

PRACA HABILITACYJNA

Zofia Kurlandzka

PEKANIE DIELEKTRYKÓW

POD WPŁYWEM

POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

9/1998



P.269

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 15 października 1998 r.

Recenzent – Doc. dr hab. Marek Matczyński



56539

0208.9



Praca habilitacyjna

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark. wyd. 12,00 Ark. druk. 15,00

Oddano do drukarni w październiku 1998r.

ATOS Poligrafia-Reklama, Warszawa, ul. Jana Kazimierza 35/37

Zofia Kurlandzka

Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych

Pękanie Dielektryków pod Wpływem Pola Elektromagnetycznego

Wstęp

Prezentowana publikacja stanowi syntezę wyników, które ukazały się drukiem w Biuletynie PAN, Seria Techniczna w latach 1975-1995. Prace te są pewną logiczną całością i przedstawiają w określonym zakresie rozwój teorii pękania elektromagnetycznego na przykładzie sprężystego dielektryka od prostszych problemów statycznych do pełnego zagadnienia pękania dielektryka w niestacjonarnym polu elektromagnetycznym. W przedstawianym tu opracowaniu pominięto większość szczegółowych przekształceń matematycznych ograniczając się na ogół do podania ostatecznych równań, ich rozwiązań oraz innych rezultatów. Wszystkie brakujące elementy znajdują się w pełnym zbiorze publikacji, ułożonym chronologicznie i załączonym do niniejszej pracy stanowiąc z nią całość. Od czasu opublikowania pierwszych prac autorki upłynęło ponad 20 lat, dlatego szereg wyników przedstawionych niżej zostało podanych w doskonalszej wersji lub wręcz opracowanych na nowo. Dodano też kilka nowych wyników.

Pod koniec lat pięćdziesiątych [4], powstała teoria oddziaływań pola elektromagnetycznego z ośrodkiem sprężystym. W następnych latach nastąpił szybki rozwój tej problematyki na świecie w tym również w Polsce, [20] przy czym dotyczyła ona materiałów o różnych własnościach zarówno elektromagnetycznych jak i mechanicznych. W trakcie badań wyłoniły się dwa aspekty tych zagadnień, to jest elektromagnetyczno-elektroniczny dotyczący generacji fal w materiałach o własnościach elektromagnetycznych oraz mechaniczny związany z badaniem sił i deformacji w materiałach wywoływanych przez pola elektromagnetyczne. Zagadnieniom tym poświęcone były prace zarówno teoretyczne jak i doświadczalne.

Stwierdzono doświadczalnie, że silne pola elektromagnetyczne wytwarzają w materiałach duże naprężenia mechaniczne, mimo to wpływ pól elektromagnetycznych nie był,

do roku 1975, uwzględniany przez badaczy zajmujących się problematyką pęknięcia materiałów. W 1975 roku ukazały się cztery prace autorki [25], [26], [27], [28], w tym jedna dwuczęściowa oraz dwie prace autorów radzieckich [22], [23]. W następnych dwóch latach opublikowane zostały kolejne prace autorki [29], [30], praca radziecka [48] i praca japońska [55] a w latach osiemdziesiątych amerykańskie [46], [47].

Pierwsze prace autorki dotyczyły sformułowania kryteriów kruchego pęknięcia pod wpływem pola elektromagnetycznego oraz zastosowania ich do zagadnień statycznych dla przypadku sprężystego dielektryka. Zagadnienia pęknięcia dielektryka dotyczyły również prace amerykańskie. Prace innych autorów dotyczyły pęknięcia piezoelektryka i ferromagnetyka.

W 1975 roku dokonano w Związku Radzieckim badań doświadczalnych, które całkowicie potwierdziły wynikającą z teorii możliwość propagacji szczelin pod wpływem pola elektromagnetycznego jak również efekt przeciwny, czyli hamowanie szczelin. Wyniki badań opublikowane zostały w raporcie wewnętrznym a ich treść znana jest pośrednio z monografii [14].

W następnych latach ukazało się szereg prac na temat wpływu pola elektromagnetycznego na pęknięcie materiałów o różnych własnościach elektromagnetycznych i mechanicznych. Tematyce tej poświęcone są rozdziały w monografiach [14], [50]. Pęknięcie elektromagnetyczne, bo taka nazwa przyjęła się w świecie, zajmuje sporą część w radzieckim Poradniku z Wytrzymałości Materiałów. Jest też osobną sekcją na konferencjach międzynarodowych oraz działem w czasopiśmie *International Journal of Applied Electromagnetics in Materials*. Wynika stąd, że pęknięcie elektromagnetyczne stało się uznaną dziedziną teorii oddziaływań elektromagneto-mechanicznych. W publikacjach autorów zagranicznych [48], [50], [14], [46], [47], [69] podkreśla się celowość badań w tej dziedzinie z uwagi na destrukcyjne działające pola elektromagnetycznego na konstrukcje pracujące w silnych polach, jak również na stwierdzone doświadczalnie i teoretycznie możliwości zapobiegania pęknięciu elementów konstrukcji przez poddanie ich działaniu odpowiednio generowanych pól. Uwzględnienie w kryteriach pęknięcia wpływu pól elektromagnetycznych w ogólnym bilansie sił działających na materiał jest ważne w przypadku, gdy szczelina w materiale znajduje się w stanie bliskim utraci stabilności lub w stanie krytycznym.

Prezentowana praca dotyczy zjawisk pęknięcia w dielektryku sprężystym dlatego sprawą podstawową był wybór odpowiedniego modelu teoretycznego tego materiału.

Konstrukcja modelu dielektryka sprężystego była przedmiotem prac szeregu autorów takich jak R. A. Toupin [64], R. Dixon, A. C. Eringen [8], R. A. Grot [17], R. D. Mindlin [44], L. E. Bragg [3], M. Laz, D. F. Nelson [42], J. B. Alblas [1]. Prace te dotyczą zarówno podejścia klasycznego jak i relatywistycznego i zdaniem autorki są najbardziej spójne i pełne. Poza wymienionymi istnieje szereg prac dotyczących dielektryka, które uwzględniają przewodnictwo cieplne lub reologiczne własności materiałów. Modele te nie dotyczą jednak zakresu niniejszej pracy.

Odształcalny dielektryk sprężysty opisuje się za pomocą wielkości elektromagnetycznych takich jak polaryzacja, indukcja elektryczna, magnetyzacja, indukcja magnety-

czna oraz natężenie pola elektrycznego i magnetycznego, które opisują zjawiska elektromagnetyczne w dielektryku. Zjawiska mechaniczne opisywane są przez naprężenia, odkształcenia oraz objętościowe i powierzchniowe siły elektromagnetyczne, które określa się za pomocą pól elektromagnetycznych. Wielkości mechaniczne i elektromagnetyczne są z punktu widzenia formalnego związane ze sobą równaniami konstytutywnymi, które w najogólniejszym przypadku uwzględniają zasady termodynamiki.

Ogólny stan fenomenologicznego dielektryka sprężystego opisywany jest przez układ równań Maxwella i układ równań Lamégo sprężonych ze sobą za pomocą związków zależnych od pól elektromagnetycznych i mechanicznych oraz odpowiadającym tym równaniom warunkom początkowo-brzegowym zależnym również od tych wielkości. Specyfika formuł matematycznych opisujących oddziaływanie pól elektromagneto-mechanicznych jest charakterystyczna dla danego modelu.

W pracy dla opisu zjawiska pęknięcia elektromagnetycznego przyjęto dwa modele. W opisie zjawisk pęknięcia pod wpływem pola elektrostatycznego przyjęto za podstawę model *Toupina* [64], natomiast w problemach pęknięcia pól pod wpływem pól elektromagnetycznych zmiennych w czasie dielektryk opisywany jest modelem *Dixona-Eringena* [8], który jest bardziej pełną i rozszerzoną wersją dynamicznego modelu *Toupina* [65]. Przyjmując podejście *Dixona-Eringena* odrzucono przy tym efekty polarne uważając, że ich uwzględnienie na tym etapie pracy stanowiłoby zbędną komplikację matematyczną.

Podstawowe w tej pracy ogólne, energetyczne kryteria pęknięcia kruchego sformułowane zostały w ramach tych modeli nieliniowych oddziaływań elektromagneto-sprężystych. Dobrym modelem fizycznym dla tej teorii są materiały ceramiczne. Kryteria te były następnie modyfikowane przy zastosowaniu ich do rozpatrywanych w pracy modeli pęknięcia dielektryków sprężystych pod wpływem pól o różnych natężeniach.

Problemy pęknięcia elektromagnetycznego mają specyfikę polegającą na wywoływaniu stanu naprężeń wokół szczeliny zarówno przez elektromagnetyczne siły powierzchniowe jak i elektromagnetyczne siły objętościowe, które są efektem wnikania pola elektromagnetycznego do wnętrza ciała. Powoduje to określone trudności teoretyczne polegające na konieczności znalezienia rozkładu pola elektromagnetycznego w ciele ze szczeliną oraz rozkładu pól mechanicznych wywołanych przez siły elektromagnetyczne.

W przyjętych w pracy modelach dielektryka sprężystego [64], [8] siły elektromagnetyczne, które są źródłem odkształceń ciała, są nieliniowe ze względu na pole elektromagnetyczne. Jest to powodem komplikacji matematycznych w procesie rozwiązywania podstawowych równań dla problemów brzegowych, w szczególności przy obliczaniu parametrów mechanicznych jako funkcji amplitud pola. Samo rozwiązanie równań Maxwella w ciele ze szczeliną jest również zadaniem oryginalnym albowiem ze względu na swoją specyfikę z czysto matematycznego punktu widzenia nie było przedmiotem badań. Rozwiązania opisujące pola elektromagnetyczne w ośrodku ze szczeliną, w narożu szczeliny mają określone osobliwości, którym odpowiadają osobliwości sił elektromagnetycznych.

Osobliwości pól elektromagnetycznych w przyjętym modelu dielektryka sprężystego, w przypadku silnych pól, nie są zgodne z osobliwościami naprężeń mechanicznych co powodowało dodatkowe trudności matematyczne. Wydaje się, że jest to specyfika sil-

nych oddziaływań pola na ośrodek sprężysty a związane z nią trudności matematyczne zostały usunięte przez modyfikację pojęcia siły elektromagnetycznej, to jest samego modelu dielektryka sprężystego. Model ten przechodzi w zwykły w przypadku oddziaływań słabych.

W rozważanych modelach dielektryka sprężystego uwzględniono pełny wpływ pola elektromagnetycznego na ośrodek sprężysty, pominięto natomiast wpływ odkształceń ośrodka, generowanych przez pole elektromagnetyczne jakie powstaje w ciele sztywnym, na pole elektromagnetyczne. Odkształcenia dielektrycznego ośrodka sprężystego wywołują z punktu widzenia problemów pęknięcia niewielkie pole elektromagnetyczne, chociaż w odpowiednich modelach ciała są przedmiotem badań na przykład w zagadnieniach diagnostycznych i elastoptycznych. Z punktu widzenia zastosowanej metody rozwiązanie pełnego rozkładu pól elektromagnetycznych i naprężeń nie stanowi merytorycznych trudności, jednak uwzględnienie tych niewielkich pól stanowiłoby zbędne obciążenie rachunkowe i zaciemniałoby niepotrzebnie istotę zagadnienia.

Praca została zredagowana w zasadzie zgodnie z chronologią otrzymywanych wyników i stanowi podsumowanie prac autorki publikowanych w latach 1975 - 1998. Chociaż publikacje stanowią podstawę tego opracowania, szereg zawartych w nim wyników przedstawiono w formie bardziej dojrzałej, inne oryginalne wyniki podano po raz pierwszy. Pozwoliło to przedstawić poniższą syntezę w formie zwartej i jednolitej bez luk utrudniających zrozumienie.

Wyniki zawarte w pracy są oryginalne w zakresie dotyczącym

- postawienia od strony teoretycznej fizycznego wpływu pola elektromagnetycznego na proces pęknięcia w ramach teorii dielektryka sprężystego Dixona-Eringena i Toupina,
- sformułowania kryteriów pęknięcia elektromagnetycznego (Uogólnienie kryterium Griffitha, kryterium Irvina oraz całki Γ , \mathcal{J})
- rozkładu pola elektromagnetycznego w dielektrykach ze szczeliną w tym zbadania osobliwości w otoczeniu naroża szczeliny statycznej i poruszającej się,
- rozkładu naprężeń w ciele ze szczeliną wywołanych przez silne i bardzo silne pole elektromagnetyczne, to jest pole o natężeniach niższych od progu jonizacji gazu w szczelinie oraz bliskich progu jonizacji,
- wpływu parametrów pola elektromagnetycznego na postać parametrów pęknięcia,
- analizy realizacji kryteriów energetycznych dla różnych przypadków pól,
- modyfikacji modelu dielektryka ze szczeliną dla pól o natężeniach bliskich progu jonizacji, w tym regularyzacji sił elektromagnetycznych,

- opracowania oryginalnej metody algebraizacji zagadnienia wyznaczania pól i naprężeń przystosowanej do obliczania współczynników intensywności naprężeń w zależności od pola elektromagnetycznego.

Prezentowana teoria pękania elektromagnetycznego zawiera w sobie jako przypadek szczególny klasyczną, mechaniczną teorię pękania [43], [6], [7], [50] i stanowi w określonym sensie uogólnienie jej metod i wyników na przypadek oddziaływań pola elektromagnetycznego z materiałem o własnościach elektromagnetycznych.

Opracowanie składa się z dwóch części. Część pierwsza poświęcona jest zagadnieniom statycznym część druga zagadnieniom pękania dielektryków w polu elektromagnetycznym. Przyjęto następujący podział zagadnień:

Część I

Rozdział 1. **Elektroelastostatyka dielektryków** – rozdział zawiera opis modelu Toupina, który jest podstawą dla rozważań dotyczących wpływu pola elektrostatycznego na pęknięcie dielektryków.

Rozdział 2. **Dielektryk sprężysty ze szczeliną** – w rozdziale tym podano definicje szczeliny, w szczególności wprowadzono podział na szczeliny próżniowe i przewodzące oraz sformułowano podstawowe równania dla dielektryka sprężystego ze szczeliną.

Rozdział 3. **Rozkład pól elektrosprężystych w otoczeniu naroża szczeliny** – rozdział ten poświęcony jest konstrukcji rozwiązań lokalnych dla pól elektrosprężystych w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej i przewodzącej. W przypadku szczeliny przewodzącej zmodyfikowano model dielektryka przez wprowadzenie procedury regularyzacji oddziaływań elektrostatycznych.

Rozdział 4. **Kryteria pęknięcia** – sformułowano uogólnione kryterium Griffitha dla przypadku dielektryka sprężystego znajdującego się pod działaniem pola elektrostatycznego, podano niezmienniczą całkę Γ , zdefiniowano współczynniki intensywności pola elektrostatycznego i uogólnione współczynniki intensywności naprężeń mechanicznych i elektrostatycznych oraz uogólniona postać kryterium Irvina dla pęknięcia pod wpływem pola elektrostatycznego. Podano również przykłady dla próżniowej szczeliny Griffitha w dielektryku znajdującym się pod wpływem jednorodnego pola elektrostatycznego równoległego i prostopadłego do powierzchni szczeliny. Dla tego przypadku wyznaczono krytyczną wartość pola powyżej której szczelina będzie się propagować.

Część II

Rozdział 5. **Elektromagnetosprężystość dielektryków** – w rozdziale tym omówiono model dielektryka Dixona – Eringena, który jest podstawą dla rozważań nad pękaniem dielektryków sprężystych pod wpływem pola elektromagnetycznego.

Rozdział 6. **Rozkład pól elektromagnetycznych w otoczeniu naroża szczeliny nieruchomej** – skonstruowano rozwiązania lokalne opisujące zachowanie pól elektromagnetycznych w bliskim otoczeniu naroża szczeliny próżniowej i szczeliny przewodzącej. Dla szczeliny przewodzącej uogólniono procedurę regularyzacji oddziaływań elektrosprężystych na przypadek dynamiczny.

Rozdział 7. **Pole elektromagnetyczne w otoczeniu naroża szczeliny propagującej się ze stałą prędkością** – w rozdziale podano rozwiązanie lokalne dla pól elektromagnetycznych w bliskim otoczeniu naroża szczeliny próżniowej oraz przewodzącej, propagujących się ze stałą prędkością w dielektryku sprężystym poddanym działaniu pola elektromagnetycznego.

Rozdział 8. **Parametry pęknięcia elektromagnetycznego** – sformułowano uogólnione kryterium Griffitha, podano postać niezmienniczej J całki, wprowadzono definicje współczynników intensywności pola elektromagnetycznego i uogólnionych współczynników intensywności naprężeń mechanicznych i elektromagnetycznych. Na podstawie uogólnionego kryterium Griffitha i wyników otrzymanych w rozdziale poprzednim podano uogólnione na przypadek pęknięcia elektromagnetycznego kryterium Irvina.

Rozdział 9. **Wyznaczanie współczynników intensywności naprężeń** – omówiono skonstruowaną przez autorkę metodę wyznaczania współczynników intensywności naprężeń mechanicznych w dielektryku zawierającym półnieskończoną szczelinę, poddanym działaniu pola elektromagnetycznego. Metoda ta wykorzystując postać rozwiązania dla pól elektromagnetycznych prowadzi w efekcie końcowym do nieskończonego układu równań funkcyjnych dla przypadku pól niestacjonarnych a algebraicznych w przypadku pól stacjonarnych z których wyznacza się współczynnik intensywności naprężeń jako jedną z niewiadomych. Metoda przystosowana jest do zastosowań numerycznych. Jako przykład ilustrujący funkcjonowanie metody podano przykład numeryczny wyznaczenia współczynnika intensywności naprężeń mechanicznych w walcu dielektrycznym z radialną szczeliną, poddanym działaniu silnego pola elektrostatycznego.

Zakończenie.

Podana na końcu rozprawy bibliografia prac z zakresu pęknięcia elektromagnetycznego świadczy o zainteresowaniu problematyką pęknięcia pod wpływem pola elektromagnetycznego innych ośrodków naukowych. Prace te nie były wykorzystywane merytorycznie w rozprawie ponieważ są późniejsze niż odpowiednie prace autorki lub dotyczą materiałów o innych własnościach elektromagnetycznych i mechanicznych.

Część I
Zagadnienia statyczne

Sytuacja fizyczna w której dielektryk sprężysty znajduje się pod wpływem bardzo wolno zmieniających się pól elektromagnetycznych i obciążeń mechanicznych opisywana jest w przybliżeniu przez elektrostatykę dielektryka sprężystego. W hierarchii problemów jest to przypadek najbardziej prosty, zawiera jednak w sobie wiele elementów teorii ogólnej. Dotyczy to w szczególności kryteriów pęknięcia, które po odpowiednim uogólnieniu przenoszą się na problemy dynamiczne oraz definicji parametrów pęknięcia, w tym współczynników intensywności pola i naprężeń. Opis zjawiska pęknięcia kruchego dielektryka sprężystego, który jest celem niniejszej pracy, odbywa się w ramach ogólnej teorii oddziaływań elektromagnetosprężystych w materiale dielektrycznym. Istnieje kilka różniących się między sobą opisów tych zjawisk, które mogłyby być podstawą tej pracy [16], [10], [64]. Należy jednak zwrócić uwagę, że teorie te dotyczą dielektryka wypełniającego obszar z brzegiem gładkim. Szczelina z jej nieregularną granicą wymaga pewnej modyfikacji teorii co zostało przez autorkę dokonane.

Statyczne problemy teorii pęknięcia dielektryka, będące przedmiotem rozważań części 1 pracy, formułowane są i rozwiązywane w ramach teorii dielektryka sprężystego *Toupina* [64], z jej modyfikacją do oddziaływań w dielektryku ze szczeliną.

W rozdziale 1 podano podstawowe elementy teorii *Toupina* [64] w tym równania statyki dielektryków sprężystych. W rozdziale 2 wprowadzono pojęcie dielektryka ze szczeliną wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi dla pól silnych i bardzo silnych. Rozdział 3 poświęcony jest analizie rozkładu pól elektrostatycznych i naprężeń w otoczeniu naroża szczeliny a w szczególności analizie osobliwości tych pól.

Następne rozdziały tej części poświęcone są sformułowaniu kryteriów pęknięcia i wyznaczeniu parametrów pęknięcia dla przedstawionego tu modelu dielektryka sprężystego ze szczeliną.

Rozdział 1

Elektroelastostatyka dielektryków

Rozwiązanie podstawowych problemów pękania w polu elektromagnetycznym wymaga aby teoria dielektryka sprężystego w ramach której opis pękania się odbywa była możliwie pełna i spójna. Wydaje się, że w zakresie zagadnień elektrostatycznych warunki te spełnia teoria dielektryka sprężystego podana w 1956 r. przez *R.A. Toupina* [64].

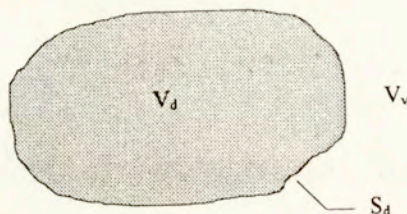
W rozdziale tym zostały podane podstawowe pojęcia i równania teorii *Toupina* dla obszaru z brzegiem gładkim. W punkcie 1 podano zarys ogólnej teorii nieliniowej, w punkcie 2 przedstawiono teorię uproszczoną, quasiliniową. Obydwie wersje tej teorii, ogólna i quasiliniowa, są przez autorkę wykorzystywane - model ogólny do konstrukcji kryteriów pękania, model quasiliniowy dla konstrukcji rozwiązań w dielektrykach ze szczeliną poddanych działaniu pól elektrostatycznych o dużych natężeniach i wyznaczania parametrów pękania.

1.1 Elektroelastostatyka dielektryków nieliniowych

Podamy zarys ogólnej, nieliniowej teorii *Toupina*. Przedstawiona jest ona tutaj w formie nieco zmodyfikowanej w porównaniu z wersją oryginalną [64]. Wersja ta odpowiada lepiej potrzebom teorii pękania. Różni się ona od oryginalnej tym, że zamiast polaryzacji stosowane jest tu pojęcie indukcji elektrycznej. Założono przy tym klasyczną postać energii elektrostatycznej. Wynikająca stąd definicja tensora naprężeń Maxwella jest taka sama jak stosowana w elektrodynamice, podczas gdy w oryginalnej wersji *Toupina* definicja ta różni się od klasycznej.

Zakłada się, że w obszarze V_d z powierzchnią brzegową S_d znajduje się dielektryk sprężysty. Na zewnątrz dielektryka, to jest w środowisku o własnościach elektrycznych próżni, znajdują się ładunki q i generowane przez nie pole elektryczne \vec{E} . Pole to generuje wewnątrz dielektryka pole o natężeniu \mathbf{E} . Poza tym dielektryk jest obciążony siłami mechanicznymi masowymi $\rho \mathbf{f}$ (ρ - gęstość masy, \mathbf{f} - siła na jednostkę masy) i powierzchniowymi \mathbf{T} na powierzchni S_d . Pola elektryczne w dielektryku i w próżni są wyrażone przez potencjały φ i $\bar{\varphi}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi & \text{w } V_d, \\ \tilde{\mathbf{E}} &= -\text{grad } \tilde{\varphi} & \text{w } V_v. \end{aligned} \quad (1.1)$$



Punktem wyjścia teorii jest zasada wariacyjna

$$\delta\Sigma = \int_{V_d} \rho f_i \delta x^i dv + \int_{S_d} T_i \delta x^i ds - \int_{V_v} q \delta\tilde{\varphi} dv, \quad (1.2)$$

z dodatkowym warunkiem ciągłości składowej stycznej pola na powierzchni brzegowej dielektryka

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}} \quad \text{na } S_d, \quad (1.3)$$

gdzie \mathbf{n} jest normalną zewnętrzną do powierzchni dielektryka S_d .

We wzorze (1.2) $\delta\Sigma$ jest wariacją energii układu, δx^i wariacją przestrzennych współrzędnych x^i ($i = 1, 2, 3$), $\delta\tilde{\varphi}$ wariacją potencjału elektrostatycznego w próżni. Należy uwzględnić, że przy ustalonym rozkładzie ładunków elektrostatycznym umieszczenie w próżni odkształcalnego dielektryka, powoduje ujemny przyrost energii elektrostatycznej, która wydatkowana jest na polaryzację i odkształcenie dielektryka.

Wyrażenie (1.2) stwierdza, że wariacja pełnej energii układu równa się całkowitej pracy danych sił na przyrostach uogólnionych przesunięć. W zakresie dotyczącym mechaniki wzór (1.2) jest ogólny w tym sensie, że jest ważny w zakresie nieliniowym geometrycznie, to jest dla dużych odkształceń. W takim przypadku we wzorze (1.2) współrzędne przestrzenne x^k są funkcjami współrzędnych materialnych X^K i parametru wariacji τ .

$$x^k = x^k(X^K, \tau). \quad (1.4)$$

Zakłada się przy tym istnienie transformacji odwrotnej

$$X^K = X^K(x^k, \tau). \quad (1.5)$$

Pełną energię układu dielektryk - próżnia można przedstawić w teorii Toupina w jako sumę energii mechanicznej, energii elektrostatycznej oraz energii sprzężenia elektromechanicznego

$$\Sigma = \int_{V_d} [\rho\epsilon(x^k;_K) + \rho\eta(x^k;_K, \tilde{\varphi};_M) + \frac{1}{2}\epsilon^{ik}\varphi_{;i}\varphi_{;k}] dv \quad (1.6)$$

$$+ \int_{V_v} \frac{1}{2}e_o\tilde{\varphi}_{;i}\tilde{\varphi}_{;i} dv.$$

Tutaj $\rho\epsilon$ oznacza energię sprężystą, $\rho\eta$ energię sprzężenia, $\frac{1}{2}\epsilon^{ik}\varphi_{;i}\varphi_{;k}$ jest energią elektrostyczną sztywnego dielektryka, $\frac{1}{2}e_o\tilde{\varphi}_{;i}\tilde{\varphi}_{;i}$ energią elektrostyczną próżni. Przez ϵ^{ik} oznaczono tensor przenikalności dielektrycznej ciała sztywnego, e_o przenikalność próżni a średnik oznacza różniczkowanie kowariantne. We współrzędnych prostokątnych (x^1, x^2, x^3) pochodna kowariantna jest równa pochodnej cząstkowej $f_{;k} = \frac{\partial f}{\partial x^k}$, ($k = 1, 2, 3$).

