 \ll m_1$ ,

$$\nu_{22} \approx \nu_{21},$$

a zatem  $\tau_{22} \approx \tau_{21}$ , czyli czas relaksacji cząstek lekkich w wyniku zderzeń z lekkimi jest tego samego rzędu, co czas relaksacji cząstek lekkich w zderzeniach z ciężkimi.

Niepoprawność takiego założenia została potwierdzona w obliczeniach numerycznych. Struktury fali uderzeniowej, otrzymywane przy założeniu (1) niewiele się zmieniały nawet przy dużych zmianach procentowego składu mieszaniny, co przeczy

rezultatom eksperymentalnym.

Powyższe argumenty sugerują, że dla mieszanin gazów o bardzo zróżnicowanych masach atomowych należy obliczać czasy relaksacji uwzględniając istnienie kilku skal czasowych przy dochodzeniu poszczególnych składników do globalnej równowagi.

Próbie uwzględnienia wieloskalowej relaksacji podjął J.M.Green [24] zakładając następującą zależność pomiędzy czasami relaksacji :

- a)  $\tau_{21} \approx \tau_{22}$
- b)  $\tau_{12} \approx \frac{1}{m} \tau_{21}$
- c)  $\tau_{11} \approx \frac{1}{\sqrt{m}} \tau_{22}$

przy czym: zależność c) wynika z ogólnych wzorów na czasy relaksacji dla zderzeń własnych 1-1 i 2-2 (patrz dodatek II) zależność b) jest przyjęta arbitralnie, natomiast a) ma wynikać z założenia, że cząstki lekkie (2) dochodzą do lokalnego rozkładu Maxwella i uzyskują prędkość taką, jak cząstki ciężkie, w tej samej skali czasowej. To założenie jak również postulat b), są dyskusyjne. W trakcie obecnej pracy zastosowano układ założeń a) - c) do opisu struktury fali uderzeniowej w mieszaninie Xe-He rozwiązując zaproponowany wyżej układ równań modelowych w przypadku, gdy gaz ciężki -Xe - występował w ilościach śladowych. Rezultaty okazały się niezgodne z doświadczeniami Z.A.Walenty i współpracowników [73] (patrz rozdział V obecnej pracy).

Wyniki znacznie bardziej zbliżone do powyższych wyników eksperymentalnych otrzymano w obecnej pracy przy założeniach

(dla  $m = 1$ ) :

$$a') \quad \tau_{11} \approx \frac{1}{\sqrt{m}} \tau_{22}$$

$$b') \quad \tau_{ij} \approx \frac{1}{m} \tau_{ii} \quad \text{dla } i \neq j, \quad i, j = 1, 2.$$

Zależność a') wynika, jak poprzednio, z wzorów na częstość zderzeń własnych 1-1 i 2-2 (patrz dodatek I). Zależność b') odzwierciedla fakt, że czas relaksacji przy zderzeniach typu i-j powinien być znacznie dłuższy od czasu relaksacji w zderzeniach typu i-i dla mieszanin gazów o bardzo zróżnicowanych masach atomowych składników. Jest to rezultatem utrudnionej wymiany energii w zderzeniach krzyżowych typu i-j w tym przypadku. ©

Warto tu zwrócić uwagę, że przyjęcie innej relacji pomiędzy czasami relaksacji w zderzeniach krzyżowych  $\tau_{ij}$  i własnych  $\tau_{ii}$  :  $\tau_{ij} \approx \frac{1}{\sqrt{m}} \tau_{ii}$ , dla  $i \neq j, i, j = 1, 2$ , pociąga za sobą oszacowanie  $\tau_{21} \approx \tau_{11}$ , czyli porównywalność czasu relaksacji w zderzeniach cząstek ciężkich 1-1 z czasem relaksacji w zderzeniach krzyżowych cząstek lekkich 2 z ciężkimi 1: 2-1. Jest to wynik niefizyczny, gdyż ze względu na utrudniony przekaz energii w zderzeniach krzyżowych oczekujemy raczej zależności  $\tau_{21} \gg \tau_{11}$ . Obliczenia oparte na tym założeniu dały także rezultaty niezgodne z doświadczeniami.

W części obliczeniowej pokażemy, że struktury fali uderzeniowej otrzymywane przy założeniach a') i b') są znacznie bliższe strukturom eksperymentalnym, niż rezultaty wcześniejszych teorii i dają w szczególności charakterystyczny "garbek" - przegięcie struktury gęstości gazu lekkiego w przypadkach [F3], gdy Xe występuje w ilościach śladowych.

ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ MODELOWYCH  
DLA MIESZANINY GAZÓW JEDNOATOMOWYCH

Rozdział III

§1. Metoda rozwiązywania układu równań modelowych.

Niech płaska fala uderzeniowa rozchodzi się w pewnym kierunku z prędkością  $-u_{(-\infty)}$  u w mieszaninie gazów, znajdującej się w chwili początkowej w spoczynku w stanie stacjonarnym, jednorodnym, w temperaturze  $T_{(-\infty)}$ . Wybierzmy układ odniesienia w ten sposób, aby oś  $x$  była skierowana przeciwnie do kierunku rozchodzenia się fali. Niech teraz cały układ porusza się z prędkością  $-u_{(-\infty)}$ . W tym układzie odniesienia fala uderzeniowa jest w spoczynku, natomiast mieszanina gazów nabiega na falę z prędkością  $u_{(-\infty)}$  w kierunku wzrastających  $x$ .

W tak wybranym układzie odniesienia układ równań modelowych (8) §2 rozdział I postulujemy w postaci:

$$v_x \frac{\partial F_1(x, v)}{\partial x} = \tau_{11}^{-1} (M_{11} - F_1) + \tau_{12}^{-1} (M_{12} - F_1) \quad (1)$$

$$v_x \frac{\partial F_2(x, v)}{\partial x} = \tau_{21}^{-1} (M_{21} - F_2) + \tau_{22}^{-1} (M_{22} - F_2)$$

z następującymi warunkami brzegowymi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_i(x, v) = f_i^0_{(-\infty)}(v) \equiv n_{i(-\infty)} \left[ 2\pi R_1 kT_{(-\infty)} \right]^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v - u_{(-\infty)})^2}{2R_1 T_{(-\infty)}} \right] \quad (2)$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x, v) = f_1^{\circ}(+\infty)(v) = n_1(+\infty) \left[ 2\pi R_1 kT(+\infty) \right]^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v-u(+\infty))^2}{2R_1 T(+\infty)} \right]$$

gdzie  $f_1^{\circ}(+\infty)(v)$  są równowagowymi funkcjami rozkładu Maxwella, odpowiadającymi stanom stacjonarnym przed i za falą uderzeniową,  $i = 1, 2$ .

W dalszym ciągu będziemy się zajmować układem równań (1) w postaci bezwymiarowej. Odpowiednia procedura normalizacyjna jest opisana w dodatku II.

Po dokonaniu normalizacji, wyznaczeniu parametrów krzyżowych i czasów relaksacji układ równań modelowych (1) przybiera ostatecznie postać (wszystkie występujące wielkości są tutaj bezwymiarowe):

$$v_x \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{1}{\tau_{11}} (M_{11} - F_1) + \frac{1}{\tau_{12}} (M_{12} - F_1)$$

$$v_x \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{1}{\tau_{22}} (M_{22} - F_2) + \frac{1}{\tau_{21}} (M_{21} - F_2) \quad (3)$$

gdzie

$$M_{11} = N_1 (2\pi R_1 T_1)^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v-U_1)^2}{2R_1 T_1} \right]$$

$$M_{12} = N_1 (2\pi R_1 T_{12})^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v-U_{12})^2}{2R_1 T_{12}} \right]$$

$$M_{22} = N_2 (2\pi R_2 T_2)^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v-U_2)^2}{2R_2 T_2} \right]$$

$$M_{21} = N_2 (2\pi R_2 T_{21})^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v-U_{21})^2}{2R_2 T_{21}} \right]$$

oraz

$$U_{12} = U_1 + \frac{\alpha \varepsilon \tau_{12}}{2N_1} (1+m) (U_2 - U_1)$$

$$U_{21} = U_2 + \frac{\alpha \varepsilon \tau_{21}}{2N_2} \cdot \frac{1+m}{m} \cdot (U_1 - U_2)$$

$$T_{12} = T_1 - \frac{\left[ B + \frac{1}{3} C_1 m^S (U_{12}^2 - U_1^2) + \frac{C_2}{3} (U_{21}^2 - U_2^2) \right]}{m^S \left( 1 + \frac{N_2}{N_1} \right)}$$

$$T_{21} = T_2 - m^S \left[ T_{12} - T_1 + \frac{C_1}{3} (U_{12}^2 - U_1^2) \right] - \frac{C_2}{3} (U_{21}^2 - U_2^2)$$

gdzie  $m^S = \frac{\tau_{21} N_1}{\tau_{12} N_2}$ ,  $C_1 = \frac{m_1 u(-\infty)^2}{kT(-\infty)}$ ,  $C_2 = \frac{m_2 u(-\infty)^2}{kT(-\infty)}$

$$m = \frac{m_2}{m_1}$$

$$B = \frac{\alpha_\epsilon \tau_{21}}{N_2} \left[ \left( 1 + \frac{N_2}{N_1} \right) (T_1 - T_2) + \frac{1}{3} \left( C_1 - \frac{C_2 N_2}{N_1} \right) (U_2 - U_1)^2 \right] - \frac{C_2}{3} (U_{21} - U_2)^2 +$$

$$+ \frac{C_1 N_2}{3 N_1} m^S (U_{12} - U_1)^2$$

$$\alpha_E = \begin{cases} \frac{16}{3} \frac{N_1 N_2}{(m_1 + m_2)^2} \left[ \frac{2k}{\pi} m_1 m_2 (m_2 T_1 + m_1 T_2) \right]^{1/2} \sigma_{12} & \text{dla} \\ & \text{sztywnych kul} \\ 4 \pi \left[ \frac{m_1 m_2 B_{21}}{m_1 + m_2} \right]^{1/2} \frac{0.422 \cdot N_1 \cdot N_2}{m_1 + m_2} & \text{dla cząstek Maxwella} \end{cases}$$

Czasy relaksacji w zderzeniach własnych 1-1 i 2-2 są dane wzorami (patrz dodatek I) :

$$\tau_{11}^{-1} = 4N_1 (\pi T_1 / C_1)^{1/2} \sigma_{11}$$

$$\tau_{22}^{-1} = 4N_2 (\pi T_2 / C_2)^{1/2} \sigma_{22} \quad (4)$$

Czasy relaksacji w zderzeniach krzyżowych 1-2 i 2-1 należy przyjąć tak, aby dla  $m \ll 1$  uzyskać oszacowania, otrzymane w § 3 rozdziału II ( $a'$  i  $b'$ ), natomiast w drugim granicznym przypadku równych mas atomowych,  $m = 1$ , uzyskać

czasu relaksacji odpowiadające zderzeniom jednakowych cząstek (tzn. zderzeniom własnym). Uwzględniając zależność czasów relaksacji  $\tau_{12}$  i  $\tau_{21}$  od przekrojów czynnych na zderzenia krzyżowe 1-2 i 2-1 otrzymujemy :

$$\tau_{12}^{-1} = 2N_2 m \left[ 2\pi m \left( \frac{T_1}{C_1} + \frac{T_2}{C_2} \right) \right]^{1/2} \sigma_{12}$$

$$\tau_{21}^{-1} = 2N_1 m \left[ 2\pi \left( \frac{T_1}{C_1} + \frac{T_2}{C_2} \right) \right]^{1/2} \sigma_{12} \quad (5)$$

gdzie  $\sigma_{12}$  jest przekrojem czynnym na zderzenia krzyżowe. Widać, że dla jednakowych mas ( $m = 1$ ) otrzymujemy

$$\left. \frac{N_2}{\tau_{21}} \right|_{m=1} = \left. \frac{N_1}{\tau_{12}} \right|_{m=1} = \frac{N_1}{\tau_{11}}, \text{ a zatem zależność}$$

wykorzystywaną we wcześniejszych pracach [18], [32].

W dalszym ciągu opiszemy metodę rozwiązania otrzymanego układu równań modelowych (3) z warunkami brzegowymi (2) z bieżącego paragrafu.

Będziemy poszukiwali rozwiązania układu nieliniowych, różniczkowo-całkowych równań modelowych (3) w klasie funkcji, które można przedstawić w postaci :

$$F_1(x, v) = w_1(x) f_{1-}(v) + w_2(x) f_{1+}(x, v)$$

$$F_2(x, v) = w_3(x) f_{2-}(v) + w_4(x) f_{2+}(x, v) \quad (6)$$

gdzie

$$f_{1-}(v) = \left[ 2\pi R_1 T(-\infty) \right]^{-3/2} \exp \left[ - \frac{(v - u(-\infty))^2}{2R_1 T(-\infty)} \right]$$

$$f_{2-}(v) = \left[ 2\pi R_2 T(-\infty) \right]^{-3/2} \exp \left[ - \frac{(v - u(-\infty))^2}{2R_2 T(-\infty)} \right]$$

$$f_{1+}(x, v) = \left[ 2\pi R_1 T_+(x) \right]^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v-u_+(x))^2}{2R_1 T_+(x)} \right]$$

$$f_{2+}(x, v) = \left[ 2\pi R_2 T_+(x) \right]^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v-u_+(x))^2}{2R_2 T_+(x)} \right]$$

$w_1(x)$ ,  $w_2(x)$ ,  $w_3(x)$  i  $w_4(x)$  oraz  $u_+(x)$  i  $T_+(x)$  są nieznanymi funkcjami zmiennej  $x$ , spełniającymi następujące warunki brzegowe, zgodne z wynikającymi ze specyfiki problemu warunkami brzegowymi na funkcje  $F_1$  i  $F_2$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} w_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} w_3(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} w_2(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} w_4(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} w_1(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} w_3(x) = \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} w_2(x) = S_1^{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} w_4(x) = \alpha S_1^{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_+(x) = S_1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T_+(x) = S_2$$

gdzie funkcje  $w_1, \dots, w_4$ ,  $u_+$  i  $T_+$  zostały znormalizowane zgodnie z procedurą opisaną w dodatku II,

$$S_1 = u_{(+\infty)} / u_{(-\infty)}$$

$$S_2 = T_{(+\infty)} / T_{(-\infty)}$$

$u_{(+\infty)}$  i  $T_{(+\infty)}$  są odpowiednio hydrodynamiczną prędkością i temperaturą mieszaniny za falą uderzeniową (w " $+\infty$ ").

Wielkości te są dane przez tzw. warunki Rankina-Hugoniota, wyrażające makroskopowe parametry mieszaniny za falą

w funkcji liczby Macha i wartości tych parametrów przed falą. Wyprowadzenie warunków Rankina-Hugoniota dla mieszaniny będzie podane w następnym paragrafie, a ich jawna postać - w dodatku II.

Metoda analogiczna do (6) została po raz pierwszy zaproponowana przez Motta-Smitha [30], [38] przy badaniu struktury fali uderzeniowej w pojedynczym gazie jednoatomowym. Uogólnienia metody Mott'a-Smitha na przypadek mieszaniny gazów jednoatomowych, zaproponowane przez M.M.Oberai'a [33] i T.Fujimoto [47],

w przypadku mieszanin gazów o bardzo zróżnicowanych masach atomowych dawały wyniki, niezgodne z obserwacjami eksperymentalnymi, np. znikomą separację gazów w fali uderzeniowej. Uogólnienia te polegały na zapostulowaniu funkcji rozkładu obu gazów w postaci analogicznej do (6) z obecnego paragrafu, w której nieznanne funkcje  $u_+(x)$  i  $T_+(x)$  zostały jednak zastąpione przez funkcje, tożsamościowo równe stałym parametrom  $u_{(+\infty)}$  i  $T_{(+\infty)}$ , odpowiadającym odpowiednio prędkości hydrodynamicznej i temperaturze mieszaniny gazów za falą i danym przez warunki Rankina-Hugoniota. Jak będzie wykazane w następnym paragrafie, z takich postaci funkcji rozkładu wynikają zależności  $w_2(x) = \alpha^{-1} w_4(x)$  oraz  $w_1(x) = \alpha^{-1} w_3(x)$ , spełniane w każdym punkcie fali i oznaczające brak separacji składników mieszaniny w fali uderzeniowej.

Poprawne zastosowanie metody Mott'a-Smitha do mieszaniny gazów jednoatomowych, oddziaływających potencjałem Maxwella i opisywanych pełnymi równaniami Boltzmanna, zostało zapropo-

nowane w pracy [34]. W przypadku, gdy gazy opisujemy modelowymi równaniami kinetycznymi, metoda Mott'a-Smitha nie była dotychczas stosowana.

Po wprowadzeniu rozszerzonego postulatu Mott'a-Smitha w postaci (6) z bieżącego paragrafu, wielkości makroskopowe zapisujemy w postaci algebraicznej, jako funkcjonały od nieznanych funkcji  $w_2(x)$  i  $w_4(x)$ .

Szczegóły i wyniki obliczeń są podane w dodatku II.

§2. Lokalne <sup>zachowania</sup> równania dla mieszaniny gazów jednoatomowych.

Równania zachowania mas składników, całkowitego pędu i energii mieszaniny zostały wypisane w §1 rozdziału II [równania (3), (4), (5)].

Wstawiając do tych równań funkcje rozkładu  $F_1$  i  $F_2$  w postaci (6) zapostulowanej w poprzednim paragrafie, otrzymujemy cztery równania na sześć nieznanych funkcji  $w_1, w_2, w_3, w_4, u_+$  i  $T_+$ .

Równania te mają postać :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (u_- w_1 + u_+ w_2) &= \frac{d}{dx} A_1(x) = 0 \\ \frac{d}{dx} (u_- w_3 + u_+ w_4) &= \frac{d}{dx} A_2(x) = 0 \\ \frac{d}{dx} [w_1 (kT_- + m_1 u_-^2) + w_2 (kT_+ + m_1 u_+^2) + w_3 (kT_- + m_2 u_-^2) + m_1 (kT_+ + m_2 u_+^2)] &= \\ &= \frac{d}{dx} A_3(x) = 0 \\ \frac{d}{dx} [w_1 u (5kT_- + m_1 u_-^2) + w_2 u_+ (5kT_+ + m_1 u_+^2) + w_3 u_- (5kT_- + m_2 u_-^2) + \\ &+ w_4 u_+ (5kT_+ + m_2 u_+^2)] &= \frac{d}{dx} A_4(x) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

i są spełnione w każdym punkcie fali uderzeniowej. Dla uproszczenia oznaczyliśmy  $u_{(-\infty)} = u_-$  i  $T_{(-\infty)} = T_-$ . Całkując te równania otrzymujemy cztery równania algebraiczne postaci  $A_i(x) = d_i$ , gdzie  $d_i$  - stałe całkowania ( $i=1,2,3,4$ ). Stałe  $d_i$  otrzymamy zapisując te równania dla  $x \rightarrow \pm\infty$  i korzystając z warunków brzegowych na nieznanne funkcje  $w_1(x)$ ,  $u_+(x)$  i  $T_+(x)$ . (patrz poprzedni paragraf). Dzieliąc równania:  $A_1(x) = d_1$ ,  $A_2(x) = d_2$  przez  $u_- \cdot n_1(-\infty)$  równanie  $A_3(x) = d_3$  przez  $n_1(-\infty) \cdot kT_-$  i równanie  $A_4(x) = d_4$  przez  $n_1(-\infty)u_-kT_-$ , a następnie korzystając z definicji wielkości bezwymiarowych (dodatek II) otrzymujemy układ czterech równań algebraicznych na sześć nieznanych funkcji  $w_1, w_2, w_3, w_4, u_+$  i  $T_+$ :

$$\begin{cases} w_1 + w_2 u_+ = E_1 \\ w_3 + w_4 u_+ = E_2 \\ w_1(1+C_1) + w_2(T_+ + C_1 u_+^2) + w_3(1+C_2) + w_4(T_+ + C_2 u_+^2) = E_3 \\ w_1(5+C_1) + w_2 u_+(5T_+ + C_1 u_+^2) + w_3(5+C_2) + w_4 u_+(5T_+ + C_2 u_+^2) = E_4 \end{cases} \quad (3)$$

Stałe  $E_1, E_2, E_3$  i  $E_4$  są zdefiniowane w dodatku II.

Korzystając z wypisanych wyżej warunków granicznych (2) i zapisując układ (3) dla  $x \rightarrow -\infty$  i dla  $x \rightarrow +\infty$  otrzymujemy tzw. warunki Rankina-Hugoniota, wyrażające gęstości, prędkość i temperaturę mieszaniny za falą uderzeniową w funkcji odpowiednich wielkości przed falą. Odpowiednie wyrażenia są podane w dodatku II.

Podstawiając  $w_1$  i  $w_3$  wyliczone z dwóch pierwszych równań układu do dwóch następnych, otrzymujemy dwa równania na cztery nieznanne funkcje  $w_2, w_4, u_+$  i  $T_+$ :

$$\begin{cases} -u_+(w_2+w_4) - u_+(C_1w_2+C_2w_4) + T_+(w_2+w_4) + u_+^2(C_1w_2+C_2w_4) = 0 \\ -5(w_2+w_4) - (C_1w_2+C_2w_4) - 5T_+(w_2+w_4) + u_+^2(w_2C_1+w_4C_2) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Jak łatwo się przekonać, zakładając stałość funkcji  $u_+$  i  $T_+$ :  
 $u_+(x) = S_1$  i  $T_+(x) = S_2$ , otrzymujemy układ równań liniowo zależnych. Układ (4) można bowiem wtedy zapisać w postaci macierzowej:

$$\tilde{W} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{gdzie } \tilde{W} = \begin{bmatrix} -S_1 - C_1S_1 + S_2 + C_1S_1^2 & -S_1 - C_2S_1 + S_2 + C_2S_1^2 \\ -5 - C_1 - 5S_2 + C_1S_1^2 & -5 - C_2 - 5S_2 + C_2S_1^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Korzystając z wyprowadzonych w dodatku II warunków Rankina-Hugoniota, otrzymujemy  $\det \tilde{W} = 0$ , a zatem układ równań, otrzymany z (4) przez zastąpienie  $u_+(x)$  przez  $S_1$  i  $T_+(x)$  przez  $S_2$ , jest liniowo zależny. Układ ten jest wtedy równoważny jednemu równaniu, które po przekształceniach algebraicznych i skorzystaniu z warunków Rankina-Hugoniota, można zapisać w postaci

$$w_4(x) = \kappa w_2(x)$$

Wstawiając tę zależność do dwóch pierwszych równań układu (3), otrzymujemy

$$w_3(x) = \kappa w_1(x)$$

Uwzględniając definicje liczbowych gęstości składników (patrz dodatek II),

$$N_1 = w_1 + w_2$$

$$N_2 = w_3 + w_4$$



otrzymujemy zależność

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^1} N_1(x) = \mu N_2(x)$$

czyli jednakowe i pokrywające się profile gęstości obu gazów, a zatem brak separacji składników mieszaniny w fali uderzeniowej.

Reasumując, stwierdzamy, że założenie  $u_+(x) = S_1$  i  $T_+(x) = S_2$  prowadzi do rezultatów, niezgodnych z obserwacjami eksperymentalnymi, w szczególności do braku separacji składników w fali.

W dalszym ciągu będziemy rozwiązywali układ (4) z bieżącego paragrafu w przypadku ogólnym, tzn. gdy  $u_+(x)$  i  $T_+(x)$  są nieznanymi funkcjami położenia. Potraktujmy układ równań (4), jako algebraiczny układ dwóch równań kwadratowych na nieznanne funkcje  $u_+(x)$  i  $T_+(x)$ . Podstawiając

$$\begin{aligned} a(x) &= w_2(x) + w_4(x) \\ b(x) &= C_1 w_2(x) + C_2 w_4(x) \end{aligned} \quad (8)$$

przepisujemy układ (4) w postaci :

$$\begin{cases} bu_+^2 - (a+b)u_+ + aT_+ = 0 \\ (a+b)u_+ + 4aT_+ - 5a - b = 0 \end{cases} \quad (9) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Nietrywialne}$$

rozwiązanie tego układu ma postać :

$$\begin{aligned} u_+ &= \frac{1}{4} \left[ 5 \frac{a}{b} + 1 \right] \\ T_+ &= \frac{1}{4a} \left[ 5a + b + u_+ (a+b) \right] = 1 + \frac{1}{5} \frac{b}{a} \left[ 1 + u_+^2 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Z dwóch pierwszych równań układu (3) otrzymujemy natomiast :

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 - w_2 u_+ \\ w_3 &= \lambda - w_4 u_+ \end{aligned} \quad (11)$$

W ten sposób, korzystając z równań zachowania, wyraziliśmy funkcje  $w_1$ ,  $w_3$ ,  $u_+$  i  $T_+$  za pomocą funkcji  $w_2$  i  $w_4$ .

### §3. Sprowadzenie układu modelowego do układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Podstawiając znalezione w poprzednim paragrafie wyrażenia (10), (11) na funkcje  $w_1$ ,  $w_3$ ,  $u_+$  i  $T_+$  do układu równań modelowych (3) z § 1 obecnego rozdziału, otrzymujemy dwa równania na funkcje  $w_2(x)$  i  $w_4(x)$ , w których występuje prędkość cząstki  $v = (v_x, v_y, v_z)$  jako parametr.

Aby zamknąć ten układ, wystarczy wziąć dwa dodatkowe niezni-  
kające momenty obu równań (momenty odpowiadające równaniom zachowania zostały wykorzystane już wcześniej). Sformułowanie "wziąć  $\bar{\Phi}(v)$  - moment danego równania" oznacza pomnożenie obu stron tego równania przez funkcję prędkości cząstki

$$\bar{\Phi}(v) = C \sum_i v_x^{n_1} v_y^{n_2} v_z^{n_3} \quad (C - \text{stała, } i, n_1, n_2, n_3 \text{ są}$$

liczbami całkowitymi nieujemnymi) i scałkowanie uzyskanego równania po przestrzeni prędkości. W przypadku  $n_1=n_2=n_3=0$ ,  $\bar{\Phi}(v) = C$  i otrzymujemy równanie zachowania masy.

Dla  $\bar{\Phi}(v) = m_1 v_x$ ,  $\bar{\Phi}(v) = m_1 v_y$  i  $\bar{\Phi}(v) = m_1 v_z$  -  
równania zachowania pędu, dla  $\bar{\Phi}(v) = \frac{m_1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$  -  
równanie zachowania energii. Aby uzyskać dwa dodatkowe równania na funkcje  $w_2$  i  $w_4$ , wystarczy wziąć dwa niezni-  
kające momenty równań modelowych, po jednym dla każdego

równania.

Wybór momentów jest w znacznym stopniu arbitralny. W obecnej pracy stosowaliśmy najniższe nieznikające momenty obu równań, tzn.  $v_x^2$  i  $v_x^3$  - momenty. Wybór ten jest podyktowany wynikami otrzymanymi przy badaniu struktury fali uderzeniowej w pojedynczych gazach: okazało się, że wyniki, najbliższe doświadczalnym, są uzyskiwane przy wyborze najniższych nieznikających momentów [30], [34].

Fizycznym argumentem przemawiającym za wyborem niższych momentów jest fakt, że odpowiadają one wydatkowi takich wielkości fizycznych, jak strumień ciepła czy tensor napięć. W obecnej pracy główne wyniki otrzymaliśmy biorąc  $m_1 v_x^2$  - moment pierwszego równania modelowego układu (3) z §1 i  $m_2 v_x^2$  - moment drugiego równania tego układu. Fizycznie oznacza to, że uwzględniliśmy równania na wydatek strumieni energii cieplnej składników mieszaniny w kierunku  $Ox$  rozchodzenia się fali uderzeniowej.

W przypadku pojedynczego gazu wybór momentów można zoptymalizować w sensie minimalizacji błędu kwadratowego [33]. W przypadku mieszaniny gazów sytuacja komplikuje się rachunkowo. W dalszym ciągu omówimy rezultaty otrzymywane przy wyborze ustalonych par momentów. Biorąc  $m_1 v_x^2$  - moment pierwszego równania układu modelowego (3) z §1 oraz  $m_2 v_x^2$  - moment drugiego równania i wprowadzając rozszerzony postulat Mott'a-Smitha (6) z §1 obecnego rozdziału, otrzymujemy,

po wykorzystaniu równań zachowania i wykonaniu całkowań po przestrzeni prędkości, następujący układ nieliniowych równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{df_1^0}{dx} = F_{11}(w_2, w_4) \\ \frac{df_2^0}{dx} = F_{21}(w_2, w_4) \end{cases} \quad (1)$$

gdzie

$$f_1^0 = (1 - w_2 u_+) (C_1 + 3) + w_2 u_+ (C_1 u_+^2 + 3T_+)$$

$$f_2^0 = (\lambda - w_4 u_+) (C_2 + 3) + w_4 u_+ (C_2 u_+^2 + 3T_+)$$

$$F_{11} = -(\tau_{11}^{-1} + \tau_{12}^{-1}) \left[ (1 - w_2 u_+) C_{11} + w_2 (C_1 u_+^2 + T_+) \right] + \\ + \tau_{11}^{-1} N_1 (C_1 U_1^2 + T_1) + \tau_{12}^{-1} N_1 (C_1 U_{12}^2 + T_{12})$$

$$F_{21} = -(\tau_{22}^{-1} + \tau_{21}^{-1}) (\lambda - w_4 u_+) (C_{21} + w_4 (C_2 u_+^2 + T_+)) + \\ + \tau_{22}^{-1} N_2 (C_2 U_2^2 + T_2) + \tau_{21}^{-1} N_2 (C_2 U_{21}^2 + T_{21})$$

gdzie  $C_{11} = C_1 + 1$      $C_{21} = C_2 + 1$ .

Wykonując różniczkowanie funkcji  $f_1^0$  i  $f_2^0$  otrzymujemy, po przekształceniach algebraicznych układ dwóch autonomicznych równań różniczkowych zwyczajnych :

$$\begin{cases} \frac{dw_2}{dx} = P_1(w_2, w_4) \\ \frac{dw_4}{dx} = P_2(w_2, w_4) \end{cases} \quad (2)$$

gdzie

$$P_1 = (F_{11} E_{22} - F_{21} E_{12}) E^{-1}$$

$$P_2 = (F_{21} E_{11} - F_{11} E_{21}) E^{-1}$$

$$E = E_{11} E_{22} - E_{12} E_{21}$$

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= 2C_1 w_2 D_1 u_+^2 + 3w_2 u_+ D_3 + u_+ D_5 + w_2 D_1 D_5 \\
 E_{12} &= 2C_1 w_2 D_2 u_+^2 + 3w_2 u_+ D_4 + w_2 D_2 D_5 \\
 E_{21} &= 2C_2 w_4 D_1 u_+^2 + 3w_4 u_+ D_3 + w_4 D_1 D_6 \\
 E_{22} &= 2C_2 w_4 D_2 u_+^2 + 3w_4 u_+ D_4 + u_+ D_6 + w_4 D_2 D_6
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Funkcje  $D_1(x)$ ,  $D_2(x)$ ,  $D_3(x)$  i  $D_4(x)$  są pochodnymi cząstkowymi funkcji  $u_+(x)$  i  $T_+(x)$ ,  
gdzie

$$u_+(x) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{5a(x)}{b(x)} \right] \tag{3a}$$

$$T_+(x) = 1 + \frac{b(x)}{5a(x)} (1 - u_+^2), :$$

$$a(x) = w_2(x) + w_4(x)$$

$$b(x) = w_2(x)C_1 + w_4(x)C_2 \quad \left[ \text{patrz wzory (10) z §2} \right]$$

$$D_1(x) = \frac{\delta u_+}{\delta w_2} = \frac{5}{4b} \left[ 1 - \frac{C_1 a}{b} \right]$$

$$D_2(x) = \frac{\delta u_+}{\delta w_4} = \frac{5}{4b} \left[ 1 - \frac{C_2 a}{b} \right]$$

$$D_3(x) = \frac{\delta T_+}{\delta w_2} = \frac{1}{5} \left[ (1 - u_+^2) \left( \frac{C_1}{a} - \frac{b}{a^2} \right) - \frac{b}{a} 2u_+ D_1 \right]$$

$$D_4(x) = \frac{\delta T_+}{\delta w_4} = \frac{1}{5} \left[ (1 - u_+^2) \left( \frac{C_2}{a} - \frac{b}{a^2} \right) - \frac{b}{a} 2u_+ D_2 \right]$$

Funkcje  $D_5(x)$  i  $D_6(x)$  są zdefiniowane wzorami :

$$D_5(x) = C_1 u_+^2 + 3T_+ - (C_1 + 3)$$

$$D_6(x) = C_2 u_+^2 + 3T_+ - (C_2 + 3)$$

Warunki brzegowe dla układu (2) mają postać  
dla  $x \rightarrow -\infty$  :

$$\lim w_2(x) = \lim w_4(x) = 0 \tag{5}$$

dla  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\lim w_2(x) = S_1^{-1}$$

$$\lim w_4(x) = \epsilon S_1^{-1}$$

gdzie  $S_1$  jest dane przez warunki Rankina-Hugoniota (dodatek II).

Następny paragraf będzie poświęcony analizie osobliwości równań różniczkowych (2).

#### §4. Analiza osobliwości układu równań różniczkowych.

Rozważmy płaszczyznę fazową  $(w_2, w_4)$  układu (2) z poprzedniego paragrafu. Zdefiniujmy na niej punkty  $\Phi_1 = (0, 0)$  i  $\Phi_2 = (S_1^{-1}, \epsilon S_1^{-1})$ . Zgodnie z wypisanymi w poprzednim paragrafie warunkami brzegowymi, punkty te odpowiadają stronom stacjonarnym odpowiednio "w  $-\infty$ " ("przed falą") i "w  $+\infty$ " ("za falą"). W stanach stacjonarnych znikają gradienty wszystkich funkcji makroskopowych. W szczególności dla  $x \rightarrow \pm\infty$  otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{dw_2}{dx} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{dw_4}{dx} = 0$$

o czym można się przekonać bezpośrednio, obliczając prawe strony równań układu (2) w punktach  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$ . Otrzymujemy

$$P_1(0, 0) = P_2(0, 0) = 0 \tag{1}$$

$$P_1(S_1^{-1}, \epsilon S_1^{-1}) = P_2(S_1^{-1}, \epsilon S_1^{-1}) = 0$$

W rachunkach wykorzystaliśmy graniczne wartości funkcji :

$N_1, U_1, T_1, U_{1j}, T_{1j}$  przed i za falą (dodatek II).

Z powyższych rozważań wynika, że punkty  $\Phi_1 = (0,0)$  i  $\Phi_2 = (S_1^{-1}, \epsilon S_1^{-1})$  są punktami osobliwymi układu równań (2) §3 na płaszczyźnie fazowej  $(w_2, w_4)$ . W dalszym ciągu przeprowadzimy analizę tych punktów osobliwych.

### I. Charakter punktu osobliwego $\Phi_2$

Rozwijając prawe strony równań układu (2) §3 w szereg Taylora wokół punktu  $\Phi_2$ , definiując  $X_1(x) = w_2(x) - S_1^{-1}$

$$X_2(x) = w_4(x) - \epsilon S_1^{-1}$$

i wykorzystując równości  $P_1(S_1^{-1}, \epsilon S_1^{-1}) = P_2(S_1^{-1}, \epsilon S_1^{-1}) = 0$ , otrzymujemy, z dokładnością do wyrażen pierwszego rzędu, równania, które w formie macierzowej mają postać :

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^+ & P_{12}^+ \\ P_{21}^+ & P_{22}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Współczynniki  $P_{ij}^+$  macierzy zlinearyzowanego układu równań są zdefiniowane wzorami :

$$P_{11}^+ = \frac{1}{E^+} (\delta_{11}^+ E_{22}^+ - \delta_{21}^+ E_{12}^+)$$

$$P_{12}^+ = \frac{1}{E^+} (\delta_{12}^+ E_{22}^+ - \delta_{22}^+ E_{12}^+)$$

$$P_{21}^+ = \frac{1}{E^+} (\delta_{21}^+ E_{11}^+ - \delta_{11}^+ E_{21}^+)$$

$$P_{22}^+ = \frac{1}{E^+} (\delta_{22}^+ E_{11}^+ - \delta_{12}^+ E_{21}^+)$$

gdzie  $\delta_{ij}^+$  są pochodnymi funkcji  $F_{11}$  i  $F_{21}$  w punkcie  $\Phi_2$  :

$$\delta_{11}^+ = \left. \frac{\delta F_{11}}{\delta w_2} \right|_{\Phi_2} ; \quad \delta_{12}^+ = \left. \frac{\delta F_{11}}{\delta w_4} \right|_{\Phi_2}$$

$$\delta_{21}^+ = \left. \frac{\delta P_{21}}{\delta w_2} \right|_{\Phi_2} \quad \delta_{22}^+ = \left. \frac{\delta P_{21}}{\delta w_4} \right|_{\Phi_2}$$

$E_{ij}^+$  są wartościami zdefiniowanych w poprzednim paragrafie funkcji  $E_{ij}$  [ wzory (3) §3 ] w punkcie  $\Phi_2$  :

$$E_{ij}^+ = E_{ij} \Big|_{\Phi_2}$$

$$E^+ = E_{11}^+ E_{22}^+ - E_{12}^+ E_{21}^+$$

Jawne wyrażenia na współczynniki  $\delta_{ij}^+$  i  $E_{ij}^+$  są podane w dodatku III.

W ogólnym przypadku są to funkcje wszystkich parametrów fizycznych występujących w zagadnieniu :  $m, \bar{M}, \kappa, \sigma_1$  i  $\sigma_2$ .

Rozważmy macierz  $P^+ = \begin{bmatrix} P_{11}^+ & P_{12}^+ \\ P_{21}^+ & P_{22}^+ \end{bmatrix}$  zlineryzowanego

układu równań różniczkowych (2).

Aby zbadać charakter osobliwości w punkcie  $\Phi_2$ , należy rozwiązać równanie charakterystyczne :

$$\det [ P^+ - \lambda I ] = 0 \quad \text{gdzie} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie ma postać :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ P_{11}^+ + P_{22}^+ \pm \left[ (P_{11}^+ - P_{22}^+)^2 + 4P_{12}^+ P_{21}^+ \right]^{1/2} \right] \quad (3)$$

gdzie znak + odnosi się do  $\lambda_1$

znak - odnosi się do  $\lambda_2$

Biorąc pod uwagę wyrażenia na  $P_{ij}^+$  stwierdzamy, że wartości własne macierzy  $P^+$  zależą w ogólności od stosunku mas atomowych  $m$ , stosunku gęstości liczbowych przed falą  $\kappa$ , liczby



Macha  $M$  i dwóch stosunków przekrojów czynnych na zderzenia :

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}} \quad \text{i} \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}, \quad (\text{gdzie } \sigma_{ij} \text{ jest przekrojem}$$

czynnym na zderzenia typu  $i$ - $j$ , a zatem :

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(m, M, \kappa, \sigma_1, \sigma_2);$$

Charakter punktu osobliwego  $\Phi_2$  zależy więc w ogólności od tych wszystkich parametrów.

Jeżeli  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  lub  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ , to punkt  $\Phi_2$  jest siodłem. Jeżeli  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są jednego znaku, to punkt  $\Phi_2$  jest węzłem.

W obecnej pracy charakter osobliwości punktu  $\Phi_2$  został zbadany w szerokim przedziale parametrów fizycznych (patrz rozdział V).

Z analizy osobliwości przedstawionej w rozdziale V, wynika, że: 1) charakter osobliwości nie zależy od stosunku przekrojów czynnych  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . Fizycznie odpowiada to stwierdzeniu, że stan stacjonarny za falą nie zależy od częstości <sup>zderzeń</sup> (a więc i od przekrojów czynnych na zderzenia międzycząstkowe), a jedynie od  $M$ ,  $m$  i  $\kappa$ . Z analizy wielkości  $u_{(+\infty)}$ ,  $T_{(+\infty)}$ ,  $n_{1(-\infty)}$  i  $n_{2(+\infty)}$  danych przez warunki Rankina-Hugoniota wynika, że zależą one jedynie od odpowiednich wartości przed falą oraz od liczby Macha i stosunku mas gazów.

2) Dla ustalonej wartości  $M$  zachodzi zmiana charakteru punktu osobliwego. Na płaszczyźnie  $(\kappa, m)$  krzywa oddzielająca obszary o różnym charakterze punktu osobliwego  $\Phi_2$  ma postać hiperboli /patrz str 129 /.

II. Charakter punktu osobliwego  $\Phi_1 = (0,0)$ .

W tym przypadku sytuacja jest bardziej skomplikowana.

Przy linearyzacji układu równań różniczkowych (2) §3, wokół

$\Phi_1$  zachodzi konieczność obliczenia granicy

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{w_4(x)}{w_2(x)}$  [ iloraz  $\frac{w_4(x)}{w_2(x)}$  występuje na przykład

w funkcjach  $u_+(x)$  i  $T_+(x)$  - patrz wzory (10) w §2 ].

Wartości tej granicy nie znamy, gdyż  $\lim_{x \rightarrow -\infty} w_4(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} w_2(x) = 0$ .

Niech

$$d = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{w_4(x)}{w_2(x)} \quad (4)$$

Linearyzując układ (2) §3 wokół punktu  $\Phi_1$ , otrzymujemy,

z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu, następujący układ równań :

$$\begin{bmatrix} \frac{dw_2}{dx} \\ \frac{dw_4}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^- & P_{12}^- \\ P_{21}^- & P_{22}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

gdzie

$$P_{11}^- = \frac{1}{E^-} (\delta_{11}^- E_{22}^- - \delta_{21}^- E_{12}^-)$$

$$P_{12}^- = \frac{1}{E^-} (\delta_{12}^- E_{22}^- - \delta_{22}^- E_{12}^-)$$

$$P_{21}^- = \frac{1}{E^-} (\delta_{21}^- E_{11}^- - \delta_{11}^- E_{21}^-)$$

$$P_{22}^- = \frac{1}{E^-} (\delta_{22}^- E_{11}^- - \delta_{12}^- E_{21}^-)$$

$$E^- = E_{11}^- E_{22}^- - E_{12}^- E_{21}^-$$

Współczynniki  $\delta_{ij}^-$  są pochodnymi funkcji  $F_{11}$  i  $F_{21}$  w punkcie  $\Phi_1$  :

$$\delta_{11}^- = \left. \frac{\delta P_{14}}{\delta w_2} \right|_{\Phi_1} \quad \delta_{12}^- = \left. \frac{\delta P_{11}}{\delta w_4} \right|_{\Phi_1}$$

$$\delta_{21}^- = \left. \frac{\delta P_{24}}{\delta w_2} \right|_{\Phi_1} \quad \delta_{22}^- = \left. \frac{\delta P_{21}}{\delta w_4} \right|_{\Phi_1}$$

Współczynniki  $E_{ij}^-$  są granicami zdefiniowanych w §3 funkcji  $E_{ij}$  dla  $x \rightarrow -\infty$  [wzór (3) §3]. Jawne postacie współczynników  $E_{ij}^-$  i  $\delta_{ij}^-$  są wypisane w dodatku III. Wynika z nich, że współczynniki  $P_{ij}^-$  macierzy zlinearyzowanego układu równań (5) zależą od parametrów fizycznych zagadnienia:  $m$ ,  $M$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , oraz od wartości  $d$ , określającej kąt nachylenia stycznej do szukanej krzywej całkowej w punkcie  $\Phi_1$ .

Podamy metodę obliczania wartości  $d$ .

Rozważmy zlinearyzowany układ równań (5). Z algebry wiadomo, że istnieje taka nieosobliwa transformacja  $\hat{S}$  układu współrzędnych  $(w_2, w_4)$ :

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix} = \hat{S} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_4 \end{bmatrix},$$

że w nowych współrzędnych układ ten przybiera postać diagonalną:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^- & 0 \\ 0 & \lambda_2^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

gdzie  $\lambda_1^-$  i  $\lambda_2^-$  są <sup>własnymi</sup> wartościami macierzy  $P_{ij}^-$ :

$$\lambda_{1,2}^- = \frac{1}{2} \left[ P_{11}^- + P_{22}^- \pm \left[ (P_{11}^- - P_{22}^-)^2 + 4P_{12}^- P_{21}^- \right]^{1/2} \right]$$

przy czym znak  $+$  odnosi się do  $\lambda_1^-$ , a znak  $-$  do  $\lambda_2^-$ .

Założmy, że dla danego układu parametrów fizycznych  $m$ ,  $M$ ,  $\mu$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , punkt  $\Phi_1 = (0,0)$  jest punktem siódkowym, tzn.

$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ . Proste  $v_2 = 0$  oraz  $v_4 = 0$  odpowiadają na płaszczyźnie  $(w_2, w_4)$  prostym o równaniach odpowiednio :

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & s_{11}w_2 + s_{12}w_4 = 0 \\ \text{ii)} \quad & s_{21}w_2 + s_{22}w_4 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Proste te określają początkowe nachylenie krzywych całkowych w punkcie  $\Phi_1$ . (przy czym z warunków fizycznych wynika, że należy wybrać krzywą całkową skierowaną do I ćwiartki układu współrzędnych  $w_2, w_4$ ).

Współczynniki macierzy  $[s_{ij}] = \hat{S}$  można wyrazić przez współczynniki macierzy  $[P_{ij}] = \hat{P}$  zlinearyzowanego układu równań (5).

Mamy bowiem :

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix} = \hat{S} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_4 \end{bmatrix}, \text{ a zatem } \begin{bmatrix} v'_2 \\ v'_4 \end{bmatrix} = \hat{S} \begin{bmatrix} w'_2 \\ w'_4 \end{bmatrix} \text{ gdzie " " ozna-}$$

cza różniczkowanie po zmiennej  $x$  ; jednocześnie

$$\begin{bmatrix} v'_2 \\ v'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^- & 0 \\ 0 & \lambda_2^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix} \text{ oraz } \begin{bmatrix} w'_2 \\ w'_4 \end{bmatrix} = \hat{P} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

Wykorzystując powyższe równości otrzymujemy równanie macierzowe :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^- & 0 \\ 0 & \lambda_2^- \end{bmatrix} \hat{S} = \hat{S} \hat{P}$$

Rozwiązując to równanie, otrzymujemy : (zakładając  $s_{12} \neq 0$  i  $s_{22} \neq 0$ ) :

$$\frac{s_{11}}{s_{12}} = - \frac{P_{21}^-}{P_{11}^- - \lambda_1^-} \left( = - \frac{P_{22}^- - \lambda_1^-}{P_{12}^-} \right)$$

$$\frac{B_{21}}{B_{22}} = - \frac{P_{21}^-}{P_{11}^- - \lambda_2^-} \left( = - \frac{P_{22}^- - \lambda_2^-}{P_{12}^-} \right)$$

Podstawiając te równości do równań (6), otrzymujemy dwa kierunki własne w przestrzeni fazowej  $(w_2, w_4)$ , określające dwa możliwe nachylenia krzywej całkowej w punkcie  $\Phi_1$  :

$$\frac{w_4}{w_2} = \frac{P_{21}^-}{P_{11}^- - \lambda_1^-} = \frac{P_{22}^- - \lambda_1^-}{P_{12}^-} \quad (7)$$

$$\frac{w_4}{w_2} = \frac{P_{21}^-}{P_{11}^- - \lambda_2^-} = \frac{P_{22}^- - \lambda_2^-}{P_{12}^-}$$

Jeden z tych kierunków odpowiada rozwiązaniom wchodzącym do  $\Phi_1$ , a drugi - rozwiązaniom wychodzącym z  $\Phi_1$ .

Jednocześnie, mamy z definicji (2) równość  $\left. \frac{w_4}{w_2} \right|_{\Phi_1} = d$ .

Porównując (7) z (4) otrzymujemy algebraiczne równanie na nieznaną parametr  $d$  :

$$d = \frac{P_{22}^-(d) - \lambda_1^-(d)}{P_{12}^-(d)} \quad (8)$$

lub

$$d = \frac{P_{22}^-(d) - \lambda_2^-(d)}{P_{12}^-(d)}$$

Równania te zostały rozwiązane numerycznie. Okazało się, że gdy punkt osobliwy  $\Phi_2$  był węzłem, równania (8) miały rozwiązania rzeczywiste. Z fizycznych warunków zagadnienia należy wybrać rozwiązanie (tzn. wartość  $d$ ) odpowiadające położeniu krzywej całkowej wyjściowego układu równań (2) z §3, leżącej w pierwszej ćwiartce układu  $(w_2, w_4)$ . W ten

sposób znajdujemy początkowy kierunek krzywej całkowej w przypadku, gdy siodeł jest punkt  $\Phi_1$ . W przypadku, gdy siodeł jest punkt  $\Phi_2$ , postępujemy zgodnie z procedurą opisaną w poprzednim punkcie, znajdując kierunek krzywej całkowej w punkcie  $\Phi_2$  bezpośrednio z wzorów (1).

Reasumując, w bieżącym paragrafie przeprowadzono analizę osobliwości układu równań różniczkowych (2) §3. Stwierdzono istnienie dwóch punktów osobliwych, odpowiadających stanom stacjonarnym przed i za falą uderzeniową. Przeanalizowano charakter punktów osobliwych układu i ich zależność od parametrów fizycznych występujących w zadaniu.

Rozwiązaniem układu (2) z warunkami brzegowymi (5) §3, jest krzywa całkowa łącząca punkty osobliwe  $\Phi_1 = (0,0)$  i  $\Phi_2 = (S_1^{-1}, \mathcal{A}S_1^{-1})$ . Układ równań (2) został rozwiązany numerycznie (patrz §1 rozdział V). Krzywa całkowa łącząca punkty osobliwe odpowiada fali uderzeniowej. Mając daną zależność  $w_4(w_2)$  na krzywej całkowej, znajdujemy funkcje rozkładu gazów w fali uderzeniowej, a stąd - szukane makroskopowe charakterystyki gazów, w których rozchodzi się fala uderzeniowa. Omówienie procedury numerycznej i wyniki są przedstawione w rozdziale V.

FALE UDERZENIOWE W MIESZANINACH GAZÓW  
JEDNOATOMOWYCH I DWUATOMOWYCH

Rozdział IV

§1. Uwagi ogólne

W bieżącym rozdziale zajmiemy się badaniem struktury fali uderzeniowej w mieszaninach gazów jednoatomowych i dwuatomowych.