Zasada wariacyjna (1.2) przy uwzględnieniu (1.6) ma postać

$$\delta \int_{V_d} [\rho\epsilon(x^k;_K) + \rho\eta(x^k;_K, \tilde{\varphi};_M)] dv - \frac{1}{2}\delta \int_{V_d} \epsilon^{ik}\varphi_{;i}\varphi_{;k} dv \quad (1.7)$$

$$- \frac{1}{2}\delta \int_{V_v} e_o\tilde{\varphi}_{;i}\tilde{\varphi}_{;i} dv = \int_{V_d} \rho f_i \delta x^i dv + \int_{S_d} T_i \delta x^i ds - \int_{V_v} q \delta \tilde{\varphi} dv.$$

Energia we wzorze (1.6) jest zależna od gradientów odkształcenia $x^k;_K$ oraz gradientów potencjału elektrostycznego $\varphi_{;i}$, przy założeniu, że jest on funkcją współrzędnych przestrzennych. W obszarze V_d zajmowanym przez dielektryk między potencjałem wyrażonym we współrzędnych przestrzennych i tym samym potencjałem wyrażonym we współrzędnych materialnych oraz ich pochodnymi zachodzą związki

$$\begin{aligned} \varphi(x^k, \tau) &= \varphi[x^k(X^K, \tau), \tau] = \tilde{\varphi}(X^K, \tau), \\ \varphi(x^i, \tau)_{;k} &= \tilde{\varphi}_{;M} X^M{}_{;k}, \\ \tilde{\varphi}_{;M} &= \varphi(x^i, \tau)_{;k} x^k{}_{;M}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Zgodnie z rachunkiem wariacyjnym w obszarze V_d mamy

$$\delta x^k \equiv \frac{\partial x^k}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \delta \tau, \quad \delta \tilde{\varphi} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \delta \tau,$$

natomiast w próżni: $\delta x^k = 0$ oraz

$$\delta \tilde{\varphi} \equiv \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} d\tau \quad (1.9)$$

Z zasady wariacyjnej (1.7) otrzymuje się następujący, podstawowy układ równań opisujących dielektryk sprężysty:

Równania równowagi mechanicznej

$$(\sigma_k^l + {}_s t_k^l + M t_k^l)_{;l} + \rho f_k = 0 \quad \text{w } V_d. \quad (1.10)$$

Równanie pola elektrostatycznego w dielektryku

$$({}_s D^l - \varepsilon^{kl} \varphi_{;k})_{;l} = 0 \quad \text{w } V_d. \quad (1.11)$$

Równanie pola elektrostatycznego w próżni

$$e_o g^{kl} \tilde{\varphi}_{;kl} + q = 0 \quad \text{w } V_v. \quad (1.12)$$

W równaniu (1.10) σ_k^l jest częścią mechaniczną naprężenia związaną wyłącznie z odkształceniami

$$\sigma_k^l = \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial x^k_{;K}} x^l_{;K}. \quad (1.13)$$

Naprężenie ${}_s t_k^l$ zależy od pola elektrostatycznego i odkształceń i będzie tu nazywane naprężeniem sprężenia

$${}_s t_k^l = \rho \frac{\partial \eta}{\partial x^k_{;K}} x^l_{;K}. \quad (1.14)$$

Naprężenie Maxwella $M t_k^l$ jest naprężeniem zależnym wyłącznie od pola elektrostatycznego

$$M t_k^l = \varepsilon^{lm} \varphi_{;m} \varphi_{;k} - \frac{1}{2} \varepsilon^{mn} \varphi_{;m} \varphi_{;n} \delta_k^l. \quad (1.15)$$

Naprężenie Maxwella działa na powierzchni elementu materialnego podobnie jak zwykłe naprężenie mechaniczne, ale przyjmuje się że ma ono sens również w próżni, gdzie jest zdefiniowane następująco

$$M \tilde{t}_k^l = e_o \left(g^{ml} \tilde{\varphi}_{;m} \tilde{\varphi}_{;k} - \frac{1}{2} g^{nm} \tilde{\varphi}_{;m} \tilde{\varphi}_{;n} \delta_k^l \right) \quad (1.16)$$

Występujący w równaniu dla pola elektrostatycznego (1.11*) wektor indukcji ${}_s \mathbf{D}$ jest częścią całkowitej indukcji będącą sumą indukcji pola elektrostatycznego w ciele sztywnym i indukcji generowanej przez odkształcenia: $\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} + {}_s \mathbf{D}$,

$${}_s D^l = \rho \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\varphi}_{;K}} x^l_{;K}. \quad (1.17)$$

Do równań (1.10) – (1.12) dołącza się następujące dwa warunki wynikające ze stosowanej tu zasady wariacyjnej:

Naprężeniowy warunek brzegowy

$$(\sigma_k^l + s t_k^l + M t_k^l) n_l = M \tilde{t}_k^l n_l + T_k \quad \text{na } S_d. \quad (1.18)$$

Elektrostatyczny warunek brzegowy

$$({}_s D^l - \varepsilon^{kl} \varphi_{,k}) n_l = \varepsilon_o g^{kl} \tilde{\varphi}_{,k} n_l \quad \text{na } S_d. \quad (1.19)$$

Naprężeniowy warunek brzegowy (1.18) oznacza, że siła powierzchniowa odpowiadająca sumie mechanicznej części naprężeń σ_k^l , naprężenia sprzężenia $s t_k^l$ i naprężenia Maxwella w dielektryku $M t_k^l$ równa jest na powierzchni brzegowej dielektryka sile powierzchniowej odpowiadającej naprężeniu Maxwella $M \tilde{t}_k^l$ w próżni i mechanicznej sile zadanej T_k .

Elektrostatyczny warunek brzegowy (1.19) oznacza równość składowej normalnej całkowitej indukcji elektrycznej na brzegu od strony dielektryka i próżni.

Do warunków brzegowych (1.18), (1.19) należy dołączyć warunek na składowe styczne pola elektrostatycznego na brzegu dielektryka

$$e^{ijk} \varphi_{,j} n_k = e^{ijk} \tilde{\varphi}_{,j} n_k \quad \text{na } S_d, \quad (1.20)$$

który jest warunkiem (1.3) wyrażonym przez potencjał elektrostatyczny.

Związki konstytutywne (1.13), (1.14) i (1.17) wiążące ze sobą naprężenia, odkształcenia, pole elektrostatyczne i indukcję elektryczną oraz sprzężone ze sobą równania równowagi mechanicznej i elektrostatycznej (1.10) – (1.12) wraz z warunkami brzegowymi (1.18) – (1.20) tworzą spójny układ równań (to jest ilość równań równa się ilości niewiadomych) opisujących stan pola elektrostatycznego w dielektryku, w próżni oraz związany z nim stan naprężeń i odkształceń mechanicznych.

Model ten opisuje dielektryk w którym stan naprężenia opisywany jest przez sumę części mechanicznej naprężenia σ_k^l wywołanego odkształceniem ciała, naprężenia $s t_k^l$ wywołanego sprzężeniem między deformacją i polem elektrostatycznym oraz naprężenia Maxwella $M t_k^l$ indukowanego przez pole elektrostatyczne. Suma naprężenia mechanicznego σ_k^l i naprężenia sprzężenia $s t_k^l$ w modelu *Toupin*a została nazwana *naprężeniem lokalnym*. Naprężenie całkowite ma więc postać

$$t_k^l = \sigma_k^l + s t_k^l + M t_k^l \quad (1.21)$$

Indukcja elektryczna jest sumą indukcji zdefiniowanej w zależności od natężenia $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ tak jak dla ciała sztywnego ${}_0 D^l = -\varepsilon^{lk} \varphi_{,k}$ oraz indukcji sprzężenia ${}_s D^l$ wywołanej odkształceniem ośrodka.

Jeżeli w równaniach (1.10) – (1.19) położymy energię sprężenia równą zeru oraz założymy, że tensor dielektryczny ε^{kl} jest równy stałej ε_0 w próżni, to równania te przechodzą w niesprężony układ równań elektrostatyki i mechaniki wraz z odpowiadającymi im warunkami brzegowymi. Wynika to z faktu, że przy powyższych warunkach $Mt_k^l{}_{;l} = 0$, $st_k^l = 0$ (ponieważ w dielektryku $q = 0$, $\eta = 0$) oraz $Mt_k^l = M\dot{t}_k^l$ na S_d .

1.2 Model quasiliniowy dielektryka sprężystego

Podany przez *Toupina* układ równań opisuje najogólniejszy przypadek nieliniowy, to jest duże odkształcenia mechaniczne oraz nieliniowe oddziaływania elektromechaniczne. Te ogólne rezultaty były dla autorki podstawą dla sformułowania energetycznego kryterium pęknięcia dotyczącego zagadnień nieliniowych. Obliczenia matematyczne mające na celu otrzymanie podstawowych parametrów pęknięcia oraz stanu naprężeń i przemieszczeń dielektryka dotyczyły modelu dielektryka w którym odkształcenia sprężyste są małe a części elektrostatyczne równań konstytutywnych są kwadratowymi funkcjami gradientów potencjału pola elektrostatycznego. Samo pole elektrostatyczne obliczane jest przy założeniu, że ciało jest sztywne. Model ten u *Toupina* nazwany został *quasiliniowym*.

Linearyzacja dotyczy równań konstytutywnych dla dielektryka izotropowego, które opisują nam związek między tensorem naprężeń lokalnych Lt_k^l , który równa się sumie

$$Lt_k^l \equiv \sigma_k^l + st_k^l \quad (1.22)$$

a odkształceniem i gradientem potencjału oraz równań konstytutywnych dla całkowitej indukcji

$$D_l = {}_sD_l + {}_0D_l, \quad {}_0D_l = -\varepsilon\varphi_{;l}, \quad (1.23)$$

która również jest funkcją odkształcenia i gradientu potencjału.

Punktem wyjścia do modelu *quasiliniowego* są przyjęte w teorii *Toupina* dosyć ogólne, niezmiennicze ze względu na translacje i obroty układu współrzędnych związki konstytutywne zawierające człony liniowe i kwadratowe ze względu na odkształcenia i gradienty potencjałów. Linearyzacji dokonuje się zakładając, że małym parametrem są odkształcenia natomiast gradienty potencjału pozostają ograniczone przy zmianie odkształceń. W rezultacie takiej częściowej linearyzacji otrzymuje się związki konstytutywne liniowe względem odkształceń oraz kwadratowe względem gradientów potencjałów.

Daje to następujące relacje konstytutywne dla naprężeń

$$\begin{aligned} \sigma_k^l &= \lambda e_m^m \delta_k^l + 2\mu e_k^l, \\ st_k^l &= a_2 \delta_k^l \varphi_{;m} \varphi_{;m}^l + a_5 \varphi_{;k} \varphi_{;l}^l, \end{aligned} \quad (1.24)$$

gdzie a_2, a_5 stałe materiałowe.

Należy do nich dołączyć klasyczne elektryczne naprężenie Maxwella dla ciał izotropowych

$$M_k^i = \varepsilon \left(g^{lm} \varphi_{,l} \varphi_{,m} - \frac{1}{2} g^{mn} \varphi_{,m} \varphi_{,n} \delta_k^l \right). \quad (1.25)$$

Tutaj ε jest współczynnikiem przenikalności elektrycznej dla dielektryka izotropowego.

W wyniku linearyzacji pełna indukcja elektryczna dana jest za pomocą związku konstytutywnego dla ciała sztywnego

$$D_i = -\varepsilon \varphi_{,i}, \quad {}_s D^i = 0. \quad (1.26)$$

Stąd równania pola elektrostatycznego w dielektryku (1.11) mają postać uproszczoną

$$\varepsilon \varphi_{,i}{}^i = 0 \quad w \quad V_d. \quad (1.27)$$

Związane z tym równaniem warunki brzegowe na granicy dielektryka z próżnią (1.19) sprowadzają się do następujących zależności

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \varphi_{,i} n^i &= e_o \tilde{\varphi}_{,i} n^i \\ e^{klm} \varphi_{,i} n_m &= e^{klm} \tilde{\varphi}_{,i} n_m \end{aligned} \right\} \text{ na } S_d. \quad (1.28)$$

Równania na potencjał pola elektrostatycznego w próżni $\tilde{\varphi}$ (1.12) pozostają bez zmian

$$e_o \tilde{\varphi}_{,i}{}^i + q = 0. \quad (1.29)$$

Równania równowagi mechanicznej w dielektryku sprężystym, opisywanym za pomocą modelu quasiliniowego mają postać (1.10)

$$(\sigma_k^i + {}_s t_k^i + M_k^i)_{,i} + \rho f_k = 0 \quad w \quad V_d. \quad (1.30)$$

Związane z nimi naprężeniowe warunki na powierzchni brzegowej dielektryka graniczącej z próżnią są (1.18)

$$(\sigma_k^i + {}_s t_k^i + M_k^i) n_i = M \tilde{t}_k^i n_i + T_k \quad \text{na } S_d. \quad (1.31)$$

Powyższe równania równowagi i związane z nimi naprężeniowe warunki brzegowe pozostają nieliniowe względem pola elektrostatycznego. Spowodowane to jest występowaniem w nich nieliniowych naprężeń, naprężenia sprzężenia ${}_s t_k^i$ i tensora Maxwella M_k^i , zdefiniowanych przez związki (1.24), (1.25).

Model ten będzie podstawą naszych dalszych rozważań w zakresie pól statycznych.

Dokładniejsze uzasadnienie poprawności stosowania modelu quasiliniowego w zagadnieniach pękania kruchego podane zostanie w Rozdziale 3, paragrafie 3.8. W szczególności wykazany zostanie intuicyjnie jasny a doświadczalnie stwierdzony fakt wytwarzania słabego, zaniedbywalnego pola elektrostatycznego przez odkształcenia w otoczeniu naroża szczeliny. Teoretycznie sprowadza się to do przyjęcia rozkładu pól elektromagnetycznych takiego jak w ciele sztywnym, nieodkształcalnym.

Opis modelu kruchego pęknięcia w ramach teorii małych odkształceń stosowany powszechnie, z teoretycznego punktu widzenia zawierać może pewną lukę, albowiem w bliskim otoczeniu wierzchołka szczeliny funkcje opisujące odkształcenia są osobiwe. Mimo to kryteria energetyczne, w których podstawą wyznaczenia energii pęknięcia są graniczne wartości całek z gęstości energii dają dobry opis faktów doświadczalnych.

Rozdział 2

Dielektryk sprężysty ze szczeliną

W tym rozdziale podamy definicje szczeliny skończonej (szczeliny Griffitha) i półnieskończonej jako obszaru granicznego ciągu obszarów eliptycznych dla szczeliny Griffitha lub ciągu obszarów klinowych dla szczeliny półnieskończonej. Przyjęte określenie szczeliny jest szczególnie dostosowane do opisu oddziaływania pola elektrycznego wewnątrz szczeliny z polem elektrycznym w materiale dielektrycznym.

Scharakteryzowane zostaną dwa rodzaje szczelin występujące w dielektrykach, szczelina próżniowa i szczelina przewodząca. Własności elektryczne występującej w materiale szczeliny związane są z natężeniem pola elektrycznego w szczelinie, które może być większe lub mniejsze od natężenia jonizacyjnego dla powietrza. Szczelina w której natężenie pola elektrycznego osiąga wartość jonizacyjną, która dla powietrza wynosi $2 \div 3 \times 10^4$ V/cm, zachowuje się jak idealny przewodnik. Dla niższych wartości natężenia szczeliny ze względu na własności elektryczne, można traktować jako próżnię. Mechanizm fizyczny przechodzenia szczeliny próżniowej w przewodzącą jest skomplikowany. Szczegółowe informacje na ten temat podano w monografiach [60], [53].

Następnie określmy pola elektryczne w szczelinie próżniowej oraz pola elektromechaniczne w dielektryku jako granicę pól w obszarach aproksymujących szczelinę i odpowiadających im obszarach dielektryka. Tak przyjęte definicje pól w szczelinie i w dielektryku pozwalają w sposób naturalny uchwycić fizyczny sens ich oddziaływania z polem mechanicznym a ich graniczny charakter z matematycznego punktu widzenia jest poprawny. Analogiczne rozważania przeprowadzone zostaną dla szczeliny przewodzącej.

2.1 Dielektryk ze szczeliną - definicje

Intuicja fizyczna zgodnie z którą szczelinę traktuje się jako cięcie w materiale, każe nam przyjąć jako główną cechę charakterystyczną szczeliny stosunek odległości dwóch powierzchni do pozostałych wymiarów szczeliny, to jest jej długości jako bliski zeru. W stwierdzeniu tym zawarta jest własność szczelin przestrzennych i płaskich (tzn. przestrzennych z pewną symetrią) różnych kształtów. Drugą ważną cechą określającą szczelinę jest istnienie naroża – w przypadku przestrzennym, lub wierzchołka szczeliny w przy-

padku płaskim jako elementu, który powstaje w wyniku połączenia dwóch powierzchni ograniczających szczelinę. Te wymienione wyżej cechy będą punktem wyjścia do ścisłej matematycznej definicji szczeliny, jednak tylko w tym zakresie ogólności jaki potrzebny jest w pracy.

W tym czasie, gdy konstruowane były przez autorkę początki teorii pęknięcia elektromagnetycznego, najważniejszą sprawą było wykazanie, że pole elektromagnetyczne może być przyczyną pęknięcia, natomiast kształt rozpatrywanych szczelin był możliwie prosty ale jednocześnie obejmujący podstawowe przypadki klasyczne. Rozpatrzono więc w pracy szczelinę Griffitha, płaską szczelinę półnieskończoną nieruchomą a w teorii dynamicznej również szczelinę półnieskończoną poruszającą się.

Teoria zawierająca te przypadki klasyczne uogólnia się na dielektryki sprężyste ze szczelinami o różnym kształcie w tym sensie, że niszcącemu wpływowi pola elektromagnetycznego podlegają materiały niezależnie od kształtu szczelin. Kryteria i zdefiniowane parametry pęknięcia zachowują ważność, komplikuje się jednak w sposób oczywisty aparat matematyczny służący do konkretnych obliczeń.

Definicja matematyczna obszaru ze szczeliną, którą wprowadzimy, nie jest jedyną możliwą, odpowiada jednak zdaniem autorki problemom rozwiązywanym w pracy. W odróżnieniu od czysto mechanicznej teorii pęknięcia uwzględnienie pola elektromagnetycznego czy też elektrostatycznego jest związane z wyznaczeniem tego pola zarówno na zewnątrz szczeliny jak również w jej obszarze wewnętrznym. Przy innej definicji niż użyta w pracy określenie pola w szczelinie byłoby trudne lub wręcz niemożliwe ze względu na to, że jeden z wymiarów szczeliny jest równy zero (odległość między powierzchniami granicznymi szczeliny).

Dla każdej z rozpatrywanych w pracy szczelin - Griffitha i półnieskończonej przedstawiamy oddzielną definicję, ponieważ cel tej pracy nie wymaga tworzenia pojęć ogólnych w tym zakresie.

A) Definicja szczeliny Griffitha

Niech w przestrzeni trójwymiarowej dany będzie walec nieskończony W , którego przekrój płaszczyzną prostopadłą do jego osi jest obszarem eliptycznym. Przyjmijmy długość dużej osi elipsy równą a a długość małej osi równą b . Zakładamy, że przestrzeń Ω^W na zewnątrz walca wypełniona jest dielektrykiem, natomiast wewnątrz walca stanowi pustkę. Załóżmy następnie, że długość osi b dąży do zera przy jednoczesnym warunku $b \neq 0$ oraz przy założeniu, że położenie ognisk elipsy jest stałe, skąd wynika, że ich odległość jest stała i równa d . Jeżeli b dążyć będzie do zera poprzez malejący ciąg dyskretnych wartości liczbowych b_n to odpowiadać mu będzie ciąg walców W_n oraz ciąg obszarów nieograniczonych Ω_n^W wypełnionych dielektrykiem. Ciąg obszarów Ω_n^W dla $n \rightarrow \infty$ przybliży z dowolną dokładnością obszar Ω , który jest przestrzenią z wycięciem w kształcie pasma o szerokości d . Każdy przekrój płaszczyzną prostopadłą do pasma jest płaszczyzną nieskończoną P pozabawioną odcinka o długości d . Inaczej mówiąc, obszar Ω jest granicą obszarów Ω_n^W . Dotyczy to również płaszczyzny P , która jest granicą ciągu odpowiednich płaszczyzn P_n .

Określenie szczeliny jako przejścia granicznego daje możliwości przybliżania wielkości statycznych i dynamicznych wewnątrz szczeliny (pola) i na zewnątrz szczeliny przez wielkości zdefiniowane w obszarach ze skończoną pustką walcową o przekroju eliptycznym.

B) Szczelina półnieskończona

Analogiczną definicję przyjmujemy dla szczeliny półnieskończonej. Niech w przestrzeni trójwymiarowej dany będzie klin nieskończony K , którego boki są półpłaszczyznami P_1 i P_2 a kąt ostry między półpłaszczyznami jest równy α . Zakładamy, że obszar na zewnątrz klina (to znaczy o kącie rozwarcia $2\pi - \alpha$) wypełniony jest dielektrykiem sprężystym. Utwórzmy dyskretny ciąg klinów K_n za pomocą dyskretnego, malejącego ciągu kątów α_n gdzie $\alpha_n \rightarrow 0$ oraz $\alpha_n \neq 0$. Odpowiadać mu będzie ciąg Ω_n^K obszarów wypełnionych dielektrykiem. Ciąg obszarów Ω_n^K przybliży z dowolną dokładnością nieograniczony obszar Ω z wycięciem w postaci półpłaszczyzny. Mówiąc ściśle, nieskończona przestrzeń Ω z wycięciem w postaci półpłaszczyzny jest granicą ciągu obszarów Ω_n^K z wycięciem w postaci klina o kącie rozwarcia α_n . Obraz tej sytuacji w przekroju płaszczyzną prostopadłą do krawędzi klina przedstawia płaszczyznę nieograniczoną P z wycięciem w postaci półprostej, która jest przybliżona przez płaszczyznę z wycięciami w postaci płaskiego klina o kącie rozwarcia α_n .

Przytoczone definicje są klasycznym podejściem do obszarów ze szczeliną chociaż nie jedynym a nawet nie najczęściej stosowanym (np. szczelina jako powierzchnia nieciągłości wektora przemieszczenia). Zawierają jednak one w sobie wszystkie inne podejścia i dodatkowo dają dobrą intuicyjną definicję powierzchni brzegowych szczeliny a w przypadku płaskim linii brzegowych szczeliny.

2.2 Ogólne równania równowagi i warunki brzegowe dla dielektryka ze szczeliną

Zgodnie z podaną wyżej definicją szczeliny przyjmować będziemy w zagadnieniach statycznych, jak również w całej pracy, że funkcje opisujące pola elektryczne w szczelinie i w dielektryku na zewnątrz szczeliny są granicą ze względu na odpowiednie parametry geometryczne, np. półosi elipsy dla szczeliny Griffitha, lub kąta rozwarcia klina dla szczeliny półnieskończonej. Takie postępowanie sprawia wrażenie poprawnego z punktu widzenia wymagań interpretacji fizycznej otrzymanych wielkości, jednocześnie matematyczna konstrukcja funkcji opisujących pole jako granicy ciągu rozwiązań w obszarach aproksymujących pozwala w pełni zachować kontrolę nad procesem obliczeń i daje naturalną, formalną definicję rozwiązania równań w obszarze szczeliny.

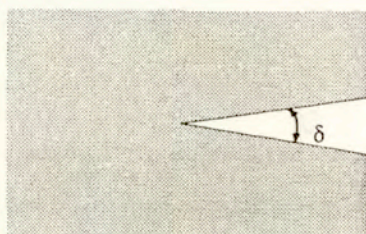
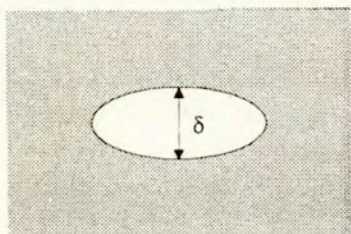
Dalsze postępowanie polegać będzie w zasadzie na konstrukcji rozwiązań równań dla pola elektrostatycznego, a w przypadkach dynamicznych elektromagnetycznego, w obszarze elipsy lub klina (o kącie rozwarcia α). Następnie konstruujemy rozwiązanie dla pól na zewnątrz elipsy lub klina, w obszarze wypełnionym dielektrykiem i dokonujemy

uzgodnienia pól przez narzucenie im wynikających z teorii warunków brzegowych na powierzchni elipsy lub klina, po czym przechodzimy do granicy ze względu na parametry geometryczne elipsy i klina z tak otrzymanymi rozwiązaniami.

Granica ciągu rozwiązań dla obszarów aproksymujących jest polem elektromechanicznym w dielektryku ze szczeliną oraz związanym z nim polem elektrycznym (elektromagnetycznym) w szczelinie. Postępowanie to zachodzi również w przypadku szczeliny wypełnionej substancją przewodzącą (gazem zjonizowanym), we wnętrzu której potencjał elektrostatyczny można przyjąć równy zero.

Przedstawiona wyżej idea procedury przejścia granicznego jest w zasadzie zawarta również przy traktowaniu szczeliny jako powierzchni nieciągłości odpowiednich wartości fizycznych. Nieciągłości definiuje się bowiem również jako granicę różnicy wielkości z dwóch stron szczeliny.

Zakładamy, że dielektryk sprężysty wypełnia obszar V_d , którego brzeg będący jednocześnie powierzchnią graniczną między dielektrykiem a próżnią oznaczamy przez S_d . Zakładamy następnie, że w dielektryku znajduje się szczelina skończona lub półnieskończona, która jest przybliżona w pierwszym przypadku przez elipsę o obu półosiach różnych od zera, w drugim przez klin o skończonym kącie rozwarcia α_0 . Oznaczmy powierzchnię elipsy lub klina przez S_δ a obszar ograniczony powierzchnią S_δ aproksymujący szczelinę przez V_δ . Parametr δ oznaczać będzie długość półosi elipsy lub kąt rozwarcia klina. Zgodnie z tym co powiedziano wyżej, powierzchnia S_δ jest powierzchnią przybliżającą powierzchnię szczeliny. Zakładamy również, że brzeg elipsy oraz wierzchołek klina znajdują się w dostatecznej odległości od brzegu dielektryka S_d .



Zgodnie ze sformułowaną w paragrafie 1 teorią *Toupin* elektrostatyki dielektryka sprężystego, w obszarze wypełnionym materiałem dielektrycznym spełnione są następujące równania na potencjał pola elektrostatycznego

$$\left. \begin{aligned} ({}_s D^l - \varepsilon^{kl} \varphi_{,k})_{,l} &= 0 \\ {}_s D^l &= \rho \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\varphi}_{,M}} x^l_{,M} \end{aligned} \right\} \quad \text{w } V_d, \quad (2.1)$$

$$\eta = \eta(x^k_{,K}, \tilde{\varphi}_{,M}) = \eta[x^k_{,K}, (\varphi(x^k)_{,l} x^l_{,M})]$$

gdzie ${}_s D^l$ jest indukcją sprzężenia, η energią sprzężenia, x^k współrzędne punktów materi-

alu po odkształceniu, X^K współrzędne tych punktów przed odkształceniem, $\varphi(x^k(X^K)) = \tilde{\varphi}(X^K)$ potencjał elektrostatyczny, ρ gęstość masy, ε^{kl} tensor przenikalności dielektrycznej. Współrzędne x^k związane są ze współrzędnymi X^K relacją $x^k = x^k(X^K)$, przy czym dla pochodnych funkcji względem x^k i X^K zachodzi związek $\tilde{\varphi}_{,M} = \varphi_{,m} x^m_{,M}$, gdzie $x^m_{,M} = x^m_{,M}(X^K(x^k))$ są gradientami odkształcenia.

Stan odkształcony dielektryka opisują równania mechaniczne

$$\begin{aligned} (\sigma_k^l + s t_k^l + M t_k^l)_{,l} + \rho f_k &= 0 & \text{w } V_d, \\ \sigma_k^l &= \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial x^k_{,M}} x^l_{,M}, & s t_k^l &= \rho \frac{\partial \eta}{\partial x^k_{,M}} x^l_{,M}, \\ M t_k^l &= \varepsilon^{ml} \varphi_{,m} \varphi_{,k} - \frac{1}{2} \varepsilon^{mn} \varphi_{,m} \varphi_{,n} \delta_k^l. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Tutaj σ_k^l jest częścią mechaniczną naprężenia, $s t_k^l$ naprężeniem sprzężenia, $M t_k^l$ tensorem Maxwella, f_k siłą masową, $\epsilon(x^k_{,K})$ energią sprężystą, $\eta(x^k_{,K}, \tilde{\varphi}_{,M})$ energią sprzężenia.

Energia sprężysta ϵ i energia sprzężenia η określają elektromechaniczny model dielektryka i są traktowane jako funkcje dane.

Ta część przestrzeni w której dielektryka nie ma, składa się z obszaru V_δ przybliżającego szczelinę (w granicy będzie to szczelina) i z obszaru V_0 otaczającego dielektryk, w którym rozłożone są ładunki statyczne o gęstości $q = q(x^k)$.

W obszarze V_δ (przybliżającym szczelinę) potencjał elektrostatyczny φ spełnia równanie

$$\varphi_{,k}^s = 0 \quad \text{w } V_\delta. \quad (2.3)$$

Zgodnie z tym co zostało powiedziane na początku rozdziału, w zależności od wielkości natężenia pola elektrycznego ta sama szczelina może zachowywać się jak próżnia lub idealny przewodnik. Każdy z tych przypadków opisywany jest przez właściwe mu warunki brzegowe na powierzchni szczeliny, to jest w naszym przypadku na powierzchni S_δ aproksymującej szczelinę. Dla *szczeliny próżniowej* warunki dla potencjałów φ , φ^s są następujące

$$\begin{aligned} ({}_s D^l - \varepsilon^{kl} \varphi_{,k}) n_l &= e_o \varphi_{,l}^s n^l & \text{na } S_\delta, \\ e^{klm} \varphi_{,l} n_m &= e^{klm} \varphi_{,l}^s n_m \end{aligned} \quad (2.4)$$

Wiążą one pole we wnętrzu obszaru V_δ z polem w dielektryku.

Wielkości mechaniczne i elektryczne na powierzchni S_δ związane są warunkami brzegowymi

$$(\sigma_k^l + {}_s t_k^l + {}_M t_k^l) n_l = {}_M \tilde{t}_k^l n_l \quad \text{na } S_\delta, \quad (2.5)$$

gdzie

$${}_M \tilde{t}_k^l = e_o \left(\overset{s}{\varphi}_{,k} \overset{s}{\varphi}_{,l} - \frac{1}{2} \delta_k^l \overset{s}{\varphi}_{,m} \overset{s}{\varphi}_{,m} \right). \quad (2.6)$$

Dla szczeliny przewodzącej warunki brzegowe dla potencjałów na powierzchni S_δ są

$$\begin{aligned} e^{klm} \varphi_{,i} n_m &= e^{klm} \overset{s}{\varphi}_{,i} n_m \\ &\text{na } S_d. \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$e^{klm} \overset{s}{\varphi}_{,i} n_m = 0$$

Stąd i z równania (2.3) wynika, że pole elektrostatyczne wewnątrz szczeliny przewodzącej jest równe zeru: $\overset{s}{\mathbf{E}} = -\text{grad } \overset{s}{\varphi} = 0$.