Z doświadczeń wynika, że struktura fali uderzeniowej ulega istotnym zmianom w przypadku istnienia wewnętrznych stopni swobody (w porównaniu ze strukturą fali w gazach jednoatomowych). Ograniczymy się do temperatur od kilkuset do około tysiąca stopni Kelvina, oraz do ciśnień rzędu kilku atmosfer.

W tym zakresie czasu relaksacji oscylacyjnej, czasu dysocjacji i jonizacji są co najmniej kilka rzędów wielkości dłuższe od czasów relaksacji rotacyjnej i translacyjnej. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do gazów z wzbudzonymi jedynie rotacyjnymi stopniami swobody, traktując wszystkie inne wewnętrzne stopnie swobody (oscylacyjne, jonizacyjne, reakcje chemiczne) jako zamrożone. Oczekuje się, że obecność rotacyjnych stopni swobody będzie miała istotny wpływ na różne makroskopowe charakterystyki fali uderzeniowej, w szczególności na przebieg temperatur w fali na wielkość separacji poszczególnych składników i występowanie tzw. strefy relaksacyjnej w fali uderzeniowej.

Założmy, że mieszanina składa się z gazu jednoatomowego, który opisujemy jednocząstkową funkcją rozkładu  $F_1$  i dwuatomowego, opisywanego za pomocą funkcji rozkładu  $F_2^1$ .

$F_2^1(x, v)$  oznacza gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząsteczki gazu dwuatomowego o prędkości  $v$  wokół punktu  $x \in R^3$ , w stanie opisanym kwantową liczbą rotacyjną  $l$ , o energii rotacyjnej  $e_l$ :

$$e_l = \frac{h^2}{8\pi I} l(l+1)$$

gdzie  $h$  jest stałą Plancka, a  $I$  - momentem bezwładności cząsteczki, traktowanej jako sztywny rotator dwuatomowy.

W przybliżeniu quasiklasycznym zakładamy, że  $e_l$  jest zmienną ciągłą, równą  $e$ , tzn. że odległość pomiędzy kolejnymi poziomami energetycznymi jest mała w porównaniu z  $kT$ , gdzie  $T$  jest temperaturą gazu dwuatomowego. Sumowanie po dyskretnych poziomach energetycznych zastępujemy całkowaniem po zmiennej ciągłej  $e$ . Otrzymujemy w ten sposób funkcję rozkładu cząsteczek dwuatomowych zależną dodatkowo od argumentu  $e$  gdzie  $e \in \langle 0, \infty \rangle$ :  $F_2 = F_2(x, v, e)$ .

Odpowiednie definicje szukanych wielkości makroskopowych będą podane niżej.

Taką postać funkcji rozkładu można też uzyskać na gruncie mechaniki klasycznej, dokonując odpowiednich przybliżeń. W mechanice klasycznej rotacyjny stan liniowej cząsteczki dwuatomowej o masie  $m_2$  i momencie bezwładności  $I$  jest charakteryzowany przez trzy składowe momentu pędu  $\vec{M}$ :

$\vec{M} = (M_x, M_y, M_z)$  i kąt  $\Psi$ , opisujący kierunek osi cząsteczki



w płaszczyźnie prostopadłej do  $\bar{M}$ . W ruchu swobodnym  $\Psi$  zmienia się liniowo. Okres zmiany  $\Psi$ ,  $T_\Psi$ , można oszacować w następujący sposób. W stanie równowagi, zgodnie z zasadą ekwipartycji energii, średnia energia przypadająca na translacyjny i rotacyjny stopień swobody, są jednakowe. Z dokładnością do mnożnika liczbowego można więc napisać  $m_2 \langle v \rangle^2 \sim I \langle \omega \rangle^2$ , gdzie  $\omega$  jest prędkością kątową. Jeżeli  $\delta$  jest liniowym wymiarem cząsteczki, to  $I \sim m_2 \delta^2$ , a zatem  $\langle \omega \rangle \sim \delta^{-1} \langle v \rangle$ ;  $T = \frac{2\pi}{\langle \omega \rangle} \sim \frac{\delta}{\langle v \rangle}$ , a więc  $T_\Psi$  jest jednocześnie czasem, w którym cząstka o prędkości  $\langle v \rangle$  przelatuje odległość  $\delta$ , czyli czasem rzędu czasu zderzenia (zakładamy, że prawdopodobieństwo zderzeń wielokrotnych jest zaniedbywalne). Ponieważ funkcja rozkładu praktycznie nie ulega zmianie w czasie rzędu czasu zderzenia, więc można ją traktować jako niezależną od  $\Psi$ ; tak więc  $\tilde{F}_2 = \tilde{F}_2(x, \bar{v}, \bar{M})$ . Funkcja używana w dalszych rozważaniach jest to funkcja  $\tilde{F}_2$  uśredniona po kącie bryłowym:

$$F_2(x, v, M) = \frac{1}{4\pi} \int \tilde{F}_2(x, \bar{v}, \bar{M}) d\Omega$$

Zamiast zmiennej  $M$  będziemy używali  $e$  - energii rotacyjnej w układzie środka masy cząsteczki:  $e = \frac{M^2}{2I}$ . Tak więc ostatecznie  $F_2 = F_2(x, v, e)$  jest gęstością prawdopodobieństwa znalezienia cząsteczki dwuatomowej o energii rotacyjnej  $e$  w punkcie  $(x, v)$  przestrzeni fazowej. Odpowiednie wielkości makroskopowe przy przejściu od zmiennej  $e_1$  do  $e$  wyrażają się następującymi wzorami:

Gęstość:

$$N_2(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_2^l dv \longrightarrow \int_0^{\infty} de \int_{-\infty}^{\infty} F_2 dv$$

Frędkość hydrodynamiczna

$$U_2(x) = \frac{1}{N_2(x)} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_2^l v dv \rightarrow \frac{1}{N_2(x)} \int_0^{\infty} de \int_{-\infty}^{\infty} F_2 v dv$$

Temperatura translacyjna

$$T_2(x) = \frac{1}{3KN_2(x)} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_2^l m_2 (v-U_2)^2 dv \rightarrow \frac{1}{3KN_2(x)} \int_0^{\infty} de \int_{-\infty}^{\infty} F_2 m_2 (v-U_2)^2 dv$$

Temperatura rotacyjna

$$T_R(x) = \frac{1}{KN_2(x)} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_2^l e_1 dv \rightarrow \frac{1}{KN_2(x)} \int_0^{\infty} de \int_{-\infty}^{\infty} F_2 e dv$$

gdzie  $F_2 = F_2(x, v, e)$  jest gęstością prawdopodobieństwa znalezienia cząsteczki dwuatomowej o energii rotacyjnej  $e$  w punkcie  $(x, v)$  odpowiedniej przestrzeni fazowej.

## §2. Wyprowadzenie układu równań modelowych.

Podstawowym równaniem na funkcję rozkładu  $F_2$  jest równanie Wang-Chang-Uhlenbecka [54]. Obecność wewnętrznych stopni swobody istotnie komplikuje odpowiednie operatory zderzeniowe. Wzrasta liczba zmiennych (a więc i krotność całek) oraz dochodzą nieznanne przekroje czynne na zderzenia nieelastyczne [62] [74]. Do chwili obecnej dane o przekrojach czynnych na zderzenia nieelastyczne są niepełne i mają głównie charakter fenomenologiczny [50], [62], [57]. Z tego powodu w przybliżeniu klasycznym <sup>postulujemy</sup> następujący układ równań modelowych:

$$\begin{cases} \frac{DF_1}{Dt} = \tau_{11}^{-1} (M_{11} - F_1) + \tau_{12}^{-1} (M_{12} - F_1) \\ \frac{DF_2}{Dt} = \tau_{22el}^{-1} (M_{22}^{el} - F_2) + \tau_{22in}^{-1} (M_{22}^{in} - F_2) + \tau_{21}^{-1} (M_{21} - F_2) \end{cases} \quad // /$$

gdzie

$$N_{11} = N_1 (2\pi R_1 T_1)^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v-U_1)^2}{2R_1 T_1} \right]$$

$$N_{12} = N_1 (2\pi R_1 T_{12})^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v-U_{12})^2}{2R_1 T_{12}} \right]$$

$$N_{22}^{el} = N_2 (2\pi R_2 T_2)^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v-U_2)^2}{2R_2 T_2} \right] \cdot \frac{1}{kT_R} \cdot \exp \left[ -\frac{e}{kT_R} \right]$$

$$N_{22}^{in} = N_2 (2\pi R_2 T_c)^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v-U_2)^2}{2R_2 T_c} \right] \cdot \frac{1}{kT_c} \exp \left[ -\frac{e}{kT_c} \right]$$

$$N_{21} = N_2 (2\pi R_2 T_{21})^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(v-U_{21})^2}{2R_2 T_{21}} \right] \cdot \frac{1}{kT_{21}} \exp \left[ -\frac{e}{kT_{21}} \right]$$

$$R_1 = \frac{k}{m_1}, \quad R_2 = \frac{k}{m_2}, \quad \frac{5}{2} kT_c = \frac{3}{2} kT_2 + kT_R.$$

Wielkości makroskopowe  $N_1, N_2, U_1, U_2, T_1, T_2, T_R$  są funkcjami zmiennej  $x$ -położenia w fali uderzeniowej.

Wielkości  $U_{12}, U_{21}, T_{12}, T_{21}$  i  $T_R$  są nieznanymi funkcjami tzw. parametrami krzyżowymi, które należy wyznaczyć z dodatkowych warunków.

Czynnik  $\frac{1}{kT(x)} \exp \left[ -\frac{e}{kT(x)} \right]$  jest klasycznym rozkładem Maxwella-Boltzmann'a energii wewnętrznej dla gazu w równowadze lokalnej, gdzie  $T(x)$  jest lokalną temperaturą ośrodka.

### §3. Specyfikacja parametrów zderzeniowych.

#### a) Wyznaczenie $U_{12}$ i $U_{21}$ .

Równanie na funkcje  $U_{12}$  i  $U_{21}$  otrzymujemy z zasady zachowania całkowitego pędu w mieszaninie. Ma ona w rozważanym przypadku (gazy 1-2) taką samą postać, jak dla mieszaniny gazów jednoatomowych. Powtarzając rozumowanie

przeprowadzone w §1 rozdziału II otrzymujemy, mnożąc pierwsze równanie układu modelowego (7) z poprzedniego paragrafu przez  $\varphi_1(v) = m_1 v$ , drugie równanie przez  $\varphi_2(v) = m_2 v$ , całkując po przestrzeni prędkości (i przestrzeni wszystkich dopuszczalnych energii rotacyjnych w drugim równaniu) :

$$\int J_{11} \varphi_1 dv + \int J_{12} \varphi_1 dv + \iint J_{22}^{el} \varphi_2 dv de + \iint J_{22}^{in} \varphi_2 dv de + \iint J_{21} \varphi_2 dv de = 0 \quad (1)$$

Podstawiając jawne wyrażenia na modelowe operatory zderzeniowe  $J_{ij}$ , wyprowadzone w poprzednim paragrafie, otrzymujemy równanie, wiążące dwie nieznanne funkcje  $U_{12}$  i  $U_{21}$  :

$$N_1 \tau_{12}^{-1} m_1 (U_{12} - U_1) + N_2 \tau_{21}^{-1} m_2 (U_{21} - U_2) = 0 \quad (2)$$

Równanie (2) jest takie samo, jak dla mieszaniny gazów jednoatomowych [patrz równanie (1) z dodatku I] .

Drugie równanie na parametry krzyżowe  $U_{12}$  i  $U_{21}$  otrzymujemy porównując równanie na relaksację różnicy prędkości hydrodynamicznych, otrzymane z równań modelowych (7), z równaniem na relaksację różnicy prędkości hydrodynamicznych, otrzymanym z pełnego równania Boltzmann'a. Ponieważ otrzymane wyrażenia są identyczne jak w przypadku mieszaniny gazów jednoatomowych, więc nie będziemy ich tu przytaczać ;

Odpowiednie równania są rozwiązane w dodatku I [równania (3) i (5)] .

b) Wyznaczenie  $T_{12}$  i  $T_{21}$  .

Równanie na parametry krzyżowe  $T_{12}$  i  $T_{21}$  otrzymamy z równania zachowania energii dla mieszaniny gazów z rotacyjnym stopniem swobody. Aby otrzymać to równanie, mnożymy pierwsze równanie układu modelowego (7) z §2 przez

$\varphi_1(v) = \frac{m_1 v^2}{2}$  i całkujemy po  $dv$ , drugie równanie przez

$\varphi_2(v, e) = \frac{m_2 v^2}{2} + e$  i całkujemy po  $dv$  i  $de$ . Uzyskane

równania momentów dodajemy stronami (analogicznie jak w §1 rozdziału II dla mieszaniny gazów jednoatomowych) otrzymując :

$$\int J_{11} \varphi_1 dv + \int J_{12} \varphi_1 dv + \iint J_{22}^{el} \varphi_2 dvde + \iint J_{22}^{in} \varphi_2 dvde + \iint J_{21} \varphi_2 dvde = 0$$

Po podstawieniu wyrażeń na modelowe operatory zderzeniowe  $J_{ij}$  równanie (3) przybiera postać :

$$N_1 \tau_{12}^{-1} (3T_{12} - 3T_1 + C_1 U_{12}^2 - C_1 U_1^2) + N_2 \tau_{21}^{-1} (5T_{21} - 3T_2 - 2T_R + C_2 U_{21}^2 - C_2 U_2^2) = 0$$

Równanie (4) określa zależność pomiędzy funkcjami  $T_{12}$  i  $T_{21}$ . Ze względu na złożoność operatorów zderzeniowych w równaniach Wang-Chang-Uhlenbecka, nie udaje się efektywnie modelować równań relaksacji różnicy temperatur, gdyż nie mamy przekrojów czynnych na zderzenia nieelastyczne.

Zakładając, że rotacyjne stopnie swobody słabo wpływają na funkcję rozkładu gazu jednoatomowego, podstawimy  $T_{12} = T_{12}^0$ , gdzie  $T_{12}^0$  oznacza wyrażenie na parametr krzyżowy  $T_{12}$  otrzymane w przypadku mieszaniny gazów jednoatomowych (dodatek I). Wtedy  $T_{21}$  można obliczyć z równania zachowania energii (4):

$$T_{21} = \frac{1}{5} (3T_2 + 2T_R - C_2 U_{21}^2 + C_2 U_2^2 - m^B (3T_{12} - 3T_1 + C_1 U_{12}^2 - C_1 U_1^2)) \quad (5)$$

Przybliżenie to może modelować przypadek, gdy gaz dwuatomowy jest gazem lekkim i można stosować klasyczny model sztywnego rotatora.

### c) Wyznaczanie czasów relaksacji.

Rozważmy zderzenia pomiędzy cząsteczkami gazu dwuatomowego.

Niech  $\tau_{22}^{el}$  oznacza czas relaksacji w zderzeniach elastycz-

nych typu 2-2.

$\tau_{22}^{in}$  oznacza czas relaksacji w zderzeniach nieelastycznych typu 2-2.

Zdefiniujemy parametr  $Z = \frac{\tau_{22}^{in}}{\tau_{22}^{el}}$

Duże wartości  $Z$  ( $\tau_{22}^{in} \gg \tau_{22}^{el}$ ) odpowiadają powolnemu przekazowi energii od translacyjnych do rotacyjnych stopni swobody. Wartości  $Z$  porównywalne z jednością odpowiadają łatwemu przekazowi energii.

W pierwszym przypadku liczba zderzeń potrzebna to tego, aby temperatura rotacyjna osiągnęła wartość równowagową, jest duża. W drugim przypadku liczba ta jest rzędu liczby zderzeń potrzebnych do osiągnięcia równowagi w gazie jednoatomowym.

Parametr  $Z$  będziemy nazywać liczbą rotacyjną. Charakteryzuje ona prędkość relaksacji energii w wyniku zderzeń pomiędzy cząstkami dwuatomowymi. W prezentowanym modelu liczba rotacyjna jest parametrem, którego wartości zależą od rodzaju gazu. Będziemy je przyjmować na podstawie wyników pracy eksperymentalnych [45], [57], [62].

Niech  $\nu_{22}$  oznacza częstość zderzeń (dowolnego rodzaju) pomiędzy cząstkami gazu dwuatomowego. Oznaczając

$\nu_{22}^{el}$  - częstość zderzeń elastycznych

$\nu_{22}^{in}$  - częstość zderzeń nieelastycznych

można napisać :

$$\nu_{22} = \nu_{22}^{el} + \nu_{22}^{in} = \frac{1}{\tau_{22}^{el}} + \frac{1}{\tau_{22}^{in}}$$

Korzystając z definicji  $Z$ , otrzymujemy ostatecznie nastę-

pujące wyrażenia na czasy relaksacji w zderzeniach elastycznych i nieelastycznych  $\downarrow$

$$\frac{1}{\tau_{22}^{el}} = \frac{Z}{Z+1} \quad \vee \quad 22$$

$$\frac{1}{\tau_{22}^{in}} = \frac{1}{Z+1} \quad \vee \quad 22$$

Czasy relaksacji w zderzeniach krzyżowych wyznaczmy analogicznie jak w przypadku mieszaniny gazów jednoatomowych. Odpowiednie wyrażenia są wypisane w §1 rozdziału III [wzory (5)].

#### §4. Metody rozwiązywania układu równań modelowych.

W przypadku mieszaniny gazów, z których jeden jest dwuatomowy, postulowana postać rozwiązania układu równań modelowych (7) z §2 powinna uwzględniać istnienie dodatkowego stopnia swobody dla funkcji rozkładu cząstek dwuatomowych  $F_2$ .

W obecnym paragrafie zaproponujemy metodę rozwiązania układu równań modelowych (7) §2 z warunkami brzegowymi odpowiadającymi płaskiej fali uderzeniowej, rozchodzącej się wzdłuż osi  $Ox$  trójwymiarowego układu współrzędnych. Oznacza to, że funkcje rozkładu  $F_1$  i  $F_2$  są dla  $x \rightarrow \pm\infty$  równe odpowiednim funkcjom rozkładu Maxwella-Boltzmana, skupionym wokół prędkości hydrodynamicznych przed i za falą. Będziemy poszukiwać rozwiązania modelowego układu równań (7) z §2 w postaci

$$F_1(x, v) = w_1(x)f_{1-}(v) + w_2(x)f_{1+}(x, v)$$

$$F_2(x, v, e) = w_3(x) f_{2-}(v) g_-^*(x, e) + w_4(x) f_{2+}(x, v) g_+(x, e) \quad (1)$$

gdzie : funkcje  $f_{1-}(v)$  i  $f_{2-}(v)$  są funkcjami rozkładu Maxwella, odpowiadającymi stanowi stacjonarnemu przed falą :

$$f_{i-}(v) = \left[ 2\pi R_i T_{(-\infty)} \right]^{-3/2} \exp \left[ - \frac{1}{2R_i T_{(-\infty)}} (v - u_{(-\infty)})^2 \right] \quad i=1,2 \quad (2)$$

funkcje  $f_{1+}(x, v)$  i  $f_{2+}(x, v)$  są lokalnymi funkcjami rozkładu Maxwella, skupionymi wokół nieznanymi funkcji  $u_+(x)$  i  $T_+(x)$  i w granicy dla  $x \rightarrow +\infty$  dążącymi do funkcji rozkładu Maxwella, odpowiadających stanowi stacjonarnemu za falą ;

$$f_{i+}(x, v) = \left[ 2\pi R_i T_+(x) \right]^{-3/2} \exp \left[ - \frac{1}{2R_i T_+(x)} (v - u_+(x))^2 \right] \quad (3)$$

przy czym

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_+(x) = S_1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T_+(x) = S_2 ,$$

gdzie  $S_1$  i  $S_2$  są odpowiednio bezwymiarową prędkością i temperaturą mieszaniny gazów za falą uderzeniową.  $S_1$  i  $S_2$  obliczamy z warunków Rankina-Hugoniota dla mieszaniny gazu jednoatomowego i dwuatomowego, wyprowadzonych w dodatku II;  $g_+(x, e)$  jest lokalną funkcją rozkładu Boltzmana energii rotacyjnej w gazie o temperaturze wewnętrznej  $T_+(x)$  :

$$g_+(x, e) = \frac{1}{kT_+(x)} \exp \left[ - \frac{e}{kT_+(x)} \right] \quad (4)$$

$g_-^*(x, e)$  jest lokalną funkcją rozkładu Boltzmana energii rotacyjnej w gazie o temperaturze  $T_{R-}(x)$  :

$$g_-^*(x, e) = \frac{1}{kT_{R-}(x)} \exp \left[ - \frac{e}{kT_{R-}(x)} \right] , \quad (5)$$



spełniającą w  $(-\infty)$  warunek graniczny

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g_{-}^{*}(x, e) = g_{-}(e) = \frac{1}{kT_{(-\infty)}} \exp \left[ - \frac{e}{kT_{(-\infty)}} \right] \quad (6)$$

gdzie  $T_{(-\infty)}$  jest temperaturą mieszaniny gazów przed falą.

Warunek graniczny na funkcję  $g_{+}(x, e)$  ma postać :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_{+}(x, e) = g_{+}(e) = \frac{1}{s_2} \exp \left( - \frac{e}{s_2} \right)$$

tzn. dla  $x \rightarrow +\infty$  funkcja  $g_{+}(x, e)$  opisuje stan równowagi rotacyjnej za falą. Warunek graniczny na  $g_{+}(x, e)$  jest przy tym zgodny z warunkiem granicznym na funkcję  $T_{+}(x)$  dla  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T_{+}(x) = s_2 .$$

Funkcje  $w_1(x)$ ,  $w_2(x)$ ,  $w_3(x)$  i  $w_4(x)$  są nieznanymi funkcjami wagowymi, spełniającymi przed i za falą warunki graniczne wynikające z warunków granicznych na funkcje rozkładu  $F_1$  i  $F_2$  :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} w_2(x) &= S_1^{-1} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} w_4(x) &= \alpha S_1^{-1} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} w_2(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} w_4(x) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Przyjęta postać (1) funkcji rozkładu  $F_1$  i  $F_2$  mówi więc, że są one liniowymi kombinacjami lokalnie równowagowych funkcji rozkładu Maxwella-Boltzmannna z nieznanymi wagami i nieznanymi funkcjami  $u_{+}(x)$ ,  $T_{R-}(x)$  i  $T_{+}(x)$ , spełniającymi określone warunki graniczne.

(1) jest modyfikacją metody Mott-Smitha, uwzględniającą zarówno fakt, że przepływ zachodzi w mieszaninie gazów, jak i to, że jeden z gazów posiada rotacyjne stopnie swobody,

opisane ciągłym parametrem  $e \in \langle 0, \infty \rangle$ .

Gdyby w równaniach (1) lokalnie równowagowe funkcje rozkładu  $g_{-}^{*}(x, e)$ ,  $f_{1+}(x, v)$  i  $f_{2+}(x, v)g_{+}(x, e)$  zastąpić równowagowymi funkcjami rozkładu za falą [formalnie odpowiada to podstawieniu  $u_{+}(x) \equiv S_1$ ,  $T_{R}(x) \equiv 1$  i  $T_{+}(x) \equiv S_2$ ], to liczba nieznanych funkcji zredukowałaby się do czterech ( $w_1, w_2, w_3$  i  $w_4$ ). Metodą analogiczną do opisanej w §2 rozdz.III można wykazać, że równania zachowania prowadzą wtedy do równości  $w_1 = w_3 \alpha e^{-1}$  i  $w_2 = w_4 \alpha e^{-1}$ , a zatem nie otrzymujemy wtedy separacji gazów w fali uderzeniowej.

Korzystając z definicji funkcji  $f_{2+}$ ,  $g_{+}$  i  $g_{-}^{*}$  widzimy, że funkcje  $f_{2-}g_{-}^{*}$  oraz  $f_{2+}g_{+}$  są (lokalnymi) funkcjami rozkładu Maxwella-Boltzmann'a, uwzględniającymi istnienie struktury wewnętrznej w gazie dwuatomowym.