Wielkości elektryczne i mechaniczne na powierzchni S_δ są w tym przypadku związane przez następujące warunki brzegowe

$$(\sigma_k^l + {}_s t_k^l + {}_M t_k^l) n_l = 0 \quad \text{na } S_\delta. \quad (2.8)$$

W próżni V_v otaczającej dielektryk ze szczeliną potencjał pola elektrostatycznego $\check{\varphi}$ spełnia równanie niejednorodne

$$\check{\varphi}_{,k}^k = q \quad \text{w } V_v, \quad (2.9)$$

gdzie q jest danym rozkładem gęstości ładunków elektrostatycznych.

Na powierzchni brzegowej dielektryka pole w próżni i pole w odkształcalnym dielektryku związane są następującymi warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} ({}_s D^l - \varepsilon^{kl} \varphi_{,k}) n_l &= e_o \check{\varphi}_{,i} n^l \\ &\text{na } S_d. \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$e^{klm} \varphi_{,i} n_m = e^{klm} \check{\varphi}_{,i} n_m$$

Wielkości mechaniczne i elektryczne na powierzchni S_d są związane warunkami brzegowymi

$$(\sigma_k^l + {}_s t_k^l + {}_M t_k^l) n_l = -{}_M \tilde{t}_k^l n_l + T_k \quad \text{na } S_d. \quad (2.11)$$

Tutaj T_k oznacza zadane mechaniczne obciążenie powierzchniowe dielektryka, ${}_M \tilde{t}_k^l$ jest tensorem Maxwella w próżni zależnym od pola w próżni $\check{\mathbf{E}} = -\text{grad } \check{\varphi}$

$${}_M \tilde{t}_k^l = e_o \left(\check{\varphi}_{,k} \check{\varphi}_{,l} - \frac{1}{2} \delta_k^l \check{\varphi}_{,m} \check{\varphi}_{,m} \right). \quad (2.12)$$

Zgodnie z przyjętą przez nas metodą aproksymacji szczeliny wszystkie rozwiązania równań są funkcjami parametru aproksymacji δ . Granice tych wielkości przy $\delta \rightarrow 0$ są właściwymi, ścisłymi rozwiązaniami równań opisującymi stan dielektryka ze szczeliną. Postępowanie takie będzie w dalszym ciągu kontynuowane.

Przedstawiony tutaj pełny układ równań i warunków brzegowych dla elektrostatyki dielektryka sprężystego, w ogólnym nieliniowym sformułowaniu, będzie wykorzystany w dalszym ciągu pracy do konstrukcji ogólnych kryteriów pęknięcia. Stan naprężeń i parametry pęknięcia będą jednak wyznaczone na podstawie modelu quasiliniowego, którego założenia zostaną podane w następnym punkcie.

2.3 Model dielektryka ze szczeliną w przybliżeniu quasiliniowym

Podane w punkcie poprzednim równania i warunki brzegowe dla dielektryka ze szczeliną, z uwagi na swój nieliniowy charakter, opisują dosyć szeroką klasę materiałów dielektrycznych i ich zachowań. Teoria ta będzie podstawą do sformułowania ogólnych, energetycznych kryteriów pęknięcia o dużym stopniu ogólności. Kryteria te będą w różnych przybliżonych wersjach stosowane w tej pracy. Do tego zakresu ograniczamy też w pracy stosowanie pełnej teorii.

Prezentowana teoria dotyczy kruchego pęknięcia materiałów takich jak np. ceramika. Wynika stąd możliwość stosowania uproszczonej wersji teorii ogólnej. Używany w pracy wariant, podany w Rozdziale 1 paragraf 2, nazwany został modelem quasiliniowym, ze względu na quasiliniowy charakter zawartych w nim równań. Model ten pozwala na stosowanie efektywnych metod obliczania wielkości odpowiednich parametrów pęknięcia. Jednocześnie wydaje się, że w dostatecznym stopniu opisuje sytuację fizyczną.

Podamy teraz pełny układ równań teorii quasiliniowej w zastosowaniu do sprężystego materiału dielektrycznego zawierającego szczelinę.

Tak jak poprzednio zakłada się, że obszar V_d wypełniony dielektrykiem ma brzeg zewnętrzny S_d oddzielający dielektryk od próżni. Wewnątrz materiału dielektrycznego znajduje się szczelina skończona, powierzchnią aproksymującą której jest rodzina elips, lub szczelina półnieskończona, która aproksymowana jest przez rodzinę obszarów klinowych. W obydwu przypadkach powierzchnia aproksymująca brzeg szczeliny będzie tu oznaczana przez S_δ a obszar wewnętrzny, aproksymujący szczelinę, przez V_δ .

Zgodnie z procedurą opisaną wcześniej, równania w obszarze szczeliny i warunki brzegowe na powierzchni szczeliny zostały sformułowane dla obszarów aproksymujących a następnie dokonane zostało przejście graniczne. Przejście do granicy z obszarem aproksymującym szczelinę pociąga za sobą automatycznie przejście graniczne z wielkościami określonymi we wnętrzu dielektryka, takimi jak równania , warunki brzegowe i odpowiadające im rozwiązania, które zależą od parametru aproksymacji δ .

Model quasiliniowy stwarza możliwość zastosowania postępowania bezpośredniego tzn. przy użyciu obszaru granicznego czyli szczeliny. W tym wypadku procedura taka opisana będzie oddzielnie.

Zgodnie z teorią quasiliniową, w obszarze V_d dielektryka spełnione są równania na potencjał pola elektrycznego

$$\varepsilon\varphi_{;k}{}^k = 0 \quad \text{w } V_d. \quad (2.13)$$

Na zewnątrz dielektryka, w próżni, potencjał pola elektrostatycznego spełnia równanie

$$e_o\tilde{\varphi}_{;k}{}^k = -q \quad \text{w } V_o. \quad (2.14)$$

Na granicy dielektryka i próżni spełnione są warunki ciągłości składowej normalnej indukcji i składowej stycznej natężenia

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi_{;k}n^k &= e_o\tilde{\varphi}_{;k}n^k && \text{na } S_d. \\ e^{klm}\varphi_{;i}n_m &= e^{klm}\tilde{\varphi}_{;i}n_m \end{aligned} \quad (2.15)$$

Zgodnie z tym co zostało powiedziane wyżej możliwe są dwa typy szczelin – szczelina próżniowa i szczelina przewodząca. Potencjał pola elektrostatycznego wewnątrz szczeliny próżniowej spełnia równanie

$$\varphi_{;k}{}^k = 0 \quad \text{w } V_\delta. \quad (2.16)$$

Warunki na powierzchni brzegowej *szczeliny próżniowej* są warunkami ciągłości składowej normalnej indukcji i składowej stycznej natężenia pola. Są one równoważne następującym warunkom dla potencjałów pola w dielektryku i w obszarze szczeliny

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi_{;k}n^k &= e_o\varphi_{;k}n^k && \text{na } S_\delta. \\ e^{klm}\varphi_{;i}n_m &= e^{klm}\varphi_{;i}n_m \end{aligned} \quad (2.17)$$

Warunki na powierzchni brzegowej *szczeliny przewodzącej* sprowadzają się do znikania składowej stycznej natężenia pola przy zbliżaniu się do powierzchni od strony dielektryka

$$e^{klm}\varphi_{;i}n_m = 0 \quad \text{na } S_\delta. \quad (2.18)$$

Warunek ten pociąga za sobą znikanie pola elektrostatycznego wewnątrz obszaru szczeliny, zgodnie z równaniem elektrostatyki.

Każdy z dwóch rodzajów szczelin związany jest z wielkością natężenia pola w dielektryku. Dla pól o natężeniu poniżej progu jonizacji ($2 \div 3 \times 10^4$ V/cm), szczelina zachowuje się jak próżnia. Dla natężeń bliskich progu jonizacji, szczelina zachowuje się jak idealny przewodnik. Szczegółowy mechanizm fizyczny przechodzenia szczeliny próżniowej do przewodzącej został opisany w monografiach [60], [53] i ma on istotny wpływ na wielkość parametrów pęknięcia.

Dielektryk jako ośrodek odkształcalny, sprężysty opisywany jest przez układ równań równowagi mechanicznej i odpowiadających im mechanicznych warunków brzegowych. Układ ten, w prezentowanym tu modelu quasiliniowym, jest sprzężony z polem elektrostatycznym poprzez siły wywołane przez to pole, które występują zarówno w równaniach równowagi jak i warunkach brzegowych.

Równania równowagi dla naprężeń mechanicznych i elektrostatycznych mają postać

$$(\sigma_k^l + s_k^l + M_k^l)_{,l} + \rho f_k = 0 \quad \text{w } V_d. \quad (2.19)$$

Część mechaniczna tensora naprężeń σ_k^l związana jest z przemieszczeniami za pomocą klasycznych związków liniowej sprężystości

$$\sigma_k^l = \lambda u_{,m}^m \delta_k^l + \mu (u_{k,}^l + u_{,k}^l), \quad (2.20)$$

gdzie u_i ($i = 1, 2, 3$), są składowymi wektora przemieszczenia \mathbf{u} .

Natomiast naprężenie sprzężenia s_k^l i tensor naprężeń Maxwella M_k^l są nieliniowymi funkcjami pola elektrostatycznego w dielektryku $E_k = -\varphi_{,k}$

$$s_k^l = a_2 \delta_k^l \varphi_{,m} \varphi_{,}^m + a_5 \varphi_{,k} \varphi_{,}^l, \quad (2.21)$$

$$M_k^l = \varepsilon \left(\varphi_{,k} \varphi_{,}^l - \frac{1}{2} \delta_k^l \varphi_{,m} \varphi_{,}^m \right).$$

Warunki brzegowe na zewnętrznej powierzchni dielektryka S_d , przy założeniu, że jest ona obciążona powierzchniowymi siłami mechanicznymi \mathbf{T} , mają postać

$$(\sigma_k^l + s_k^l + M_k^l) n_l = M_k^l \tilde{n}_l + T_k \quad \text{na } S_d, \quad (2.22)$$

gdzie część mechaniczna naprężeń σ_k^l , będąca funkcją przemieszczeń \mathbf{u} , dana jest przez (2.20), natomiast naprężenie sprzężenia s_k^l i naprężenie Maxwella w dielektryku M_k^l , zależne od gradientów potencjału pola elektrostatycznego w dielektryku, dane są wzorami (2.21). Tensor M_k^l reprezentuje naprężenie Maxwella w próżni i jest zdefiniowany w zależności od natężenia pola w próżni $\tilde{E}_k = -\tilde{\varphi}_{,k}$

$$M_k^l = e_0 \left(\tilde{\varphi}_{,k} \tilde{\varphi}_{,}^l - \frac{1}{2} \delta_k^l \tilde{\varphi}_{,m} \tilde{\varphi}_{,}^m \right). \quad (2.23)$$

Naprężeniowe warunki brzegowe na powierzchni S_δ aproksymującej szczelinę, w zależności od rodzaju szczeliny (który jest związany z wielkością natężenia pola elektrycznego), mają postać:

Dla szczeliny próżniowej

$$(\sigma_k^i + s t_k^i + M t_k^i) n_i = M t_k^i n_i \quad \text{na } S_\delta, \quad (2.24)$$

gdzie $M t_k^i$ jest tensorem naprężeń Maxwella zależnym od natężenia pola elektrostatycznego w szczelinie $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi^s$

$$M t_k^i = e_o \left(\varphi_{,k}^s \varphi_{,i}^s - \frac{1}{2} \delta_k^i \varphi_{,m}^s \varphi_{,m}^s \right). \quad (2.25)$$

Dla szczeliny przewodzącej

$$(\sigma_k^i + s t_k^i + M t_k^i) n_i = 0 \quad \text{na } S_\delta. \quad (2.26)$$

Funkcje będące rozwiązaniem problemu, a mianowicie potencjały $\varphi, \varphi, \varphi^s$ i przemieszczenia \mathbf{u} , są zależne od parametru δ . Zgodnie z przyjętą tu definicją szczeliny, pola w dielektryku ze szczeliną otrzymamy jako granicę tych funkcji dla $\delta \rightarrow 0$.

W modelu quasiliniowym pole elektrostatyczne wyznaczone jest z równań pola elektrostatycznego tak jak dla ciała sztywnego. Tym samym siły pochodzenia elektrycznego działające na dielektryk grają rolę obciążenia zewnętrznego. Przemieszczenia w dielektryku wywołane są działaniem sił równoważnych sił objętościowym oraz sił powierzchniowych działającym na powierzchni zewnętrznej dielektryka oraz na powierzchni szczeliny.

Siły równoważne siłom objętościowym reprezentowane są w równaniu (2.19) przez grupę wyrazów

$$F_k \equiv (s t_k^i + M t_k^i)_{,i} + \rho f_k \quad \text{w } V_d. \quad (2.27)$$

Na powierzchni zewnętrznej dielektryka S_d , obciążenia wywołane polem elektrycznym we wzorze (2.22) opisywane są przez człon

$$\tau_k \equiv (M t_k^i - M t_k^i - s t_k^i) n_i \quad \text{na } S_d. \quad (2.28)$$

Obciążenie wywołane polem elektrostatycznym na powierzchni aproksymującej powierzchnię szczeliny próżniowej jest dane we wzorze (2.24) przez grupę członów

$$\tilde{\tau}_k \equiv \left(M t_k^i - M t_k^i - s t_k^i \right) n_i \quad \text{na } S_\delta. \quad (2.29)$$

Dla szczeliny przewodzącej obciążenie to, zgodnie z wzorem (2.26), jest

$$\tau_k \equiv - (M t_k^I + s t_k^I) n_i \quad \text{na } S_\delta. \quad (2.30)$$

Tak jak to zostało powiedziane wcześniej, we wzorach tych został zaniedbany efekt generacji pola przez odkształcenia materiału, którego wpływ na pękanie materiałów kruchych jest pomijalny. Dokładniejsze uzasadnienie będzie podane w następnym rozdziale.

Z podanego tutaj pełnego, zamkniętego układu równań wynika określona kolejność postępowania ogólnego, w trakcie poszukiwania rozwiązań tego układu.

Ponieważ równania pola elektrostatycznego są niezależne od równań mechanicznych, rozwiązujemy je w pierwszej kolejności. Następnie, zgodnie z wzorami (2.27) – (2.30), znajdujemy siły działające na dielektryk odkształcalny, a wywołane przez pole elektrostatyczne. W kolejności rozwiązujemy równania opisujące stan przemieszczeń i naprężeń mechanicznych w ciele, w których to równaniach wyrazy opisujące siły pochodzenia elektrycznego są już wielkościami znanymi.

Procedura ta, jak przekonamy się później, związana jest z pewnymi trudnościami, albowiem modele matematyczne elektryczny i mechaniczny *dielektryka ze szczeliną* wymagają uzgodnienia w formie dodatkowych założeń, które tworzą spójną teorię oddziaływań elektrosprężystych. Podkreślamy tutaj, że trudność ta występuje wyłącznie dla dielektryka ze szczeliną, a nie dotyczy dielektryka z brzegiem regularnym.

Rozdział 3

Rozkład pól elektrospężystych w otoczeniu naroża szczeliny

Zachowanie się pól w otoczeniu naroża szczeliny jest jednym z ważniejszych zagadnień w teorii pękania. W przyjętym tu modelu quasiliniowym (rozdział 2, paragraf 3, str. 25) występowanie osobliwości w samym narożu szczeliny w połączeniu z odpowiednimi kryteriami fizycznymi pozwala rozstrzygnąć kwestię stabilności szczeliny i ewentualnego rozpoczęcia się procesu pękania.

W tym rozdziale jak i w następnych przedmiotem badania będą takie zagadnienia dla dielektryków ze szczelinami, dla których funkcje opisujące zachowanie się pól zależą tylko od dwóch zmiennych. W przypadku zagadnień statycznych wynika stąd płaskie pole elektrostatyczne oraz płaski stan naprężenia i odkształcenia.

W obszarze ze szczeliną, która jest konturem nieregularnym, jednoznaczne istnienie rozwiązania wymaga postawienia poza warunkami brzegowymi dodatkowego warunku, którym jest istnienie skończonej wartości energii elektrospężystej dielektryka. Następny paragraf poświęcony jest temu zagadnieniu.

3.1 Warunki energetyczne dla dielektryka ze szczeliną.

Zakładamy, że dielektryk sprężysty opisywany jest we współrzędnych biegunowych r, α , to znaczy stany dielektryka nie zależą od trzeciej współrzędnej z . W dielektryku dana jest szczelina, której powierzchnia aproksymująca w otoczeniu naroża jest powierzchnią klina płaskiego, identyczną w każdym przekroju prostopadłym do osi z . Zgodnie z terminologią teorii pękania jest to więc szczelina płaska. Otoczenie naroża szczeliny, podobnie jak i cały dielektryk opisywać będziemy w dwuwymiarowym układzie współrzędnych r, α

W dobrze postawionych matematycznie zagadnieniach brzegowych w obszarach o brzegu regularnym warunki brzegowe są na ogół warunkami wystarczającymi dla jednoznacznej konstrukcji rozwiązania. Inaczej jest, gdy w pewnych punktach brzegu pochodna styczna do brzegu nie istnieje. Tak jest na przykład w obszarze ze szczeliną. Zarówno w zagadnieniach czysto elektromagnetycznych jak i czysto mechanicznych stwierdzono występowanie w punktach nieregularności brzegu osobliwości w rozwiązaniach równań elektrodynamiki oraz mechaniki. Rozwiązanie rośnie nieograniczenie w otoczeniu punktu nieregularności, który stawał się w ten sposób punktem osobliwym tego rozwiązania. Poza tym rząd tej osobliwości stawał się nieokreślony, to znaczy mogło istnieć kilka rozwiązań o różnych osobliwościach. Usunięcie tej niejednoznaczności w konstrukcji rozwiązania zostało osiągnięte przez przyjęcie fizycznego warunku istnienia skończonej energii rozpatrywanego układu, na przykład energii pola elektromagnetycznego lub energii mechanicznej.

Jeżeli jedyną przyczyną osobliwości rozwiązania jest naroże szczeliny, to warunek skończoności energii dla całego dielektryka sprowadza się do istnienia skończonej energii w dowolnym otoczeniu naroża, obejmującym zarówno materiał jak i wewnątrz szczeliny.

Dla ogólnego, nieliniowego modelu dielektryka postać energii elektroprężystej jest następująca (1.6)

$$\begin{aligned} \sum = & \int_{V_d} \left[\rho\epsilon(x^k;_K) + \rho\eta(x^k;_K, \tilde{\varphi}_{,M}) + \frac{1}{2}\epsilon^{kl}\varphi_{,k}\varphi_{,l} \right] dv \\ & + \int_{V_s} \frac{1}{2}e_0 \tilde{\varphi}_{,k} \tilde{\varphi}_{,k}^s dv, \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdzie V_d oznacza obszar zajmowany przez dielektryk, V_s wewnątrz szczeliny, które zgodnie z definicją podaną w punkcie 1 paragrafu 2 tego rozdziału jest granicą wewnątrz obszarów aproksymujących szczelinę. W związku z tym ostatnią całkę rozumiemy jako granicę

$$\int_{V_s} \frac{1}{2}e_0 \tilde{\varphi}_{,k} \tilde{\varphi}_{,k}^s dv = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{V_s} \frac{1}{2}e_0 \tilde{\varphi}_{,k} \tilde{\varphi}_{,k}^s dv.$$

Energia we wzorze (3.1) jest sumą energii sprężystej o gęstości $\rho\epsilon$, energii sprężenia $\rho\eta$, energii elektrostatycznej w dielektryku $\int_{V_d} \frac{1}{2}\epsilon^{kl}\varphi_{,k}\varphi_{,l} dv$ i energii elektrostatycznej w

obszarze szczeliny $\int_{V_s} \frac{1}{2}e_0 \tilde{\varphi}_{,k} \tilde{\varphi}_{,k}^s dv$. Energia sprężysta i energia sprężenia prowadząca do związków konstytutywnych (2.20), (2.21) ma postać

$$\rho\epsilon = \frac{1}{2}\sigma_{kl}e^{kl}, \quad \rho\eta = a_2\delta_{kl}\varphi_{,m}\varphi_{,m}^k e^{kl} + a_5\varphi_{,k}\varphi_{,l}e^{kl}.$$

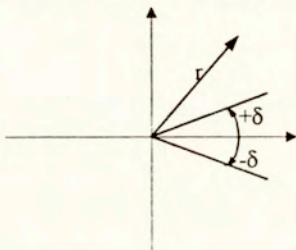
Stąd wynika następujące wyrażenie na całkowitą energię układu *dielektryk izotropowy* -

szczelina (3.1) dla modelu quasiliniowego

$$\begin{aligned} \sum &= \int_{V_d} \left[\frac{1}{2} \sigma_{kl} e^{kl} + s^t{}_{kl} e^{kl} + \frac{1}{2} \varepsilon \varphi_{;k} \varphi_{;k} \right] dv \\ &+ \int_{V_s} \frac{1}{2} e_0 \overset{\circ}{\varphi}_{;k} \overset{\circ}{\varphi}_{;k} dv. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ponieważ dalsze rozważania w tym paragrafie prowadzone będą w ramach modelu quasiliniowego, energię dla tego modelu przyjmiemy w postaci (3.2).

W rozważanym tutaj przypadku wierzchołek szczeliny będzie jedynym punktem nieregularnym obszaru zajmowanego przez dielektryk. Energia całkowita \sum jest sumą energii \sum_0 w otoczeniu wierzchołka szczeliny oraz energii \sum_c w pozostałej części obszaru. Zakładamy, że całkowita energia \sum jest skończona. Ponieważ w pozostałym obszarze rozwiązanie nie ma osobliwości energia \sum_c jest skończona. Stąd rozwiązanie w otoczeniu naroża szczeliny powinno być takie, by energia \sum_0 była skończona.



Energia \sum_0 w otoczeniu wierzchołka szczeliny ma we współrzędnych biegunowych postać

$$\begin{aligned} \sum_0 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \int_0^{r_0} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_{rr} e_{rr} + 2\sigma_{ra} e_{ra} + \sigma_{aa} e_{aa}) \right. \right. \\ &+ s^t{}_{rr} e_{rr} + 2s^t{}_{ra} e_{ra} + s^t{}_{aa} e_{aa} + \frac{1}{2} \varepsilon \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \left. \right\} r dr d\alpha \quad (3.3) \\ &+ \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{r_0} \frac{1}{2} e_0 \left[\left(\frac{\partial \overset{\circ}{\varphi}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \overset{\circ}{\varphi}}{\partial \alpha} \right)^2 \right] r dr d\alpha \left. \right\}. \end{aligned}$$

Ostatecznie warunek energetyczny sprowadza się więc do nierówności: $\sum_0 < C$ gdzie C jest pewną liczbą.

Energia elektrosprężysta w otoczeniu naroża szczeliny jako przypadki szczególne zawiera w sobie energię samego pola elektrostatycznego i samego pola sprężystego, dlatego

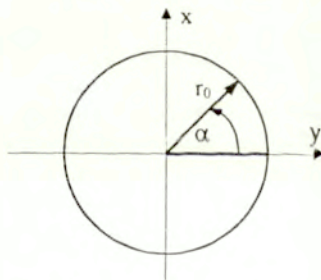
skończoność tej całki sprowadza się do warunku skończoności części elektrostacyjnej, części sprężystej i w konsekwencji skończoności całki z energii sprężenia tych pól co w istocie jest warunkiem nałożonym na naprężenia sprężenia s, t .

3.2 Sformułowanie problemu brzegowego dla rozwiązania lokalnego

Problem badania funkcji opisujących pole elektrospężyste w otoczeniu naroża szczeliny związany jest z konstrukcją rozwiązania lokalnego. Poszukiwać będziemy zatem takiego rozwiązania, które spełniać będzie w obszarze dielektryka równania dla potencjału pola elektrostacyjnego i równania równowagi, odpowiednie warunki brzegowe na powierzchni szczeliny jak również warunek energetyczny i będzie zawierać dowolne parametry, które pozwolą spełnić dowolne warunki brzegowe na wspólnej granicy otoczenia naroża szczeliny i obszaru zewnętrznego. Problem brzegowy dla rozwiązania lokalnego sformułujemy tu we współrzędnych biegunowych r, α .

Wprowadźmy dwuwymiarowy układ współrzędnych kartezjańskich (x, y) , o początku w narożu szczeliny i osi x skierowanej wzdłuż osi szczeliny. Z układem tym związany będzie biegunowy układ współrzędnych (r, α) , którego promień wodzący r ma początek w narożu szczeliny, kąt α jest liczony od dodatniego kierunku osi x w kierunku dodatnim. Oba układy są zorientowane dodatnio. Współrzędne biegunowe związane są ze współrzędnymi kartezjańskimi zależnościami

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha. \quad (3.4)$$



Otoczeniem V_0 naroża szczeliny jest wnętrze koła o środku w narożu i promieniu $r = r_0$

$$V_0: r < r_0, 0 < \alpha < 2\pi. \quad (3.5)$$

Szczelinę w otoczeniu naroża aproksymować będzie skończony obszar klinowy o ostrym kącie rozwarcia równym 2δ

$$V_s = \lim_{\delta \rightarrow 0} V_s^\delta, \quad V_s^\delta: r < r_0, -\delta < \alpha < \delta. \quad (3.6)$$

Obszar dielektryka zawarty w otoczeniu V_0 oznaczmy przez V_d

$$V_d = \lim_{\delta \rightarrow 0} V_d^\delta, \quad V_d^\delta : r < r_0, \delta < \alpha < 2\pi - \delta. \quad (3.7)$$

Granicą obszaru V_d jest suma powierzchni $S_d + S_s$, gdzie S_d jest wspólną granicą dielektryka zawartego w otoczeniu naroża szczeliny i obszaru zewnętrznego a S_s powierzchnią segmentu szczeliny zawartego w V_0 :

$$S_d = \lim_{\delta \rightarrow 0} S_d^\delta, \quad S_d^\delta : r = r_0, \delta < \alpha < 2\pi - \delta, \quad (3.8)$$

$$S_s = \lim_{\delta \rightarrow 0} S_s^\delta, \quad S_s^\delta : r < r_0, \alpha = \begin{cases} \delta \\ 2\pi - \delta \end{cases}.$$

Jak wspomniano przy omawianiu przybliżenia quasiliniowego, należy najpierw skonstruować rozwiązanie problemu brzegowego dla pola elektrostatycznego, następnie w oparciu o otrzymane rozwiązanie i definicje naprężeń elektrostatycznych wyznaczyć funkcje reprezentujące naprężenia sprężenia i naprężenia Maxwella, po czym rozwiązać problem brzegowy dla równań równowagi, w którym rolę obciążeń zewnętrznych grają siły elektrostatyczne.

3.2.1 Pole elektrostatyczne

Wyróżnić tu trzeba dwa przypadki

(a) natężenie pola w szczelinie jest niższe od natężenia jonizacyjnego dla powietrza – szczelinę można traktować jako próżniową.

(b) natężenie pola w szczelinie jest większe od natężenia jonizacyjnego dla powietrza – szczelina staje się przewodząca.

(a) Szczelina próżniowa

Pola elektrostatycznego w dielektryku poszukujemy w postaci $\mathbf{E} = (E_r, E_\alpha)$, $E_r = -\partial_r \varphi$, $E_\alpha = -\frac{1}{r} \partial_\alpha \varphi$ gdzie φ jest potencjałem pola elektrostatycznego. W przypadku szczeliny próżniowej poszukuje się również pola w szczelinie. Poszukujemy funkcji $\varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi_\delta$, która reprezentuje potencjał pola elektrostatycznego w dielektryku oraz funkcji $\varphi^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi_\delta^s$ opisującej potencjał pola elektrostatycznego w szczelinie. Funkcje $\varphi_\delta, \varphi_\delta^s$ spełniają równania

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \varphi_\delta = 0 & w V_d, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \varphi_\delta^s = 0 & w V_s \end{cases} \quad (3.9)$$

oraz następujące warunki brzegowe na powierzchni szczeliny

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial r} \Big|_{\alpha = (\frac{\pi}{2} - \delta)} \right) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \varphi_\delta^s}{\partial r} \Big|_{\alpha = (\frac{\pi}{2} - \delta)} \right), \\ \epsilon \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = (\frac{\pi}{2} - \delta)} \right) &= \epsilon_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\delta^s}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = (\frac{\pi}{2} - \delta)} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ponadto spełniony musi być warunek istnienia skończonej energii elektrostatycznej układu dielektryk – szczelina

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^{r_0} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{\delta}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\delta}}{\partial \alpha} \right)^2 \right] d\alpha r dr \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_0^{r_0} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \left[\left(\frac{\partial \dot{\varphi}_{\delta}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\varphi}_{\delta}}{\partial \alpha} \right)^2 \right] d\alpha r dr \right\} < \infty. \quad (3.11)$$

Funkcje φ , $\dot{\varphi}$ powinny zawierać dowolne parametry w takiej liczbie, aby możliwe było spełnienie dowolnych warunków brzegowych na brzegu S_0 otoczenia naroża szczeliny

$$\begin{aligned} \varphi(r_0, \alpha) &= f(\alpha), \quad 0 < \alpha < 2\pi, \\ \dot{\varphi}(r_0) &= g, \end{aligned} \quad (3.12)$$

gdzie f jest dowolną funkcją α a g dowolną stałą.