Podstawiając wyrażenia (1) do równań modelowych (7) z §2 i wykorzystując równania zachowania mas składników, pędu i energii mieszaniny (§3 rozdziału IV) otrzymujemy, przeprowadzając rozumowanie analogiczne do przeprowadzonego w §3 rozdziału II, cztery równania algebraiczne na siedem nieznanych funkcji :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 + w_2 u_{+} = 1 \\ w_3 + w_4 u_{+} = \alpha e \\ w_1 a_1 + w_2 a_2 + w_3 a_3 + w_4 a_4 = a_1 + \alpha e a_3 = P \\ w_1 b_1 + w_2 b_2 u_{+} + w_3 b_3 + w_4 b_4 u_{+} = b_1 + \alpha e (7 + C_2) = E \end{array} \right. \quad (8)$$

gdzie funkcje  $a_i(x)$  i  $b_i(x)$  są zdefiniowane wzorami :

$$a_1 = 1 + C_1 \quad a_2 = T_{+} + C_1 u_{+}^2 \quad a_3 = 1 + C_2 \quad a_4 = T_{+} + C_2 u_{+}^2$$

$$b_1 = 5+C_1 \quad b_2 = 5T_+ + C_1 u_+^2 \quad b_3 = 5+C_2 + 2T_{R-} \quad b_4 = 5T_+ + 2S_2 + C_2 u_+^2$$

Wszystkie występujące tu funkcje są bezwymiarowe. Wstawiając  $w_1$  i  $w_3$  z dwóch pierwszych równań układu (8) do trzeciego i czwartego równania, otrzymujemy po przekształceniach algebraicznych, następujący układ równań stopnia trzeciego na niewiadome  $u_+$  i  $T_+$  :

$$\begin{cases} u_+^3 - \frac{5\varphi_2}{4b} u_+^2 - \frac{\varphi_1}{4b} u_+ + \frac{\varphi_2}{4b} = 0 \\ aT_+ = \varphi_3 u_+ - bu_+^2 \end{cases} \quad (9)$$

gdzie

$$a = a(x) = w_2(x) + w_4(x)$$

$$b = b(x) = C_1 w_2(x) + C_2 w_4(x)$$

$$\varphi_1 = \varphi_1(x) = -5a(x) - b(x) + 2w_4(x) [S_2 - T_{R-}(x)]$$

$$\varphi_2 = \varphi_2(x) = 2ae [1 - T_{R-}(x)]$$

$$\varphi_3 = \varphi_3(x) = a(x) + b(x)$$

Rozwiązania układu równań (9) mają postać :

$$\begin{cases} u_+^{(1)} = \alpha + \beta - \frac{b_1}{3} \\ T_+^{(1)} = \frac{1}{a} [\varphi_3 u_+^{(1)} - bu_+^{(1)2}] \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} u_+^{(2)} = \varepsilon\alpha + \varepsilon^2\beta - \frac{b_1}{3} \\ T_+^{(2)} = \frac{1}{a} [\varphi_3 u_+^{(2)} - bu_+^{(2)2}] \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{lub } \begin{cases} u_+^{(3)} = \varepsilon^2\alpha + \varepsilon\beta - \frac{b_1}{3} \\ T_+^{(3)} = \frac{1}{a} [\varphi_3 u_+^{(3)} - bu_+^{(3)2}] \end{cases}$$

gdzie górne indeksy numerują rozwiązania,  $\varepsilon$  jest jednym z zespolonych pierwiastków stopnia trzeciego z jedności

( $\varepsilon = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ), natomiast

$$\alpha = \left[ -\frac{q}{2} + \left( \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{1/2} \right]^{1/3}; \quad \beta = \left[ -\frac{q}{2} - \left( \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{1/2} \right]^{1/3}$$

przy czym dla każdej z trzech wartości pierwiastka stopnia trzeciego, definiującego  $\alpha$ , należy dobierać  $\beta$  w ten sposób, aby był spełniony warunek  $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$ ;

Ponadto :

$$p = -\frac{b_1^2}{3} + b_2; \quad q = \frac{2}{27} b_1^3 - \frac{1}{3} b_1 b_2 + b_3; \quad b_1 = -\frac{5\varphi_2}{4b};$$

$$b_2 = -\frac{\varphi_1}{4b}; \quad b_3 = \frac{\varphi_2}{4b}$$

Rzeczywistość współczynników wielomianu stopnia trzeciego w (9) gwarantuje, że conajmniej jedno z rozwiązań układu (9) jest rzeczywiste.

W trakcie obliczeń numerycznych okazało się, że istnieje zawsze dokładnie jedno takie rozwiązanie.

Numeryczny schemat obliczania pierwiastków trzeciego stopnia został opisany w dodatku VI.

W ten sposób korzystając z równań zachowania, przedstawiliśmy  $w_1, w_3, u_+$  i  $T_+$  jako funkcjonały od zmiennych  $w_2, w_4$  i  $T_{R-}$ .

Biorąc  $m_1 v_x^2$  -moment 1-go równania układu modelowego (7) z §2,

$$m_2 v_x^2 \text{ -moment 2-go równania układu modelowego (7)}$$

$$e \text{ -moment 2-go równania układu modelowego (7)}$$

otrzymujemy, po wykonaniu całek po przestrzeni prędkości i energii wewnętrznej, następujący układ równań :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df_1^{\circ}}{dx} = F_1(w_2, w_4, T_{R-}) \\ \frac{df_2^{\circ}}{dx} = F_2(w_2, w_4, T_{R-}) \\ \frac{df_3^{\circ}}{dx} = F_3(w_2, w_4, T_{R-}) \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\text{gdzie } f_1^{\circ} = (1-w_2u_+)(C_1+3) + w_2u_+(C_1u_+^2 + 3T_+)$$

$$f_2^{\circ} = (\epsilon - w_4u_+)(C_2+3) + w_4u_+(C_2u_+^2 + 3T_+)$$

$$f_3^{\circ} = (\epsilon - w_4u_+)T_{R-} + w_4u_+S_2$$

$$F_1 = -(\tau_{11}^{-1} + \tau_{12}^{-1})(1-w_2u_+)(C_1+1) + w_2(C_1u_+^2 + T_+) + \\ + \tau_{11}^{-1}N_1(C_1U_1^2 + T_1) + \tau_{12}^{-1}N_1(C_1U_{12}^2 + T_{12})$$

$$F_2 = -(\tau_{22e1}^{-1} + \tau_{22in}^{-1}) \left[ (\epsilon - w_4u_+)(C_2+1) + w_4(C_2u_+^2 + T_+) \right] + \\ + \tau_{22e1}^{-1}N_2(C_2U_2^2 + T_2) + \tau_{22in}^{-1}N_2(C_2U_{2c}^2 + T_c) + \tau_{21}^{-1}N_2(C_2U_{21}^2 + T_{21})$$

$$F_3 = -(\tau_{22e1}^{-1} + \tau_{22in}^{-1} + \tau_{21}^{-1}) \left[ (\epsilon - w_4u_+)T_{R-} + w_4S_2 \right] + \\ + \tau_{22e1}^{-1}N_2T_R + \tau_{22in}^{-1}N_2T_c + \tau_{21}^{-1}N_2T_{21}$$

przy czym wszystkie występujące tu wielkości są sprowadzone do bezwymiarowych zgodnie z procedurą opisaną w dodatku II. Wykonując różniczkowania funkcjonalów  $f_1^{\circ}$ ,  $f_2^{\circ}$  i  $f_3^{\circ}$  po lewej stronie równań układu (11) otrzymujemy, po przekształceniach algebraicznych (dodatek V) układ trzech równań różniczkowych zwyczajnych na nieznanne funkcje  $w_2, w_4$  i  $T_{R-}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw_2}{dx} = P_1(w_2, w_4, T_{R-}) \\ \frac{dw_1}{dx} = P_2(w_2, w_4, T_{R-}) \\ \frac{dT_{R-}}{dx} = P_3(w_2, w_4, T_{R-}) \end{array} \right. \quad (12)$$

z warunkami brzegowymi dla  $x \rightarrow -\infty$  :

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} w_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} w_4 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} T_{R-} = 1. \end{array} \quad (13)$$

Funkcje  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$  są zdefiniowane w dodatku V. Z ich jawnej postaci wynika, że punkt  $\Phi_1 = (0, 0, 1)$  jest punktem osobliwym układu równań (12) w przestrzeni fazowej zmiennych  $(w_2, w_4, T_{R-})$ . Układ (12) został rozwiązany numerycznie dla szeregu przypadków odpowiadających sytuacjom doświadczalnym. Wyniki będą omówione w rozdziale V.

W dalszym ciągu przedstawimy modyfikację założenia (1) na funkcje rozkładu gazów w mieszaninie, prowadzącą do układu równań, o dwuwymiarowej przestrzeni fazowej, dla którego analiza osobliwości została przeprowadzona eksplicite, analogicznie jak w przypadku mieszaniny gazów jednoatomowych.

Zapostulujemy rozwiązanie układu modelowego (7) z §2 bieżącego rozdziału w postaci :

$$F_1(x, v) = w_1(x)f_{1-}(v) + w_2(x)f_{1+}(x, v) \quad (14)$$

$$F_2(x, v, e) = w_3(x)f_{2-}(v)g_-(e) + w_4(x)f_{2+}(x, v)g_+(x, e)$$

gdzie  $f_{1-}(v)$ ,  $f_{2-}(v)$  są funkcjami rozkładu Maxwella gazów

przed falą, funkcje  $f_{1+}(x, v)$  i  $f_{2+}(x, v)$  są lokalnymi funkcjami rozkładu Maxwella, zdefiniowanymi wzorami (2) i (3);

Funkcja  $g_-(e)$  jest funkcją rozkładu energii ruchu rotacyjnego w stanie stacjonarnym przed falą (tzn. dla  $x \rightarrow -\infty$ ) w gazie o temperaturze  $T_{(-\infty)}$ :

$$g_-(e) = \frac{1}{kT_{(-\infty)}} \exp \left[ - \frac{e}{kT_{(-\infty)}} \right] \quad (15)$$

Funkcja  $g_+(x, e)$  jest zdefiniowana wzorem (4) z bieżącego paragrafu.

Porównując wyrażenia (1) i (14) widzimy, że różnica pomiędzy nimi polega na zastąpieniu w wyrażeniu (1) czynnika Boltzmanna  $g_-(x, e)$  [odpowiadającego lokalnej równowadze w punkcie  $x$  fali w temperaturze rotacyjnej  $T_{R-}(x)$ ] przez jego wartość graniczną dla  $x \rightarrow -\infty$ :  $g_-(e)$  [patrz wzór (6)]. Funkcja rozkładu  $F_1$  gazu jednoatomowego jest w obu wyrażeniach (1) i (14) taka sama.

Matematycznie różnica sprowadza się do tego, że w pierwszym przypadku [wzór (1)] poszukujemy rozwiązania w szerszej klasie funkcji rozkładu. Oba założenia różnią się liczbą nieznanymi funkcji: w pierwszym przypadku mamy siedem nieznanymi funkcji ( $w_1, w_2, w_3, w_4, u_+, T_+$  i  $T_{R-}$ ), co po uwzględnieniu równań zachowania daje układ trzech równań różniczkowych - przestrzeń fazowa jest trójwymiarowa. W drugim przypadku [wzór (14)] mamy sześć nieznanymi funkcji:  $w_1, w_2, w_3, w_4, u_+$  i  $T_+$ , co po uwzględnieniu równań zachowania daje układ dwóch równań różniczkowych - przestrzeń fazowa układu jest dwuwymiarowa.

Wstawiając wyrażenia (14) do równań modelowych (7) z §2 i wykorzystując równania zachowania z §3 obecnego rozdziału otrzymujemy cztery równania algebraiczne na sześć nieznanymi funkcji :

$$\begin{cases} w_1 = 1 - u_+ w_2 \\ w_3 = \alpha - u_+ w_4 \\ a_1(1 - u_+ w_2) + a_2 w_2 + a_3(\alpha - u_+ w_4) + a_4 w_4 = a_1 + \alpha a_3 = P_0 \\ b_1(1 - u_+ w_2) + b_2 w_2 u_+ + b_3^0(\alpha - u_+ w_4) + b_4^0 u_+ w_4 = b_1 + \alpha b_3^0 = E_0 \end{cases} \quad (16)$$

gdzie

$$a_1 = C_1 + 1; \quad a_2 = T_+ + C_1 u_+^2; \quad a_3 = 1 + C_2; \quad a_4 = T_+ + C_2 u_+^2;$$

$$b_1 = C_1 + 5; \quad b_2 = 5T_+ + C_1 u_+^2;$$

$$b_3^0 = C_2 + 7; \quad b_4^0 = C_2 u_+^2 + 7T_+;$$

Z równań zachowania energii i pędu otrzymujemy układ równań :

$$\begin{cases} -u_+(a+b) + aT_+ + bu_+^2 = 0 \\ -5a-b + 5aT_+ + bu_+^2 + 2w_4(T_+ - 1) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{gdzie} \quad a = w_2 + w_4$$

$$b = C_1 w_2 + C_2 w_4$$

Warto zauważyć, że drugie równanie tego układu różni się od odpowiedniego równania z §2 rozdziału III dla mieszaniny gazów jednoatomowych jedynie o składnik  $2w_4(T_+ - 1)$ .

Rozwiązując układ równań (17) z bieżącego paragrafu otrzymujemy funkcje  $u_+$  i  $T_+$  w zależności od zmiennych niezależnych - funkcji  $w_2$  i  $w_4$  :



$$\left\{ \begin{array}{l} u_+ = \frac{1}{2b} (c + \sqrt{c^2 - 4bd}) \\ T_+ = 1 + \frac{1}{4a+2w_4} (a+b)(1-u_+) \end{array} \right. \quad (18)$$

gdzie

$$a = w_2 + w_4$$

$$b = C_1 w_2 + C_2 w_4$$

$$c = a+b + \frac{a(a+b)}{4a+2w_4}$$

$$d = a + \frac{a(a+b)}{4a+2w_4}$$

W dalszym ciągu, w celu zamknięcia modelowego układu równań (7) z §2, bierzemy  $m_1 v_x^2$ -moment pierwszego równania i  $e$ -moment drugiego i wykorzystujemy postać (14) funkcji rozkładu. Po wykonaniu całkowań po prędkości (w obu równaniach) i po energii wewnętrznej (w drugim równaniu) otrzymujemy układ równań :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df_1^0}{dx} = F_1(w_2, w_4) \\ \frac{df_2^0}{dx} = F_2(w_2, w_4) \end{array} \right. \quad (19)$$

gdzie

$$f_1^0 = (1-w_2 u_+) (C_1 + 3) + w_2 u_+ (C_1 u_+^2 + 3T_+)$$

$$f_2^0 = \mathcal{K} - w_4 u_+ + w_4 u_+ T_+$$

$$F_1 = -(\tau_{11}^{-1} + \tau_{12}^{-1}) (1-w_2 u_+) C_{11} + w_2 (C_1 u_+^2 + T_+) + \tau_{11}^{-1} N_1 (C_1 u_1^2 + T_1) + \tau_{12}^{-1} N_1 (C_1 u_{12}^2 + T_{12}) \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 P_2 = & -(\tau_{22e1}^{-1} + \tau_{22in}^{-1} + \tau_{21})(\mathcal{A} - w_4 u_+ + w_4 T_+) + \\
 & + \tau_{22e1}^{-1} N_2^T R + \tau_{22in}^{-1} N_2^T c + \tau_{21}^{-1} N_2^T T_{21}
 \end{aligned} \quad (20)$$

Po wykonaniu różniczkowań i przekształceniach algebraicznych, z układu równań (19), otrzymujemy układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych na nieznanne funkcje  $w_2$  i  $w_4$  :

$$\begin{cases} \frac{dw_2}{dx} = H_1(w_2, w_4) \\ \frac{dw_4}{dx} = H_2(w_2, w_4) \end{cases} \quad (21)$$

z warunkami brzegowymi :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} w_2(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} w_4(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} w_2(x) = S_1^{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} w_4(x) = \mathcal{A} S_1^{-1}$$

gdzie  $H_1 = \frac{1}{E}(F_1 E_{22} - F_2 E_{12})$

$$H_2 = \frac{1}{E}(F_2 E_{11} - F_1 E_{21}) \quad (22)$$

$$E = E_{11} E_{22} - E_{21} E_{12}$$

Funkcje  $E_{11}$ ,  $E_{12}$ ,  $E_{21}$  i  $E_{22}$  są zdefiniowane w dodatku V.

Z postaci funkcji  $H_1$  i  $H_2$  [ pamiętając, że

$$F_1\left(\frac{1}{S_1}, \frac{\mathcal{A}}{S_1}\right) = F_2\left(\frac{1}{S_1}, \frac{\mathcal{A}}{S_1}\right) = 0 \text{ oraz } F_1(0,0) = F_2(0,0) = 0 ]$$

wynika, że punkty  $\Phi_1 = (0,0)$  i  $\Phi_2 = \left(\frac{1}{S_1}, \frac{\mathcal{A}}{S_1}\right)$  są

punktami osobliwymi układu (21) w płaszczyźnie fazowej  $(w_2, w_4)$ .

Rozwijając funkcje  $H_1$  i  $H_2$  w szereg Taylora w otoczeniu punktów  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  wykonano analizę punktów osobliwych układu (21).

Ponieważ analiza ta przebiega analogicznie do analizy punktów osobliwych układu (2) z §4 rozdziału III w przypadku mieszaniny gazów jednoatomowych, więc nie będziemy tu jej przeprowadzać, przenosząc odpowiednie obliczenia do dodatku VI.

Omówienie wyników tej analizy jest przedstawione w rozdziale V. Układ równań różniczkowych (21) został rozwiązany numerycznie. Z rozwiązania w postaci krzywej całkowej w przestrzeni fazowej, otrzymano szukane makroskopowe charakterystyki mieszaniny gazów, przez które przechodzi fala uderzeniowa (patrz komentarz na zakończenie §4 rozdziału III) Wyniki oraz porównanie rezultatów otrzymywanych obiema metodami są przedstawione w rozdziale V.

## OMÓWIENIE WYNIKÓW

## Rozdział V

## §1. Opis procedury numerycznej.

W bieżącym paragrafie omówimy procedury rozwiązywania układów równań różniczkowych : (2) otrzymanego w §3 rozdziału III oraz (12) i (19) z §4 rozdziału IV. Rozwiązaniem tych układów równań w odpowiednich przestrzeniach fazowych są krzywe całkowe łączące punkty osobliwe odpowiadające stanom stacjonarnym przed falą i za falą.

W praktyce numerycznej całkowanie należy rozpoczynać z siodła, gdyż w przypadku węzła nie ma kryterium wyboru krzywej całkowej odpowiadającej danym warunkom brzegowym. Zostało to potwierdzone w obliczeniach - schemat numeryczny, w którym całkowanie układu rozpoczynano z węzła, okazywał się rozbieżny.

Przy rozpoczynaniu całkowania z punktu siodłowego, została potwierdzona konieczność wyboru odpowiedniego kierunku startowego, wynikającego z analizy zlinearyzowanego układu równań, przeprowadzonej w §4 rozdziału III dla mieszaniny gazów jednoatomowych i w dodatku VI dla mieszaniny gazów z rotacją. Na przykład : dla mieszaniny Ar-He (dla  $\alpha = 10$  i liczby Macha  $M = 2$ ), w której punkt  $\Phi_1 = (0,0)$  jest punktem siodłowym, natomiast punkt  $\Phi_2 = (S_1^{-1}, \alpha S_1^{-1})$

węzłem, przy wyborze początkowego nachylenia  $\frac{w_4}{w_2} < 0,1$  uzyskano krzywą całkową łączącą oba punkty osobliwe, natomiast dla początkowych nachyleń  $\frac{w_4}{w_2} \gtrsim 1$ , otrzymywano wyniki rozbieżne. W praktyce, gdy siodłem był punkt  $\Phi_1$ , początkową wartość  $w_2$  wybierano w przedziale  $10^{-5} \div 10^{-3}$  a wartość  $w_4$  obliczano z kierunku wychodzącej z siodła krzywej całkowej, natomiast gdy siodłem był punkt  $\Phi_2$ , początkowe wartości  $w_2$  i  $w_4$  wybierano odpowiednio bliskie  $S_1^{-1}$  oraz  $\alpha S_1^{-1}$ .

Dla mieszaniny gazów z rotacją, początkowe wartości  $w_2(x)$  i  $w_4(x)$  były wybierane w granicach  $10^{-3} \div 10^{-6}$ , (w zależności od wartości stosunku gęstości liczbowych gazów przed falą), natomiast wartości  $T_{R-}(x)$  przyjmowano równą 1.

Obliczenia były wykonywane metodą Runge - Kutty IV rzędu w języku FORTRAN IV na komputerze CDC - Cyber 72. Typowy czas całkowania dla jednego zestawu danych wynosił około 20 sekund. W obliczeniach przyjęto krok  $h = 0.1 \lambda_-$  gdzie  $\lambda_-$  jest średnią drogą swobodną w mieszaninie gazów przed falą. Dla porównania przeprowadzono obliczenia z krokiem  $h = 0.05 \lambda_-$  oraz  $h = 0.2 \lambda_-$ . Poza zmianą czasu całkowania, większych różnic ilościowych pomiędzy uzyskiwanymi rezultatami nie stwierdzono.

Mając daną zależność  $w_4$  od  $w_2$  na krzywej całkowej otrzymanej w wyniku numerycznego całkowania równań różniczkowych, obliczamy następnie, według odpowiednich całkowych wzorów z dodatku II, wszystkie interesujące nas makroskopowe charakterystyki fali uderzeniowej.

osobliwego  $\Phi_2$  nie zależy ani od wartości przekrojów czynnych, ani od dodatkowego parametru mikroskopowego, jakim jest liczba rotacyjna  $Z$ , opisująca prędkość ekwipartycji energii translacyjnej i rotacyjnej w gazie dwuatomowym.

§2. Omówienie wyników dla mieszanin gazów jednoatomowych.

Przebadano dwuskładnikowe mieszaniny następujących gazów jednoatomowych: [w nawiasie podajemy masę atomową  $m_1$  i średnicę  $d_1$  atomu w Å (liczoną na podstawie [3], str. 228)]:

He ( 4 , 2.19)

Ne (20.18, 2.60)

Ar (40 , 3.66)

Kr (83.80, 4.20)

Xe (131.30, 4.94)

Mieszaniny tych gazów z gazami dwuatomowymi będą omówione w następnym paragrafie. Wartości stosunków mas atomowych gazów w mieszaninie i wartości przekrojów czynnych na zderzenia cząstek oddziałujących potencjałem sztywnych kul są przedstawione w tabeli III.

W bieżącym paragrafie przedstawimy wyniki dla mieszanin gazów jednoatomowych, w szczególności dla mieszaniny Xe/He ( $m = 0.03$ ), Ar/He ( $m = 0.10$ ) i Ne/Kr ( $m = 0.24$ ).

Omówimy wpływ stosunku mas, procentowej zawartości cięższego składnika i liczby Macha na różne makroskopowe charakterystyki fali uderzeniowej w mieszaninie.

W przypadku mieszaniny Xe-He, szczególną uwagę zwrócono na mieszaniny, w których ciężki gaz występuje w ilościach śladowych.

W dalszym ciągu podamy rezultaty odpowiadające zestawom danych pokrywających się z danymi eksperymentów Z.A.Walenty, A.Gmurczyka i R.Tarczyńskiego [73] .

Na rysunkach 1,2,3 porównano wyniki otrzymane w obecnej pracy z powyższymi wynikami doświadczalnymi dla mieszaniny Xe-He.

Rysunki te przedstawiają przebiegi (znormalizowanych do jedności) gęstości liczbowych ksenonu  $N_{Xe}$  i helu  $N_{He}$  w funkcji położenia w fali uderzeniowej dla stosunków gęstości liczbowych, odpowiadających 3%, 6% i 9% zawartości Xe.

Jak widać z rys. 1,2 i 3, ze wzrostem % zawartości He, punkt przegięcia gęstości He, wynikający z obecnych obliczeń, podnosi się w kierunku wyższych temperatur, analogicznie jak w eksperymentach. Odpowiada to faktowi, że ze wzrostem procentowej zawartości gazu lekkiego - helu, przebieg jego gęstości w mieszaninie jest coraz bliższy przebiegowi gęstości w czystym składniku.

Efekt przekroczenia gęstości równowagowej za falą, cytowany w pracy [73] i widoczny na rys. 1,2 i 3, nie został potwierdzony w obliczeniach opartych na modelu badanym w obecnej pracy. Efekt ten ma prawdopodobnie charakter incydentalny, wynikający z numerycznego opracowania rezultatów eksperymentalnych.

Na rys.2 są przedstawione przebiegi gęstości liczbowych gazów w mieszaninie Xe - He dla 6% Xe, wynikające z obliczeń modelowych i z eksperymentu [73] .

Widać, że obserwowany doświadczalnie efekt przegięcia struktury helu jest widoczny jedynie na wykresach, uzyskanych z obecnego modelu BGK. M.Bratos i R.Herczyński [14] uzyskali analogiczne przegięcie w oparciu o równania Boltzmana dla (patrz rys.2) przypadku jednowymiarowego.

Jedną z najważniejszych charakterystyk fali uderzeniowej jest grubość fali uderzeniowej. W ogólnym przypadku będziemy ją definiować wzorem (jest to definicja Prandtla grubości fali uderzeniowej) :

$$\Delta_1 = \frac{\tilde{\rho}_{(+\infty)} - \tilde{\rho}_{(-\infty)}}{\left| \frac{d\tilde{\rho}}{dx} \right|_{\max}} \quad (*)$$

gdzie  $\tilde{\rho}$  jest gęstością masową mieszaniny, a maksimum bierzemy po całym obszarze zmienności stanu gazu w fali uderzeniowej.