(a) Szczelina przewodząca

W tym przypadku poszukujemy pola elektrostatycznego tylko w obszarze dielektryka, bowiem wewnątrz szczeliny którą traktujemy jako idealny przewodnik pole znika. Potencjał pola elektrostatycznego w dielektryku definiujemy tak jak poprzednio jako granicę $\varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi_{\delta}$. Funkcja φ_{δ} spełnia równanie

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \varphi_{\delta} = 0 \quad w V_d \quad (3.13)$$

oraz warunki brzegowe na powierzchni szczeliny

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\varphi_{\delta})|_{\alpha = \frac{\delta}{2}, \pi - \frac{\delta}{2}} = 0. \quad (3.14)$$

Ponadto spełniony musi być warunek energetyczny

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^{r_0} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{\delta}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\delta}}{\partial \alpha} \right)^2 \right] d\alpha r dr < \infty. \quad (3.15)$$

Funkcja φ musi zawierać dowolne parametry tak aby mogły być spełnione dowolne warunki brzegowe na granicy otoczenia naroża szczeliny

$$\varphi(r_0, \alpha) = f(\alpha), \quad 0 < \alpha < 2\pi, \quad (3.16)$$

gdzie f – dowolna funkcja α .

3.2.2 Siły elektrostatyczne

W oparciu o otrzymane rozwiązanie dla potencjału elektrostatycznego w dielektryku i w szczelinie, należy wyznaczyć siły pochodzące od naprężeń elektrostatycznych działające na powierzchni szczeliny oraz wyrazi o charakterze siły objętościowej występujące w równaniach ruchu.

Przy wyznaczaniu naprężeń działających na powierzchni szczeliny od strony dielektryka oraz przy wyznaczaniu składowych siły objętościowej można podstawić bezpośrednio funkcje $E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, $E_\alpha = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$ otrzymane z rozwiązania dla potencjału w dielektryku do odpowiednich wzorów.

Przy wyznaczaniu sił działających na powierzchni szczeliny od strony próżni należy wszędzie tam, gdzie występuje różniczkowanie, zastosować procedurę przejścia granicznego, zgodnie z którą pochodną potencjału elektrostatycznego w szczelinie definiujemy jako granicę

$$\overset{s}{\varphi}_{,i} \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\left(\overset{s}{\varphi}_\delta \right)_{,i} \right]. \quad (3.17)$$

Siły objętościowe

Dla idealnego dielektryka, nie zawierającego ładunków swobodnych dywergencja tensora naprężeń Maxwella jest równa zero $-M^i_{j;i} = 0$. Stąd $F_j = {}_s t^i_{j;i}$. Po podstawieniu do tej zależności wyrażen na naprężenia sprzężenia (2.21) otrzymuje się wyrażenia na składowe siły objętościowej w zależności od potencjału elektrostatycznego lub, uwzględniając że $E_i = -\varphi_{,i}$, w zależności od składowych pola. We współrzędnych polarnych r, α składowe elektrostatycznej siły objętościowej (2.27) dane są wzorami

$$\begin{aligned} F_r &= (2a_2 + a_5) \left(E_r \frac{\partial E_r}{\partial r} + E_\alpha \frac{\partial E_\alpha}{\partial r} \right), \\ F_\alpha &= (2a_2 + a_5) \left(E_r \frac{\partial E_\alpha}{\partial r} - E_\alpha \frac{\partial E_r}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Siła działająca na powierzchni szczeliny

Siła elektrostatyczna działająca na powierzchni szczeliny próżniowej dana jest wzorem (2.29) a na powierzchni szczeliny przewodzącej wzorem (2.30). Uwzględniając zależność składowych pola elektrostatycznego od potencjału otrzymuje się następujące wzory dla sił działających na powierzchni segmentu szczeliny S_δ :

Szczelina próżniowa

górną powierzchnia szczeliny

$$\overset{s}{\tau}_r(r, 0) = \epsilon_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \overset{s}{\varphi}_\delta}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial \overset{s}{\varphi}_\delta}{\partial r} \right) \right\}_{|\alpha=\delta} - (\epsilon + a_5) (E_r E_\alpha)_{|\alpha=0},$$

$$\begin{aligned} \overset{s}{\tau}_\alpha(r, 0) &= \frac{1}{2} e_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \overset{s}{\varphi}_\delta(r, \delta)}{\partial \alpha} \right)^2 - \left(\frac{\partial \overset{s}{\varphi}_\delta(r, \delta)}{\partial r} \right)^2 \right\}_{|\alpha=\delta} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\varepsilon + a_5) (E_\alpha^2 - E_r^2)_{|\alpha=0}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

dolna powierzchnia szczeliny

$$\begin{aligned} \overset{s}{\tau}_r(r, 2\pi) &= e_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \overset{s}{\varphi}_\delta}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial \overset{s}{\varphi}_\delta}{\partial r} \right) \right\}_{|\alpha=-\delta} - (\varepsilon + a_5) (E_r E_\alpha)_{|\alpha=2\pi}, \\ \overset{s}{\tau}_\alpha(r, 2\pi) &= \frac{1}{2} e_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \overset{s}{\varphi}_\delta}{\partial \alpha} \right)^2 - \left(\frac{\partial \overset{s}{\varphi}_\delta}{\partial r} \right)^2 \right\}_{|\alpha=-\delta} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\varepsilon + a_5) (E_\alpha^2 - E_r^2)_{|\alpha=2\pi}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Szczelina przewodząca

górną powierzchnia szczeliny

$$\begin{aligned} \overset{s}{\tau}_r(r, 0) &= -(\varepsilon + a_5) (E_r E_\alpha)_{|\alpha=0}, \\ \overset{s}{\tau}_\alpha(r, 0) &= -\frac{1}{2} (\varepsilon + a_5) (E_\alpha^2 - E_r^2)_{|\alpha=0}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

dolną powierzchnia szczeliny

$$\begin{aligned} \overset{s}{\tau}_r(r, 2\pi) &= -(\varepsilon + a_5) (E_r E_\alpha)_{|\alpha=2\pi}, \\ \overset{s}{\tau}_\alpha(r, 2\pi) &= -\frac{1}{2} (\varepsilon + a_5) (E_\alpha^2 - E_r^2)_{|\alpha=2\pi}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.2.3 Przemieszczenia generowane polem elektrostatycznym

Przez podstawienie związków konstytutywnych dla naprężeń mechanicznych (2.20) do równań równowagi (2.19) otrzymuje się równania Lamégo.

Rozpatrywane tu zagadnienie konstrukcji rozwiązania lokalnego problemu brzegowego dla przemieszczeń, polega na wyznaczeniu funkcji $\mathbf{u} = (u_r, u_\alpha)$ spełniającej następujące równania i warunki brzegowe:

Równania Lamégo

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} \right] \right\} \\ - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ru_\alpha) - \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} \right] = -F_r, \\ \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} \right] \\ + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ru_\alpha) - \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} \right] \right\} = -F_\alpha, \end{aligned} \right\} \text{ dla } \begin{cases} 0 < r < r_0, \\ 0 < \alpha < 2\pi. \end{cases} \quad (3.23)$$

Warunki brzegowe na powierzchni szczeliny

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r\alpha} = \tau_r \\ \sigma_{\alpha\alpha} = \tau_\alpha \end{aligned} \right\} \text{ dla } 0 < r < r_0, \quad \alpha = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases}, \quad (3.24)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \sigma_{r\alpha} &= \mu \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) u_\alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} \right], \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} \right) + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dowolne warunki brzegowe na granicy otoczenia naroża szczeliny

$$u_r(r_0, \alpha) = V_r(\alpha), \quad u_\alpha = V_\alpha(r_0, \alpha), \quad (3.26)$$

gdzie V_r, V_α są dowolnymi funkcjami α .

Funkcje \mathbf{u} oraz naprężenia sprzężenia \mathbf{s}_t muszą spełniać warunek energetyczny równoważny warunkowi (3.3) w części dotyczącej energii odkształcenia i energii sprzężenia. Warunek ten przyjmujemy tu w postaci

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\xi [(\sigma_{rr} + s_{trr}) e_{rr} + (\sigma_{r\alpha} + s_{tr\alpha}) e_{r\alpha} + (\sigma_{\alpha\alpha} + s_{t\alpha\alpha}) e_{\alpha\alpha}] r dr d\alpha = 0, \quad (3.27)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + u_r \right), \\
 e_{r\alpha} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) u_\alpha \right\}, \\
 \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} \right).
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Składowe naprężenia sprzężenia w zależności od składowych pola elektrostatycznego dane są wzorami

$$\begin{aligned}
 s t_{rr} &= (a_2 + a_5) E_r^2 + a_2 E_\alpha^2, \\
 s t_{r\alpha} &= a_5 E_r E_\alpha, \\
 s t_{\alpha\alpha} &= (a_2 + a_5) E_\alpha^2 + a_2 E_r^2.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Jest to pełny układ równań i warunków koniecznych dla jednoznacznej konstrukcji rozwiązania lokalnego z dokładnością do stałych dowolnych. Stałe te pozwalają spełnić dowolne warunki brzegowe na granicy otoczenia naroża szczeliny (3.26). Można je wyznaczyć z warunków ciągłości rozwiązania w otoczeniu naroża szczeliny i odpowiedniego rozwiązania w obszarze zewnętrznym na wspólnej granicy tych obszarów.

3.3 Rozkład pola elektrostatycznego

Rozwiązanie dla pola elektrostatycznego wokół obszaru klinowego jest zagadnieniem klasycznym i zbadanym. Tutaj podana zostanie konstrukcja rozwiązania lokalnego w formie odpowiedniej dla rozpatrywanych dalej zagadnień pęknięcia.

Pomimo, że poszukujemy pola wyłącznie w małym otoczeniu naroża szczeliny, co z matematycznego punktu widzenia oznacza, że rozwiązanie ma charakter lokalny, z fizycznego punktu widzenia występowanie każdego z tych przypadków związane jest z wielkością natężenia pola zewnętrznego. Dwa rodzaje warunków brzegowych (3.10), (3.14) odpowiadających szczelinie próżniowej i przewodzącej powodują, że przy konstrukcji rozwiązania należy je rozpatrywać oddzielnie.

W obydwu przypadkach rozwiązanie przyjmować będziemy w postaci uogólnionego szeregu potęgowego, którego współczynnikami są funkcje trygonometryczne

$$S = \sum_{n=N}^{\infty} r^{\lambda_n} (A_n \sin \lambda_n \alpha + B_n \cos \lambda_n \alpha), \tag{3.30}$$

W szeregu tym liczbowe wykładniki potęgowe λ_n jak również liczba N , która jest tu dowolną liczbą całkowitą ujemną lub dodatnią, zostaną ściśle wyznaczone i decydować będą o rzędzie osobliwości lub braku tej osobliwości w rozwiązaniu. Współczynniki

liczbowe A_n i B_n zostaną wyznaczone tylko częściowo, ponieważ rozwiązanie ma charakter lokalny i wyznaczenie wszystkich współczynników wymagałoby wyznaczenia pól w całym obszarze dielektryka i szczeliny. Naszym celem jest natomiast zbadanie zachowania się rozwiązania względem r .

Badanie zachowania się rozwiązania w otoczeniu punktów osobliwych przy założeniu takiej jego formy jest szczególnie wygodne i efektywne. Postać ta stosowana jest zarówno w ogólnej teorii równań różniczkowych jak i w zastosowaniach, w tym w teorii pola elektromagnetycznego i w mechanice. W teorii pękania metodę tę zastosował, prawdopodobnie po raz pierwszy *L. M. Williams* [67].

Pojęcie natężenia progowego pola elektrycznego w przypadku rozwiązania lokalnego. Używane tutaj pojęcie "natężenie progowe" lub *pole o natężeniu mniejszym lub większym od progowego* ma w teorii dielektryków aspekt doświadczalny. Mianowicie natężenie pola w szczelinie jest mniejsze lub większe od natężenia jonizacyjnego, jeżeli dane pole zewnętrzne w którym dielektryk ze szczeliną jest umieszczony, ma odpowiednio natężenie mniejsze lub większe od określonej wielkości, którą nazywać tu będziemy wartością progową. W przypadku rozwiązania lokalnego w otoczeniu naroża szczeliny, którego potencjał opisywany jest wzorem (3.30) pojęcie pola zewnętrznego nie występuje, ponieważ do określenia zachowania się pola w otoczeniu naroża szczeliny nie jest ono potrzebne. Jak to zostanie pokazane niżej, we wzorze tym tylko część stałych wyznacza się z warunków brzegowych na powierzchni szczeliny (3.10), (3.14). Inne stałe, które pozostaną w rozwiązaniu lokalnym nieokreślone, potrzebne są dla spełnienia dowolnych warunków na granicy otoczenia szczeliny V_0 (3.12), (3.16). W rzeczywistości, każde przyjęte dla ciągów stałych wartości takie, że szereg (3.30) byłby zbieżny, są związane pośrednio z przyłożonym zewnętrznym polem elektrycznym. To co zostało powiedziane powyżej prowadzi do następującej definicji:

Definicja: *Mówimy, że natężenie pola lokalnego w szczelinie jest większe lub mniejsze od natężenia jonizacyjnego, jeżeli współczynniki A_n i B_n występujące w (3.30) są takie, że odpowiadające im pole zewnętrzne jest odpowiednio większe lub mniejsze od natężenia progowego.*

3.3.1 Dielektryk ze szczeliną próżniową

W otoczeniu naroża szczeliny V_0 rozwiązanie równań (3.9) w dielektryku zakładamy w postaci

$$\varphi = \sum_{n=N}^{\infty} r^{\lambda_n} (A_n \sin \lambda_n \alpha + B_n \cos \lambda_n \alpha). \quad (3.31)$$

Wewnątrz klina aproksymującego szczelinę próżniową przyjmijmy następującą postać rozwiązania

$$\overset{\circ}{\varphi} = \sum_{n=K}^{\infty} r^{\xi_n} (\alpha_n \sin \xi_n \alpha + \beta_n \cos \xi_n \alpha). \quad (3.32)$$

Warunek brzegowy dla obydwu potencjałów zapisujemy uwzględniając fakt, że dla potencjału w dielektryku przechodzimy do powierzchni klina aproksymującego szczelinę od strony dielektryka, a dla potencjału wewnątrz obszaru klinowego o kącie rozwarcia 2δ przechodzimy do powierzchni od wewnątrz tego obszaru.

Warunek brzegowy (3.10) ma więc postać

$$\begin{aligned}
 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n r^{\lambda_n - 1} (A_n \sin \lambda_n \delta + B_n \cos \lambda_n \delta) \right. \\
 \left. - \sum_{n=K}^{\infty} \xi_n r^{\xi_n - 1} (\alpha_n \sin \xi_n \delta + \beta \cos \xi_n \delta) \right\} = 0, \\
 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n r^{\lambda_n - 1} (A_n \sin \lambda_n (2\pi - \delta) + B_n \cos \lambda_n (2\pi - \delta)) \right. \\
 \left. + \sum_{n=K}^{\infty} \xi_n r^{\xi_n - 1} (\alpha_n \sin \xi_n \delta - \beta \cos \xi_n \delta) \right\} = 0, \\
 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n r^{\lambda_n - 1} \varepsilon (A_n \cos \lambda_n \delta - B_n \sin \lambda_n \delta) \right. \\
 \left. - \sum_{n=K}^{\infty} \xi_n r^{\xi_n - 1} \varepsilon_0 (\alpha_n \cos \xi_n \delta - \beta \sin \xi_n \delta) \right\} = 0, \\
 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n r^{\lambda_n - 1} \varepsilon [A_n \cos \lambda_n (2\pi - \delta) - B_n \sin \lambda_n (2\pi - \delta)] \right. \\
 \left. - \sum_{n=K}^{\infty} \xi_n r^{\xi_n - 1} \varepsilon_0 (\alpha_n \cos \xi_n \delta - \beta \sin \xi_n \delta) \right\} = 0,
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

gdzie $\lambda_n, \xi_n, A_n, B_n, \alpha_n, \beta_n$ są nieskończonymi ciągami liczb niewiadomych. Aby istniało niezerowe rozwiązanie i powyższy układ równań był spełniony dla różnych od zera wartości współczynników $A_n, B_n, \alpha_n, \beta_n$, trzeba przyjąć $\xi_n = \lambda_n$ oraz $K = N$. Wówczas warunkiem koniecznym i dostatecznym zachodzenia tych równań dla dowolnego $r < r_0$ jest znikanie współczynników przy każdej potęgze r

$$\begin{aligned}
 A_n \sin \lambda_n \delta + B_n \cos \lambda_n \delta - \alpha_n \sin \lambda_n \delta - \beta \cos \lambda_n \delta &= 0, \\
 A_n \sin \lambda_n (2\pi - \delta) + B_n \cos \lambda_n (2\pi - \delta) + \alpha_n \sin \lambda_n \delta - \beta \cos \lambda_n \delta &= 0, \\
 \varepsilon (A_n \cos \lambda_n \delta - B_n \sin \lambda_n \delta) - \varepsilon_0 (\alpha_n \cos \lambda_n \delta - \beta \sin \lambda_n \delta) &= 0, \\
 \varepsilon (A_n \cos \lambda_n (2\pi - \delta) - B_n \sin \lambda_n (2\pi - \delta)) - \varepsilon_0 (\alpha_n \cos \lambda_n \delta - \beta \sin \lambda_n \delta) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Warunkiem istnienia niezerowego rozwiązania tego układu jest zerowanie się wyznacznika

$$W = \begin{vmatrix} \sin \lambda_n \delta & \cos \lambda_n \delta & -\sin \lambda_n \delta & -\cos \lambda_n \delta \\ \sin \lambda_n (2\pi - \delta) & \cos \lambda_n (2\pi - \delta) & \sin \lambda_n \delta & -\cos \lambda_n \delta \\ \varepsilon \cos \lambda_n \delta & -\varepsilon \sin \lambda_n \delta & -\varepsilon_0 \cos \lambda_n \delta & \varepsilon_0 \sin \lambda_n \delta \\ \varepsilon \cos \lambda_n (2\pi - \delta) & -\varepsilon \sin \lambda_n (2\pi - \delta) & -\varepsilon_0 \cos \lambda_n \delta & -\varepsilon_0 \sin \lambda_n \delta \end{vmatrix} = 0. \tag{3.35}$$

Równanie to dla każdego n ma tylko jedną niewiadomą λ_n . Po obliczeniu wartości wyznacznika otrzymujemy następujące równanie dla λ_n

$$-\frac{1}{2}(\varepsilon^2 + \varepsilon_0) [\cos 2\lambda_n(\pi - 2\delta) - \cos 2\lambda_n\pi] + \varepsilon_0\varepsilon [\cos 2\lambda_n(\pi - 2\delta) + \cos 2\lambda_n\pi - 2] = 0. \quad (3.36)$$

Dokonujemy teraz przejścia granicznego od klina do szczeliny to jest zakładamy, że $\delta \rightarrow 0$. Z równań (3.36) otrzymujemy równanie na poszukiwane potęgi λ_n dla szczeliny

$$\cos \lambda_n \pi = 0, \quad (3.37)$$

skąd znajdujemy

$$\lambda_n = n. \quad (3.38)$$

Ponieważ n zmienia się w granicach $N < n < +\infty$, przedział zmienności n wyznaczmy z warunku istnienia skończonej energii elektrostatycznej układu dielektryk – szczelina w otoczeniu naroża V_0 (3.11). Po podstawieniu rozwiązania w postaci

$$\varphi_\delta = \sum_{n=N}^{\infty} r^{\lambda_n} (A_n \sin \lambda_n \alpha + B_n \cos \lambda_n \alpha), \quad \varphi'_\delta = \sum_{n=N}^{\infty} r^{\lambda_n} (\alpha_n \sin \lambda_n \alpha + \beta_n \cos \lambda_n \alpha) \quad (3.39)$$

do (3.11), wymnożeniu szeregów, przy założeniu ich bezwzględnej zbieżności i przejściu do granicy z $\delta \rightarrow 0$, można podstawić $\lambda_n = n$. Otrzymamy stąd, że najniższą potęgą N dla której wyrażenie to ma wartość skończoną jest $N = 1$. Zatem pole elektrostatyczne w dielektryku ze szczeliną próżniową w bliskim otoczeniu naroża, opisywane jest wyrazem rzędu r^0 i jest regularne.

Z równań (3.34), po podstawieniu $\lambda_n = n$ gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$ i przejściu z parametrem $\delta \rightarrow 0$, otrzymujemy równania na stałe $A_n, B_n, \alpha_n, \beta_n$

$$B_n - \beta_n = 0, \quad \varepsilon A_n - \varepsilon_0 \alpha_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

z których wyznaczamy stałe α_n, β_n w zależności od stałych A_n, B_n

$$\beta_n = B_n, \quad \alpha_n = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} A_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.40)$$

Składowe pola elektrostatycznego E_r, E_α w dielektryku oraz $\overset{s}{E}_r, \overset{s}{E}_\alpha$ w szczelinie, wyznacza się uwzględniając procedurę przejścia granicznego (3.17). Sposób definiowania funkcji opisujących pola w szczelinie, jako wartości granicznych wielkości zdefiniowanych w obszarach klinowych o skończonym kącie rozwarcia, dotyczy również innych wielkości opisujących szczelinę, w tym pochodnych wyższych rzędów (paragraf 2.1 *Dielektryk ze szczeliną - definicje* str. 20) Postępowanie takie stosuje się nie tylko do obszarów klinowych jako aproksymujących szczelinę ale również do innych obszarów aproksymacyjnych n.p. eliptycznych, związanych ze szczeliną skończoną.

Składowe pola elektrostatycznego w szczelinie będą zatem zgodnie z powyższą definicją dane wzorami

$$\overset{s}{E}_r = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial \overset{s}{\varphi}_\delta}{\partial r}, \quad \overset{s}{E}_\alpha = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \overset{s}{\varphi}_\delta}{\partial \alpha} \right), \quad (3.41)$$

gdzie należy podstawić $\overset{s}{\varphi}_\delta$ dane wzorem (3.39).

Po wykonaniu różniczkowania przechodzimy z kątem δ do granicy $\delta \rightarrow 0$. W otrzymanych wzorach możemy już teraz podstawić obliczone wcześniej $\lambda_n = n$, $N = 1$ oraz wartości stałych $\beta_n = B_n$, $\alpha_n = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} A_n$.

Składowe pola w dielektryku otrzymujemy bezpośrednio przez różniczkowanie funkcji $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \sin n\alpha + B_n \cos n\alpha)$.

Ostatecznie otrzymujemy następujące rozwiązanie lokalne dla pola elektrostatycznego w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej

$$\begin{aligned} E_r &= -\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} n (A_n \sin n\alpha + B_n \cos n\alpha), \\ E_\alpha &= -\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} n (A_n \cos n\alpha - B_n \sin n\alpha), \\ \overset{s}{E}_r &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} (-1)^n n B_n, \\ \overset{s}{E}_\alpha &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} (-1)^n n A_n. \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.3.2 Dielektryk ze szczeliną przewodzącą

Jeżeli natężenie pola elektrostatycznego w szczelinie osiągnie wartość jonizacyjną t.j. $|\overset{s}{\mathbf{E}}| \geq \overset{o}{E}$ [60],[53] to gaz w szczelinie staje się dobrze przewodzący co oznacza, że wnętrze szczeliny nie może być traktowane jako próżnia. Przyjmuje się, że gaz jest idealnie przewodzący, co jest tylko określonym przybliżeniem sytuacji.

W tym przypadku pole elektrostatyczne wewnątrz szczeliny znika $\overset{s}{\mathbf{E}} = 0$, natomiast pole w dielektryku spełnia na powierzchni szczeliny warunek znikania potencjału elektrostatycznego (3.14). Pokazane zostanie, że w odróżnieniu od szczeliny próżniowej gdzie pole jest regularne, z warunków tych wynika osobliwość pola elektrostatycznego w narożu szczeliny przewodzącej.

Podobnie jak poprzednio potencjał elektrostacyjny pola w dielektryku przyjmujemy w postaci

$$\varphi = \sum_{n=N}^{\infty} r^{\lambda_n} (\mathcal{A}_n \sin \lambda_n \alpha + \mathcal{B}_n \cos \lambda_n \alpha), \quad (3.43)$$

gdzie $\lambda_n, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n$ - nieznanne ciągłe liczby.

Wyrażenie to podstawiamy do warunków brzegowych, które powinny być spełnione na powierzchni klina aproksymującego szczelinę. Otrzymujemy następujący układ równań z którego należy wyznaczyć nieznanne liczby $\lambda_n, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n, N < n < \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=N}^{\infty} r^{\lambda_n - 1} \lambda_n [\mathcal{A}_n \sin \lambda_n \delta + \mathcal{B}_n \cos \lambda_n \delta] &= 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=N}^{\infty} r^{\lambda_n - 1} \lambda_n [\mathcal{A}_n \sin \lambda (2\pi - \delta) + \mathcal{B}_n \cos \lambda_n (2\pi - \delta)] &= 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Warunkiem zachodzenia tych równań dla dowolnego $r < r_0$, koniecznym i dostatecznym, jest zerowanie się współczynników przy każdej potęgze r^{λ_n} . Otrzymuje się więc dla każdego n układ równań algebraicznych dla wyznaczenia liczb $\lambda_n, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n$

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_n \sin \lambda_n \delta + \mathcal{B}_n \cos \lambda_n \delta] &= 0, \\ [\mathcal{A}_n \sin \lambda (2\pi - \delta) + \mathcal{B}_n \cos \lambda_n (2\pi - \delta)] &= 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ponieważ układ ten jest jednorodny, warunkiem jego rozwiązalności jest zerowanie się wyznacznika

$$W = \begin{vmatrix} \sin \lambda_n \delta & \cos \lambda_n \delta \\ \sin \lambda_n (2\pi - \delta) & \cos \lambda_n (2\pi - \delta) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sin 2\lambda_n (\pi - \delta) = 0. \quad (3.46)$$

Dokonyjemy teraz przejścia granicznego od klina do szczeliny t.j. zakładamy $\delta \rightarrow 0$. Otrzymujemy

$$\sin 2\lambda_n \pi = 0 \quad (3.47)$$

skąd wynika, że

$$\lambda_n = \frac{n}{2}, \quad N < n < +\infty. \quad (3.48)$$

Ograniczenie przedziału zmienności n otrzymujemy z warunku istnienia skończonej energii pola elektrostacyjnego w dowolnym otoczeniu naroża szczeliny (3.16).

Po podstawieniu do (3.16) potencjału elektrostacyjnego w postaci (3.43) i przejściu do granicy dla $\delta \rightarrow 0$, otrzymujemy energię elektrostacyjną dla dielektryka ze szczeliną gdzie możemy podstawić $\lambda_n = \frac{n}{2}$. Przy założeniu, że szereg jest bezwzględnie zbieżny, po uporządkowaniu wyrazów otrzymuje się, że energia w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej w dielektryku jest skończona, jeżeli n zmienia się w przedziale $1 \leq n < \infty$, t.j. $\lambda_n = \frac{n}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$. Wtedy wzór (3.43) dla potencjału ma postać

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \left(\mathcal{A}_n \sin \frac{n}{2} \alpha + \mathcal{B}_n \cos \frac{n}{2} \alpha \right). \quad (3.49)$$

Z równań (3.45) dla $\delta \rightarrow 0$ oraz $\lambda_n = \frac{n}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ wynika, że $B_n = 0$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$ natomiast stałe A_n są dowolne, co jest związane z lokalnym charakterem rozwiązania.

Pole elektrostatyczne w szczelinie $\vec{E} = 0$, a pole w dielektryku wyznacza się bezpośrednio. Ostatecznie otrzymujemy następujące rozwiązanie lokalne dla pola elektrostatycznego w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej

$$E_r = - \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \frac{n}{2} A_n \sin \frac{n}{2} \alpha, \quad E_\alpha = - \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \frac{n}{2} A_n \cos \frac{n}{2} \alpha. \quad (3.50)$$

Pierwszy wyraz w tych wyrażeniach ma osobliwość rzędu $-\frac{1}{2}$ i jest postaci $r^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) * \mathcal{A}_1 f(\alpha)$. Wyraz ten decyduje o zachowaniu się pola w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej.

3.3.3 Uwagi dotyczące obydwu przypadków

Z rozważań przeprowadzonych wyżej wynika, że jeżeli pole w szczelinie jest mniejsze od pewnej wartości krytycznej (jonizacyjnej) $\vec{E} \geq \vec{E}_0$, to traktując szczelinę jako próżniową, co wynika z ogólnych rozważań o dielektrykach, otrzymujemy wynik analityczny wynikający z warunków brzegowych dla szczeliny próżniowej. Mianowicie pole elektrostatyczne jest ograniczone w narożu szczeliny.

Dla pola \vec{E} równego lub większego od wartości krytycznej $\vec{E} \geq \vec{E}_0$ szczelina staje się przewodząca. Pole w dielektryku z taką szczeliną ma osobliwość w narożu rzędu $r^{-\frac{1}{2}}$. Z punktu widzenia teorii pękania jest to wynik, który wpływa w sposób decydująco różny na proces pękania materiału.

3.4 Siły elektrostatyczne

Elektrostatyczne siły objętościowe występujące w równaniach ruchu i siły powierzchniowe otrzymamy jako funkcje zmiennych r, α podstawiając do wzorów (3.18-3.22) odpowiednio wyrażenia dla pola elektrostatycznego otrzymane w poprzednim punkcie (3.39), (3.42), (3.50). Zakładając, że uogólnione szeregi potęgowe względem r , reprezentujące rozwiązanie dla pola elektrostatycznego są bezwzględnie zbieżne możemy je wymnażać zgodnie z regułami mnożenia szeregów.

Podobnie jak postąpiliśmy wyżej należy tu rozpatrzyć dwa przypadki, przypadek szczeliny próżniowej oraz przypadek szczeliny przewodzącej. Dla każdego z nich siły elektrostatyczne dane są przez inne funkcje.

3.4.1 Szczelina próżniowa

Zgodnie z definicją szczeliny próżniowej jako granicy obszarów klinowych naprężenia i siły elektrostatyczne w otoczeniu naroża szczeliny są granicą naprężeń i sił dla dielektryka z klinem próżniowym aproksymującym szczelinę. Wewnątrz obszaru dielektryka, gdzie przejście graniczne jest ciągle, składowe sił objętościowych F_r, F_α można otrzymać przez bezpośrednie podstawienie do wzorów (3.18) szeregów reprezentujących pole elektrostatyczne w dielektryku (3.42). Przy założeniu, że szeregi występujące w tych wzorach są bezwzględnie zbieżne można je wymnożyć. Po uporządkowaniu otrzymuje się następujące szeregi reprezentujące elektrostatyczne siły objętościowe w otoczeniu naroża próżniowej

$$F_r = \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} F_r^n(\alpha), \quad (3.51)$$

$$F_\alpha = \sum_{n=2}^{\infty} r^{n-2} F_\alpha^n(\alpha).$$

Współczynniki tych szeregów są funkcjami kąta α i zależą od stałych dowolnych występujących w rozwiązaniu lokalnym dla pola elektrostatycznego, które można wyznaczyć z warunków na wspólnej granicy otoczenia naroża szczeliny i obszaru zewnętrznego (3.12). Występują tu stałe materiałowe odpowiedzialne za elektrostrykcję.

$$F_r^n = (2a_2 + a_5) \sum_{s=1}^{n-1} s(n-s)(n-s+1) \left\{ (A_{n-s+1} B_s + A_s B_{n-s+1}) \sin(n-2s+1)\alpha + (A_s A_{n-s+1} + B_s B_{n-s+1}) \cos(n-2s+1)\alpha \right\}, \quad (3.52)$$

$$F_\alpha^n = -(2a_2 + a_5) \sum_{s=1}^{n-1} s(n-s)(n-s+1) \left\{ (A_s A_{n-s+1} + B_s B_{n-s+1}) \sin(n-2s+1)\alpha + (A_s B_{n-s+1} - A_{n-s+1} B_s) \cos(n-2s+1)\alpha \right\}.$$

Składowe siły powierzchniowej τ_r^d, τ_α^d działającej odpowiednio na górnej i dolnej powierzchni szczeliny próżniowej dane są wzorami (3.19), (3.20). Część zależną od składowych pola elektrostatycznego w dielektryku otrzymuje się przez bezpośrednie podstawienie szeregów (3.42). Część zależną od potencjału elektrostatycznego w szczelinie otrzymuje się podstawiając potencjał w postaci (3.39) po czym należy dokonać przejścia granicznego do szczeliny, to znaczy należy w otrzymanych wyrażeniach podstawić $\delta = 0$, $\lambda_n = n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), $\beta_n = B_n$, $\alpha_n = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ dla $n \geq 1$ oraz $\alpha_n = \beta_n = 0$ dla $n \leq 0$.

W rezultacie otrzymamy

$$\begin{aligned}\tau_r(r, 0) = \tau_r(r, 2\pi) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} T_r^n, \\ \tau_\alpha(r, 0) = \tau_\alpha(r, 2\pi) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} T_\alpha^n,\end{aligned}\quad (3.53)$$

gdzie

$$\begin{aligned}T_r^n &= - \sum_{s=1}^n s(n-s+1) a_s A_{n-s+1} B_s, \\ T_\alpha^n &= - \sum_{s=1}^n s(n-s+1) \left\{ \left[a_2 + a_s + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \right] A_s A_{n-s+1} \right. \\ &\quad \left. + \left[a_2 - \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \right] B_s B_{n-s+1} \right\}.\end{aligned}\quad (3.54)$$

Podsumowując możemy stwierdzić, że naprężenia elektrostatyczne oraz elektrostatyczne siły objętościowe są w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej funkcjami regularnymi. W bliskim otoczeniu wierzchołka szczeliny ich zachowanie można opisać za pomocą wyrazów rzędu r^0 .

3.4.2 Szczelina przewodząca

Ponieważ wewnątrz szczeliny przewodzącej pole elektrostatyczne jest równe zero, elektrostatyczne siły powierzchniowe na granicy dielektryka i szczeliny zależą tylko od naprężeń w materiale dielektrycznym. Ze względu na ciągłość pola elektrostatycznego wewnątrz dielektryka w wyrażeniach (3.18) na składowe elektrostatycznych sił objętościowych oraz w (3.21), (3.22) na siły działające na powierzchni szczeliny można podstawić bezpośrednio funkcje reprezentujące składowe pola elektrostatycznego (3.50) dla obszaru dielektryka ze szczeliną przewodzącą. Przy założeniu, że szeregi reprezentujące pole elektrostatyczne są bezwzględnie zbieżne, można je mnożyć zgodnie z regułami mnożenia szeregów.

Funkcje opisujące elektrostatyczne siły objętościowe otrzymamy w postaci następujących szeregów

$$\begin{aligned}F_r &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n-5}{2}} F_r^n(\alpha), \\ F_\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n-5}{2}} F_\alpha^n(\alpha).\end{aligned}\quad (3.55)$$

Współczynniki tych szeregów są funkcjami kąta α i zależą od stałych dowolnych \mathcal{A}_n związanych z lokalną postacią rozwiązania dla pola elektrostatycznego w otoczeniu naroża

szczeliny oraz od parametrów materiałowych odpowiedzialnych za elektrostrykcję

$$\begin{aligned}
 F_r^n &= \frac{2a_2 + a_5}{8} \sum_{s=1}^n s(n-s+1)(n-s-1) \mathcal{A}_s \mathcal{A}_{n-s+1} \cos \frac{n-2s+1}{2} \alpha, \\
 F_\alpha^n &= -\frac{2a_2 + a_5}{8} \sum_{s=1}^n s(n-s+1)(n-s-1) \mathcal{A}_s \mathcal{A}_{n-s+1} \sin \frac{n-2s+1}{2} \alpha.
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Dla sił elektrostatycznych działających na powierzchni szczeliny otrzymujemy wyrażenia

$$\begin{aligned}
 \tau_r(r, 0) &= \tau_r(r, 2\pi) = 0, \\
 \tau_\alpha(r, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n-3}{2}} \mathcal{T}_\alpha^n, \\
 \tau_\alpha(r, 2\pi) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n-3}{2}} (-1)^{n+1} \mathcal{T}_\alpha^n,
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

gdzie

$$\mathcal{T}_\alpha^n = -\frac{1}{4} \sum_{s=1}^n s(n-s+1) \mathcal{A}_s \mathcal{A}_{n-s+1} \left(a_2 + a_5 + \frac{\varepsilon}{2} \right). \tag{3.58}$$

Z powyższych rezultatów wynika, że naprężenia elektrostatyczne są w otoczeniu wierzchołka szczeliny osobliwe i w jego bliskim otoczeniu są dane za pomocą funkcji rzędu r^{-1} .

Z powyższych rozważań wynika, że obydwa przypadki, to znaczy dielektryka ze szczeliną próżniową i dielektryka ze szczeliną przewodzącą, różnią się rzędem osobliwości sił w otoczeniu naroża szczeliny jak również brakiem pola elektrostatycznego wewnątrz szczeliny przewodzącej.

Fakty te oczywiście wpływają zasadniczo na przebieg procesu pęknięcia w obu przypadkach.

3.5 Przemieszczenia w otoczeniu naroża szczeliny wywołane siłami elektrostatycznymi

Zgodnie z równaniami modelu quasiliniowego (2.19) – (2.26) (*str.* 25) objętościowe i powierzchniowe siły elektrostatyczne wywołują w dielektryku sprężystym przemieszczenia i naprężenia mechaniczne. Zagadnienie konstrukcji przemieszczeń mechanicznych w otoczeniu naroża szczeliny ma w tym przypadku swoją specyfikę i określone trudności. Mianowicie przemieszczenia należy przedstawić tak, aby w sposób wyraźny i bezpośredni widać było ich zależność od parametrów pola elektrycznego. Ponadto trzeba pokonać trudności związane z silnymi osobliwościami sił elektrostatycznych, powierzchniowych i

objętościowych w wierzchołku szczeliny w przypadku szczeliny przewodzącej. Wymagania takie nie mają miejsca w opisie czysto mechanicznym procesu pęknięcia, to znaczy bez udziału pola elektrostatycznego.

Zadanie polega na konstrukcji rozwiązania problemu brzegowego dla przemieszczeń sformułowanego na str 38 w punkcie "Przemieszczenia generowane polem elektrostatycznym" tego paragrafu przy uwzględnieniu postaci sił objętościowych i powierzchniowych danych wzorami (3.51)–(3.52), (3.53) dla dielektryka ze szczeliną próżniową oraz wzorami (3.55)–(3.56), (3.57) dla dielektryka ze szczeliną przewodzącą.

Rozwiązanie $\mathbf{u} = (u_r, u_\alpha)$ równań Lamé'go (3.23), w otoczeniu naroża szczeliny, zakładamy w postaci sumy dwóch wektorów

$$\mathbf{u} = \overset{\circ}{\mathbf{u}} + \overset{s}{\mathbf{u}}, \quad (3.59)$$

gdzie wektor $\overset{\circ}{\mathbf{u}} = (\overset{\circ}{u}_r, \overset{\circ}{u}_\alpha)$ spełnia jednorodne równania Lamé'go

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \overset{\circ}{u}_r) + \frac{\partial \overset{\circ}{u}_\alpha}{\partial \alpha} \right] \right\} - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \overset{\circ}{u}_\alpha) - \frac{\partial \overset{\circ}{u}_r}{\partial \alpha} \right] &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \overset{\circ}{u}_r) + \frac{\partial \overset{\circ}{u}_\alpha}{\partial \alpha} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \overset{\circ}{u}_\alpha) - \frac{\partial \overset{\circ}{u}_r}{\partial \alpha} \right] \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (3.60)$$

oraz naprężeniowy warunek brzegowy na powierzchni szczeliny

$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{r\alpha} &= g_r \\ \overset{\circ}{\sigma}_{\alpha\alpha} &= g_\alpha \end{aligned} \right\} \text{ dla } \alpha = \left\{ \begin{aligned} 2\pi \\ 0 \end{aligned} \right., \quad (3.61)$$

gdzie $g_r = g_r(r)$, $g_\alpha = g_\alpha(r)$ są dowolnymi funkcjami r a $\overset{\circ}{\sigma}$ są mechaniczną częścią naprężeń od przemieszczenia danego funkcją $\overset{\circ}{\mathbf{u}}$. Ponadto funkcje $\overset{\circ}{u}_r$, $\overset{\circ}{u}_\alpha$ muszą zawierać stałe dowolne w takiej liczbie, aby można było spełnić dowolne warunki brzegowe (3.26) na wspólnej granicy otoczenia naroża szczeliny i obszaru zewnętrznego.

Wektor $\overset{s}{\mathbf{u}} = (\overset{s}{u}_r, \overset{s}{u}_\alpha)$ jest pewnym szczególnym rozwiązaniem równań Lamé'go (3.23)

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \overset{s}{u}_r) + \frac{\partial \overset{s}{u}_\alpha}{\partial \alpha} \right] \right\} - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \overset{s}{u}_\alpha) - \frac{\partial \overset{s}{u}_r}{\partial \alpha} \right] &= -F_r, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \overset{s}{u}_r) + \frac{\partial \overset{s}{u}_\alpha}{\partial \alpha} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \overset{s}{u}_\alpha) - \frac{\partial \overset{s}{u}_r}{\partial \alpha} \right] \right\} &= -F_\alpha. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Funkcje g_r , g_α we wzorach (3.61) dobieramy tak, aby przemieszczenie $\mathbf{u} = \overset{\circ}{\mathbf{u}} + \overset{s}{\mathbf{u}}$

spełniało warunek brzegowy

$$\begin{aligned} \mu \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \left(\overset{\circ}{u}_\alpha + \overset{s}{u}_\alpha \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\overset{\circ}{u}_r + \overset{s}{u}_r \right) \right\} \Big|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} &= \tau_r \Big|_{\alpha=\frac{\pi}{2}}, \\ \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \left[\left(\overset{\circ}{u}_r + \overset{s}{u}_r \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\overset{\circ}{u}_\alpha + \overset{s}{u}_\alpha \right) \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left(\overset{\circ}{u}_r + \overset{s}{u}_r \right) \right\} \Big|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} &= \tau_\alpha \Big|_{\alpha=\frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Ponadto $\mathbf{u} = \overset{\circ}{\mathbf{u}} + \overset{s}{\mathbf{u}}$ musi spełniać warunek energetyczny (3.27).

Metoda konstrukcji rozwiązania lokalnego. Rozwiązania $\mathbf{u} = (u_r, u_\alpha)$ równań równowagi w otoczeniu naroża szczeliny poszukuje się w postaci uogólnionego szeregu potęgowego, którego współczynniki są funkcjami kąta α

$$\mathbf{u} = \sum_{n=N}^{\infty} r^{\gamma_n} \mathbf{u}^n(\alpha) \quad (3.64)$$

gdzie $\{\gamma_n\}$ jest ciągiem liczb wymiernych, N jest liczbą całkowitą dodatnią lub ujemną. Ciąg $\{\gamma_n\}$, liczbę N oraz współczynniki $\mathbf{u}^n(\alpha) = (u_r^n(\alpha), u_\alpha^n(\alpha))$ dobiera się tak, aby spełnione były równania, warunki brzegowe i warunek energetyczny. Forma uogólnionego szeregu potęgowego (3.64) jest dostatecznie ogólna, aby przedstawić w otoczeniu naroża rozwiązanie, w szczególności jego część osobliwą. Stosowana jest w ogólnej teorii równań różniczkowych do opisu zachowania się rozwiązań w otoczeniu nieregularnych punktów brzegu. W teorii pękania zastosował ją jako pierwszy *L. M. Williams* [67]. Zastosowana została również w tej pracy do konstrukcji rozwiązań zagadnień statycznych jak i dynamicznych [31]. Prowadzi do pełnej algebraizacji równań, rozwiązania których są szybko zbieżne przy zastosowaniu komputerowych obliczeń numerycznych.

Konstrukcja rozwiązania $\overset{\circ}{\mathbf{u}}$ równań jednorodnych. Rozwiązanie ogólne ma taką samą postać dla obu przypadków tzn. dla dielektryka ze szczeliną próżniową i dielektryka ze szczeliną przewodzącą. Przyjmujemy tu rozwiązanie w postaci analogicznej jak znane rozwiązanie Williamsa.

Podstawiając we wzorze (3.64) $\gamma_n = \frac{n}{2}$ oraz $N = 1$, co wynika z warunków brzegowych na powierzchni szczeliny oraz warunku energetycznego [31] otrzymujemy $\overset{\circ}{\mathbf{u}} = \left(\overset{\circ}{u}_r, \overset{\circ}{u}_\alpha \right)$ w postaci

$$\overset{\circ}{u}_r = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \overset{\circ}{u}_r^n(\alpha), \quad \overset{\circ}{u}_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \overset{\circ}{u}_\alpha^n(\alpha) \quad (3.65)$$

Współczynniki $\overset{\circ}{u}_r^n, \overset{\circ}{u}_\alpha^n$ wyznacza się z równań Lamégo. Ostateczna postać rozwiązania ogólnego jest

$$\overset{\circ}{u}_r^n = \frac{1}{\lambda + \mu} \left[\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \mu - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) (\lambda + 2\mu) \right] \left[-C_n \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \alpha + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + D_n \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right) \alpha \Big] + M_n \sin\left(\frac{n}{2} + 1\right) \alpha + N_n \cos\left(\frac{n}{2} + 1\right) \alpha, \quad (3.66) \\
u_\alpha^n = & \frac{1}{\lambda + \mu} \left[\left(\frac{n}{2} - 1\right) \mu - \left(\frac{n}{2} + 1\right) (\lambda + 2\mu) \right] \left[-C_n \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right) \alpha + \right. \\
& \left. - D_n \sin\left(\frac{n}{2} - 1\right) \alpha \right] + M_n \cos\left(\frac{n}{2} + 1\right) \alpha - N_n \sin\left(\frac{n}{2} + 1\right) \alpha.
\end{aligned}$$

W szeregu tym współczynniki C_n, D_n, M_n, N_n są dowolnymi współczynnikami liczbowymi. $2n$ spośród tych stałych wyznacza się z warunków brzegowych na powierzchni szczeliny. Pozostałe $2n$ stałych pozwala spełnić dowolne warunki brzegowe na granicy otoczenia naroża szczeliny. Rozwiązanie \mathbf{u}^0 (3.65), (3.66) jest ogólniejszą formą rozwiązania *L. M. Williamsa* [67], które opisywało przemieszczenia dla przypadku szczeliny z powierzchnią wolną od naprężeń.

3.5.1 Szczelina próżniowa

Ze względu na postać elektrostatycznych sił objętościowych (3.51) i sił powierzchniowych działających na powierzchni szczeliny próżniowej (3.53) przyjmujemy rozwiązanie szczególnie równań Lamégo (3.62) w postaci uogólnionego szeregu potęgowego, to jest

$$\mathbf{u}^s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n \mathbf{u}^s(\alpha).$$

Po podstawieniu szeregu przyjętego dla $\mathbf{u}^s = \begin{pmatrix} u_r^s \\ u_\alpha^s \end{pmatrix}$ do równań Lamégo i porównaniu wyrazów stojących przy jednakowych potęgach r po obydwu stronach równań, otrzymuje się nieskończony układ równań różniczkowych zwyczajnych na współczynniki $\mathbf{u}^s = \begin{pmatrix} u_r^s(\alpha) \\ u_\alpha^s(\alpha) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu)(n-1) \left[(n+1) u_r^s + \frac{d u_\alpha^s}{d\alpha} \right] - \mu \frac{d}{d\alpha} \left[(n+1) u_\alpha^s - \frac{d u_r^s}{d\alpha} \right] &= \begin{cases} -F_r^n & \text{dla } n = 2, 3, 4, \dots, \\ 0 & \text{dla } n < 2, \end{cases} \\
(\lambda + 2\mu) \frac{d}{d\alpha} \left[(n+1) u_r^s + \frac{d u_\alpha^s}{d\alpha} \right] + \mu(n-1) \left[(n+1) u_\alpha^s - \frac{d u_r^s}{d\alpha} \right] &= \begin{cases} -F_\alpha^n & \text{dla } n = 2, 3, 4, \dots, \\ 0 & \text{dla } n < 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Rozwiązanie tych równań ma postać

$$\begin{aligned} \dot{u}_r^n = 0, \dot{u}_\alpha^n = 0 & \quad \text{dla } n \leq 1, \\ \dot{u}_r^n = (2a_2 + a_5) \sum_{l=1}^{n-1} \left\{ \dot{u}_{r(1)}^{sl} \sin(n-2l+1)\alpha + \dot{u}_{r(2)}^{sl} \cos(n-2l+1)\alpha \right\} \\ \dot{u}_\alpha^n = (2a_2 + a_5) \sum_{l=1}^{n-1} \left\{ \dot{u}_{\alpha(1)}^{sl} \cos(n-2l+1)\alpha + \dot{u}_{\alpha(2)}^{sl} \sin(n-2l+1)\alpha \right\} \end{aligned}$$

(n = 2, 3, 4, ...),

(3.68)

gdzie

$$\begin{aligned} \dot{u}_{r(1)}^{sn1} &= \frac{n(A_1 B_n - A_n B_1)}{2[(n+1)(\lambda+2\mu) - (n-1)\mu]}, \\ \dot{u}_{r(2)}^{sn1} &= \frac{-n(A_1 A_n + B_1 B_n)}{2[(n+1)(\lambda+2\mu) - (n-1)\mu]}, \\ \dot{u}_{r(1)}^{snl} &= \frac{(n-2l+1)(\lambda+2\mu) + (n+1)\mu}{8\mu(\lambda+2\mu)} (A_l B_{n-l+1} - A_{n-l+1} B_l), \\ \dot{u}_{r(2)}^{snl} &= \frac{-(n-2l+1)(\lambda+2\mu) + (n+1)\mu}{8\mu(\lambda+2\mu)} (A_l A_{n-l+1} + B_{n-l+1} B_l), \\ & \quad l = 2, 3, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_{\alpha(1)}^{sn1} &= \frac{-n(A_1 B_n - A_n B_1)}{2[(n-1)(\lambda+2\mu) - (n+1)\mu]}, \\ \dot{u}_{\alpha(2)}^{sn1} &= \frac{-n(A_1 A_n + B_1 B_n)}{2[(n-1)(\lambda+2\mu) - (n+1)\mu]}, \\ \dot{u}_{r(1)}^{snl} &= \frac{(n+1)(\lambda+2\mu) - (n-2l+1)\mu}{8\mu(\lambda+2\mu)} (A_l B_{n-l+1} - A_{n-l+1} B_l), \\ \dot{u}_{r(2)}^{snl} &= \frac{(n+1)(\lambda+2\mu) + (n-2l+1)\mu}{8\mu(\lambda+2\mu)} (A_l A_{n-l+1} + B_{n-l+1} B_l), \\ & \quad l = 2, 3, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Pełne rozwiązanie równań Lamégo jest sumą rozwiązania ogólnego i rozwiązania szczególnego. Dla szczeliny próżniowej mamy zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_{l=0}^{\infty} r^{l+\frac{1}{2}} \mathring{\mathbf{u}}^{2l+1} + \sum_{l=1}^{\infty} r^l \left(\mathring{\mathbf{u}}^{2l} + \mathring{\mathbf{u}}^l \right), \\ \mathring{\mathbf{u}}^n &= \begin{pmatrix} \mathring{u}_r^n \\ \mathring{u}_\alpha^n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \mathring{\mathbf{u}}^l &= \begin{pmatrix} \mathring{u}_r^l \\ \mathring{u}_\alpha^l \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.71)$$

gdzie współczynniki $\overset{\circ}{u}_r^n, \overset{\circ}{u}_\alpha^n$ są dane wzorami (3.66) a współczynniki $\overset{s}{u}_r^l, \overset{s}{u}_\alpha^l$ wzorami (3.68), (3.69), (3.70). Każdy współczynnik $\overset{\circ}{u}^n$ zależy dla każdego n od czterech stałych dowolnych

$$C_n, D_n, M_n, N_n.$$

Część spośród tych stałych wyznaczmy z warunków brzegowych (3.63), w których τ_r i τ_α są siłami elektrostatycznymi (3.53), (3.55) działającymi na powierzchnię szczeliny próżniowej.

Po podstawieniu do tych warunków brzegowych wyrażenia (3.71) na \mathbf{u} oraz (3.53), (3.55) na τ_r, τ_α , przyrównaniu wyrazów przy tych samych potęgach r , otrzymujemy nieskończony układ równań algebraicznych na współczynniki C_n, D_n, M_n, N_n , postaci

$$\begin{aligned} (2l+1)\mu \left[\left(l - \frac{1}{2} \right) C_{2l+1} + M_{2l+1} \right] &= 0, & l = 0, 1, 2, \dots, \\ 2l\mu [(l-1)C_{2l} + M_{2l}] &= -\overset{s}{\sigma}_{r\alpha}^l(0) + T_r^l, & l = 1, 2, 3, \dots, \\ (2l+1)\mu \left[\left(l + \frac{3}{2} \right) D_{2l+1} - N_{2l+1} \right] &= 0, & l = 0, 1, 2, \dots, \\ 2l\mu [(l+1)D_{2l} - N_{2l}] &= -\overset{s}{\sigma}_{\alpha\alpha}^l(0) + T_\alpha^l, & l = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.72)$$

Po prawej stronie stoją współczynniki pochodzące od sił elektrostatycznych dane wzorami (3.55) oraz wyrazy pochodzące od rozwiązania szczególnego

$$\begin{aligned} \overset{s}{\sigma}_{r\alpha}^1(0) &= 0, \quad \overset{s}{\sigma}_{\alpha\alpha}^1(0) = 0, \\ \overset{s}{\sigma}_{r\alpha}^l(0) &= (2a_2 + a_5)\mu \sum_{k=1}^{l-1} \left\{ (l-2k+1) \overset{s}{u}_{r(1)}^{ik} + (l-1) \overset{s}{u}_{\alpha(1)}^{ik} \right\}, \\ \overset{s}{\sigma}_{\alpha\alpha}^l(0) &= (2a_2 + a_5) \sum_{k=1}^{l-1} \left\{ [(l+1)\lambda + 2\mu] \overset{s}{u}_{r(2)}^{ik} + \right. \\ &\quad \left. + (l-2k+1)(\lambda + 2\mu) \overset{s}{u}_{\alpha(2)}^{ik} \right\}, \quad l = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (3.73)$$

Współczynniki $\overset{s}{u}_{r(1)}^{ik}, \overset{s}{u}_{r(2)}^{ik}, \overset{s}{u}_{\alpha(1)}^{ik}, \overset{s}{u}_{\alpha(2)}^{ik}$ dane są wzorami (3.69), (3.70).

Ponieważ w pierwszym i trzecim równaniu (3.72) występują niewiadome współczynniki $C_{2l+1}, D_{2l+1}, M_{2l+1}, N_{2l+1}$ z nieparzystymi wskaźnikami $2l+1$, ($l = 0, 1, 2, \dots$), a w drugim i czwartym równaniu niewiadome współczynniki $C_{2l}, D_{2l}, M_{2l}, N_{2l}$ o wskaźnikach parzystych $2l$ ($l = 1, 2, 3, \dots$), wynika stąd, że dla każdego l jest to układ czterech równań algebraicznych z ośmioma niewiadomymi (za wyjątkiem $l = 0$).