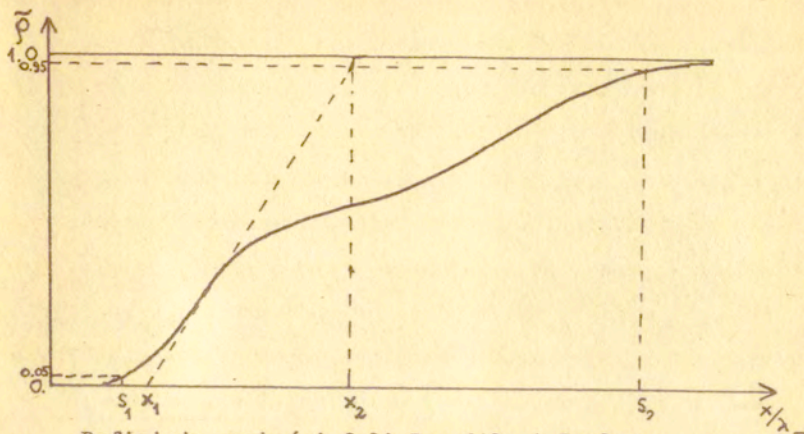
W przypadku, gdy ciężki gaz występuje w ilościach śladowych, definicja (\*) Prandtla nie wydaje się adekwatna do istoty zjawisk zachodzących w takich mieszaninach. Definicja (\*) grubości fali daje wartość  $\Delta_1 = |x_2 - x_1|$  (patrz rysunek poniżej), gdy tymczasem istotne zmiany parametrów makroskopowych (w szczególności  $\tilde{\rho}$ ) opisujących mieszaninę zachodzą na odległościach rzędu  $\Delta_2 = |s_2 - s_1|$ .

W tym przypadku będziemy się posługiwać definicją Taylora fali uderzeniowej

$$\Delta_2 = \left| \tilde{\rho}^{-1}(0.95) - \tilde{\rho}^{-1}(0.05) \right|$$

Za takim wyborem przemawia fakt, że grubość fali powinna być miarą obszaru, w którym zachodzą zmiany parametrów makroskopowych w fali uderzeniowej.





Definicje grubości fali Prandtla i Taylora.

Teoretyczne grubości fal uderzeniowych, oparte na modelu sztywnych kul, są w ogólności węższe, niż grubości fal uderzeniowych obserwowane doświadczalnie. Fakt ten został zaobserwowany w szeregu wcześniejszych prac, stosujących zarówno równanie BGK, jak i równanie Boltzmanna [1] [34]. Na rys. 5 przedstawiono wyliczoną w oparciu o obecny model grubość fali uderzeniowej w mieszaninie Xe-He w funkcji procentowej zawartości ciężkiego gazu (Xe) dla liczby Macha  $M = 2$  (wykres a).

Dla porównania przedstawiono wyniki asymptotycznej teorii B.Hamela [25]. Widać jakościową zgodność obu teorii. W celu porównania otrzymywanych wyników z rezultatami eksperymentalnymi, przeprowadzono obliczenia grubości fali w mieszaninie Ar-He w funkcji procentowej zawartości argonu dla  $M = 2$ .

Na rys.6 porównano wyniki tych obliczeń z eksperymentalnymi wynikami Centera [60]. Na tym samym rysunku przedstawiono

teoretyczne rezultaty Shermana [37], uzyskane z numerycznego całkowania równań Naviera-Stokesa dla mieszaniny Ar-He.

Widać, że rezultaty obecnej pracy są znacznie bliższe wynikom eksperymentalnym od rezultatów, opartych na teorii ośrodka ciągłego. W szczególności otrzymano wypukłą postać krzywej przebiegu grubości fali, odpowiadającą wynikom Centera. Rezultaty Shermana dają krzywą wklęsłą (rys.6).

W celu porównania z wynikami eksperymentalnymi, przeprowadzono obliczenia przebiegów gęstości liczbowych poszczególnych składników mieszaniny dla wybranych składów procentowych i liczb Macha w mieszaninie Ar-He. Na rys. 4 porównano rezultaty obecnej pracy z numerycznymi wynikami Birda [59] i eksperymentami Centera [60]. Widać jakościową zgodność rezultatów z powyższymi pracami.

Dotychczas omawialiśmy wpływ składu procentowego na grubość fali uderzeniowej dla ustalonej mieszaniny. Interesujące jest także odwrotne postawienie zagadnienia - zbadanie wpływu stosunku mas składników na strukturę fali, przy ustalonym składzie procentowym. Na rys. 7 przedstawiono grubość fali  $\Delta_2$ , mierzoną na podstawie przebiegu gęstości masowej mieszaniny, w funkcji stosunku mas dla  $\alpha = 10$  i  $M = 2$ . Grubość fali silnie rośnie gdy  $m$  maleje do zera.

W celu pokazania zależności struktury fali uderzeniowej od liczby Macha, na rys. 8 przedstawiono wyniki obliczeń grubości fali w mieszaninie Ar-He przy 10% domieszce argonu dla różnych liczb Macha.

Widać, że dla dużych liczb Macha grubość fali uderzeniowej dąży do stałej wartości, rzędu grubości fali w pojedynczym

gazie. Dla  $M \rightarrow 1$  grubość fali dąży do nieskończoności.

Interesującym efektem jest zjawisko separacji składników mieszaniny w fali uderzeniowej, wynikające z niejednakowych mikroskopowych własności gazów, w szczególności różnych mas atomowych i przekrojów czynnych na zderzenia. Za ilościową miarę stopnia separacji gazów w fali uderzeniowej przyjmujemy wielkość  $|\bar{N}_2 - \bar{N}_1|$ , gdzie  $\bar{N}_1$  i  $\bar{N}_2$  są znormalizowanymi do jedności gęstościami liczbowymi gazów. Stopień separacji jest funkcją zarówno stosunku mas atomowych gazów, jak i ich procentowej zawartości w mieszaninie.

Rys. 9 przedstawia wielkość separacji w funkcji położenia w fali uderzeniowej dla mieszaniny Ar-He. Stwierdzamy niesymetryczność funkcji opisującej separację. Jest ona wynikiem braku symetrii profili gęstości gazów w fali uderzeniowej dla gazów o zróżnicowanych masach atomowych. Dla  $m \rightarrow 1$  asymetria maleje. Utrzymywanie się separacji w "gorącej" części fali, widoczne na tym rysunku, może być wynikiem utrudnionej wymiany energii pomiędzy ciężkim i lekkim gazem. W trakcie obliczeń okazało się, że stopień separacji składników rośnie wraz ze zmniejszaniem się procentowej zawartości cięższego składnika mieszaniny.

Interesujące z punktu widzenia przekazu energii kinetycznej w zderzeniach pomiędzy cząstkami gazów, są przebiegi temperatur gazów w fali uderzeniowej.

Rys. 10 przedstawia temperatury kinetyczne gazów w fali uderzeniowej dla mieszanin : Kr/Ne , Ar/He i w przypadku, gdy lżejszego gazu jest 10 razy więcej ( $\mu = 10$ ,  $M = 2$ ). Z porównania tych wykresów widać, że większe różnice temperatur gazów w fali uderzeniowej występują w mieszaninach o bardziej zróżnicowanych masach atomowych. Można to tłumaczyć faktem, że w takich mieszaninach zderzeniowy transport energii kinetycznej pomiędzy różnymi składnikami jest utrudniony. Wpływa to także na wydłużenie się odległości, na której następuje wyrównanie temperatur w fali uderzeniowej - tzn. na poszerzenie strefy relaksacyjnej.

Z rys. 10 wynika też, że temperatury składników mieszaniny wyrównują się w obszarze fali uderzeniowej pomiędzy stanami stacjonarnymi, tzn. wykresy temperatur przecinają się. W przypadkach gdy gaz lekki występuje w ilościach śladowych, temperatury wyrównują się tylko w stanach stacjonarnych. Punkt przecięcia się temperatur obniża się (tzn. wyrównanie temperatur zachodzi w niższej temperaturze) wraz ze zwiększaniem się różnic pomiędzy masami atomowymi składników i ze wzrostem procentowej zawartości ciężkiego składnika. Zjawisko przecinania się wykresów temperatur zostało zaobserwowane także w pracach innych autorów [11] , [32] . Rezultat ten nie został dotychczas zweryfikowany doświadczalnie ze względu na wzmiankowane wyżej trudności w pomiarach temperatury. Interesującym efektem, zaobserwowanym także wcześniej w innych pracach [34] , [59] , jest zjawisko "przerzutu temperatury" gazu ciężkiego w przypadkach, gdy jest go liczbowo mniej niż składnika lekkiego. Przerzutem temperatury

nazywamy efekt przekroczenia równowagowej wartości temperatury gazów za falą, wynikającej z warunków Rankina-Hugoniota, przez temperaturę jednego ze składników. Ze względu na trudności pomiarowe zjawisko to także nie zostało dotychczas zweryfikowane eksperymentalnie. Z obliczeń obecnej pracy wynika, że przerzut temperatury

- a) rośnie ze wzrostem liczby Macha
- b) rośnie ze wzrostem różnicy mas atomowych gazów (rys.10)
- c) rośnie ze wzrostem różnicy gęstości liczbowych składników mieszaniny.

Dotychczas nie udało się znaleźć przejrzystej interpretacji fizycznej przerzutu temperatury na gruncie kinetycznej teorii gazów.

Analogiczne jakościowo rezultaty otrzymano biorąc zamiast  $m_1 v_x^2 \rightarrow -m_1 v_x^3$  momenty obu równań BGK (3) § 4 rozdział III, jednak grubości fali otrzymane przy wyborze  $m_1 v_x^3$ -momentów były 15-20% większe od grubości fal otrzymanych z  $m_1 v_x^2$ -momentów, podobnie jak w przypadku fal uderzeniowych w pojedynczych gazach. Arbitralność wybieranych momentów jest istotną wadą metody rozwiązywania równań BGK, stosowanej w obecnej pracy. Interesujące byłoby rozwiązanie stosowanych tu równań modelowych (zarówno dla gazów jedno-, jak i dwuatomowych) za pomocą metod iteracyjnych, a następnie porównanie wyników otrzymywanych obiema metodami. Ciekawe byłoby też zastosowanie metody, zaproponowanej w pracy M. Bratos i R. Herczyńskiego [14] do rozwiązania równań BGK, a następnie porównanie wyników z rezultatami zastosowania tej metody do pełnych równań Boltzmann.

§3. Struktura fali uderzeniowej w pojedynczym gazie dwuatomowym.

W celu znalezienia struktury fali uderzeniowej w pojedynczym gazie dwuatomowym, rozwiązano równanie BGK na jednocząstkową funkcję rozkładu  $F_2$  gazu dwuatomowego :

$$v_x \frac{\partial F_2}{\partial x} = \tau_{22}^{el-1} (M_{22}^{el} - F_2) + \tau_{22}^{in-1} (M_{22}^{in} - F_2)$$

z warunkami brzegowymi odpowiadającymi stanom stacjonarnym przed i za falą :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_2(x, v, e) = f_{2(-\infty)}^{\circ}(v) g_{-}(e)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x, v, e) = f_{2(+\infty)}^{\circ}(v) g_{+}(e)$$

(patrz §4 rozdział IV).

Rozwiązania tego równania poszukujemy w postaci (1) z §4 rozdziału IV lub (14) §4 rozdziału IV. W zależności od klasy funkcji, w jakiej poszukujemy rozwiązań, otrzymujemy nieco odmienne rezultaty. Jak wynika z rys. 17, rezultaty otrzymane w oparciu o założenie (1) są bardziej zbliżone do wyników eksperymentalnych - w szczególności, w przypadku wodoru, dają obserwowany dość wiadczoalnie "ogon" gęstości, odpowiadający wydłużonej strefie relaksacyjnej w tym gazie. Gdy poszukujemy rozwiązania w postaci (14), to takiego przebiegu gęstości wodoru nie obserwujemy. Jest to prawdopodobnie spowodowane faktem, że w przypadku (1) poszukujemy rozwiązania w szerszej klasie funkcjonalów - funkcja rozkładu gazu dwuatomowego ma o jeden stopień swobody więcej i w ten sposób daje możliwość bardziej złożonych efektów.

Omówimy teraz wyniki uzyskane dla gazu dwuatomowego, uzyskane w oparciu o założenie (1) z §4 rozdziału IV.

Na rys.11 przedstawiono grubość fali uderzeniowej w gazie dwuatomowym w funkcji liczby rotacyjnej  $Z$ , definiowaną wzorem ( $*$ ) Prandtla.

Stwierdzamy silną zależność grubości fali od  $Z$ , parametru, który modeluje prędkość relaksacji rotacyjnej. Grubość fali maleje ze wzrostem liczby Macha, rośnie natomiast ze wzrostem liczby rotacyjnej.

W celu porównania z doświadczeniami, na rys. 13 przedstawiono wyniki obecnej pracy i eksperymentalne wyniki Alsmayera [56] pomiarów gęstości azotu w fali uderzeniowej dla kilku wybranych liczb Macha. Najlepszą zgodność z wynikami eksperymentalnymi uzyskano dla liczby rotacyjnej  $Z \approx 3$ . Małe (rzędu kilku) liczby rotacyjne odpowiadają, jak już mówiliśmy w §3 rozdziału IV, szybkiemu przekazowi energii do rotacyjnych stopni swobody.

Z eksperymentów wynika, że przebieg gęstości i grubość fali uderzeniowej [56] w azocie pokrywa się z przebiegiem gęstości i grubością fali w argonie, co wskazuje na szybką ekwipartycję energii w azocie.

Grubość fali uderzeniowej, zależy także od liczby Macha.

Rys. 14 przedstawia odwrotność grubości fali w azocie w funkcji liczby Macha dla wybranej liczby rotacyjnej.

Dla porównania na tym samym rysunku pokazano wyniki pracy Venkataramana i Morse'a oraz wyniki eksperymentalne. Dla  $Z_R \approx 3$  uzyskujemy dobrą zgodność z rezultatami tych prac.

W przypadku azotu, <sup>dla  $Z_R=3$</sup>  wyniki uzyskiwane obiema metodami rozwią-

zywiania układu równań z rotacją są podobne (rys. 17).

Istotne różnice pomiędzy wynikami obu metod dają się zauważyć dopiero dla dużych, (rzędu kilkudziesięciu) liczb rotacyjnych, odpowiadających wodorowi.

Wodór jest gazem szczególnie interesującym z punktu widzenia przebiegu procesów relaksacyjnych. Eksperymentalne pomiary liczby rotacyjnej wodoru wskazują, że jest ona znacznie większa od liczb rotacyjnych dla azotu czy tlenu [62] [57] i w interesującym nas zakresie temperatur od kilkuset do około tysiąca  $^{\circ}\text{K}$  można założyć, że nie zależy od temperatury [57].

Interesujące właściwości wykazuje mierzony eksperymentalnie przebieg gęstości wodoru w fali uderzeniowej. Krzywa ---- na rys. 15 przedstawia wynik eksperymentalny [61].

Można wyodrębnić wyraźnie dwa obszary. W pierwszym obszarze gęstość rośnie tak, jak w przypadku fali uderzeniowej w gazie szlachetnym, a zatem wpływ rotacyjnych stopni swobody jest niewielki - mówimy, że rotacyjne stopnie swobody są w tym obszarze "zamrożone". Odpowiadająca temu obszarowi grubość fali uderzeniowej jest rzędu grubości fali w gazie szlachetnym. W drugim obszarze następuje powolne wyrównywanie się energii pomiędzy translacyjnymi a rotacyjnymi stopniami swobody - te ostatnie ulegają wzbudzeniu. Strefa relaksacji rotacyjnych stopni swobody jest znacznie większa od  $\Delta_1$ , co świadczy o dużym czasie relaksacji rotacyjnych stopni swobody. Z rys. 17 widać, że przebiegi gęstości fal uderzeniowych uzyskane w oparciu o założenie (14) §4 rozdziału IV nie opisują poprawnie struktury fali uderzeniowej w wodrze,



nawet dla dużych liczb rotacyjnych. Wiąże się to prawdopodobnie z faktem, że przestrzeń funkcji, w której poszukujemy rozwiązań jest zbyt mała dla przypadków, w których wymiana energii pomiędzy różnymi modami ruchu jest opóźniona ; W trakcie dalszych badań okazało się bowiem, że przebiegi gęstości w wodorze wykazane w oparciu o założenie (1) §4 rozdziału IV wykazują własności, analogiczne do własności obserwowalnych doświadczalnie. Rys. 15 pokazuje przebieg gęstości w wodorze dla liczb rotacyjnych  $Z = 2$ ,  $Z = 20$   $Z = 50$ . Widzimy dla  $Z \gg 20$  wyraźny "ogon" fali, odpowiadający powolnej relaksacji rotacyjnych stopni swobody. Długość strefy relaksacyjnej rośnie wraz ze wzrostem liczby rotacyjnej. Wyniki, najbliższe rezultatom eksperymentalnym [64] uzyskano dla  $Z \approx 30$ .

Omówimy teraz interesujące z punktu widzenia transportu energii w gazie dwuatomowym przebiegi temperatury translacyjnej i rotacyjnej w fali uderzeniowej.

Dla wszystkich przebadanych liczb Macha i liczb rotacyjnych, temperatura rotacyjna w fali jest zawsze niższa od temperatury translacyjnej. Jest to wynikiem spóźnionego przekazu energii pomiędzy translacyjnym i rotacyjnym modem ruchu. Wielkość przesunięcia wykresów obu temperatur zależy od liczby rotacyjnej  $Z$ , będącej, jak już mówiliśmy, miarą prędkości wyrównywania się energii translacyjnej i rotacyjnej. Przebiegi obu temperatur

wykazują silną zależność od liczby rotacyjnej. Ze wzrostem  $Z$  różnica pomiędzy temperaturą translacyjną i rotacyjną rośnie, co jest wynikiem

opóźnionego przekazu energii do rotacyjnych stopni swobody. Dla liczb Macha  $M \gtrsim 2$  zaobserwowano zjawisko przerzutu temperatury translacyjnej  $T_2$  gazu dwuatomowego. Warto dodać, że analogiczne zjawisko zaobserwowano w innych pracach teoretycznych [41], [43], [53] badających strukturę fali uderzeniowej w gazach dwuatomowych. Wielkość przerzutu zależy od liczby Macha i od liczby rotacyjnej, co ilustruje rys. 12. Dla porównania, na tym samym rysunku przedstawiono rezultaty pracy Venkataramana i Morse'a [53] dla tych samych wartości liczby rotacyjnej  $Z$ . Widać dobrą zgodność wyników obu teorii. Analogicznie jak w przypadku mieszaniny gazów jednoatomowych, doświadczalna weryfikacja tego rezultatu nie jest na razie możliwa ze względu na trudności eksperymentalne występujące przy pomiarach temperatury translacyjnej w falach uderzeniowych.

#### §4. Omówienie wyników dla mieszanin gazów jednoatomowych i dwuatomowych. Podsumowanie.

Zostały przebadane mieszaniny He, Ne, Ar, Kr i Xe z następującymi gazami dwuatomowymi: (w nawiasie podajemy masę cząsteczkową  $m_2$  i średnicę  $d_2$  cząsteczki, ([3] str. 228) :

$H_2$	( 2 , 2.74 )
$N_2$	( 28 , 3.78 )
$O_2$	( 32 , 3.64 )

Wartości stosunków mas cząsteczkowych i przekrojów czynnych na zderzenia są podane w tabeli III, gdzie  $m = m_2/m_1$ ,

$\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są zdefiniowane analogicznie jak dla gazów jednoatomowych (patrz poprzedni paragraf) przy czym indeks 2 odnosi się do gazu dwuatomowego.

W dalszej części omówimy wybrane rezultaty, uzyskane dla mieszanin gazów szlachetnych z azotem lub wodorem za pomocą wzoru /1/ 3 4 rozdz. IV. W przypadku mieszaniny  $N_2/Xe$  ( $m = 0.21$ ) typowy przebieg temperatur gazów oraz ich gęstości jest przedstawiony na rys. 16 B .

Dla porównania na tym samym rysunku pokazano przebieg temperatur w mieszaninie gazów jednoatomowych dla tych samych wartości  $\kappa$ ,  $M$ ,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . Widać z porównania, że temperatura  $T_1$  cięższego gazu jednoatomowego przekracza wartość równowagową (mimo iż jest go pięć razy mniej niż dwuatomowego). Efekt ten nie występuje w gazach jednoatomowych (rys. 16 A). Jego przyczyną może być fakt, że obecność rotacyjnych stopni swobody dodatkowo utrudnia (opóźnia) wyrównywanie się temperatur obu gazów w wyniku zderzeniowego przekazu energii. Rys. 18 przedstawia wpływ dodawania ciężkiego gazu jednoatomowego - argonu, na przebiegi gęstości, temperatury translacyjnej i rotacyjnej lekkiego gazu dwuatomowego - wodoru ( $m = 0.05$ ).

Na rys. 18 A jest pokazany przebieg gęstości i temperatur w czystym wodorze ( $\kappa = \infty$ ). Widać charakterystyczny przebieg gęstości wodoru i strefę relaksacyjną - "ogon" gęstości w gorącej części fali, oraz omawiany wyżej przerzut temperatury translacyjnej wodoru.

Na rys. 18 B i C są przedstawione odpowiednie wykresy w przypadku, gdy wodór jest w nadmiarze ( $\kappa = 20$  i  $\kappa = 5$ ).

Widać, że dodanie nawet niewielkiej ilości (5%) gazu jednoatomowego - argonu - powoduje istotne zmiany w przebiegu gęstości i temperatur gazu dwuatomowego :

- 1° zniknięcie przerzutu temperatury translacyjnej  $T_2$  wodoru
- 2° niejednostajny przebieg temperatury rotacyjnej  $T_R$  wodoru
- 3° niejednostajny przebieg gęstości wodoru w przypadku, gdy argon występuje w śladowych ilościach (rys. 18 B).

Analogiczny efekt występuje w mieszaninach Xe-H<sub>2</sub>, przy czym grubość Taylora fali uderzeniowej jest tam znacznie większa ze względu na większe różnice mas ( $m = 0.015$ ).

- 1° - interpretujemy w ten sposób, że dodawanie ciężkiego gazu jednoatomowego <sup>może</sup> ułatwiać wyrównywanie się temperatury translacyjnej i rotacyjnej w gazie dwuatomowym.
- 2° Dla dużych  $\alpha$  (rys. 18 B i C ) stwierdzamy niejednostajny przebieg temperatury rotacyjnej w środkowej części fali. Wraz ze wzrostem procentowej zawartości gazu jednoatomowego maleje różnica pomiędzy temperaturą kinetyczną i rotacyjną gazu dwuatomowego. Dla  $\alpha=1.0$  (rys. 18 D ) obie temperatury niewiele się różnią. Efekt ten prawdopodobnie wiąże się także z szybszym wyrównywaniem się temperatur w obecności gazu jednoatomowego.  
Niejednostajny przebieg temperatury rotacyjnej widać wyraźnie na rys. 18 B i C .  
Wynika z nich, że w niskich temperaturach (w lewej części fali) różnica między temperaturą translacyjną

i rotacyjną jest niewielka, co może odpowiadać małej liczbie zderzeń potrzebnych do wyrównania się temperatury translacyjnej i rotacyjnej.

W wyższych temperaturach różnica obu temperatur znacznie rośnie, co widać wyraźnie na rys. 18 B ; odpowiada to trudniejszemu przekazowi energii rotacyjnej. Fakt trudniejszego przekazu energii rotacyjnej w wyższych temperaturach został też stwierdzony m.in. w pracy K.Yoshikawy [74], który dokonał obliczeń relaksacji w gazie dwuatomowym metodą Monte-Carlo.

- 3<sup>o</sup> W przypadku gdy gaz ciężki jednoatomowy występuje w śladowych ilościach, zaobserwowano niejednostajny przebieg gęstości wodoru (rys. 18 B ) ; przegięcie gęstości znika ze wzrostem procentowej zawartości argonu. (na rys. 18 C i D już nie występuje).

Z porównania wykresów 18 B , C i D widać, że wraz ze wzrostem procentowej zawartości Ar maleje wielkość separacji gazów w fali uderzeniowej. Największa separacja występuje dla śladowych ilości cięższego gazu, podobnie jak dla mieszanin gazów jednoatomowych.

Analogiczne rezultaty jak przedstawione na rys. 18 dla mieszaniny Ar-H<sub>2</sub> ( $m = 0.05$ ) uzyskano dla mieszaniny Xe-H<sub>2</sub> ( $m=0.015$ ), przy czym dla Xe-H<sub>2</sub> odpowiednie grubości fali znacznie wzrosły ze względu na większe różnice mas cząsteczkowych. Wyniki takie są jakościowo zgodne z rezultatami eksperymentów (rys. 19).

Za pomocą metod, opisanych w obecnej pracy, można badać

mieszaniny większej liczby składników, zarówno jedno- jak i dwuatomowych. W przypadku mieszaniny dwóch gazów dwuatomowych, mamy dwie temperatury rotacyjne  $T_R^1$  i  $T_R^2$ . Modyfikacja postulatu Mott-Smitha na ten przypadek powinna uwzględniać różne prędkości relaksacji rotacyjnych temperatur obu gazów. W najprostszym przypadku można to uwzględnić postulując funkcje rozkładu, zależne od większej liczby zmiennych, uzyskując odpowiednio większą liczbę równań. W analogiczny sposób można rozpatrywać większą liczbę gazów, przy czym należy pamiętać, że liczba nieznanych parametrów krzyżowych w równaniach modelowych rośnie wraz ze wzrostem liczby składników, co istotnie ogranicza możliwość efektywnych uogólnień.

#### Podsumowanie.

W zaprezentowanej pracy przeanalizowano struktury fal uderzeniowych w mieszaninach gazów jednoatomowych i dwuatomowych z rotacją oraz w pojedynczym gazie dwuatomowym, w oparciu o modelowe równania relaksacyjne typu BGK. Uzyskane rezultaty można podzielić na trzy grupy :

- 1) dla mieszaniny gazów jednoatomowych
- 2) dla pojedynczego gazu dwuatomowego
- 3) dla mieszaniny gazu jednoatomowego i dwuatomowego

W przypadku 1) szczególną uwagę zwrócono na mieszaniny gazów o bardzo zróżnicowanych masach atomowych. Istnienie relaksacji wieloskalowej w takich mieszaninach spowodowało konieczność odpowiedniej modyfikacji stosowanych równań modelowych. Pozwoliło to na uzyskanie wyników jakościowo zgodnych z rezultatami doświadczeń w Ar-He i Xe-He.

W przypadku 2) pojedynczego gazu dwuatomowego, wybór odpowiedniej klasy funkcjonałów, w której poszukujemy rozwiązań równania modelowego, pozwolił na uzyskanie zgodnych z doświadczeniem przebiegów gęstości wodoru, z charakterystycznym wydłużonym obszarem relaksacji.

W przypadku 3) mieszaniny gazu jednoatomowego i dwuatomowego, zaproponowano modelowy układ równań, uwzględniający zarówno wewnętrzną strukturę jednego z gazów, jak i binarność mieszaniny i spełniający odpowiednie równania zachowania. Tak jak w poprzednich przypadkach, układ ten sprowadzono metodą momentów do układów równań różniczkowych, które rozwiązano numerycznie, uzyskując szukane struktury fali uderzeniowej. W części obliczeniowej zbadano także analitycznie charakter osobliwości uzyskiwanych nieliniowych równań różniczkowych w całym zakresie występujących w zagadnieniu parametrów fizycznych, oraz wpływ rotacyjnych stopni swobody na charakter punktów osobliwych. Uzyskano przebiegi gęstości temperatur translacyjnych gazów i temperatury rotacyjnej gazu dwuatomowego, jakościowo zgodne z rezultatami eksperymentów. Interesujące byłoby doświadczalne zbadanie przebiegu temperatury rotacyjnej w mieszaninach gazu dwuatomowego - wodoru - z ciężkimi gazami szlachetnymi, np. argonem czy ksenonem, jak również, w mieszaninach gazów jednoatomowych typu Ar-He i Xe-He, przebadanie grubości fali w szerokim zakresie składu % przy ustalonej liczbie Macha, oraz wpływu liczby Macha na grubość fal.

Reasumując, analiza rezultatów uzyskanych w obecnej pracy pozwala stwierdzić, że obserwowane doświadczalnie niekla-

syczne przebiegi różnych wielkości makroskopowych w falach uderzeniowych w mieszaninach gazów jednoatomowych i dwuatomowych mogą być efektywnie zbadane i opisane za pomocą odpowiednio zmodyfikowanych równań relaksacyjnych typu BGK. Potwierdza to przydatność tych równań do badania różnych procesów nierównowagowych zachodzących w gazach rozrzedzonych.



## DODATEK I

## OBLICZANIE PARAMETRÓW KRZYŻOWYCH I CZĘSTOŚCI ZDERZEŃ

1. Obliczanie parametrów krzyżowych na podstawie równań Boltzmanna.

Z równania Boltzmanna otrzymujemy następujące wyrażenia na zmiany  $U_i$  oraz  $T_i$  (dla przypadku przestrzennie jednorodnego [31]):

$$\frac{\partial}{\partial t} (N_1 m_1 U_1) = \frac{1}{2} \alpha_E (m_1 + m_2) (U_2 - U_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (N_2 m_2 U_2) = \frac{1}{2} \alpha_E (m_1 + m_2) (U_1 - U_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (N_1 k T_1) = \alpha_E \left[ k (T_2 - T_1) + \frac{1}{3} m_2 (\Delta U)^2 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (N_2 k T_2) = \alpha_E \left[ k (T_1 - T_2) + \frac{1}{3} m_1 (\Delta U)^2 \right]$$

gdzie:  $\Delta U = U_2 - U_1$

$$\alpha_E = \begin{cases} \frac{16}{3} \frac{N_1 N_2}{(m_1 + m_2)^2} \left[ \frac{2k}{\pi} m_1 m_2 (m_2 T_1 + m_1 T_2) \right]^{\frac{1}{2}} \sigma_{12}^2 & \text{dla sztywnych kul} \\ 4\pi \left[ \frac{\beta_{21} m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{0.422 N_1 N_2}{m_1 + m_2} & \text{dla cząstek Maxwella} \end{cases}$$

natomiast  $\sigma_{12}^2$  jest przekrojem czynnym na zderzenia pomiędzy cząstkami 1 i 2 ([31],[32]). Widać, że dla cząstek Maxwella  $\alpha_E$  nie zależy od temperatury.

Analogiczne wyrażenia dla równań BGK mają postać :

$$\frac{\partial}{\partial t} (N_1 m_1 U_1) = \tau_{12}^{-1} (m_1 N_1 U_{12} - m_1 N_1 U_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (N_2 m_2 U_2) = \tau_{21}^{-1} (m_2 N_2 U_{21} - m_2 N_2 U_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (N_1 k T_1) = \tau_{12}^{-1} N_1 \left[ k T_{12} + \frac{1}{3} m_1 (U_{12} - U_1)^2 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (N_2 k T_2) = \tau_{21}^{-1} N_2 \left[ k T_{21} + \frac{1}{3} m_2 (U_{21} - U_2)^2 \right]$$

Równania te wyprowadza się obliczając  $m_i(v-U_i)$  - momenty, oraz  $\frac{1}{2}m_i(v-U_i)^2$  - momenty obu stron równań BGK.

Prawa zachowania całkowitego pędu i całkowitej energii dają dwie zależności pomiędzy  $U_{ij}$  i  $T_{ij}$ :

$$m_1 \tau_{12}^{-1} N_1 (U_{12} - U_1) + m_2 \tau_{21}^{-1} N_2 (U_{21} - U_2) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \tau_{12}^{-1} N_1 \left[ k(T_{12} - T_1) + \frac{m_1}{3}(U_{12}^2 - U_1^2) \right] + \\ & + \tau_{21}^{-1} N_2 \left[ k(T_{21} - T_2) + \frac{m_2}{3}(U_{21}^2 - U_2^2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Równania relaksacji różnic prędkości i temperatur, wynikające z równania Boltzmana, mają postać odpowiednio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (U_2 - U_1) = & -\frac{1}{2} \alpha_E (m_1 + m_2) \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) (U_2 - U_1) + \\ & - \frac{U_2}{N_2} \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{U_1}{N_1} \frac{\partial N_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (T_2 - T_1) = & -\alpha_E \left[ \left( \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right) (T_2 - T_1) + \frac{1}{3k} \left( \frac{m_2}{N_1} - \frac{m_1}{N_2} \right) (\Delta U)^2 \right] + \\ & - \frac{U_2}{N_2} \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{U_1}{N_1} \frac{\partial N_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (4)$$

Analogiczne wyrażenia dla równań BGK mają postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (U_2 - U_1) = & \tau_{21}^{-1} (U_{21} - U_2) - \tau_{12}^{-1} (U_{12} - U_1) + \\ & - \frac{U_2}{N_2} \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{U_1}{N_1} \frac{\partial N_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (T_2 - T_1) = \tau_{21}^{-1} \left[ T_{21} + \frac{m_1}{3} (U_{21} - U_2)^2 \right] +$$

$$-\frac{U_2}{N_2} \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{U_1}{N_1} \frac{\partial N_1}{\partial t} \quad (6)$$

Porównując stronami odpowiednie wyrażenia, otrzymujemy dwa brakujące równania na  $T_{ij}$  i  $U_{ij}$ :

$$-\frac{1}{2} \alpha_E (m_1 + m_2) (\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1}) (U_2 - U_1) = \tau_{21}^{-1} (U_{21} - U_2) - \tau_{12}^{-1} (U_{12} - U_1) \quad (7)$$

$$-\alpha_E \left[ \left( \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right) (T_2 - T_1) + \frac{1}{3k} \cdot \frac{1}{N_1 N_2} (\rho_2 - \rho_1) (\Delta U)^2 \right] = \cdot$$

$$= \tau_{21}^{-1} \left[ T_{21} + \frac{m_2}{3k} (U_{21} - U_2)^2 \right] - \tau_{12}^{-1} \left[ T_{12} + \frac{m_1}{3k} (U_{12} - U_1)^2 \right] \quad (8)$$

Równania (1), (2), (7), (8) tworzą układ czterech równań na cztery nieznanne parametry krzyżowe  $U_{12}$ ,  $U_{21}$ ,  $T_{12}$  i  $T_{21}$ . Zdefiniujemy:

$$R_1 = \frac{\alpha_E \tau_{21}}{N_2} \quad ; \quad m^s = \frac{\tau_{21} N_1}{\tau_{12} N_2}$$

Korzystając z tych oznaczeń, zapisujemy rozwiązanie układu (1), (2), (7), (8) w postaci:

$$U_{21} = U_2 + \frac{R_1(1+m)}{2m} (U_1 - U_2)$$

$$U_{12} = U_1 + \frac{R_1(1+m)}{2m^s} (U_2 - U_1)$$

$$T_{21} = T_2 - m^s \left[ T_{12} - T_1 + \frac{m_1}{3k} (U_{12}^2 - U_1^2) \right] - \frac{m_1}{3k} (U_{21}^2 - U_2^2)$$

$$T_{12} = T_1 - \left[ Z_e + \frac{m_1 m^s}{3k} (U_{12}^2 - U_1^2) + \frac{m_2}{3k} (U_{21}^2 - U_2^2) \right] / \left[ m^s (1 + N_2/N_1) \right]$$

$$\text{gdzie } Z_e = D_e - \frac{m_2}{3k} (U_{21}^2 - U_2^2) + \frac{m_1 m^s}{3k} \frac{N_2}{N_1} (U_{12} - U_1)^2$$

$$D_e = R_1 \left[ \left(1 + \frac{N_2}{N_1}\right) (T_1 - T_2) + \frac{1}{3k} \left(m_1 - m_2 \frac{N_2}{N_1}\right) (\Delta U)^2 \right]$$

Korzystając z definicji  $\alpha_E$  i  $\tau_{21}$  otrzymujemy:

$$R_1 = \begin{cases} \frac{8}{3\pi(1+m)^2} & \text{dla sztywnych kul} \\ \frac{2}{(1+m)^2} & \text{dla cząstek Maxwella} \end{cases}$$

## DODATEK II

### NORMALIZACJA , WIELKOŚCI MAKROSKOPOWE I WARUNKI RANKINA - HUGONICIA DLA MIESZANIN GAZÓW JEDNOATOMOWYCH

#### I DWUATOMOWYCH

##### 1. Normalizacja

Sprowadzimy wszystkie wielkości występujące w modelowym układzie równań (1) §1 rozdz. III do wielkości bezwymiarowych. Niech  $\lambda_0$  oznacza średnią drogę swobodną w mieszaninie gazów

przed falą uderzeniową:

$$\lambda_- = \frac{1}{n_{1(-\infty)} \Pi(1+\delta)\sigma_{11}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2} + \delta\sigma_1(1+m^{-1})^{1/2}} + \frac{\delta e}{\sigma_2 \sqrt{2}\delta e + \sigma_1(1+m)^{1/2}} \right]$$

Wszystkie wielkości występujące w modelowym układzie równań normalizujemy względem  $\lambda_-$ ,  $n_{1(-\infty)}$ ,  $u_{(-\infty)}$  oraz  $T_{(-\infty)}$ . Oznaczając symbolem  $\sim$  wielkości bezwymiarowe, definiujemy:

$$\tilde{x} = \frac{x}{\lambda_-}$$

$$\tilde{v}_x = \frac{v_x}{u_{(-\infty)}}; \quad \tilde{v}_y = \frac{v_y}{u_{(-\infty)}}; \quad \tilde{v}_z = \frac{v_z}{u_{(-\infty)}}$$

$$\tilde{w}_i(x) = \frac{w_i(x)}{n_{1(-\infty)}} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\tilde{u}_+(x) = \frac{u_+(x)}{u_{(-\infty)}}$$

$$\tilde{T}_+(x) = \frac{T_+(x)}{T_{(-\infty)}}; \quad \tilde{T}_{R-}(x) = \frac{T_{R-}(x)}{T_{(-\infty)}}$$

$$\tilde{e}(x) = \frac{e(x)}{kT_{(-\infty)}}$$

$$\tilde{N}_i(x) = \frac{N_i(x)}{n_{1(-\infty)}}; \quad \tilde{U}_i(x) = \frac{U_i(x)}{u_{(-\infty)}}; \quad i = 1, 2$$

$$\tilde{T}_i(x) = \frac{T_i(x)}{T_{(-\infty)}}; \quad \tilde{T}_R(x) = \frac{T_R(x)}{T_{(-\infty)}}; \quad \tilde{T}_C(x) = \frac{T_C(x)}{T_{(-\infty)}};$$

$$\tilde{T}_{ij}(x) = \frac{T_{ij}(x)}{T_{(-\infty)}}; \quad \tilde{U}_{ij}(x) = \frac{U_{ij}(x)}{T_{(-\infty)}}; \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j$$

$$\tilde{\tau}_{11}^{-1}(x) = \frac{\lambda_-}{u_{(-\infty)}} \tau_{11}^{-1}(x); \quad \tilde{\tau}_{22}^{-1}(x) = \frac{\lambda_-}{u_{(-\infty)}} \tau_{22}^{-1}(x); \quad \tilde{\tau}_{ij}^{-1}(x) = \frac{\lambda_-}{u_{(-\infty)}} \tau_{ij}^{-1}(x), \quad i \neq j, i, j = 1, 2.$$

W celu ubezwymiarowania układu równań modelowych, mnożymy każde z równań układu (1) §1 rozdz. III przez  $\lambda_- \cdot n_{1(-\infty)}^{-1} \cdot u_{(-\infty)}^{-1}$ .

Korzystając z powyższych definicji, otrzymujemy układ równań modelowych w postaci bezwymiarowej.

## 2. Wielkości makroskopowe

W celu zapisania wielkości makroskopowych: gęstości liczbowych  $N_1$  i  $N_2$ , prędkości hydrodynamicznych  $U_1$  i  $U_2$  oraz temperatur  $T_1$  i  $T_2$  w postaci funkcjonałów od nieznanych funkcji  $w_1, w_2, w_3, w_4, u_+$  i  $T_+$ , należy podstawić postulowane w §1 rozdz. III postaci funkcji rozkładu  $F_1$  i  $F_2$  do kinetycznych definicji tych wielkości. Po wykonaniu odpowiednich całkowań po składowych prędkości cząstki, otrzymujemy:

$$N_1 = \int F_1 dv = w_1 + w_2 \quad ; \quad N_2 = \int F_2 dv = w_3 + w_4$$

$$U_1 = \frac{1}{N_1} \int F_1 v dv = \left[ \frac{1}{N_1} (w_1 + u_+ w_2), 0, 0 \right]$$

$$U_2 = \frac{1}{N_2} \int F_2 v dv = \left[ \frac{1}{N_2} (w_3 + u_+ w_4), 0, 0 \right]$$

$$T_i = \frac{1}{3kN_i} \int F_i m_i (v - U_i)^2$$

$$T_1 = \frac{1}{N_1} \left\{ w_1 \left[ 1 + \frac{C_1}{3} (1 - U_1) \right] + w_2 \left[ T_+ + \frac{C_1}{3} (u_+ - U_1) \right] \right\}$$

$$T_2 = \frac{1}{N_2} \left\{ w_3 \left[ 1 + \frac{C_2}{3} (1 - U_2) \right] + w_4 \left[ T_+ + \frac{C_2}{3} (u_+ - U_2) \right] \right\}$$

Wszystkie występujące tu wielkości są bezwymiarowe.

Wartości graniczne dla bezwymiarowych wielkości makroskopowych wynikają z warunków granicznych na funkcje  $w_1, w_2, w_3, w_4, u_+$  i  $T_+$ , i z warunków Rankina-Hugoniota. Otrzymujemy:

Dla  $x \rightarrow -\infty$  :

$$\lim N_1 = 1$$

$$\lim N_2 = \infty$$

$$\lim U_1 = \lim U_2 = \lim T_1 = \lim T_2 = 1$$

Dla  $x \rightarrow +\infty$  :

$$\lim N_1 = S_1^{-1}$$

$$\lim N_2 = \infty S_1^{-1}$$

$$\lim U_1 = \lim U_2 = S_1$$

$$\lim T_1 = \lim T_2 = S_2$$

Korzystając z tych wartości i z funkcjonalnej postaci parametrów krzyżowych  $U_{ij}$  i  $T_{ij}$ , obliczonych w §2 rozdz.II, znajdujemy graniczne wartości parametrów krzyżowych:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} U_{12} = \lim_{x \rightarrow -\infty} U_{21} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} T_{12} = \lim_{x \rightarrow -\infty} T_{21} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U_{12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} U_{21} = S_1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T_{12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} T_{21} = S_2$$

W przypadku gazów z rotacyjnymi stopniami swobody otrzymujemy z definicji temperatury rotacyjnej:

$$N_2 T_R = \int de \int e F_2 dv$$

w przypadku postulatu (1) §4 rozdz.IV:

$$T_R = \frac{1}{N_2} \left[ (\alpha e - w_4 u_+) T_{R-} + w_4 S_2 \right],$$

natomiast w przypadku postulatu (14) §4 rozdz.IV:

$$T_R = \frac{1}{N_2} (\alpha e - w_4 u_+ + w_4 T_+)$$

3. Warunki Rankina-Hugoniota dla mieszaniny gazów jednoatomowych.

Rozważmy układ równań (3) z §2 rozdz.III. Zapisując ten układ dla  $x \rightarrow \pm\infty$  i korzystając z warunków granicznych i oznaczeń z §2, otrzymujemy układ równań:

$$E_1 = 1 = \frac{d_1}{u_- n_1(-\infty)}; \quad (a)$$

$$E_2 = \alpha e = \frac{d_2}{u_- n_1(-\infty)}; \quad (b)$$

$$E_3 = 1 + C_1 + \alpha e (1 + C_2) = \frac{1}{S_1} (S_2 + C_1 S_1^2) + \frac{\alpha e}{S_1} (S_2 + C_2 S_1^2) = \frac{d_3}{n_1(-\infty) k T(-\infty)}; \quad (c)$$

$$E_4 = 5 + C_1 + \alpha e (5 + C_2) = 5 S_2 + C_1 S_1^2 + \alpha e (5 S_2 + C_2 S_1^2) = \frac{d_4}{n_1(-\infty) u_1(-\infty) k T(-\infty)}; \quad (d)$$

Z dwóch ostatnich równań tego układu obliczymy  $S_1$  i  $S_2$  w funkcji stosunku liczbowych gęstości gazów przed falą:  $\alpha = \frac{n_2(-\infty)}{n_1(-\infty)}$  oraz parametrów  $C_1 = \frac{m_1 u_{(-\infty)}^2}{kT_{(-\infty)}}$  i  $C_2 = \frac{m_2 u_{(-\infty)}^2}{kT_{(-\infty)}}$ , uzyskując w ten sposób wielkości makroskopowe opisujące strumień gazów za falą uderzeniową:  $u_{(+\infty)}$  i  $T_{(+\infty)}$  w funkcji odpowiednich wielkości przed falą:  $u_{(-\infty)}$  i  $T_{(-\infty)}$ . Zależności tego rodzaju nazywamy warunkami Rankina-Hugoniota. Mówimy, że  $S_1$  i  $S_2$  opisują skok prędkości gazów, ich gęstości i temperatury w fali uderzeniowej.

Układ c) i d) jest układem dwóch równań kwadratowych na  $S_1$  i  $S_2$ . Jego rozwiązanie ma postać:

$$S_1 = \frac{1}{4} \left[ \frac{5(1+\alpha)}{C_1 + \alpha C_2} + 1 \right]$$

$$S_2 = \frac{1}{16} \left[ 3 + \frac{3}{5} \frac{C_1 + \alpha C_2}{1 + \alpha} \right] \cdot \left[ 5 - \frac{5(1+\alpha)}{3(C_1 + \alpha C_2)} \right]$$

Oznaczając  $M^2 = \frac{3}{5} \frac{C_1 + \alpha C_2}{1 + \alpha} = \frac{3}{5} C_1 \frac{1 + \alpha m}{1 + \alpha}$ , zapisujemy rozwiązanie w postaci:

$$S_1 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{3}{M^2} \right)$$

$$S_2 = \frac{1}{16} (3 + M^2) \left( 5 - \frac{4}{M^2} \right)$$

Wielkość  $M$  nazywamy liczbą Macha mieszaniny gazów. Dla  $\alpha \rightarrow 0$  otrzymujemy  $M^2 = \frac{3}{5} \frac{m_1 u^2}{kT_-}$ , czyli liczbę Macha dla gazu 1. Dla  $\alpha \rightarrow \infty$

otrzymujemy  $M^2 = \frac{3}{5} \frac{m_2 u^2}{kT_-}$ , czyli liczbę Macha dla gazu 2.

Podstawiając  $\gamma = 5/3$ ,  $R = \frac{k(1+\alpha)}{m_1 + \alpha m_2}$ ,  $M^2 = \frac{u^2}{\gamma RT_-}$ , rozwiązanie to przepisujemy w postaci, dogodnej do obliczeń i do porównania z odpowiednimi wyrażeniami dla mieszaniny gazu jednoatomowego i dwuatomowego:

$$S_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left[ \frac{2}{(\gamma - 1)M^2} + 1 \right]$$

$$S_2 = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \left( M^2 + \frac{2}{\gamma - 1} \right) \left( M^2 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right) \cdot \frac{1}{M^2}$$



4. Warunki Rankina-Hugoniota dla mieszaniny gazu jednoatomowego i dwuatomowego

Wstawiając  $w_1$  i  $w_3$  obliczone z dwóch pierwszych równań układu (8) § 4 rozdz IV do pozostałych równań, otrzymujemy po przekształceniach algebraicznych:

$$\begin{cases} bu_+^2 - \varphi_3 u_+ + aT_+ = 0 \\ \varphi_3 u_+^2 + (4aT_+ + \varphi_1)u_+ - \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a &= a(x) = w_2(x) + w_4(x) \\ b &= b(x) = C_1 w_2(x) + C_2 w_4(x) \\ \varphi_1 &= -5a(x) - b(x) + 2w_4(x) [S_2 - T_{R-}(x)] \\ \varphi_2 &= 2\alpha [1 - T_{R-}(x)] \\ \varphi_3 &= a(x) + b(x) \end{aligned}$$

Układ ten jest równoważny układowi równań trzeciego stopnia na niewiadome funkcje  $u_+(x)$  i  $T_+(x)$ :

$$\begin{cases} u_+^3 - \frac{5\varphi_3}{4b} u_+^2 - \frac{\varphi_1}{4b} u_+ + \frac{\varphi_2}{4b} = 0 \\ T_+ = \frac{1}{a} (\varphi_3 u_+ - b u_+^2) \end{cases}$$

Wypisując równania zachowania pędu i energii (8) § 4 rozdz IV dla  $x \rightarrow \pm\infty$  i korzystając z warunków granicznych na funkcje  $w_2(x)$ ,  $w_4(x)$  i  $T_{R-}(x)$ , otrzymujemy układ dwóch równań stopnia drugiego na niewiadome  $S_1$  i  $S_2$ :

$$\begin{aligned} 1 + C_1 + \alpha(1 + C_2) &= \frac{1}{S_1} (S_2 + C_1 S_1^2) + \frac{\alpha}{S_1} (S_2 + C_2 S_1^2) \\ 5 + C_1 + \alpha(7 + C_2) &= 5S_2 + C_1 S_1^2 + \alpha(7\alpha + C_2 S_1^2) \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego układu ma postać:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{(6\alpha+4)(C_1+\alpha C_2)} \left[ (\alpha+1)(C_1+\alpha C_2) + (\alpha+1)(7\alpha+5) \right] \\ S_2 &= \frac{1}{4(C_1+\alpha C_2)(3\alpha+2)^2} \left[ (C_1+\alpha C_2) + 7\alpha + 5 \right] \left[ (C_1+\alpha C_2)(5\alpha+3) - (\alpha+1)^2 \right] \end{aligned}$$

Podstawiając  $\gamma = \frac{7x+5}{5x+3}$   
 $\delta M^2 = (\bar{C}_1 + x C_2)(1 + x)^{-1}$

rozwiązanie to można przepisać w postaci:

$$S_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left[ \frac{2}{(\gamma-1)M^2} + 1 \right]$$

$$S_2 = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \left( M^2 + \frac{2}{\gamma-1} \right) \left( M^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) \cdot \frac{1}{M^2}$$

Otrzymaliśmy takie same wyrażenia, jak w przypadku mieszaniny gazów jednoatomowych, jedynie definicje  $\gamma$  są różne. Dla  $x \rightarrow 0$  otrzymujemy te same wartości  $S_1$  i  $S_2$ , jak dla pojedynczego gazu jednoatomowego.