Z układu tego wyznaczmy cztery niewiadome współczynniki jako funkcje pozostałych

$$M_{2l+1} = - \left(l - \frac{1}{2} \right) C_{2l+1}, \quad (l = 0, 1, 2, \dots),$$

$$N_{2l+1} = \left(l + \frac{3}{2}\right) D_{2l+1}, \quad (l = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.74)$$

$$M_{2l} = -(l-1)C_{2l} + \frac{1}{2l\mu} \left[-\sigma_{r\alpha}^l(0) + T_r^l\right], \quad (l = 1, 2, 3, \dots),$$

$$N_{2l} = (l+1)D_{2l} + \frac{1}{2l\mu} \left[\sigma_{\alpha\alpha}^l(0) - T_\alpha^l\right], \quad (l = 1, 2, 3, \dots).$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości współczynników (3.74) do wzorów (3.71) z uwzględnieniem wzorów (3.66) na współczynniki \hat{u}^n otrzymujemy ostateczną postać rozwiązania lokalnego dla przemieszczeń

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} u_r^n(\alpha), \quad u_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} u_\alpha^n(\alpha). \quad (3.75)$$

Współczynniki funkcyjne o nieparzystych wskaźnikach t.j. u_r^{2l+1} , u_α^{2l+1} , ($l = 0, 1, 2, \dots$), zależą od dwóch ciągów dowolnych współczynników liczbowych C_{2l+1} , D_{2l+1} , ($l = 0, 1, 2, \dots$) i mają postać następującą

$$\begin{aligned} u_r^{2l+1} = & -C_{2l+1} \left\{ \frac{(2l+3)\mu - (2l-1)(\lambda+2\mu)}{2(\lambda+\mu)} \sin\left(l - \frac{1}{2}\right)\alpha + \right. \\ & \left. + \left(l - \frac{1}{2}\right) \sin\left(l + \frac{3}{2}\right)\alpha \right\} + \\ & + D_{2l+1} \left\{ \frac{(2l+3)\mu - (2l-1)(\lambda+2\mu)}{2(\lambda+\mu)} \cos\left(l - \frac{1}{2}\right)\alpha + \right. \\ & \left. + \left(l + \frac{3}{2}\right) \cos\left(l + \frac{3}{2}\right)\alpha \right\}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} u_\alpha^{2l+1} = & -C_{2l+1} \left\{ \frac{(2l-1)\mu - (2l+3)(\lambda+2\mu)}{2(\lambda+\mu)} \cos\left(l - \frac{1}{2}\right)\alpha + \right. \\ & \left. + \left(l - \frac{1}{2}\right) \cos\left(l + \frac{3}{2}\right)\alpha \right\} + \\ & - D_{2l+1} \left\{ \frac{(2l-1)\mu - (2l+3)(\lambda+2\mu)}{2(\lambda+\mu)} \sin\left(l - \frac{1}{2}\right)\alpha + \right. \\ & \left. + \left(l + \frac{3}{2}\right) \sin\left(l + \frac{3}{2}\right)\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Współczynniki funkcyjne o wskaźnikach parzystych u_r^{2l} , u_α^{2l} , ($l = 1, 2, 3, \dots$) można przedstawić w postaci sumy

$$u_r^{2l}(\alpha) = u_r^{m2l}(\alpha) + u_r^{\epsilon2l}(\alpha), \quad u_\alpha^{2l}(\alpha) = u_\alpha^{m2l}(\alpha) + u_\alpha^{\epsilon2l}(\alpha), \quad (l = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.77)$$

Wyrazy $u_r^{m2l}(\alpha)$, $u_\alpha^{m2l}(\alpha)$ zależą od dwóch ciągów dowolnych współczynników liczbowych C_{2l} , D_{2l} , ($l = 1, 2, 3, \dots$) i są dane za pomocą następujących wzorów

$$\begin{aligned}
\frac{m^{2l}}{u_r} &= -C_{2l} \left\{ \frac{(l+1)\mu - (l-1)(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)} \sin(l-1)\alpha + \right. \\
&\quad \left. + (l-1) \sin(l+1)\alpha \right\} + \\
&\quad + D_{2l} \left\{ \frac{(l+1)\mu - (l-1)(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)} \cos(l-1)\alpha + \right. \\
&\quad \left. + (l+1) \cos(l+1)\alpha \right\}, \tag{3.78} \\
\frac{m^{2l}}{u_\alpha} &= -C_{2l} \left\{ \frac{(l-1)\mu - (l+1)(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)} \cos(l-1)\alpha + \right. \\
&\quad \left. + (l-1) \cos(l+1)\alpha \right\} + \\
&\quad - D_{2l} \left\{ \frac{(l-1)\mu - (l+1)(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)} \sin(l-1)\alpha + \right. \\
&\quad \left. + (l+1) \sin(l+1)\alpha \right\}.
\end{aligned}$$

Natomiast drugie składniki sum (3.77), reprezentujących współczynniki funkcyjne szeregu (3.75) o parzystych wskaźnikach, to jest współczynniki funkcyjne $\overset{\epsilon}{u}_r^{2l}(\alpha)$, $\overset{\epsilon}{u}_\alpha^{2l}(\alpha)$, ($l = 1, 2, 3, \dots$), zależą bezpośrednio od parametrów pola elektrostatycznego w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej. W szczególności od dwóch ciągów współczynników liczbowych A_n , B_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), występujących w wyrażeniach (3.42) dla składowych E_r , E_α . Współczynniki $\overset{\epsilon}{u}_r^{2l}(\alpha)$, $\overset{\epsilon}{u}_\alpha^{2l}(\alpha)$, ($l = 1, 2, 3, \dots$) mają następującą postać

$$\begin{aligned}
\overset{\epsilon}{u}_r^{2l} &= \frac{1}{2l\mu} \left\{ \sum_{k=1}^l \left[(2a_2 + a_5) \mathcal{U}_r^{lk} (A_k B_{l-k+1} - A_{l-k+1} B_k) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - a_5 k(l-k+1) A_{l-k+1} B_k \right] \sin(l+1)\alpha + \right. \\
&\quad + \sum_{k=1}^l \left[(2a_2 + a_5) \mathcal{U}_\alpha^{lk} (A_k A_{l-k+1} + B_{l-k+1} B_k) + \right. \\
&\quad \left. + k(l-k+1) \left(a_2 + a_5 + \frac{\epsilon}{2} \left(1 - \frac{\epsilon}{e_o} \right) \right) A_k A_{l-k+1} + \right. \\
&\quad \left. + \left[a_2 - \frac{\epsilon}{2} \left(1 - \frac{\epsilon}{e_o} \right) \right] B_k B_{l-k+1} \right] \cos(l+1)\alpha \right\} + \\
&\quad + (2a_2 + a_5) \sum_{k=1}^{l-1} \left[\mathcal{U}_{r(1)}^{lk} (A_k B_{l-k+1} - A_{l-k+1} B_k) \sin(l-2k+1)\alpha + \right.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$+\mathcal{U}_{r(2)}^{lk} (A_k A_{l-k+1} + B_{l-k+1} B_k) \cos(l - 2k + 1)\alpha],$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^{2l}}{u_\alpha} = & \frac{1}{2l\mu} \left\{ \sum_{k=1}^l \left[(2a_2 + a_5) \mathcal{U}_r^{lk} (A_k B_{l-k+1} - A_{l-k+1} B_k) + \right. \right. \\ & \left. \left. - a_5 k(l - k + 1) A_{l-k+1} B_k \right] \cos(l + 1)\alpha + \right. \\ & - \sum_{k=1}^l \left[(2a_2 + a_5) \mathcal{U}_\alpha^{lk} (A_k A_{l-k+1} + B_{l-k+1} B_k) + \right. \\ & \left. + k(l - k + 1) \left(\left[a_2 + a_5 + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{e_0} \right) \right] A_k A_{l-k+1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[a_2 - \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{e_0} \right) \right] B_k B_{l-k+1} \right) \right] \sin(l + 1)\alpha \left. \right\} + \\ & + (2a_2 + a_5) \sum_{k=1}^{l-1} \left[\mathcal{U}_{\alpha(1)}^{lk} (A_k B_{l-k+1} - A_{l-k+1} B_k) \cos(l - 2k + 1)\alpha + \right. \\ & \left. + \mathcal{U}_{\alpha(2)}^{lk} (A_k A_{l-k+1} + B_{l-k+1} B_k) \sin(l - 2k + 1)\alpha \right]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

We wzorach tych występują współczynniki liczbowe \mathcal{U}_r^{lk} , \mathcal{U}_α^{lk} oraz $\mathcal{U}_{r(1)}^{lk}$, $\mathcal{U}_{r(2)}^{lk}$, $\mathcal{U}_{\alpha(1)}^{lk}$, $\mathcal{U}_{\alpha(2)}^{lk}$. Współczynniki \mathcal{U}_r^{lk} , \mathcal{U}_α^{lk} są dane wzorami

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_r^{l1} &= 0, \\ \mathcal{U}_r^{l1} &= -\frac{l(l-1)}{2} \mu \left[\frac{1}{(l+1)(\lambda+2\mu) - (l-1)\mu} + \right. \\ & \left. - \frac{1}{(l-1)(\lambda+2\mu) - (l+1)\mu} \right] \quad (l = 2, 3, 4, \dots), \\ \mathcal{U}_r^{lk} &= \frac{-1}{8(\lambda+2\mu)} \{ [(l-2k+1)^2 + (l^2-1)] (\lambda+2\mu) + 2(l-2k+1)\mu \} \\ & \quad (l = 2, 3, 4, \dots), \quad (k = 2, 3, 4, \dots, l-1), \\ \mathcal{U}_r^{ll} &= 0 \quad (l = 2, 3, 4, \dots), \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\alpha^{l1} &= 0, \\ \mathcal{U}_\alpha^{l1} &= -\frac{l}{2} \left[\frac{(l+1)\lambda + 2\mu}{(l+1)(\lambda+2\mu) - (l-1)\mu} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{(l-1)(\lambda+2\mu)}{(l-1)(\lambda+2\mu) - (l+1)\mu} \Big] \quad (l = 2, 3, 4, \dots), \quad (3.82)$$

$$\mathcal{U}_\alpha^{lk} = \frac{1}{8(\lambda+2\mu)} \{[(l-2k+1)(3l-2k+1) + (l+1)](\lambda+2\mu) + l(l+1)\lambda\}$$

$$(l = 2, 3, 4, \dots), (k = 2, 3, 4, \dots, l-1),$$

$$\mathcal{U}_\alpha^{ll} = 0 \quad (l = 2, 3, 4, \dots).$$

Współczynniki liczbowe $\mathcal{U}_{r(1)}^{lk}$, $\mathcal{U}_{r(2)}^{lk}$, $\mathcal{U}_{\alpha(1)}^{lk}$, $\mathcal{U}_{\alpha(2)}^{lk}$ zdefiniowane są za pomocą wzorów

$$\mathcal{U}_{r(1)}^{ll} = \frac{l}{2[(l+1)(\lambda+2\mu) - (l-1)\mu]},$$

$$\mathcal{U}_{r(2)}^{ll} = \frac{-l}{2[(l+1)(\lambda+2\mu) - (l-1)\mu]},$$

dla $(l = 1, 2, 3, \dots)$, (3.83)

$$\mathcal{U}_{r(1)}^{lk} = \frac{(l-2k+1)(\lambda+2\mu) + (l+1)\mu}{8\mu(\lambda+2\mu)},$$

$$\mathcal{U}_{r(2)}^{lk} = \frac{-(l-2k+1)(\lambda+2\mu) + (l+1)\mu}{8\mu(\lambda+2\mu)},$$

dla $(l = 2, 3, \dots)$, $(k = 2, 3, \dots, l-1)$.

$$\mathcal{U}_{\alpha(1)}^{ll} = \mathcal{U}_{\alpha(2)}^{ll} = \frac{-l}{2[(l-1)(\lambda+2\mu) - (l+1)\mu]} \quad \text{dla } (l = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.84)$$

$$\mathcal{U}_{\alpha(1)}^{lk} = \frac{(l+1)(\lambda+2\mu) - (l-2k+1)\mu}{8\mu(\lambda+2\mu)},$$

$$\mathcal{U}_{\alpha(2)}^{lk} = \frac{(l+1)(\lambda+2\mu) + (l-2k+1)\mu}{8\mu(\lambda+2\mu)},$$

dla $(l = 2, 3, \dots)$, $(k = 2, 3, \dots, l-1)$.

Rozwiązanie $\mathbf{u} = (u_r, u_\alpha)$ (3.75) zależy od dwóch ciągów współczynników liczbowych C_n, D_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Występowanie tych współczynników w rozwiązaniu wynika stąd, że skonstruowane rozwiązanie jest określone tylko w dostatecznie małym otoczeniu naroża szczeliny, t.j. ma charakter lokalny. Współczynniki dowolne C_n, D_n reprezentują wpływ naprężeń i przemieszczeń oraz pola elektrostatycznego w pozostałym obszarze dielektryka na rozwiązanie lokalne i można je wyznaczyć z warunków na wspólnej granicy otoczenia naroża szczeliny i obszaru zewnętrznego, np. uzgodnić rozwiązania (zsyć) w otoczeniu naroża i w pozostałym obszarze. Tego rodzaju uzgodnienia rozwiązań będą dokonywane w dalszych częściach pracy.

3.5.2 Szczelina przewodząca

Przypomnijmy, że siły elektrostatyczne o charakterze sił objętościowych oraz siły działające na powierzchni szczeliny przewodzącej dane są za pomocą uogólnionych szeregów potęgowych (3.55), (3.57)

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n-5}{2}} \mathbf{F}^n(\alpha), \quad \tau_{|\alpha=\frac{0}{2\pi}} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n-3}{2}} \tau^n_{|\alpha=\frac{0}{2\pi}}. \quad (3.85)$$

Jak widać z powyższych wzorów siła objętościowa ma w narożu szczeliny osobliwość rzędu r^{-2} . Wyrażenie na siłę stoi po prawej stronie równań równowagi (3.62). W wyniku formalnej konstrukcji rozwiązania szczególnego $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\alpha \end{pmatrix}$ dla takiej postaci siły objętościowej otrzymuje się uogólniony szereg potęgowy, którego pierwszy wyraz jest stałą

$$\mathbf{u} = \mathbf{C} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \mathbf{u}^n(\alpha). \quad (3.86)$$

Rozwiązanie tej postaci we współrzędnych biegunowych prowadzi do silnie osobliwych wyrażeń dla składowych odkształcenia. Mają one postać

$$\begin{aligned} e_{rr}^s &= \frac{\partial u_r^s}{\partial r} = \frac{1}{2} u_r^{s1}(\alpha) r^{-\frac{1}{2}} + O(r^0), \\ e_{r\alpha}^s &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha^s}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^s}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} u_\alpha^s \right) = \\ &= -\frac{1}{2} C_\alpha r^{-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{d u_r^{s1}(\alpha)}{d\alpha} - \frac{1}{2} u_\alpha^{s1}(\alpha) \right) r^{-\frac{1}{2}} + O(r^0), \\ e_{\alpha\alpha}^s &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\alpha^s}{\partial \alpha} + u_r^s \right) = \\ &= C_r r^{-1} + \left(\frac{d u_\alpha^{s1}(\alpha)}{d\alpha} + u_r^{s1}(\alpha) \right) r^{-\frac{1}{2}} + O(r^0). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Ze wzorów tych widać, że osobliwość składowych odkształcenia jest rzędu r^{-1} . Ze związków konstytutywnych dla części mechanicznej naprężeń

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu e_{rr} + \lambda(e_{rr} + e_{\alpha\alpha}), \\ \sigma_{r\alpha} &= 2\mu e_{r\alpha}, \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= 2\mu e_{\alpha\alpha} + \lambda(e_{rr} + e_{\alpha\alpha}) \end{aligned} \quad (3.88)$$

wynika, że

$$\begin{aligned} \overset{s}{\sigma}_{rr} &= r^{-1} \lambda C_r + r^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{3}{2} \lambda + \mu \right) \overset{s}{u}_r^1(\alpha) + \lambda \frac{d \overset{s}{u}_\alpha^1(\alpha)}{d\alpha} \right] + O(r^0), \\ \overset{s}{\sigma}_{r\alpha} &= r^{-1} (-\mu C_\alpha) + r^{-\frac{1}{2}} \mu \left(\frac{d \overset{s}{u}_r^1(\alpha)}{d\alpha} - \frac{1}{2} \overset{s}{u}_\alpha^1(\alpha) \right) + O(r^0), \\ \overset{s}{\sigma}_{\alpha\alpha} &= r^{-1} (\lambda + 2\mu) C_r + r^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{3}{2} \lambda + 2\mu \right) \overset{s}{u}_r^1(\alpha) + (\lambda + 2\mu) \frac{d \overset{s}{u}_\alpha^1(\alpha)}{d\alpha} \right] + \\ &+ O(r^0). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Naprężenia mają ten sam rząd osobliwości co odkształcenia. Energia sprężysta dana jest wzorem

$$\int_{V_d} \rho \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_{V_d} (\sigma_{rr} e_{rr} + 2\sigma_{r\alpha} e_{r\alpha} + \sigma_{\alpha\alpha} e_{\alpha\alpha}) dV. \quad (3.90)$$

Ponieważ $\sigma_{rr} e_{rr} + 2\sigma_{r\alpha} e_{r\alpha} + \sigma_{\alpha\alpha} e_{\alpha\alpha} = Cr^{-2} + \dots$, $C = \text{const.}$, stąd całka (3.90) we współrzędnych biegunowych jest postaci

$$\int_{V_d} \rho \epsilon dV = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\infty} \int_0^{2\pi} (Cr^{-2}) r dr d\alpha + \dots = \pi C \lim_{\xi \rightarrow 0} \ln \xi + \dots = \infty$$

A więc energia sprężysta dielektryka ze szczeliną przewodzącą dla formalnie wyznaczonych sił elektrostatycznych (3.85) jest nieskończona, a zatem przemieszczenia nie spełniają warunku energetycznego (3.27) jak również warunku ograniczoneści pełnej energii dielektryka (punkt 1.3.1, str. 30). Trudność tę rozwiązano tutaj przez odpowiednią modyfikację modelu dielektryka.

Regularyzacja sił elektrostatycznych w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej

Jak podano w paragrafie 3.1 niniejszego rozdziału, całkowita energia elektrosprężysta w otoczeniu naroża szczeliny dla przybliżenia quasiliniowego (3.3) jest sumą wyrazów związanych z energią sprężystą, energią sprężenia i energią elektrostatyczną

$$\begin{aligned} \Sigma_d &= \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_{rr} e_{rr} + 2\sigma_{r\alpha} e_{r\alpha} + \sigma_{\alpha\alpha} e_{\alpha\alpha}) \right. \\ &+ (s^t_{rr} e_{rr} + 2s^t_{r\alpha} e_{r\alpha} + s^t_{\alpha\alpha} e_{\alpha\alpha}) \\ &\left. + \frac{\epsilon}{2} (E_r^2 + E_\alpha^2) \right\} r dr d\alpha. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Z tych trzech rodzajów energii składających się na energię całkowitą tylko energia pola elektrostatycznego daje w granicy stałą. Energia sprężysta jest nieograniczona. Nieograniczona jest również energia sprężenia, co wynika z faktu, że naprężenia sprężenia wyznaczone formalnie ze związków konstytutywnych (2.21) i rozwiązania lokalnego dla pola elektrostatycznego (3.50) dają

$$\begin{aligned} {}_s t_{rr} &= (a_2 + a_5) E_r^2 + a_2 E_\alpha^2 = r^{-1} \frac{1}{4} \mathcal{A}_1^2 [(2a_2 + a_5) - a_5 \cos \alpha] + O\left(r^{-\frac{1}{2}}\right), \\ {}_s t_{r\alpha} &= a_5 E_r E_\alpha = r^{-1} \frac{1}{4} \mathcal{A}_1^2 a_5 \sin \alpha + O\left(r^{-\frac{1}{2}}\right), \\ {}_s t_{\alpha\alpha} &= (a_2 + a_5) E_\alpha^2 + a_2 E_r^2 = r^{-1} \frac{1}{4} \mathcal{A}_1^2 [(2a_2 + a_5) + a_5 \cos \alpha] + O\left(r^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

A zatem wyrazy pochodzące od energii sprężenia we wzorze (3.91) są tego samego rzędu co wyrazy pochodzące od energii sprężystej.

Widać, że w obydwu przypadkach przyczyną rozbieżności są naprężenia sprężenia. Przypomnijmy, że osobliwości w objętościowych siłach elektrostatycznych, które powodują zbyt silne osobliwości odkształceń i mechanicznej części naprężeń, wynikają z osobliwości naprężenia sprężenia, bowiem $\mathbf{F} = \text{div } {}_s \mathbf{t}$. Fakty te świadczą o tym, że w przypadku modelu dielektryka ze szczeliną przewodzącą siły pochodzenia elektrostatycznego są źle zdefiniowane, ponieważ wywołują efekty niefizyczne w postaci zbyt silnych osobliwości w odkształceniach dielektryka.

Model dielektryka ze szczeliną przewodzącą wymaga zatem modyfikacji. Zostanie to zrealizowane przez regularyzację sił elektrostatycznych działających na dielektryk. Procedurę regularyzacji wprowadzimy za pomocą następujących definicji:

Definicja 1. Część szeregów otrzymanych w sposób formalny dla naprężeń elektrostatycznych, w których pominięto wyrazy o osobliwości wyższej niż $r^{-\frac{1}{2}}$, nazywać będziemy częścią regularną naprężeń elektrostatycznych.

Definicja 2. Część regularną naprężeń elektrostatycznych nazywać będziemy fizycznymi naprężeniami elektrostatycznymi.

Z definicji powyższych wynika, że siły powierzchniowe i objętościowe w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej, wynikające ze zregularyzowanych naprężeń elektrostatycznych mają postać

$$\mathbf{F} = \sum_{n=2}^{\infty} r^{\frac{n-5}{2}} \mathbf{F}^n(\alpha), \quad \tau_{|\alpha=\{\frac{0}{2\pi}\}} = \sum_{n=2}^{\infty} r^{\frac{n-3}{2}} \tau^n_{|\alpha=\{\frac{0}{2\pi}\}}. \quad (3.92)$$

Osobliwości występujące w tych wyrażeniach mają charakter fizyczny, to jest, są to maksymalne osobliwości dopuszczalne, dla których energia całkowita dielektryka jest skończona.

Rozwiązanie szczególne równań Lamégo od zregulowanych sił elektrostatycznych

Rozwiązanie szczególne dla wektora przemieszczeń w dielektryku sprężystym ze szczeliną przewodzącą otrzymuje się przez podstawienie do równań Lamégo (3.62), po prawej stronie których są siły objętościowe wynikające ze zregulowanych naprężeń sprężenia, uogólnionego szeregu potęgowego

$$\overset{s}{u}_r = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \overset{s}{u}_r^n(\alpha), \quad \overset{s}{u}_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \overset{s}{u}_\alpha^n(\alpha). \quad (3.93)$$

Porównanie współczynników funkcyjnych przy takich samych potęgach r , prowadzi do następującego układu równań różniczkowych zwyczajnych na współczynniki $\overset{s}{u}^n(\alpha) = (\overset{s}{u}_r^n(\alpha), \overset{s}{u}_\alpha^n(\alpha))$

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\left(\frac{n}{2} - 1\right) \left[\left(\frac{n}{2} + 1\right) \overset{s}{u}_r^n + \frac{d \overset{s}{u}_\alpha^n}{d\alpha} \right] - \mu \frac{d}{d\alpha} \left[\left(\frac{n}{2} + 1\right) \overset{s}{u}_\alpha^n - \frac{d \overset{s}{u}_r^n}{d\alpha} \right] &= -F_r^{n+1}, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{d}{d\alpha} \left[\left(\frac{n}{2} + 1\right) \overset{s}{u}_r^n + \frac{d \overset{s}{u}_\alpha^n}{d\alpha} \right] + \mu \left(\frac{n}{2} - 1\right) \left[\left(\frac{n}{2} + 1\right) \overset{s}{u}_\alpha^n - \frac{d \overset{s}{u}_r^n}{d\alpha} \right] &= -F_\alpha^{n+1}, \end{aligned} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.94)$$

Współczynniki $F_r^n(\alpha)$, $F_\alpha^n(\alpha)$ dane są wzorami (3.56).

Z równań tych znajdujemy następujące funkcje reprezentujące współczynniki $\overset{s}{u}^n(\alpha)$

$$\begin{aligned} \overset{s}{u}_r^n &= \frac{2a_2 + a_5}{8} \sum_{l=1}^{n+1} v_r^{nl} \mathcal{A}_l \mathcal{A}_{n-l+2} \cos \frac{n-2l+2}{2} \alpha, \\ \overset{s}{u}_\alpha^n &= \frac{2a_2 + a_5}{8} \sum_{l=1}^{n+1} v_\alpha^{nl} \mathcal{A}_l \mathcal{A}_{n-l+2} \sin \frac{n-2l+2}{2} \alpha. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Współczynniki liczbowe v_r^{nl} , v_α^{nl} są równe

$$\begin{aligned} v_r^{nl} &= -\frac{(n-2l+2)(\lambda+2\mu) + (n+2)\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} \quad \text{dla } \begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots \\ l \neq 2, l \neq n \end{cases}, \\ v_\alpha^{nl} &= \frac{(n+2)(\lambda+2\mu) + (n-2l+2)\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)} \quad \text{dla } \begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots \\ l \neq 2, l \neq n \end{cases}, \\ v_r^{nn} &= 0, \quad v_\alpha^{nn} = 0 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, \\ v_r^{n2} &= \frac{-4n}{(n+2)(\lambda+2\mu) - (n-2)\mu} \quad \text{dla } n = 1, 3, 4, 5, \dots \quad (n \neq 2), \\ v_\alpha^{n2} &= \frac{-4n}{(n-2)(\lambda+2\mu) - (n+2)\mu} \quad \text{dla } n = 1, 3, 4, 5, \dots \quad (n \neq 2). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Rozwiązanie w postaci szeregu (3.93) ma fizycznie dopuszczalny rząd osobliwości spełniający warunek energetyczny (3.27) i jest on taki sam jak występujący w mechanicznej teorii pęknięcia.

Pełne rozwiązanie lokalne dla przemieszczeń

Rozwiązanie lokalne problemu brzegowego dla równań Lamégo przedstawione jest w postaci sumy rozwiązania ogólnego (3.65), (3.66) i rozwiązania szczególnego (3.93), (3.95)–(3.96)

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \left(\overset{o}{\mathbf{u}}^n + \overset{s}{\mathbf{u}}^n \right), \quad (3.97)$$

$$\overset{o}{\mathbf{u}}^n = \begin{pmatrix} \overset{o}{u}_r^n & \overset{o}{u}_\alpha^n \end{pmatrix}, \quad \overset{s}{\mathbf{u}}^n = \begin{pmatrix} \overset{s}{u}_r^n & \overset{s}{u}_\alpha^n \end{pmatrix}.$$

Każdy współczynnik $\overset{o}{\mathbf{u}}^n$ rozwiązania ogólnego $\overset{o}{\mathbf{u}}$ zależy od czterech stałych dowolnych.

W przypadku szczeliny przewodzącej stałe dowolne C_n, D_n, M_n, N_n wyznaczamy z warunków brzegowych (3.24), w których składowa siły elektrostatycznej działającej na powierzchnię szczeliny przewodzącej $\tau_r|_{\alpha=\pm\sigma} = 0$, a składowa τ_α dana jest wzorami (3.57), (3.58).

Po podstawieniu do warunków brzegowych na powierzchni szczeliny (3.24) wzorów na przemieszczenia (3.97), z uwzględnieniem zależności (3.66), (3.95) dla współczynników $\overset{o}{\mathbf{u}}^n = \begin{pmatrix} \overset{o}{u}_r^n & \overset{o}{u}_\alpha^n \end{pmatrix}$, $\overset{s}{\mathbf{u}}^n = \begin{pmatrix} \overset{s}{u}_r^n & \overset{s}{u}_\alpha^n \end{pmatrix}$ oraz zregularizowanych wyrażeń (3.57), (3.58) dla τ_r, τ_α , a następnie przyrównaniu wyrazów przy jednakowych potęgach r otrzymamy układ równań algebraicznych postaci

$$\begin{aligned} (2l+1)\mu \left[\left(l - \frac{1}{2} \right) C_{2l+1} + M_{2l+1} \right] &= 0 & l = 0, 1, 2, \dots, \\ 2l\mu [(l-1)C_{2l} + M_{2l}] &= 0 & l = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} (2l+1)\mu \left[\left(l + \frac{3}{2} \right) D_{2l+1} - N_{2l+1} \right] &= -\overset{s}{\sigma}_{\alpha\alpha}^{2l+1}(0) + \mathcal{T}_\alpha^{2l+2} & l = 0, 1, 2, \dots, \\ 2l\mu [(l+1)D_{2l} - N_{2l}] &= -\overset{s}{\sigma}_{\alpha\alpha}^{2l}(0) + \mathcal{T}_\alpha^{2l+1} & l = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

gdzie niewiadomymi są $C_{2l+1}, D_{2l+1}, M_{2l+1}, N_{2l+1}$ ($l = 0, 1, 2, \dots$), $C_{2l}, D_{2l}, M_{2l}, N_{2l}$ ($l = 1, 2, 3, \dots$).

Występujące tu współczynniki $\overset{s}{\sigma}_{\alpha\alpha}^{2l}(0)$ związane z częścią mechaniczną naprężeń

zależną od rozwiązania szczególnego dla szczeliny przewodzącej dane są zależnościami

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}^n(0) = & \frac{2a_2 + a_5}{8} \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ \left[\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \lambda + 2\mu \right] v_r^{n-k} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{n}{2} - k + 1 \right) (\lambda + 2\mu) v_\alpha^{n-k} \right\} \mathcal{A}_k \mathcal{A}_{n-k+2}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

gdzie współczynniki v_r^{n-k} , v_α^{n-k} dane są wzorami (3.96) a współczynniki \mathcal{A}_l związane są z lokalnym charakterem rozwiązania dla pola elektrostatycznego (3.50).