### 5. Obliczenie częstości zderzeń

W celu wyprowadzenia wzoru na częstości zderzeniowe założymy, że cząstki gazów są sztywnymi kulami o promieniach  $r_1$  i  $r_2$ . Liczba zderzeń w jednostce czasu pomiędzy jedną cząstką typu "i" o prędkości w przedziale od  $v_i$  do  $v_i + dv_i$  oraz wszystkimi cząstkami typu "j" o prędkościach w przedziale od  $v_j$  do  $v_j + dv_j$  jest równa liczbie cząstek typu "j" o prędkościach w przedziale od  $v_j$  do  $v_j + dv_j$  w cylindrze o podstawie  $\pi(r_1 + r_2)^2$  i wysokości  $g = |v_i - v_j|$ . Ponieważ liczba cząstek typu "j" w tym przedziale prędkości i na jednostkę objętości wynosi  $F_j(x, v_j) dv_j$ , a objętość cylindra równa się  $\pi g (r_1 + r_2)^2$  więc szukana liczba zderzeń jest równa [2]

$$\pi g (r_1 + r_2)^2 F_j(x, v_j) dv_j \equiv g Q_{ij}^2 F_j dv_j^3$$

Liczba zderzeń cząstki "i" o prędkościach wokół  $v_i$  ze wszystkimi cząstkami typu "j" w jednostce czasu i objętości ma więc postać:

$$v_{ij}(v_i) = \int_{-\infty}^{\infty} g Q_{ij} F_j dv_j^3$$

Wyrażenie to nazywamy częstością zderzeń cząstki o prędkości  $v_i$ .

Wyrazimy  $dv_j^3$  oraz  $g$  jako funkcje od  $v_j$  i kąta  $\theta$  pomiędzy wektorami  $v_i$  oraz  $v_j$ . We współrzędnych sferycznych otrzy-

mujemy:

$$dv_j^3 = v_j^2 \sin \theta d\theta d\Phi dv_j$$

$$g^2 = v_j^2 + v_i^2 - 2v_i v_j \cos \theta$$

Podstawiając zamiast  $F_j$  lokalnie maxwellową funkcję rozkładu i wykonując całkowanie [2] po kątach, otrzymujemy [ dla  $Q_{ij} = \text{const}$  ] :

$$v_{ij}(v_i) = \frac{N_j}{\sqrt{\pi}} Q_{ij} \frac{2kT_j}{m_j v_i} \Psi \left( v_i \sqrt{\frac{m_j}{2kT_j}} \right)$$

gdzie 
$$\Psi(x) = x e^{-x^2} + (2x^2 + 1) \int_0^x e^{-y^2} dy$$

Całkowaną częstość zderzeń  $v_{ij}$  definiujemy jako liczbę zderzeń w jednostce czasu i objętości cząstki typu "i" ze wszystkimi cząstkami typu "j". W celu obliczenia  $v_{ij}$  mnożymy  $v_{ij}(v_i)$  przez liczbę cząstek typu "i" o prędkościach w przedziale od  $v_i$  do  $v_i + dv_i$  :  $F_i(x, v_i) dv_i$  i całkujemy po  $dv_i$ , otrzymując:

$$v_{ij} = \frac{4\sqrt{\pi}}{N_i} \int_0^{\infty} F_i v_i^2 v_{ij}(v_i) dv_i$$

Podstawiając znalezione wyżej wyrażenie na  $v_{ij}(v_i)$  oraz  $F_i$  w postaci lokalnie maxwelloskiej funkcji rozkładu, otrzymujemy po scałkowaniu:

$$v_{ij} = 2Q_{ij} N_j \left[ \frac{2k}{\pi} \left( \frac{T_i}{m_i} + \frac{T_j}{m_j} \right) \right]^{1/2}$$

Warto, zauważyć, że dla  $Q_{ij} = \alpha/g$  mamy  $v_{ij}(v_i) = \alpha N_j$  oraz  $v_{ij} = \alpha N_j$ , a zatem częstość zderzeń  $v_{ij}$  nie zależy od  $T_1, T_2$  i od stosunku mas atomowych, natomiast częstość zderzeń  $v_{ij}(v_i)$  nie zależy od  $v_i$ . Taka zależność odpowiada cząstkom Maxwella.

Dla zderzeń pomiędzy cząstkami tego samego rodzaju otrzymujemy:

$$v_{ii} = 4Q_{ii} N_i \sqrt{\frac{kT_i}{\pi m_i}}$$

Uzupełnienie do p-tu 2 str.59

W trakcie badania struktury fali uderzeniowej w ustalonej mieszaninie /np.Ar-He/ w zależności od jej składu procentowego przy ustalonej liczbie Macha okazało się, że dla pewnego składu procentowego zachodzi zmiana charakteru osobliwości odpowiadających stanom stacjonarnym przed i za falą. I tak, dla mieszaniny Ar-He / $m=m_2/m_1$ / dla  $m=0.1$  i  $M=2.0$ , zmiana charakteru punktu osobliwego zachodziła dla -w przybliżeniu - dwukrotnie większej ilości /liczbowo/ lżejszego składnika. W mieszaninie Xe-He / $m=0.03$ / zmiana charakteru osobliwości następowała przy około 90 procent zawartości He / $M=2.0$ /.

Przedstawimy wytłumaczenie faktów(\*) opisanych powyżej i uogólnienie dla dowolnych mieszanin i liczb Macha.

Niech  $c_1 = \sqrt{\gamma R_1 T_-}$  oznacza prędkość dźwięku w cięższej gazie  $m_1$   
 $c_2 = \sqrt{\gamma R_2 T_-}$     -"-    -"-    -"-    " lżejszym    -"-     $m_2$   
 $c = \sqrt{\gamma R T_-}$     -"-    -"-    -"-    " mieszaninie  $m_1/m_2$

$$R_1 = \frac{k}{m_1} ; R_2 = \frac{k}{m_2} ; \gamma = \frac{5}{3} ; R = \frac{k(1+\alpha)}{m_1 + \alpha m_2}$$

$\alpha = n_{2(-\infty)}/n_{1(-\infty)}$  jest stosunkiem liczbowych gęstości gazów 2 i 1 przed falą

$u_-$     -    oznacza prędkość fali uderzeniowej

$M = u_-/c$     -    oznacza liczbę Macha fali w mieszaninie gazów

Zachodzą nierówności:

$$c_1 < c < c_2 \\ c < u_-$$

Znak nierówności pomiędzy  $c_2$  i  $u_-$  zależy w ogólności od  $\alpha$ , tj. od składu mieszaniny. Obliczymy, dla jakiej wartości  $\alpha = \alpha_0$  zachodzi  $u_- = u_2$ , czyli  $Mc = c_2$

Podstawiając  $c$  i  $c_2$ , otrzymujemy

$$\alpha_0 = \left( \frac{1}{m} - M^2 \right) / (M^2 - 1) \quad (**)$$

(\*) Sugestię takiego wytłumaczenia zawdzięczam dr. R. Herczyńskiemu.

Z wzoru (\*\*)

a/ dla Ar-He /m=0.1/ otrzymujemy  $\kappa_0 = 2$ .

b/ dla Xe-He /m=0.03/ otrzymujemy  $\kappa_0 = 9.7$

c/ krzywa zależności  $\kappa_0$  od m ma charakter hiperboliczny.

Wnioski a/ i b/ są zgodne z obserwacjami opisanymi na początku uzupełnienia; wniosek c/ jest zgodny z punktem 2/ str.59 pracy. Niech  $m \leq \frac{1}{M^2}$ . Z wzoru(\*\*) wynika, że dla  $\kappa > \kappa_0$  przepływ jest naddźwiękowy dla obu gazów, natomiast dla  $\kappa < \kappa_0$  przepływ jest poddźwiękowy dla gazu  $m_2$ /lżejszego/, a naddźwiękowy dla gazu  $m_1$ /cięższego/. W punkcie  $\kappa = \kappa_0$  zmiany charakteru przepływu względem jednego z gazów następuje jednocześnie zmiana charakteru osobliwości odpowiadających stanom stacjonarym przed i za falą z siódła na węzeł.

Dla  $1 > m > \frac{1}{M^2}$  zdefiniowana wyżej wartość  $\kappa_0$  nie istnieje. Odpowiada to faktowi, że przepływ jest wtedy naddźwiękowy dla obu gazów przy dowolnych składach procentowych mieszaniny. Warto dodać, że zmianę struktury osobliwości, odpowiadającą zmianie charakteru przepływu względem lżejszego składnika, stwierdzili też W.L.Harris i G.K.Bieńkowski [26] rozwijając w szereg potęg stosunku mas makroskopowe momenty równań Boltzmanna dla składników oddziałujących potencjałem Maxwella.

Autor składa serdeczne podziękowania  
swojemu promotorowi, prof.dr Władysławowi Fiszdzonowi  
za życzliwą opiekę i pomoc  
w trakcie wykonywania pracy.

BIBLIOGRAFIA

Podręczniki

- [1] J.H.FERZIGER, H.G.KAPER Mathematical Theory of Transport Processes in Gases (American Elsevier, N.Y. 1972)
- [2] S.CHAPMAN, T.G.COWLING The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases (Cambridge Univ.Press, N.Y. 1970)
- [3] J.O.HIRSCHFELDER, C.F.CURTISS, R.B.BIRD Molecular Theory of Gases and Liquids (Wiley, N.Y. 1954)
- [4] M.KOGAN Rarefied Gas Dynamics (Plenum, N.Y. 1969)
- [5] J.W.BURGERS Flow Equations for Composite Gases (Academic Press, N.Y. 1969)
- [6] H.GRAD Principles of the Kinetic Theory of Gases - Handbuch der Physik (Springer-Verlag, Berlin, Germany 1958, vol. 12)
- [7] G.W.SUTTON, A.SHERMAN Engineering Magnetohydrodynamics (N.Y. Mc Graw-Hill, 1965)
- [8] O.A.MALKIN Relaksacjonnyje processy w gazie (Moskwa, Atomizdet 1971)

Prace źródłowe

Oznaczenia : RGD = Proceedings of the International Symposium on Rarefied Gas Dynamics

JFM = The Journal of Fluid Mechanics

PF = The Physics of Fluids

PR = The Physical Review

JCHP= The Journal of Chemical Physics

-11-

Mieszaniiny gazów jednoatomowych

- [11] K.ABE, H.OGUCHI VI RGD (1969) p. 425  
ISAS Rep.511 Tokyo 1974
- [12] P.C.BHATNAGAR, E.R.GROSS, M.KROOK PR 94 (1954) 511
- [13] R.BECKER Zh.Physik 8 (1921-22) 321
- [14] M.BRATOS, R.HERCZYŃSKI Euromech 125, Oxford 9-11 I 1980
- [15] T.G.COWLING Phil.Mag. 33 (1942) 61
- [16] S.P.DYAKOV Zh.Eksp.i Teoret.Fiz. 27 (1954) 728
- [17] T.FUJIMOTO IV RGD (1965) p.223
- [18] W.FISZDON, T.PLATKOWSKI Engineering Transaction 25, 2  
(1977) 333
- [19] W.FISZDON Prace IPPT, Warszawa 1978
- [20] W.FISZDON, R.HERCZYŃSKI, Z.WALENTA IX RGD (1974)
- [21] E.R.GROSS, M.KROOK PR 102 (1956) 593
- [22] E.GOLDMANN, L.SIROVICH JFM 35 (1969) 575  
PF 10 (1967) 1928, 12 (1969) 245
- [22a] D.P.GIDDENS, H.F.BARBARIKA, A.B.HUANG VII RGD p.1051
- [23] H.GRAD Theory of Rarefied Gases I RGD (1960) p.100
- [24] J.M.GREEN PF 16 (1973) 2022
- [25] B.B.HAMEL PF 8 (1965) 418, 9 (1966) 12  
X RGD, (1976) p.171
- [26] W.L.HARRIS, G.K.BIENKOWSKI VII RGD (1969) p.397  
PF 14 (1971) 2652
- [27] W.L.HARRIS, GOEBBEL, E.JOHNSON PF 19 (1970) 627
- [28] L.H.HOLWAY IV RGD (1965)  
PF 8 (1965) 1905, 9 (1966) 1658
- [29] E.JOHNSON PF 16 (1973) 45
- [30] H.M.MOTT-SMITH PR 82 (1951) 885
- [31] T.F.MORSE PF 6 (1963) 1420, 7 (1964) 2012

- [32] H.OGUCHI V RGD (1967) p.745
- [33] M.M.OBERAI PF 8(1965) 826, 9(1966) 1634
- [34] M.M.OBERAI, U.N.SINHA IX RGD (1974)
- [35] T.PLATKOWSKI Prace IPPT, Warszawa 1978
- [36] T.PLATKOWSKI XI RGD (1979) Paris CEA p.323
- [37] F.S.SHERMAN JFM 8(1960) 465
- [38] G.I.TAYLOR Collected Papers, Cambridge Univ.Press (1963)

Gazy z rotacyjnymi stopniami swobody

- [39] K.T.BRAU PF 10(1967) 48
- [40] K.T.BRAU, JONKMAN JCHP 52 (1970) 477
- [41] D.P.GIDDENS, H.F.BARBARIKA, A.B.HUANG VII RGD 1051
- [42] L.H.HOLWAY PF (1966) 1658
- [43] F.B.HANSON, T.F.MORSE PF 10(1967) 345, 12 (1969) 84
- [44] C.H.HEIGHT, T.S.LUNDGREN PF 10 (1967) 786
- [45] J.LORDI, R.MATES PF 31 (1970) 291
- [46] T.F.MORSE PF 7 (1964) 159
- [47] G.PAI, RAMACHANDRA PF 18 (1975) 166
- [48] J.G.PARKER PF 2 (1959) 449
- [49] W.RYKOW Mech.Żidk. i Gazow 6(1975) 106
- [50] H.RABITZ, S.H.LAM JCHP 63 8(1975) 3532
- [51] L.TALBOT, S.M.SCALA RGD (1961) p.603, RGD (1963) p.297
- [52] D.TURCOTTE VI RGD 1968 (9)
- [53] J.VENKATARAMAN, T.F.MORSE IV RGD (1968)
- [54] C.S.WANG-CHANG, G.E.UHLENBECK Eng.Res.Inst.Rep. CM-681, Univ.of Michigan, July 10, 1951
- [55] C.S.WANG-CHANG, G.E.UHLENBECK, J.de BOER Studies in Statistical Mechanics II, (North-Holland, Amsterdam 1964)



Prace eksperymentalne i numeryczne

- [56] H.ALSMEYER JFM 74 (1976) 497
- [57] C.A.BOITNOTT, R.C.WARDER Jr PF 14 (1971) 287
- [58] BEYLICH PF Supplement I, I-82 (1968)
- [59] G.A.BIRD JFM 31 (1968) 657
- [60] R.E.CENTER PF 10 (1967) 1777
- [61] A.S.GMURCZYK Euromech 125, Oxford 9-11 V 1980
- [62] R.J.GALLAGHER, PENN JCHP 60 (1974) 3487, 3492
- [63] L.N.HARNETT, E.P.MUNTZ PF 15 (1972) 565
- [64] M.LINZER, D.F.HORNING PF 6 (1963) 12
- [65] A.K.MACPHERSON JFM 49 (1971) 337
- [66] F.ROBEN, L.TALBOTT PF 9 (1966) 633-635
- [67] D.L. TURCOTTE VI RGD (1968) p.331
- [68] Z.A.WALENTA, A.S.GMURCZYK, M.TARCZYŃSKI XI RGD (1979)  
p.333
- [69] K.K.YOSHIKAWA, DEIWERT PF 18 (1975) 9  
XI RGD (1979)

$n$	0	1	2	3	4
$I_n(a)$	$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$	$\frac{1}{2a}$	$\frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{a^3}\right)^{1/2}$	$\frac{1}{2a^2}$	$\frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{a^5}\right)^{1/2}$

TABELA I Wartości całki  $I_n(a) = \int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx$ ,  $a \in \mathbb{R}$

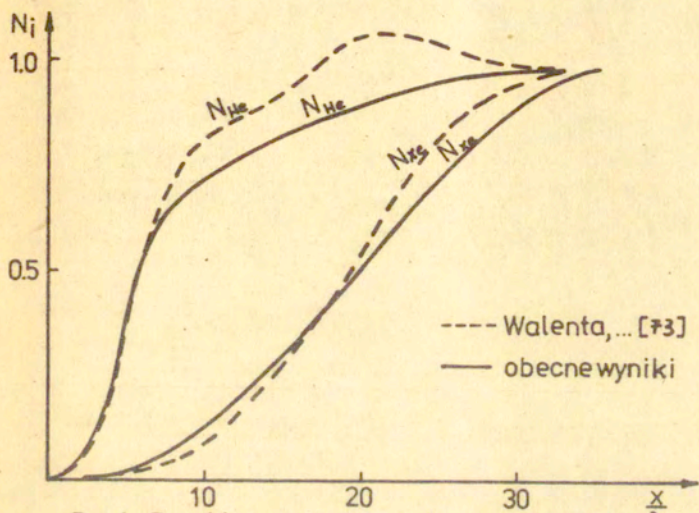
	He/Ne	He/Ar	He/Kr	He/Xe	Ne/Ar	Ne/Kr	Ne/Xe	Ar/Kr	Ar/Xe	Kr/Xe
$m$	0.20	0.10	0.05	0.03	0.50	0.24	0.15	0.48	0.30	0.64
$\sigma_1$	0.85	0.64	0.58	0.52	0.73	0.66	0.58	0.87	0.76	0.86
$\sigma_2$	0.70	0.36	0.27	0.19	0.50	0.38	0.28	0.76	0.55	0.72

TABELA II Dane mikroskopowe dla mieszanin gazów jednoatomowych

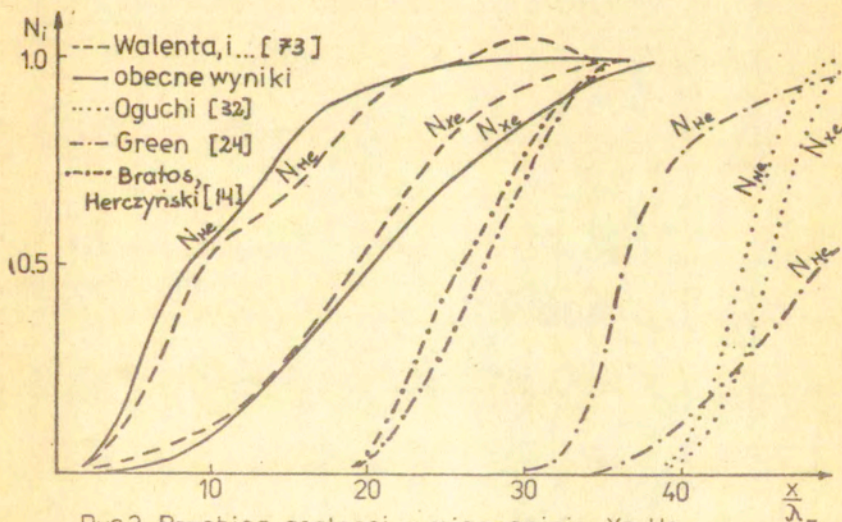
	H <sub>2</sub> /He	H <sub>2</sub> /Ne	H <sub>2</sub> /Ar	H <sub>2</sub> /Kr	H <sub>2</sub> /Xe	N <sub>2</sub> /He	N <sub>2</sub> /Ne	N <sub>2</sub> /Ar	N <sub>2</sub> /Kr	N <sub>2</sub> /Xe
$m$	0.50	0.10	0.05	0.025	0.015	7.00	1.39	0.70	0.33	0.21
$\sigma_1$	1.27	1.05	0.76	0.68	0.60	1.86	1.50	1.03	0.90	0.79
$\sigma_2$	1.56	1.11	0.56	0.42	0.31	3.00	2.11	1.06	0.81	0.58

	O <sub>2</sub> /He	O <sub>2</sub> /Ne	O <sub>2</sub> /Ar	O <sub>2</sub> /Kr	O <sub>2</sub> /Xe
$m$	8.00	1.58	0.80	0.36	0.24
$\sigma_1$	1.77	1.44	0.99	0.87	0.76
$\sigma_2$	2.76	1.96	0.98	0.75	0.54

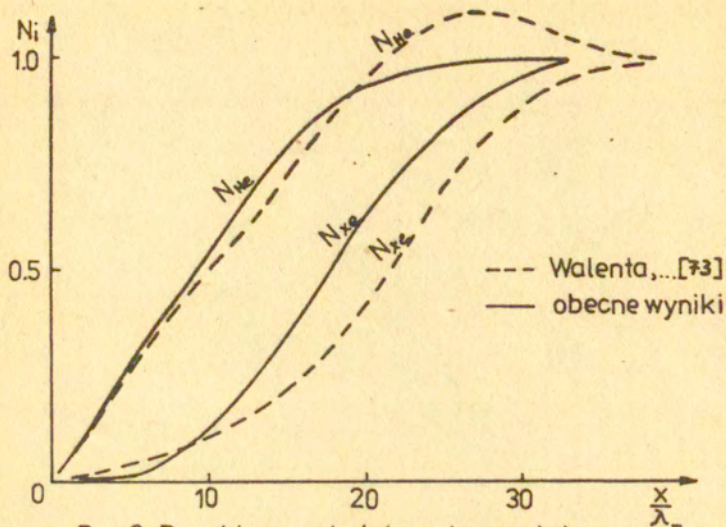
TABELA III Dane mikroskopowe dla mieszanin gazów z rotacją



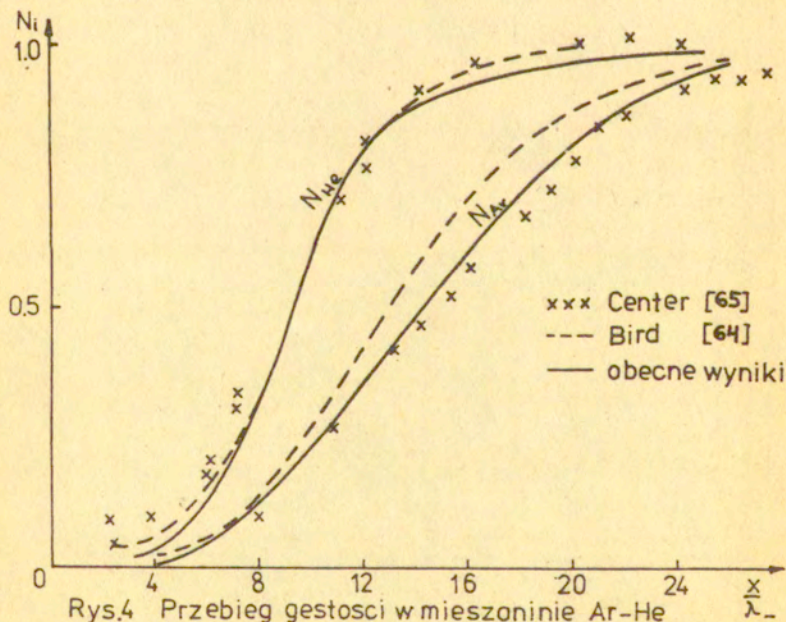
Rys.1 Przebieg gęstości w mieszaninie Xe-He dla 3% Xe,  $M=3.59$ .



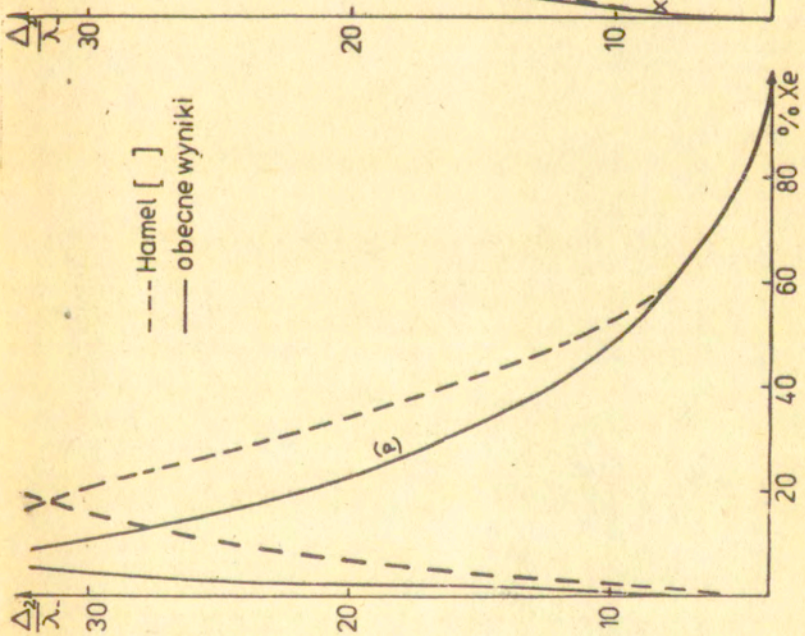
Rys.2 Przebieg gęstości w mieszaninie Xe-He dla 6% Xe,  $M=4.40$ .



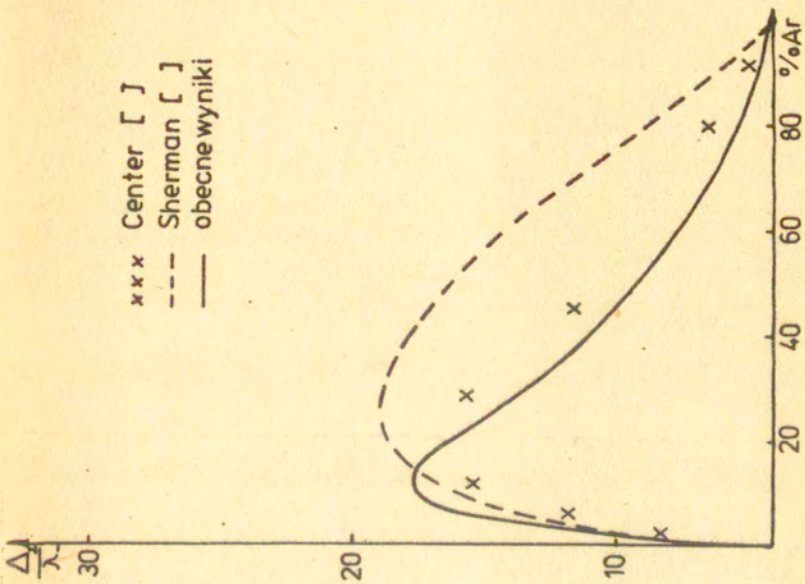
Rys.3 Przebieg gęstości w mieszaninie Xe-He dla 9% Xe ,  $M=4.80$  .