Współczynniki T_α^n są współczynnikami uogólnionego szeregu potęgowego (3.57) reprezentującego siły powierzchniowe τ_r , τ_α działające na powierzchni szczeliny przewodzącej i dane są wzorami (3.58).

Podobnie jak w przypadku szczeliny próżniowej jest to dla każdego l układ czterech równań algebraicznych z ośmioma niewiadomymi. Z układu tego wyznaczamy niewiadome M_{2l+1} , N_{2l+1} ($l = 0, 1, 2, \dots$), i M_{2l} , N_{2l} ($l = 1, 2, 3, \dots$) w zależności od niewiadomych C_{2l+1} , D_{2l+1} oraz C_{2l} , D_{2l}

$$\begin{aligned} M_{2l+1} &= - \left(l - \frac{1}{2} \right) C_{2l+1} & (l = 0, 1, 2, \dots), \\ M_{2l} &= - (l - 1) C_{2l} & (l = 1, 2, 3, \dots), \\ N_{2l+1} &= \left(l + \frac{3}{2} \right) D_{2l+1} + \frac{1}{(2l+1)\mu} \left[\sigma_{\alpha\alpha}^{2l+1}(0) - T_\alpha^{2l+2} \right] & (l = 0, 1, 2, \dots), \\ N_{2l} &= (l+1) D_{2l} + \frac{1}{2l\mu} \left[\sigma_{\alpha\alpha}^{2l}(0) - T_\alpha^{2l+1} \right] & (l = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Podstawiając wyznaczone wartości współczynników (3.100) do wzorów (3.66) dla $\hat{\mathbf{u}}^n$ otrzymamy współczynniki szeregu (3.65), reprezentującego rozwiązanie ogólne, w zależności od niewiadomych współczynników C_n , D_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), współczynników $\sigma_{\alpha\alpha}^n(\alpha)$ i T_α^{n+1} .

Ostatecznie, po uwzględnieniu wzorów (3.99) dla $\sigma_{\alpha\alpha}^n(0)$, wzorów (3.58) dla T_α^n oraz (3.95) dla współczynników $\hat{\mathbf{u}}^n$ szeregu reprezentującego rozwiązanie szczególne, pełne rozwiązanie równań Lamégo w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej ma postać

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} u_r^n(\alpha), \quad u_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} u_\alpha^n(\alpha). \quad (3.101)$$

Współczynniki $u_r^n(\alpha)$, $u_\alpha^n(\alpha)$ przedstawimy w postaci sumy

$$u_r^n(\alpha) = \hat{u}_r^{m,n}(\alpha) + \hat{u}_r^{\varepsilon,n}(\alpha), \quad u_\alpha^n(\alpha) = \hat{u}_\alpha^{m,n}(\alpha) + \hat{u}_\alpha^{\varepsilon,n}(\alpha) \quad (3.102)$$

Przez $\hat{u}_r^{m,n}(\alpha)$, $\hat{u}_\alpha^{m,n}(\alpha)$ oznaczono wyrazy zależne od stałych dowolnych C_n , D_n , natomiast człony $\hat{u}_r^{\varepsilon,n}(\alpha)$, $\hat{u}_\alpha^{\varepsilon,n}(\alpha)$ zależą bezpośrednio od parametrów lokalnego pola elektrostatycznego.

Współczynniki funkcyjne $u_r^{m_n}(\alpha)$, $u_\alpha^{m_n}(\alpha)$ mają postać

$$\begin{aligned} u_r^{m_n} = & -C_n \left\{ \frac{1}{\lambda + \mu} \left[\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \mu - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) (\lambda + 2\mu) \right] \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \alpha + \right. \\ & \left. + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \alpha \right\} + \\ & + D_n \left\{ \frac{1}{\lambda + \mu} \left[\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \mu - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) (\lambda + 2\mu) \right] \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \alpha + \right. \\ & \left. + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \cos \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \alpha \right\}, \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} u_\alpha^{m_n} = & -C_n \left\{ \frac{1}{\lambda + \mu} \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right) \mu - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) (\lambda + 2\mu) \right] \cos \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \alpha + \right. \\ & \left. + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \alpha \right\} + \\ & - D_n \left\{ \frac{1}{\lambda + \mu} \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right) \mu - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) (\lambda + 2\mu) \right] \sin \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \alpha + \right. \\ & \left. + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \sin \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \alpha \right\}. \end{aligned}$$

Współczynniki zależne bezpośrednio od parametrów pola elektrostatycznego w otoczeniu naroża *szczeliny przewodzącej* są

$$\begin{aligned} u_r^n = & \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ \frac{1}{n\mu} \left\{ \frac{2a_2 + a_5}{8} \left[\left(\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \lambda + 2\mu \right) v_r^{n,k} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{n}{2} - k + 1 \right) (\lambda + 2\mu) v_\alpha^{n,k} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(a_2 + a_5 + \frac{\varepsilon}{2} \right) k (n - k + 2) \right\} \cos \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \alpha + \\ & \left. + \frac{2a_2 + a_5}{8} v_r^{n,k} \cos \left(\frac{n}{2} - k + 1 \right) \alpha \right\} \mathcal{A}_k \mathcal{A}_{n-k+2}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} u_\alpha^n = & \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ \frac{(-1)}{n\mu} \left\{ \frac{2a_2 + a_5}{8} \left[\left(\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \lambda + 2\mu \right) v_r^{n,k} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{n}{2} - k + 1 \right) (\lambda + 2\mu) v_\alpha^{n,k} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(a_2 + a_5 + \frac{\varepsilon}{2} \right) k (n - k + 2) \right\} \sin \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \alpha + \\ & \left. + \frac{2a_2 + a_5}{8} v_\alpha^{n,k} \sin \left(\frac{n}{2} - k + 1 \right) \alpha \right\} \mathcal{A}_k \mathcal{A}_{n-k+2}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Współczynniki liczbowe $v_r^{n,k}$, $v_\alpha^{n,k}$ występujące w powyższych wyrażeniach dane są wzorami (3.96).

Rozwiązanie (3.101) zależy od dwóch ciągów dowolnych współczynników liczbowych C_n , D_n , które reprezentują wpływ przemieszczeń i naprężeń w pozostałym obszarze dielektryka na przemieszczenia w otoczeniu naroża szczeliny. W przypadku konstruowania rozwiązania globalnego dla całego obszaru dielektryka ze szczeliną przewodzącą, współczynniki te wyznacza się z uzgodnienia przemieszczeń i ich pochodnych normalnych na wspólnej granicy obu obszarów.

3.6 Zachowanie się pól w bliskim otoczeniu naroża szczeliny

Z otrzymanego w poprzednich paragrafach pełnego rozwiązania lokalnego, które przedstawia ściśle postać rozwiązania w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej i przewodzącej, otrzymuje się ich przybliżenie asymptotyczne opisujące pole elektrostatyczne i przemieszczenia w bliskim otoczeniu naroża szczeliny. Podamy teraz zestawienie wyników asymptotycznych dla pola elektrostatycznego, przemieszczeń oraz naprężeń mechanicznych i elektrostatycznych dla obu przypadków tzn. szczeliny próżniowej i szczeliny przewodzącej w dielektryku sprężystym poddanym działaniu pola elektrostatycznego.

3.6.1 Pole elektrostatyczne

	Szczelina próżniowa	Szczelina przewodząca
w dielektryku	$E_r = -(A_1 \sin \alpha + B_1 \cos \alpha) + O(r^1),$ $E_\alpha = -(A_1 \cos \alpha - B_1 \sin \alpha) + O(r^1),$	$E_r = -r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \mathcal{A}_1 \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^0),$ $E_\alpha = -r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \mathcal{A}_1 \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^0),$
w szczelinie	$\overset{s}{E}_r = -B_1 + O(r^1),$ $\overset{s}{E}_\alpha = -\frac{\varepsilon}{e_o} A_1 + O(r^1),$	$\overset{s}{\mathbf{E}} = 0.$

Przypominamy, że A_1 , B_1 i \mathcal{A}_1 są dowolnymi współczynnikami liczbowymi, które można wyznaczyć z warunków zszycia dla pola elektrostatycznego w otoczeniu naroża szczeliny i w obszarze zewnętrznym, na wspólnej granicy tych obszarów.

3.6.2 Przemieszczenia

Szczelina próżniowa

$$\begin{aligned}
 u_r &= r^{\frac{1}{2}} \left\{ C_1 \left(\frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + \mu} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha \right) + D_1 \left(\frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + \mu} \cos \frac{\alpha}{2} + 3 \cos \frac{3}{2}\alpha \right) \right\} \\
 &\quad + O(r^1), \\
 u_\alpha &= r^{\frac{1}{2}} \left\{ C_1 \left(\frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + \mu} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2}\alpha \right) - D_1 \left(\frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + \mu} \sin \frac{\alpha}{2} + 3 \sin \frac{3}{2}\alpha \right) \right\} \\
 &\quad + O(r^1).
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

Szczelina przewodząca

$$\begin{aligned}
 u_r &= r^{\frac{1}{2}} \left\{ C_1 \left(\frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + \mu} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha \right) + D_1 \left(\frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + \mu} \cos \frac{\alpha}{2} + 3 \cos \frac{3}{2}\alpha \right) + \right. \\
 &\quad + \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \left\{ - \frac{2a_2 + a_5}{3\lambda + 7\mu} \cos \frac{\alpha}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\mu} \left[(a_5 + \varepsilon) + \frac{2a_2 + a_5}{2} \left(2 - \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 7\mu} - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 5\mu} \right) \right] \cos \frac{3}{2}\alpha \right\} \left. \right\} + \\
 &\quad + O(r^1), \\
 u_\alpha &= r^{\frac{1}{2}} \left\{ C_1 \left(\frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + \mu} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2}\alpha \right) - D_1 \left(\frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + \mu} \sin \frac{\alpha}{2} + 3 \sin \frac{3}{2}\alpha \right) + \right. \\
 &\quad + \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \left\{ \frac{2a_2 + a_5}{\lambda + 5\mu} \sin \frac{\alpha}{2} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\mu} \left[(a_5 + \varepsilon) + \frac{2a_2 + a_5}{2} \left(2 - \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 7\mu} - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 5\mu} \right) \right] \sin \frac{3}{2}\alpha \right\} \left. \right\} + \\
 &\quad + O(r^1).
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

W powyższych wzorach C_1 , D_1 są stałymi dowolnymi, które można wyznaczyć z warunków zszycia przemieszczeń w otoczeniu naroża szczeliny i w obszarze zewnętrznym, na wspólnej granicy obu obszarów.

W przypadku szczeliny próżniowej asymptotyczna postać przemieszczeń nie zależy jawnie od parametrów pola elektrostatycznego w otoczeniu naroża szczeliny. Wpływ pola elektrostatycznego tkwi w sytałach dowolnych C_1 , D_1 .

We wzorach asymptotycznych dla przemieszczeń w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej występują w sposób jawny parametry pola elektrostatycznego, takie jak stała dielektryczna ε , współczynniki materiałowe odpowiedzialne za elektrostrykcję a_2 , a_5 , oraz stałe dowolne związane z polem elektrostatycznym w otoczeniu naroża szczeliny \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 .

3.6.3 Naprężenia

Pole elektrostatyczne powoduje powstanie zarówno naprężeń mechanicznych jak i elektrostatycznych w dielektryku. W dielektryku opisywanym przez stosowany tu model naprężenia mechaniczne są funkcją odkształceń, natomiast naprężenia pochodzenia elektrycznego zależą od składowych pola elektrostatycznego. Występują tu dwa rodzaje naprężeń elektrostatycznych – naprężenie sprzężenia $s^t_k{}^l$ oraz naprężenie Maxwella $M^t_k{}^l$. Zatem stan naprężenia w dielektryku poddanym działaniu pola elektrostatycznego charakteryzowany jest przez sumę wszystkich trzech rodzajów naprężeń. Również w próżni działają naprężenia elektrostatyczne, są to naprężenia Maxwella. Związki naprężenia sprzężenia z natężeniem pola elektrostatycznego określają równania konstytutywne (2.21), natomiast zależność naprężeń Maxwella od pola elektrostatycznego dana jest przez definicję tych naprężeń (2.23) (str. 27). W biegunowym układzie współrzędnych stosowanym w tym rozdziale zależności te mają postać następującą:

Naprężenia sprzężenia

$$\begin{aligned} s^t_{rr} &= (a_2 + a_5) E_r^2 + a_2 E_\alpha^2, \\ s^t_{r\alpha} &= a_5 E_r E_\alpha, \\ s^t_{\alpha\alpha} &= (a_2 + a_5) E_\alpha^2 + a_2 E_r^2. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Naprężenia Maxwella w dielektryku

$$\begin{aligned} M^t_{rr} &= \frac{\varepsilon}{2} (E_r^2 - E_\alpha^2), \\ M^t_{r\alpha} &= \varepsilon E_r E_\alpha, \\ M^t_{\alpha\alpha} &= \frac{\varepsilon}{2} (E_\alpha^2 - E_r^2). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Naprężenia Maxwella w próżni

$$\begin{aligned} \tilde{M}^t_{rr} &= \frac{e_o}{2} (\tilde{E}_r^2 - \tilde{E}_\alpha^2), \\ \tilde{M}^t_{r\alpha} &= e_o \tilde{E}_r \tilde{E}_\alpha, \\ \tilde{M}^t_{\alpha\alpha} &= \frac{e_o}{2} (\tilde{E}_\alpha^2 - \tilde{E}_r^2). \end{aligned} \quad (3.111)$$

Podana zostanie teraz asymptotyczna postać wzorów dla naprężeń wynikająca z rozwiązania lokalnego dla pola elektrostatycznego – w przypadku naprężeń sprzężenia i naprężeń Maxwella, oraz z rozwiązania lokalnego dla przemieszczeń – w przypadku naprężeń mechanicznych dla obu rodzajów rozpatrywanych tu szczelin.

Szczelina próżniowa

Naprężenia mechaniczne

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} \left\{ C_1 \left(5 \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3}{2} \alpha \right) + D_1 \left(5 \cos \frac{\alpha}{2} + 3 \cos \frac{3}{2} \alpha \right) \right\} + O(r^0), \\ \sigma_{r\alpha} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} \left\{ C_1 \left(-\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2} \alpha \right) + D_1 \left(\sin \frac{\alpha}{2} - 3 \sin \frac{3}{2} \alpha \right) \right\} + O(r^0), \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} \left\{ C_1 \left(3 \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3}{2} \alpha \right) + 3D_1 \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3}{2} \alpha \right) \right\} + O(r^0).\end{aligned}\tag{3.112}$$

Podobnie jak w przypadku mechanicznym naprężenia zależne od stanu odkształcenia dielektryka mają w otoczeniu naroża szczeliny osobliwość rzędu $r^{-\frac{1}{2}}$ i zależą od stałych dowolnych C_1, D_1 , które są funkcją geometrii szczeliny i obciążenia. Jak już wspomniano, stałe te można wyznaczyć z warunków ciągłości przemieszczeń i ich pochodnych normalnych na wspólnej granicy otoczenia naroża szczeliny i obszaru zewnętrznego. Metody wyznaczania tych stałych omówione będą w dalszych rozdziałach.

Naprężenia sprzężenia

$$\begin{aligned}s_{t_{rr}} &= r^0 \left\{ a_5 \left[A_1 B_1 \sin 2\alpha + \frac{1}{2} (A_1^2 - B_1^2) \cos 2\alpha \right] + \left(a_2 + \frac{a_5}{2} \right) (A_1^2 + B_1^2) \right\} \\ &\quad + O(r^1), \\ s_{t_{r\alpha}} &= r^0 a_5 \left\{ \frac{1}{2} (A_1^2 - B_1^2) \sin 2\alpha + A_1 B_1 \cos 2\alpha \right\} + O(r^1), \\ s_{t_{\alpha\alpha}} &= r^0 \left\{ a_5 \left[-A_1 B_1 \sin 2\alpha + \frac{1}{2} (A_1^2 - B_1^2) \cos 2\alpha \right] + \left(a_2 + \frac{a_5}{2} \right) (A_1^2 + B_1^2) \right\} \\ &\quad + O(r^1).\end{aligned}\tag{3.113}$$

Naprężenia Maxwella w dielektryku

$$\begin{aligned}M_{t_{rr}} &= r^0 \varepsilon \left\{ A_1 B_1 \sin 2\alpha - \frac{1}{2} (A_1^2 - B_1^2) \cos 2\alpha \right\} + O(r^1), \\ M_{t_{r\alpha}} &= r^0 \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} (A_1^2 - B_1^2) \sin 2\alpha + A_1 B_1 \cos 2\alpha \right\} + O(r^1), \\ M_{t_{\alpha\alpha}} &= r^0 \varepsilon \left\{ -A_1 B_1 \sin 2\alpha + \frac{1}{2} (A_1^2 - B_1^2) \cos 2\alpha \right\} + O(r^1).\end{aligned}\tag{3.114}$$

$$\begin{aligned}
 {}_M t_{rr}^s &= r^0 \left(-\frac{e_0}{2} \right) \left[\left(\frac{\varepsilon}{e_0} \right)^2 A_1^2 - B_1^2 \right] + O(r^1), \\
 {}_M t_{r\alpha}^s &= r^0 \varepsilon A_1 B_1 + O(r^1), \\
 {}_M t_{\alpha\alpha}^s &= r^0 \frac{e_0}{2} \left[\left(\frac{\varepsilon}{e_0} \right)^2 A_1^2 - B_1^2 \right] + O(r^1).
 \end{aligned}
 \tag{3.115}$$

Jak widać z powyższych wzorów, w przypadku szczeliny próżniowej tylko naprężenia mechaniczne mają osobliwość w narożu szczeliny, przyczym rząd tej osobliwości jest taki sam jak w przypadku mechanicznym. Naprężenia pochodzenia elektrostatycznego zarówno w dielektryku jak i w szczelinie są funkcjami regularnymi. Wynika stąd, że o stanie naprężenia w bliskim otoczeniu naroża szczeliny próżniowej decydują naprężenia mechaniczne.

Szczelina przewodząca

Naprężenia mechaniczne

Asymptotyczna postać naprężeń mechanicznych jest w tym przypadku następująca

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} \left\{ C_1 \left(5 \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3}{2} \alpha \right) + D_1 \left(5 \cos \frac{\alpha}{2} + 3 \cos \frac{3}{2} \alpha \right) \right. \\
 &\quad + A_1 A_2 \left\{ -\frac{2a_2 + a_5}{2\mu} \left(\frac{\lambda}{\lambda + 5\mu} + \frac{3\lambda + 2\mu}{3\lambda + 7\mu} \right) \cos \frac{\alpha}{2} + \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\mu} \left[(a_5 + \varepsilon) + \frac{2a_2 + a_5}{2} \left(2 - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 5\mu} - \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 7\mu} \right) \right] \cos \frac{3}{2} \alpha \right\} \right\} \\
 &\quad + O(r^0),
 \end{aligned}
 \tag{3.116}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\alpha} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} \left\{ C_1 \left(-\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2} \alpha \right) + D_1 \left(\sin \frac{\alpha}{2} - 3 \sin \frac{3}{2} \alpha \right) \right. \\
 &\quad + A_1 A_2 \left\{ (2a_2 + a_5) \left(\frac{-1}{\lambda + 5\mu} + \frac{1}{3\lambda + 7\mu} \right) \sin \frac{\alpha}{2} + \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{\mu} \left[2(a_5 + \varepsilon) + (2a_2 + a_5) \left(2 - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 5\mu} - \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 7\mu} \right) \right] \sin \frac{3}{2} \alpha \right\} \right\} \\
 &\quad + O(r^0),
 \end{aligned}
 \tag{3.117}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\alpha} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} \left\{ C_1 \left(3 \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3}{2} \alpha \right) + 3D_1 \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3}{2} \alpha \right) \right. \\
 &\quad + A_1 A_2 \left\{ \frac{2a_2 + a_5}{\mu} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 5\mu} - \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 7\mu} \right) \cos \frac{\alpha}{2} \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2}{\mu} \left[(a_5 + \varepsilon) + \frac{2a_2 + a_5}{2} \left(2 - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 5\mu} - \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 7\mu} \right) \right] \cos \frac{3}{2} \alpha \right\} \right\} \\
 &\quad + O(r^0).
 \end{aligned}
 \tag{3.118}$$

Podobnie jak w przypadku szczeliny próżniowej naprężenia mechaniczne mają w narożu szczeliny osobliwość rzędu $r^{-\frac{1}{2}}$. Jednak w tym przypadku poza stałymi dowolnymi C_1, D_1 związanymi z lokalnym charakterem rozwiązania dla przemieszczeń, występują tu w sposób jawny parametry elektryczne takie jak stała dielektryczna ε , stałe materiałowe odpowiedzialne za elektrostrykcję a_2, a_5 oraz stałe dowolne $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ związane z lokalnym charakterem rozwiązania dla pola elektrostatycznego.

Podamy teraz postać asymptotyczną funkcji opisujących zachowanie się fizycznej części naprężeń pochodzenia elektrostatycznego, tzn. zregularyzowanych naprężeń w dielektryku, w bliskim otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej. Wewnątrz szczeliny przewodzącej naprężenia Maxwella są równe zero co wynika z faktu, że w przewodniku pole elektrostatyczne znika.

Naprężenia sprężenia

$$\begin{aligned} s_{trr} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \left[(2a_2 + a_5) \cos \frac{\alpha}{2} - a_5 \cos \frac{3}{2} \alpha \right] + O(r^0) \\ s_{tr\alpha} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} a_5 \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \sin \frac{3}{2} \alpha + O(r^0) \\ s_{t\alpha\alpha} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \left[(2a_2 + a_5) \cos \frac{\alpha}{2} + a_5 \cos \frac{3}{2} \alpha \right] + O(r^0) \end{aligned} \quad (3.119)$$

Naprężenia Maxwella

$$\begin{aligned} M_{trr} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \varepsilon \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \left(-\cos \frac{3}{2} \alpha \right) + O(r^0) \\ M_{tr\alpha} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \varepsilon \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \sin \frac{3}{2} \alpha + O(r^0) \\ M_{t\alpha\alpha} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \varepsilon \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \cos \frac{3}{2} \alpha + O(r^0) \end{aligned} \quad (3.120)$$

Jak wynika z powyższych zależności, stan naprężenia w bliskim otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej opisywany jest przez sumę naprężeń mechanicznych i naprężeń pochodzenia elektrostatycznego, czyli opisywany jest przez funkcje

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + s_{trr} + M_{trr} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} \left\{ C_1 \left(5 \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3}{2} \alpha \right) + D_1 \left(5 \cos \frac{\alpha}{2} + 3 \cos \frac{3}{2} \alpha \right) \right. \\ &\quad + \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \left\{ -\frac{2a_2 + a_5}{2\mu} \left(2 - \frac{\lambda}{\lambda + 5\mu} - \frac{3\lambda + 2\mu}{3\lambda + 7\mu} \right) \cos \frac{\alpha}{2} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2a_2 + a_5}{2\mu} \left(2 - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 5\mu} - \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 7\mu} \right) \cos \frac{3}{2} \alpha \right\} \right\} + O(r^0), \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\alpha} + s_{trr} + M^{trr} = & r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} \left\{ C_1 \left(-\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2}\alpha \right) + D_1 \left(\sin \frac{\alpha}{2} - 3 \sin \frac{3}{2}\alpha \right) \right. \\ & + \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \left\{ \frac{2a_2 + a_5}{2\mu} \left(\frac{1}{\lambda + 5\mu} + \frac{1}{3\lambda + 7\mu} \right) \sin \frac{\alpha}{2} \right. \\ & \left. \left. - \frac{2a_2 + a_5}{2\mu} \left(2 - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 5\mu} - \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 7\mu} \right) \sin \frac{3}{2}\alpha \right\} \right\} + O(r^0), \end{aligned} \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} + s_{t\alpha\alpha} + M^{t\alpha\alpha} = & r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} \left\{ C_1 \left(3 \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3}{2}\alpha \right) + 3D_1 \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3}{2}\alpha \right) \right. \\ & + \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \left\{ \frac{2a_2 + a_5}{2\mu} \left(1 - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 5\mu} - \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 7\mu} \right) \cos \frac{\alpha}{2} \right. \\ & \left. \left. + \frac{2a_2 + a_5}{2\mu} \left(2 - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 5\mu} - \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 7\mu} \right) \cos \frac{3}{2}\alpha \right\} \right\} + O(r^0). \end{aligned} \quad (3.123)$$

3.7 Różnice między rozwiązaniami dla obu przypadków i ich znaczenie fizyczne

Otrzymane tu ściśle wyrażenia (3.75) – (3.84) opisujące przemieszczenia w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej oraz (3.101) – (3.105) dla szczeliny przewodzącej jak również wynikające z nich przybliżenia asymptotyczne różnią się od siebie w sposób istotny. Różnice te mają charakter nie tylko formalny ale również określone znaczenie fizyczne.

Zauważmy, że pierwsze i trzecie z równań algebraicznych (3.72), dla przypadku szczeliny próżniowej, dla każdego l są jednorodne, co oznacza, że niewiadome współczynniki M_{2l+1} , N_{2l+1} nie zależą od parametrów pola elektrycznego w otoczeniu naroża szczeliny. Wynika stąd, że zarówno w ściśle jak i asymptotycznej postaci rozwiązania (3.75) – (3.84), (3.106) dla szczeliny próżniowej współczynniki $u_r^1(\alpha)$, $u_\alpha^1(\alpha)$ stojące przy wyrazie rzędu $r^{\frac{1}{2}}$, w przypadku przemieszczeń, oraz $r^{-\frac{1}{2}}$, w przypadku naprężeń, nie zależą w sposób bezpośredni od parametrów pola elektrostatycznego w otoczeniu naroża szczeliny. Oznacza to, że elektrostatyczne pole lokalne nie wpływa w sposób bezpośredni na przemieszczenia i naprężenia w bliskim otoczeniu naroża szczeliny próżniowej.

Należy jednak podkreślić, że współczynniki C_1 , D_1 są zależne od pól elektrostatycznych znajdujących się poza otoczeniem naroża szczeliny. Wynika to stąd, że zarówno współczynniki C_1 , D_1 jak również wszystkie pozostałe dowolne współczynniki rozwiązania w przypadku konstrukcji rozwiązania globalnego, są zależne od parametrów pola elektrostatycznego. Zostanie to wykazane w ogólnym przypadku dynamicznym w dalszych częściach pracy.

Inaczej jest w przypadku dielektryka ze szczeliną przewodzącą. W tym przypadku równania algebraiczne (3.98)_{3,4}, odpowiadające warunkom brzegowym dla naprężeń normalnych na powierzchni szczeliny, są niejednorodne i niewiadome współczynniki N_n są

zależne, dla każdego n ($n = 1, 2, 3, \dots$), w sposób bezpośredni od parametrów pola elektrostatycznego w otoczeniu naroża szczeliny. Wynika stąd, że współczynniki funkcyjne $u_r^n(\alpha)$, $u_\alpha^n(\alpha)$ stojące przy $r^{\frac{n}{2}}$ w wyrażeniach dla przemieszczeń zależą w sposób bezpośredni od parametrów pola elektrostatycznego w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej. Dotyczy to w szczególności współczynników $u_r^1(\alpha)$, $u_\alpha^1(\alpha)$ stojących przy wyrazie $r^{\frac{1}{2}}$ w przemieszczeniach, oraz przy $r^{-\frac{1}{2}}$ w naprężeniach, zarówno w rozwiązaniu ścisłym (3.101) – (3.105) jak i jego asymptotycznym przybliżeniu (3.107) – (3.108). Wyrazy te występują w członach opisujących zachowanie się przemieszczeń i naprężeń w bliskim otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej.

A zatem, w odróżnieniu od szczeliny próżniowej pole elektrostatyczne w otoczeniu naroża szczeliny wpływa bezpośrednio na zachowanie się przemieszczeń i naprężeń w bliskim otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej.

Należy zauważyć, że podobnie jak dla szczeliny próżniowej, ciągi C_n , D_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), dowolnych liczb rzeczywistych od których zależne jest rozwiązanie, reprezentują zarówno pośredni wpływ elektrostatycznego pola lokalnego jak i pola elektrostatycznego w obszarze zewnętrznym w przypadku konstrukcji rozwiązania globalnego, to jest dla całego obszaru dielektryka ze szczeliną przewodzącą. Problem ten jest rozwiązywany w dalszych częściach pracy dla ogólnego przypadku dynamicznego jak również w przykładzie numerycznym dla przypadku statycznego.