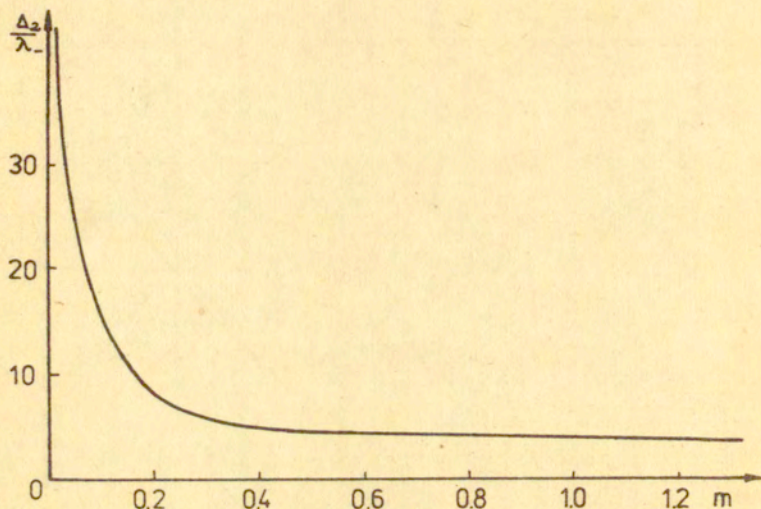
Rys.4 Przebieg gęstości w mieszaninie Ar-He dla 2% Ar ,  $M=2.0$  .



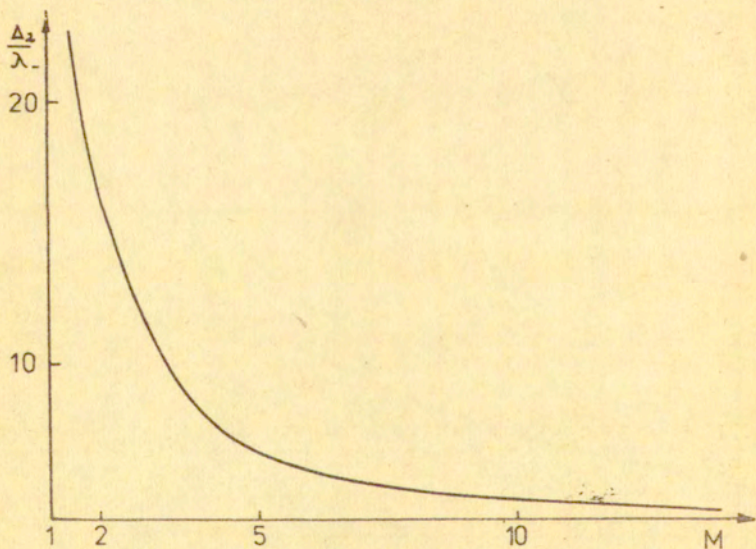
Rys.5 Grubosc fali uderzeniowej dla Xe-He



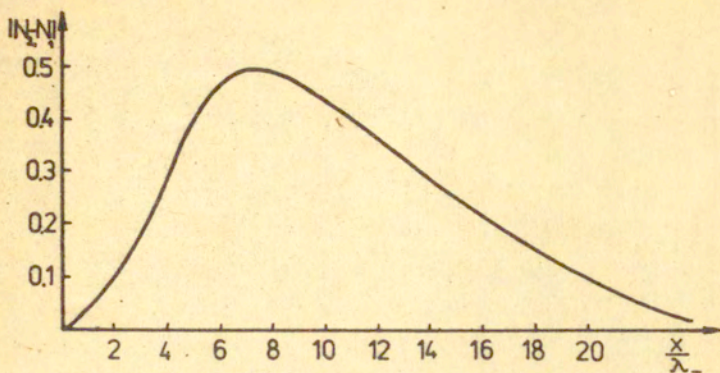
Rys.6 Grubosc fali uderzeniowej dla Ar-He.



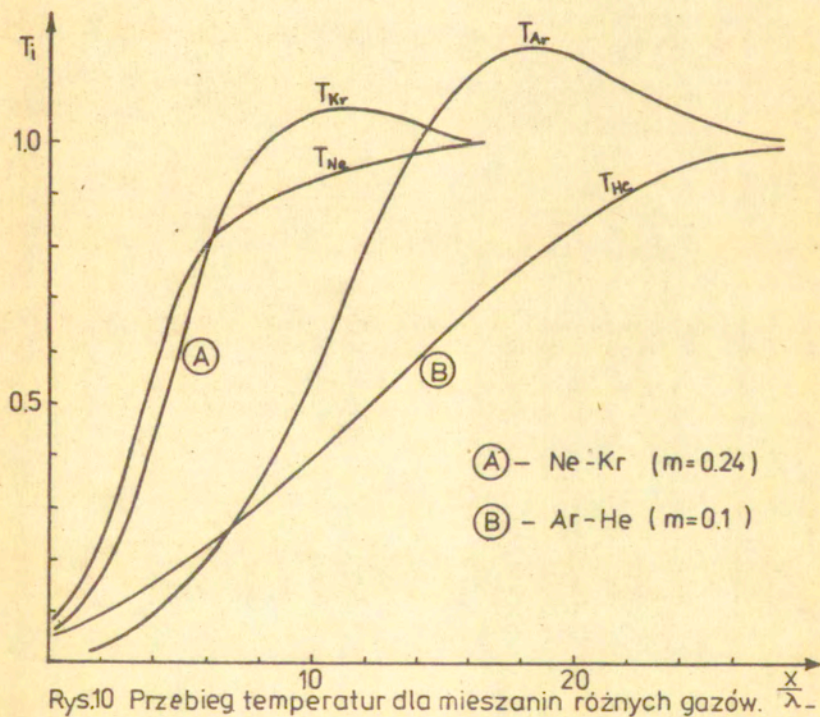
Rys.7 Grubość fali uderzeniowej w funkcji  $m = \frac{m_2}{m_1}$   
 $\sigma_1 = 0.6$ ,  $\sigma_2 = 0.3$ ,  $\kappa = 10.0$ ,  $M = 20$ .



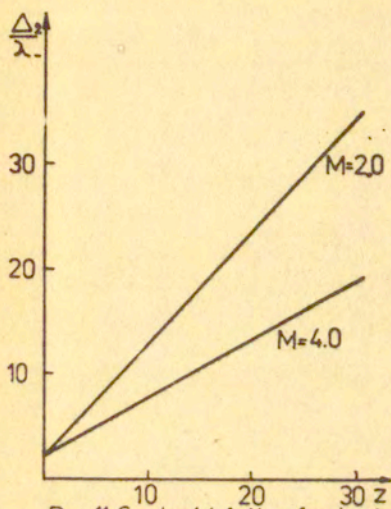
Rys.8 Grubość fali uderzeniowej w funkcji liczby Macha  $M$  w mieszaninie Ar-He dla  $\kappa = 10.0$ .



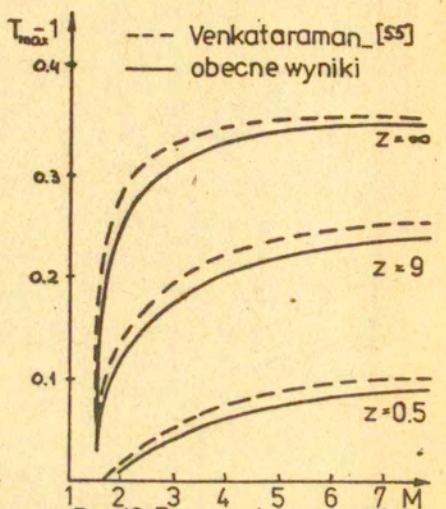
Rys.9 Wielkość separacji w funkcji położenia w mieszaninie Ar-He dla 10% Ar,  $M=20$ .



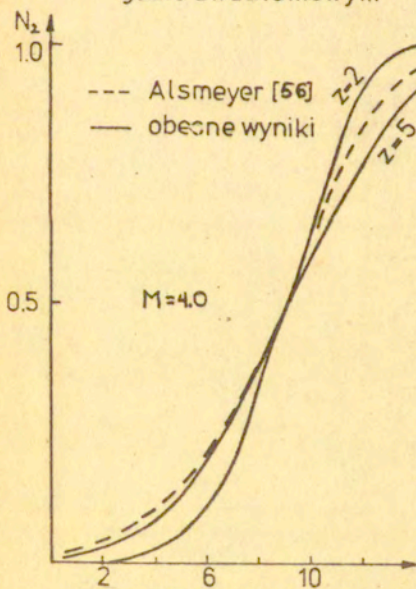
Rys.10 Przebieg temperatur dla mieszanin różnych gazów.



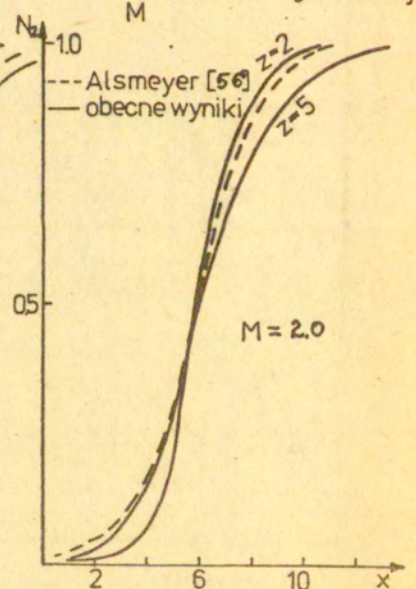
Rys.11 Grubość fali w funkcji liczby rotacyjnej w gazie dwuatomowym



Rys.12 Przerzut temperatury translacyjnej gazu dwuatomowego w funkcji  $M$

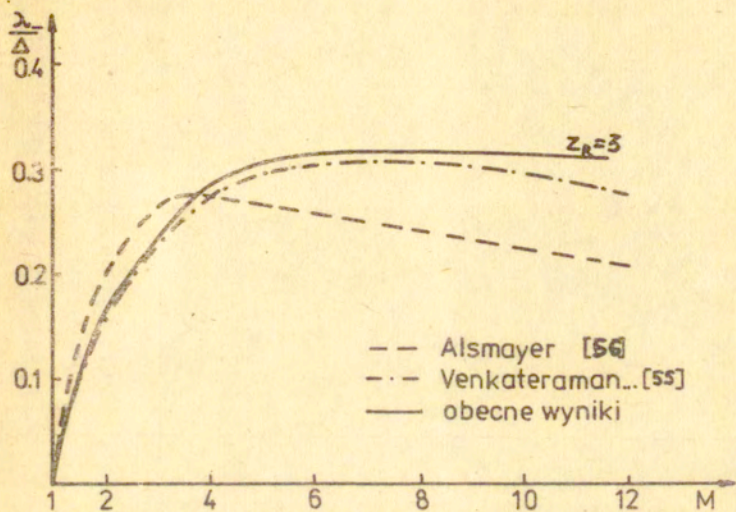


Rys.13 Przebieg gęstości azotu w fali uderzeniowej.

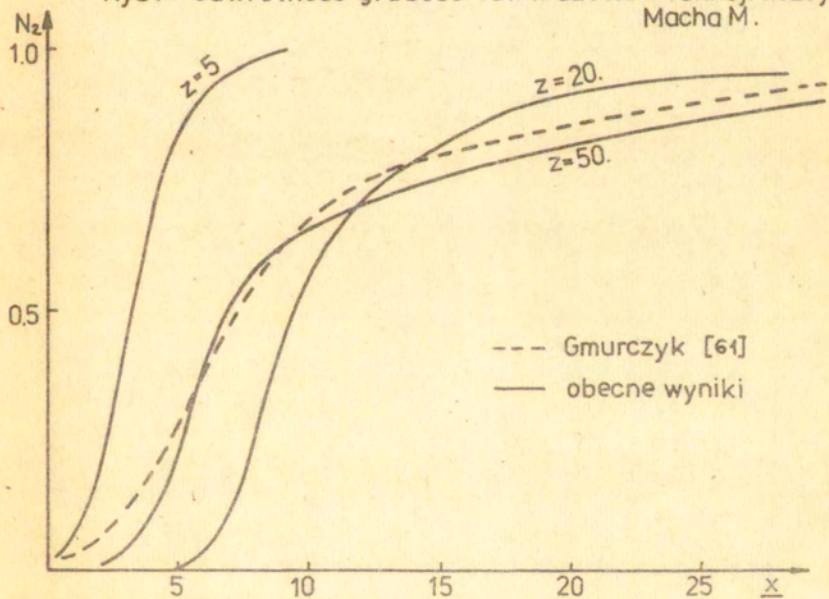


Rys.14 Przebieg gęstości azotu w fali uderzeniowej.

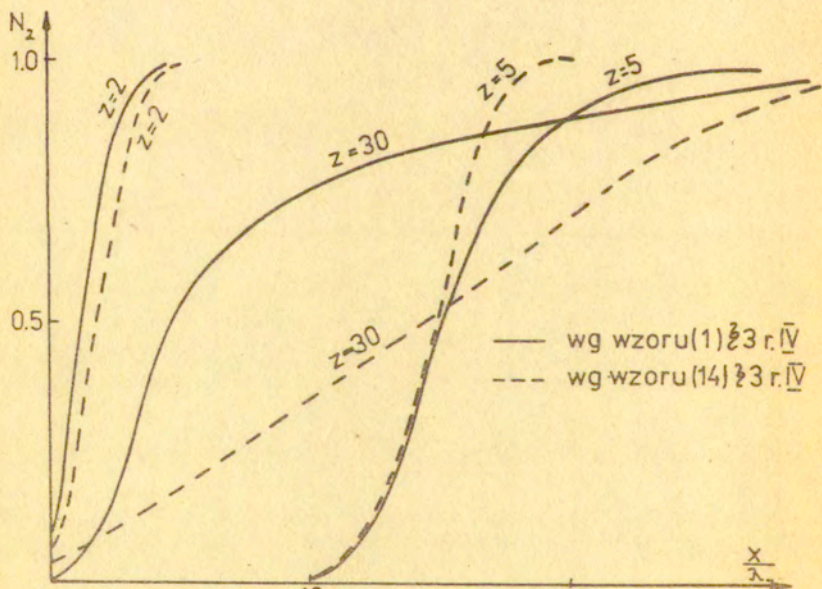




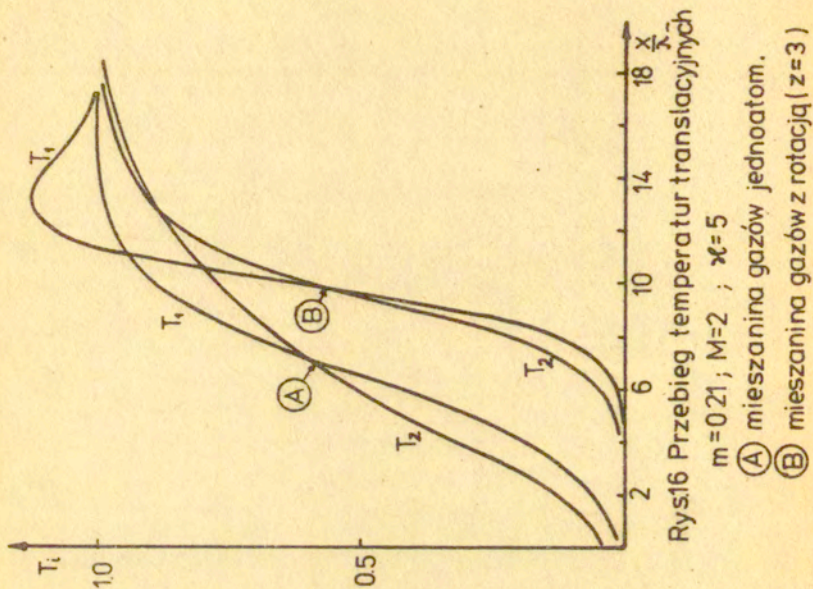
Rys14 Odwrotność grubości fali w azocie w funkcji liczby Macha  $M$ .



Rys15 Przebieg gęstości wodoru w fali uderzeniowej  $\lambda$ -  
 $M=3.0$



Rys.17 Przebieg gęstości pojedynczego gazu dwuatomowego  $M=4.0$   
<http://rcin.org.pl>

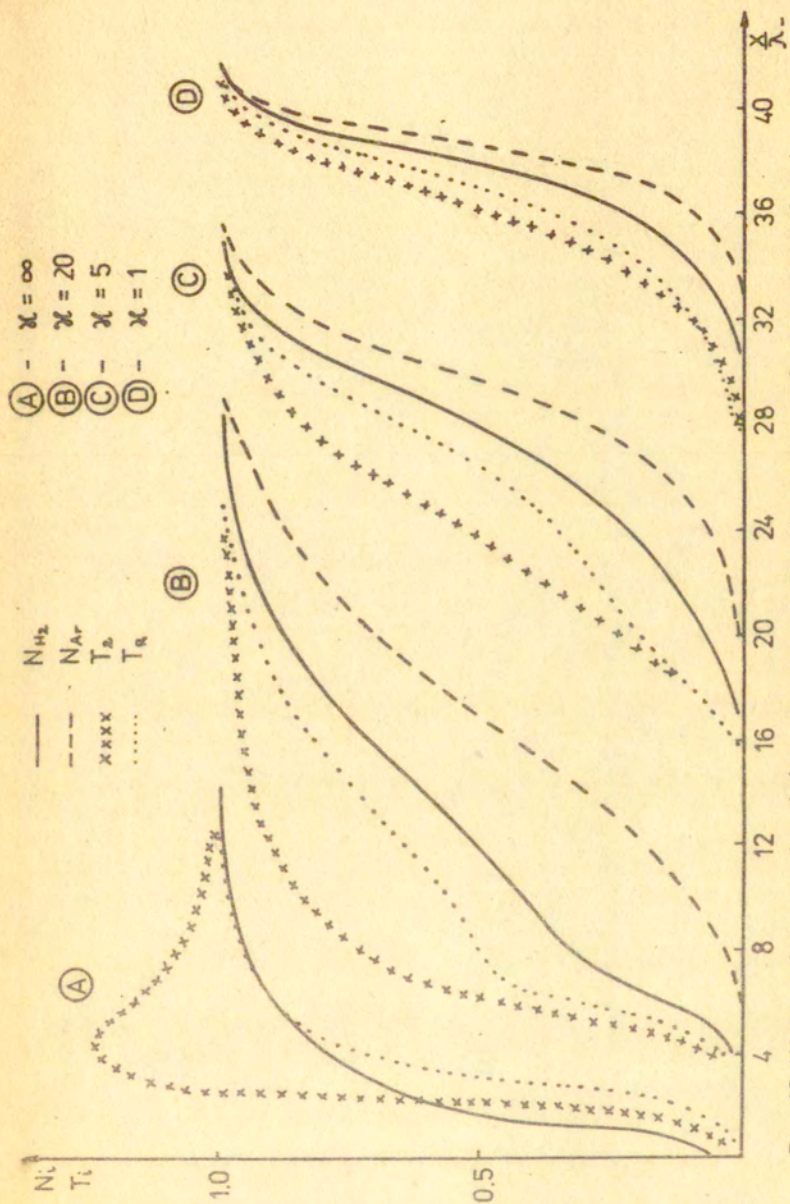


Rys.16 Przebieg temperatur translacyjnych

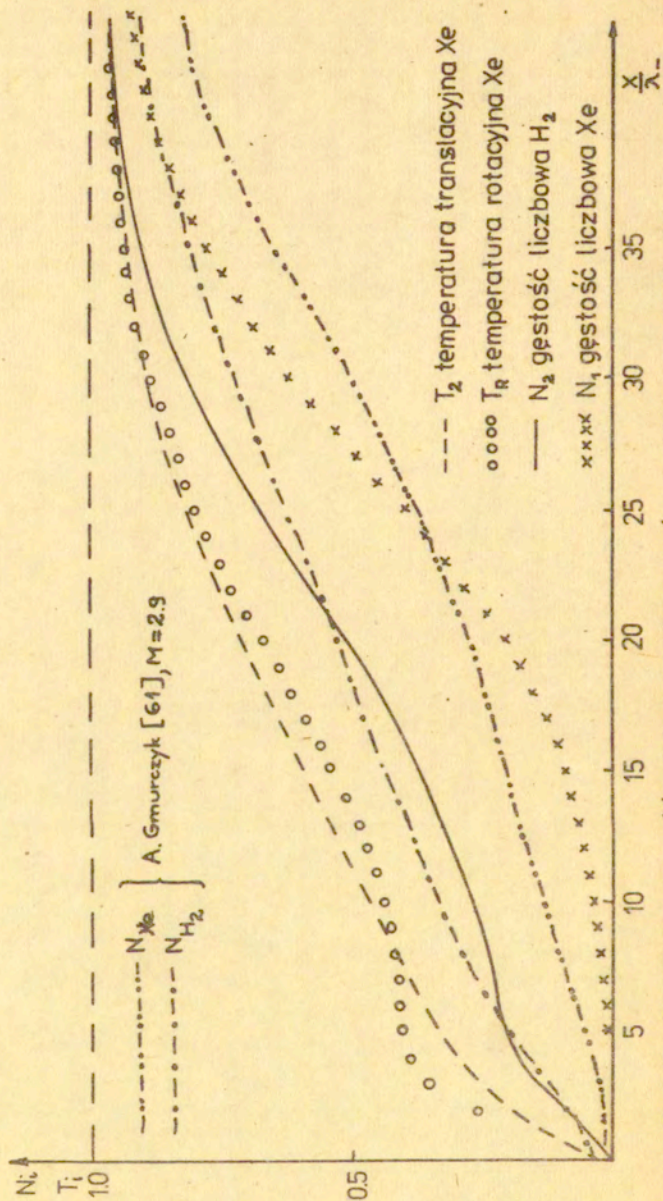
$m=0.21$ ;  $M=2$ ;  $\gamma=5$

(A) mieszanina gazów jednoatom.

(B) mieszanina gazów z rotacją ( $z=3$ )



Rys.18 Wpływ dodawania cięższego gazu jednoatomowego na strukturę fali uderzeniowej w mieszaninie Ar-H<sub>2</sub> m=0.5, M=4.0, z=20.0.



Rys 19 Przebieg gęstości i temperatur gazów w mieszaninie  $H_2$ -Xe

dla 3% Xe,  $M=5$ ,  $Z=20$ .

### Spis treści

Wstęp . . . . .	3
Rozdział I. Fale uderzeniowe w mieszaninach gazów jednoatomowych . . . . .	
§1. Uwagi ogólne.Przegląd literatury . . . . .	6
§2. Opis modelu fizycznego. Równanie Boltzmann'a a równania modelowe . . . . .	17
Rozdział II. Specyfikacja parametrów zderzeniowych w równaniach modelowych . . . . .	
§1. Relacje symetrii i równania zachowania dla mieszaniny gazów jednoatomowych . . . . .	24
§2. Wyznaczanie parametrów krzyżowych w równaniach modelowych . . . . .	25
§3. Wyznaczanie czasów relaksacji . . . . .	28
Rozdział III. Rozwiązanie układu równań modelowych dla mieszaniny gazów jednoatomowych . . . . .	
§1. Metoda rozwiązywania układu równań modelowych . . . . .	32
§2. Lokalne równania zachowania dla mieszaniny gazów jednoatomowych . . . . .	38
§3. Sprowadzenie układu modelowego do układu równań różniczkowych zwyczajnych . . . . .	42
§4. Analiza osobliwości układu równań różniczkowych . . . . .	46
Rozdział IV. Fale uderzeniowe w mieszaninach gazów jednoatomowych i dwuatomowych . . . . .	
§1. Uwagi ogólne . . . . .	55
§2. Wyprowadzenie układu równań modelowych . . . . .	58

§3. Specyfikacja parametrów krzyżowych . . .	59
§4. Metody rozwiązywania układu równań modelowych . . . . .	63
Rozdział V. Omówienie wyników . . . . .	
§1. Opis procedury numerycznej . . . . .	76
§2. Omówienie wyników dla mieszanin gazów jednoatomowych . . . . .	78
§3. Struktura fali uderzeniowej w pojedynczym gazie dwuatomowym . . . . .	86
§4. Omówienie wyników dla mieszanin gazów jednoatomowych i dwuatomowych. Podsumowanie . . . . .	90
Dodatek I. Obliczanie parametrów krzyżowych . . . . .	97
Dodatek II. Normalizacja, wielkości makroskopowe i warunki Rankina-Hugoniota dla miesza- nin gazów. Obliczanie częstości zderzeń . .	100
Uzupełnienie . . . . .	108
Bibliografia . . . . .	110
Tabele, wykresy . . . . .	114