3.8 Wpływ odkształceń na pole elektrostatyczne w dielektryku ze szczeliną

Otrzymane w tym rozdziale rozwiązania lokalne skonstruowane zostały jako rozwiązania odpowiednich problemów brzegowych dla przybliżenia quasilineowego. Chociaż intuicyjnie stosowanie tego przybliżenia wydaje się słuszne, to w przypadku problemów brzegowych dla dielektryków ze szczelinami może budzić wątpliwości. Wynika to z faktu, że odkształcenia w otoczeniu naroża szczeliny opisane są przez funkcje zawierające w narożu osobliwość rzędu $r^{-\frac{1}{2}}$. Można wykazać, że pole generowane przez odkształcenia w otoczeniu naroża szczeliny może być pominięte jako małe w porównaniu z polem dla ciała sztywnego, które uwzględnia się w przybliżeniu quasilineowym.

Tak jak w poprzednich paragrafach rozpatrujemy otoczenie naroża szczeliny opisane w układzie współrzędnych cylindrycznych relacjami $V_0: 0 < r < r_0, 0 < \alpha < 2\pi, |z| < \infty$. W obszarze zewnętrznym $V_e: r_0 < r < \infty, 0 < \alpha < 2\pi, |z| < \infty$, założenie małych odkształceń nie jest kwestionowane. Zatem odkształcenia w V_e mogą być przedstawione w postaci

$$e^e(r, \alpha) = \xi \bar{e}(r, \alpha)$$

gdzie ξ jest małym parametrem.

Z ciągłości odkształceń na wspólnej granicy obu obszarów $S_0: r = r_0, 0 < \alpha < 2\pi$,

$$|z| < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_0^{\frac{n}{2}-1} e^n(\alpha) = \xi \bar{e}(r_0, \alpha)$$

wynika, że odkształcenia w otoczeniu naroża szczeliny można przedstawić w zależności od małego parametru ξ

$$e(r, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} r_0^{\frac{n}{2}-1} \xi \bar{e}^n(\alpha). \quad (3.124)$$

Zbadamy teraz wpływ odkształceń w na pole elektrostatyczne, wychodząc z modelu, w którym energia sprężenia przyjęta jest w postaci prowadzącej do związków konstytutywnych dla naprężenia sprężenia w przybliżeniu quasiliniowym (2.21). Wówczas pełne równanie i warunki brzegowe dla potencjału elektrostatycznego φ w otoczeniu naroża szczeliny są (2.1)

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r {}_s D_r) + \frac{\partial}{\partial \alpha} {}_s D_\alpha \right] - \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \varphi = 0, \quad (3.125)$$

$$\left. \begin{aligned} \left({}_s D_\alpha - \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=\{\frac{\xi}{2r-\xi}\}} &= -e_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \overset{*}{\varphi}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\{\xi-\xi\}} \\ \varphi \Big|_{\alpha=\{\frac{\xi}{2r-\xi}\}} &= \overset{*}{\varphi} \Big|_{\alpha=\{\xi-\xi\}}, \\ \varphi \Big|_{\alpha=\{\frac{\xi}{2r-\xi}\}} &= 0, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{dla szczeliny próżniowej,} \\ \text{dla szczeliny przewodzącej,} \end{array} \quad (3.126)$$

gdzie $\overset{*}{\varphi}$ jest potencjałem elektrostatycznym w szczelinie. Składowe ${}_s D$ są dane w zależności od potencjału φ i odkształceń przez związki konstytutywne, które we współrzędnych cylindrycznych mają postać

$$\begin{aligned} {}_s D_r &= 2a_5 \left(e_{rr} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + e_{r\alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) + 2a_2 (e_{rr} + e_{\alpha\alpha}) \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \\ {}_s D_\alpha &= 2a_5 \left(e_{r\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + e_{\alpha\alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) + 2a_2 (e_{rr} + e_{\alpha\alpha}) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Równanie na potencjał (3.125) przy uwzględnieniu powyższych związków konstytutywnych ma formę

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left\{ 2a_5 \left(e_{rr} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + e_{r\alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) + 2a_2 (e_{rr} + e_{\alpha\alpha}) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\} \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ 2a_5 \left(e_{r\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + e_{\alpha\alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) + 2a_2 (e_{rr} + e_{\alpha\alpha}) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right\} \\ - \varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \varphi = 0 \end{aligned} \quad (3.128)$$

Potencjał elektrostatyczny φ przedstawimy w postaci szeregu Taylora względem małego parametru ξ

$$\varphi = \varphi^0 + \xi\varphi^1 + \xi^2\varphi^2 + \dots + \xi^n\varphi^n + \dots, \quad (3.129)$$

gdzie

$$\varphi^0 = \varphi|_{\xi=0}, \varphi^1 = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}|_{\xi=0}, \dots, \varphi^n = \frac{\partial^n\varphi}{\partial\xi^n}|_{\xi=0}, \dots$$

Równania na współczynniki $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n, \dots$, otrzymujemy rozwijając w szereg Taylora względem parametru ξ równanie na potencjał φ (3.128) i warunki brzegowe (3.126) a następnie przyrównując do zera wyrazy stojące przy takich samych potęgach ξ .

Przyjmując $\mathbf{e} = \xi\bar{\mathbf{e}}$ i ograniczając się tylko do dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia (3.129) otrzymamy następujący układ równań na współczynniki φ^0, φ^1

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \varphi^0 = 0, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left\{ 2a_5 \left(\bar{e}_{rr} \frac{\partial\varphi^0}{\partial r} + \bar{e}_{r\alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi^0}{\partial \alpha} \right) + 2a_2 (\bar{e}_{rr} + \bar{e}_{\alpha\alpha}) \frac{\partial\varphi^0}{\partial r} \right\} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ 2a_5 \left(\bar{e}_{r\alpha} \frac{\partial\varphi^0}{\partial r} + \bar{e}_{\alpha\alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi^0}{\partial \alpha} \right) + 2a_2 (\bar{e}_{rr} + \bar{e}_{\alpha\alpha}) \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi^0}{\partial \alpha} \right\} \\ & -\varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \varphi^1 = 0 \end{aligned} \quad (3.130)$$

oraz następujące równania równoważne warunkom brzegowym:

Dla szczeliny próżniowej

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi^0}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\{\frac{\xi}{2\pi-\xi}\}} = -e_o \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi^0}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\{\xi\}}, \\ & \left\{ 2a_5 \left(\bar{e}_{r\alpha} \frac{\partial\varphi^0}{\partial r} + \bar{e}_{\alpha\alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi^0}{\partial \alpha} \right) + 2a_2 (\bar{e}_{rr} + \bar{e}_{\alpha\alpha}) \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi^0}{\partial \alpha} - \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi^1}{\partial \alpha} \right\} \Big|_{\alpha=\{\frac{\xi}{2\pi-\xi}\}} = 0, \\ & \varphi^0 \Big|_{\alpha=\{\frac{\xi}{2\pi-\xi}\}} = \varphi^0 \Big|_{\alpha=\{\xi\}}, \quad \varphi^1 \Big|_{\alpha=\{\frac{\xi}{2\pi-\xi}\}} = 0. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Dla szczeliny przewodzącej

$$\begin{aligned} \varphi^0 \Big|_{\alpha=\{\frac{\xi}{2\pi-\xi}\}} &= 0, \\ \varphi^1 \Big|_{\alpha=\{\frac{\xi}{2\pi-\xi}\}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Funkcja φ^0 spełnia równania i warunki brzegowe dla potencjału elektrostatycznego w ciele sztywnym.

Wynika stąd, że część pola elektrostatycznego generowanego przez odkształcenia zależy od małego parametru i można ją zaniedbać w porównaniu z polem elektrostatycznym dla ciała sztywnego.

Rozdział 4

Kryteria pękania

Szeroką klasę materiałów dielektrycznych stanowią materiały ceramiczne, które ze względu na własności mechaniczne zalicza się do kruchych materiałów sprężystych. Dlatego przy rozpatrywaniu procesów pękania uwzględniony zostanie model pękania kruchego. Jako podstawę przy wyprowadzeniu kryteriów pękania dielektryków pod wpływem silnego pola elektrycznego przyjęto tu uogólnienie energetycznego kryterium Griffitha. Wydaje się, że w przypadku gdy uwzględnia się wpływ na proces pękania innych czynników niż czysto mechaniczne, stosowanie kryteriów biorących jako podstawę geometrię naroża szczeliny, jak np. kryterium Barenblatta, lub kryteriów porównawczych opierających się na wielkości współczynników intensywności naprężeń mechanicznych nie jest uzasadnione. Kryteria te nie uwzględniają bowiem wpływu na proces pękania innych czynników poza mechanicznymi. Tym samym nie mogą uwzględnić wpływu energii elektrostatycznej a w przypadku dynamicznym elektromagnetycznej.

W niniejszym rozdziale zostanie wyprowadzone uogólnione kryterium Griffitha dla przypadku pękania dielektryka sprężystego pod wpływem pola elektrostatycznego, omówiona związana z kryterium niezmiennicza całka Γ , wprowadzone zostaną uogólnione definicje współczynników intensywności naprężeń mechanicznych i elektrostatycznych oraz współczynniki intensywności pola elektrostatycznego oraz pokazane przejście do uogólnionego kryterium Irvina.

4.1 Uogólnione kryterium Griffitha

Kryterium Griffitha opiera się na bilansie energii, w którym uwzględnia się energię wydatkowaną na utworzenie nowej powierzchni szczeliny. Przyjmuje się, że energia ta jest równa różnicy przyrostu energii potencjalnej ciała i przyrostu energii wewnętrznej [21], [43]. Wychodząc z tego ogólnego sformułowania należy uwzględnić całkowitą energię wewnętrzną dielektryka, która zawiera poza energią mechaniczną energię sprężenia oraz energię elektrostatyczną. Przyrost energii potencjalnej wynika z pracy uogólnionych sił na odpowiadających im uogólnionych przemieszczeniach. Siłami uogólnionymi są w przypadku dielektryka, który jest pod wpływem pola elektrostatycznego, siły pochodzenia

mechanicznego i elektrycznego oraz ładunki elektrostatyczne generowane przez pole elektrostatyczne, którym odpowiadają przemieszczenia punktów materialnych dielektryka oraz zmiany potencjału elektrostatycznego.

Rozpatrzmy dielektryk sprężysty zawierający szczelinę o ustalonej długości, który znajduje się pod wpływem zewnętrznego pola elektrostatycznego. Pole to generuje pole elektrostatyczne w dielektryku. Przy założeniu, że szczelina doznaje przyrostu długości ułożony zostanie bilans energii na podstawie uogólnionego kryterium Griffitha w formie wariacyjnej.

Stan dielektryka ze szczeliną opisany jest przez położenia punktów materialnych (1.4) oraz potencjał pola elektrostatycznego odniesiony do konfiguracji wyjściowej, czyli w dielektryku ze szczeliną o ustalonej długości

$$x^k = x^k(X^K, l_i), \quad \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(X^K, l_i). \quad (4.1)$$

Wektor l jest tu parametrem określającym długość i kierunek szczeliny, X^K są współrzędnymi materialnymi punktów dielektryka w stanie przed przyrostem długości szczeliny. Zakładamy, że istnieje transformacja odwrotna

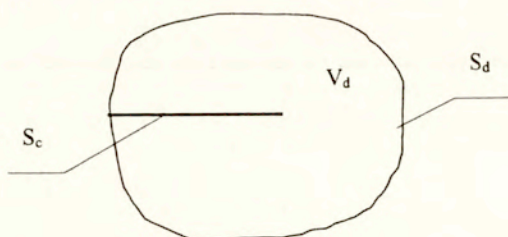
$$X^K = X^K(x^k, l_i).$$

Dla potencjału elektrostatycznego i jego pochodnych zachodzą relacje (1.8)

$$\begin{aligned} \varphi(x^k, l_i) &= \varphi[x^k(X^K, l_i), l_n] = \tilde{\varphi}(X^K, l_i), \\ \varphi(x^i, l_n)_{,k} &= \tilde{\varphi}_{,M} X^M_{,k}, \\ \tilde{\varphi}_{,M} &= \varphi(x^i, l_n)_{,k} x^k_{,M}. \end{aligned}$$

Wytnijmy teraz z całego dielektryka fragment o objętości V_d ograniczony powierzchnią materialną S_d , zawierający segment szczeliny wraz z jej narożem. Na powierzchni S_d , ograniczającej objętość V_d działają siły powierzchniowe, równoważące pozostałą część dielektryka równe $t_k = (\sigma_{kl} + s_{tkl} + {}_M t_{kl})n^l$, gdzie n jest jednostkowym wektorem normalnym, zewnętrznym do powierzchni S_d oraz jest indukowany ładunek elektrostatyczny równy składowej normalnej indukcji $q = (sD^l - \epsilon^{kl}\varphi_{,k})n_l$. Na powierzchni szczeliny działa w przypadku szczeliny próżniowej siła powierzchniowa pochodząca od naprężenia Maxwella w szczelinie ${}_M t_{kl} n^l$ (p. 3.2.1). W przypadku szczeliny przewodzącej siła ta jest równa zeru. Ponadto na powierzchni szczeliny próżniowej od strony szczeliny indukuje się powierzchniowy ładunek elektryczny wynikający z polaryzacji dielektryka równy składowej normalnej natężenia pola elektrostatycznego w próżni $\dot{q} = -e_o \dot{\varphi}_{,i} n^i$. Na powierzchni szczeliny przewodzącej ładunek indukowany przez pole elektrostatyczne

równy jest składowej normalnej indukcji $\vec{q} = ({}_s D^l - \varepsilon^{kl} \varphi_{,k}) n_l$.



Energia wewnętrzna dielektryka o objętości V_d zgodnie z przyjętym tu modelem Toupin'a dana jest wzorem (1.6) (str. 12)

$$\Sigma_d = \int_{V_d} [\rho \varepsilon(x^k{}_{;K}) + \rho \eta(x^k{}_{;K}, \tilde{\varphi}, M) + \frac{1}{2} \varepsilon^{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k}] dv. \quad (4.2)$$

Sformułowanie uogólnionego kryterium Griffitha dla rozważanej objętości dielektryka V_d możemy zapisać w postaci zasady wariacyjnej

$$\begin{aligned} \delta \gamma = & \int_{S_d} [(\sigma_{kl} + {}_s t_{kl} + {}_M t_{kl}) n_l \delta x^k + q \delta \tilde{\varphi}] ds \\ & + \int_{S_c} [{}_M t_{kl} n^l \delta x^k + \vec{q} \delta \tilde{\varphi}] ds - \delta \Sigma_d, \end{aligned} \quad (4.3)$$

gdzie wariację obliczamy względem parametru \mathbf{l} . Przez S_c oznaczono powierzchnię szczeliny, $\delta \gamma$ jest energią zużytą na utworzenie nowej powierzchni szczeliny.

Wariacje funkcji określających stan dielektryka są zdefiniowane następująco

$$\delta x^k \equiv \left. \frac{\partial x^k}{\partial l_i} \right|_{l=0} \delta l_i, \quad \delta \tilde{\varphi} = \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial l_i} \right|_{l=0} \delta l_i. \quad (4.4)$$

Zauważmy, że obliczenie wariacji energii wewnętrznej wymaga obliczenia pochodnej całki w której wyrażenie podcałkowe na ogół jest osobliwe (Rozdział 3). W związku z tym w sformułowaniu kryterium Griffitha (4.3) zastosujemy definicję całki niewłaściwej.

Otoczmy krawędź szczeliny walcem o przekroju będącym kołem o promieniu ξ , środek którego położony jest w narożu szczeliny i przemieszcza się wraz z przyrostem jej długości. W cylindrycznym układzie współrzędnych r, α, z którego oś z pokrywa się z krawędzią szczeliny, walec ten dany jest zależnościami $V_\xi : r < \xi, 0 < \alpha < 2\pi, |z| < \infty$, a jego powierzchnia relacjami $S_\xi : r = \xi, 0 < \alpha < 2\pi, |z| < \infty$. Z objętości V_d usuwamy

objętość V_ξ . Kryterium Griffitha (4.3) możemy teraz napisać w postaci

$$\begin{aligned} \delta\gamma = & \int_{S_d} [(\sigma_{kl} + {}_s t_{kl} + {}_M t_{kl}) n_l \delta x^k + q \delta \bar{\varphi}] ds \\ & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{S_c - S_{c\xi}} [{}_M t_{kl} n^l \delta x^k + \overset{\circ}{q} \delta \overset{\circ}{\varphi}] ds \\ & - \lim_{\xi \rightarrow 0} \delta \int_{V_d - V_\xi} [\rho \epsilon(x^k, {}_K) + \rho \eta(x^k, {}_K, \bar{\varphi}, {}_M) + \frac{1}{2} \epsilon^{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k}] dv. \end{aligned} \quad (4.5)$$

$S_{c\xi}$ oznacza tu fragment powierzchni szczeliny usunięty przez wycięcie z objętości V_d walca V_ξ .

Pierwszy wyraz w wyrażeniu podcałkowym w całce powierzchniowej po powierzchni S_d jest pracą naprężeń elektrostatycznych na przyrostach przemieszczeń wywołanych przyrostem długości szczeliny. Wyraz drugi przedstawia pracę indukowanego na powierzchni ładunku na przyroście potencjału wywołanym zmianą długości szczeliny.

W całce po powierzchni szczeliny pierwszy wyraz przedstawia pracę naprężeń działających na powierzchni szczeliny od strony szczeliny, na przyrostach przemieszczeń. W przypadku szczeliny próżniowej jest to naprężenie Maxwella w próżni obliczone zgodnie z procedurą przejścia granicznego (3.17), (3.111). W przypadku szczeliny przewodzącej jest ono równe zero, gdyż pole elektrostatyczne wewnątrz przewodnika znika. Drugi wyraz reprezentuje pracę ładunku powierzchniowego indukowanego na powierzchni szczeliny na przyroście potencjału. Jak podano wyżej dla szczeliny próżniowej od strony szczeliny ładunek ten jest równy $\overset{\circ}{q} = e_o \overset{\circ}{E}_l n^l$, dla szczeliny przewodzącej należy podstawić $\overset{\circ}{q} = ({}_s D_l - \epsilon_{lk} g^{ik} \varphi_{,i}) n^l$.

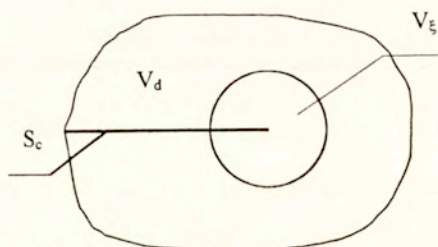
Przyjęliśmy tu, że na dielektryk nie działają inne obciążenia poza polem elektrostatycznym, tym samym założony przyrost długości szczeliny odbywa się na koszt energii elektrostatycznej. Stąd wariację energii pola elektrostatycznego należy przyjąć ze znakiem minus.

Przy obliczaniu wariacji energii \sum_d należy uwzględnić, że objętość $V_d - V_\xi$ zależy od parametru wariacji, a całka liczona jest po objętości odkształcalnej, w związku z czym należy zastosować tu wzór

$$\delta \int_{V_d - V_\xi} f(X^K, l_i) dv = \int_{V_d - V_\xi} \delta [f(X^K, l_i) J dV] - \int_{S_\xi} f \delta l_i n^i ds. \quad (4.6)$$

\mathbf{n} jest jednostkowym wektorem normalnym, zewnętrznym do powierzchni S_ξ , $\delta \mathbf{l}$ jest wektorem łączącym punkt w którym znajdowało się naroże szczeliny przed zmianą jej długości i punkt w którym się znajduje gdy szczelina doznała przyrostu długości o δl w kierunku wektora \mathbf{l} . Przez J oznaczono tu Jakobian $J = \det x^k, {}_K$, $dv = J dV$, gdzie element objętości dv odnosi się do konfiguracji odkształconej wskutek przyrostu długości

szczeliny a dV do konfiguracji początkowej.



Dla wariacji gradientów odkształcenia zachodzą relacje

$$\delta(x^k_{;K}) = (\delta x^k)_{;K} \quad , \quad \delta(X^K_{;k}) = -X^K_{;l} X^L_{;k} (\delta x^l)_{;L}, \quad (4.7)$$

skąd wynika wzór na wariację jacobianu J

$$\delta J = \delta[\det x^k_{;K}] = (\delta x^k)_{;M} X^M_{;k} J. \quad (4.8)$$

Uwzględniając relacje dla pochodnych wariacji zmiennych przestrzennych i potencjału

$$(\delta x^k)_{;i} = (\delta x^k)_{;K} X^K_{;i} \quad , \quad (\delta \tilde{\varphi})_{;i} = (\delta \tilde{\varphi})_{;M} X^M_{;i}, \quad (4.9)$$

związek zachodzący na odkształcalnym brzegu dielektryka

$$\delta \varphi = \delta \tilde{\varphi} + \varphi_{;k} \delta x^k \quad \text{na } S_d \quad (4.10)$$

oraz prawo zachowania masy $\rho dv = \rho_0 dV$, gdzie ρ_0 oznacza gęstość masy nieodkształconego dielektryka, otrzymuje się pełną wariację energii w następującej postaci

$$\begin{aligned} \delta \Sigma_d = & \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{V_d - V_\xi} \left\{ \left(\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial x^k_{;K}} x^l_{;K} + \rho \frac{\partial \eta}{\partial x^k_{;K}} x^l_{;K} \right) (\delta x^k)_{;l} \right. \\ & + \rho \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\varphi}_{;M}} (\delta \tilde{\varphi})_{;M} - \epsilon^{ik} \varphi_{;i} (\delta \tilde{\varphi})_{;M} X^M_{;k} \\ & + \left. \left(\epsilon^{ik} \varphi_{;k} \varphi_{;l} - \frac{1}{2} \epsilon^{nm} \varphi_{;n} \varphi_{;m} \delta^i_l \right) (\delta x^l)_{;i} \right\} dv \\ & - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{S_c} \left[\rho (\epsilon + \eta) - \frac{1}{2} \epsilon^{ik} \varphi_{;i} \varphi_{;k} \right] \delta l_i n^l ds. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Biorąc po uwagę związki konstytutywne (1.13), (1.14), (1.17)

$$\sigma_k^l = \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial x^k_{;K}} x^l_{;K}, \quad s t_k^l = \rho \frac{\partial \eta}{\partial x^k_{;K}} x^l_{;K}, \quad s D^l = \rho \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{\varphi}_{;K}} x^l_{;K} \quad (4.12)$$

oraz definicję naprężenia Maxwella (1.15)

$$Mt_k^l = \varepsilon^{lm} \varphi_{,m} \varphi_{,k} - \frac{1}{2} \varepsilon^{mn} \varphi_{,m} \varphi_{,n} \delta_k^l, \quad (4.13)$$

można zapisać wariację energii (4.11) w postaci

$$\begin{aligned} \delta \Sigma_d = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{V_d - V_\xi} & \left\{ [(\sigma_k^l + s t_k^l + M t_k^l) \delta x^k + ({}_s D^l - \varepsilon^{lk} \varphi_{,k}) \delta \tilde{\varphi}]_{,l} \right. \\ & - (\sigma_k^l + s t_k^l + M t_k^l)_{,l} \delta x^k - ({}_s D^l - \varepsilon^{lk} \varphi_{,k})_{,l} \delta \tilde{\varphi} \left. \right\} dv \\ & + \int_{S_\xi} \left[\rho(\epsilon + \eta) - \frac{1}{2} \varepsilon^{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k} \right] \delta l_i n^l ds. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Po zastosowaniu wzoru Greena i uwzględnieniu równań pola elektrostatycznego (1.11) oraz równań równowagi (1.10) wzór (4.14) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \delta \Sigma_d = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{S_d + S_c + S_\xi} & [(\sigma_k^l + s t_k^l + M t_k^l) \delta x^k + ({}_s D^l - \varepsilon^{lk} \varphi_{,k}) \delta \tilde{\varphi}] n_l ds \\ & - \int_{S_\xi} \left[\rho(\epsilon + \eta) - \frac{1}{2} \varepsilon^{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k} \right] \delta l_i n^l ds. \end{aligned}$$

Stąd przy uwzględnieniu warunków brzegowych na powierzchni szczeliny (2.5), (2.4) otrzymuje się uogólnione kryterium Griffitha w postaci

$$\begin{aligned} \delta \gamma = - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{S_\xi} & \left\{ [(\sigma_k^l + s t_k^l + M t_k^l) \delta x^k + ({}_s D^l - \varepsilon^{lk} \varphi_{,k}) \delta \tilde{\varphi}] n_l \right. \\ & \left. - \left[\rho(\epsilon + \eta) - \frac{1}{2} \varepsilon^{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k} \right] \delta l_i n^l \right\} ds. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Jednostkowy wektor normalny \mathbf{n} jest skierowany *do wewnątrz* powierzchni S_ξ .

Uwzględniając definicję wariacji oraz energii powierzchniowej właściwej Griffitha \mathcal{G} zużywaną na utworzenie jednostki nowej powierzchni szczeliny

$$2\mathcal{G} = \frac{\partial \gamma}{\partial l}, \quad l = \sqrt{l^k l_k}, \quad (4.16)$$

możemy ten wzór zapisać następująco

$$\begin{aligned} 2\mathcal{G} \sqrt{\delta l^k \delta l_k} = - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{S_\xi} & \left\{ (\sigma_k^l + s t_k^l + M t_k^l) \frac{\partial x^k}{\partial l^i} + ({}_s D^l - \varepsilon^{lk} \varphi_{,k}) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial l^i} \right. \\ & \left. - \left[\rho(\epsilon + \eta) - \frac{1}{2} \varepsilon^{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k} \right] \delta_i^l \right\} n_l \delta l^i ds, \end{aligned}$$

δ_i^l jest tu deltą Kroneckera.

Gdy kierunek propagacji jest stały $\delta l_k = i_k \delta l$, gdzie \mathbf{i} jest jednostkowym normalnym stycznym do kierunku propagacji szczeliny, wzór powyższy przyjmuje postać

$$G = -\frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{S_\xi} \left\{ \left[(\sigma_k^l + s t_k^l + M t_k^l) \frac{\partial x^k}{i^n \partial l} + ({}_s D^l - \varepsilon^{lk} \varphi_{,k}) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{i^n \partial l} \right] i^n n_l - \left[\rho(\epsilon + \eta) - \frac{1}{2} \varepsilon^{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k} \right] \cos \alpha \right\} ds. \quad (4.17)$$

Tutaj \mathbf{n} jest jednostkowym wektorem normalnym, zewnętrznym do powierzchni S_ξ , a α jest kątem zawartym między kierunkiem propagacji szczeliny a wektorem \mathbf{n} , $\cos \alpha = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}$. Gdy powierzchnia S_ξ otacza objętość dielektryka nie zawierającą szczeliny, całka reprezentująca energię pęknięcia w kryterium Griffitha (4.15) – (4.17) jest równa zeru. Wynika to stąd, że kryterium Griffitha otrzymalne zostało z bilansu energii dla obszaru zawierającego szczelinę, a w obszarze nie zawierającym defektu spełnione jest prawo zachowania energii w którym $\delta \gamma$ jest równe zeru.

4.2 Niezmiennicza całka Γ pierwszego rodzaju

Z kryterium Griffitha związana jest tak zwana całka Γ pierwszego rodzaju [7], którą zdefiniujemy następująco

$$\Gamma_K = \int_S \left\{ \left[\sigma_k^l + s t_k^l + M t_k^l + ({}_s D^l - \varepsilon^{lk} \varphi_{,i}) \varphi_{,k} \right] x_{,K}^k n_l - \left[\rho(\epsilon + \eta) - \frac{1}{2} \varepsilon^{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k} \right] x_{,K}^j n_j \right\} ds, \quad (4.18)$$

S oznacza tu dowolną powierzchnię otaczającą naroże szczeliny. Łatwo wykazać, biorąc pod uwagę związki konstytutywne (4.12), definicję tensora naprężeń Maxwella (4.13) i zależność wynikającą z prawa zachowania masy $\rho = J^{-1} \rho_0$, że całka ta jest niezależna od drogi całkowania, gdyż dywergencja wyrażenia podcałkowego obliczona po dowolnym obszarze dielektryka nie zawierającym defektów znika. Całka ta zatem dla dowolnej powierzchni otaczającej naroże szczeliny jest związana z energią pęknięcia Griffitha dla stosowanej tu wersji modelu Toupin, w przypadku pełnej teorii nieliniowej. Postać całki Γ dla niezmodyfikowanej wersji modelu Toupin podali w pracy [47] Hermann i Pak.

Dla małych odkształceń można przyjąć [64]

$$x_{,K}^i \simeq \delta_{,K}^i + \delta_{,K}^n u_{,n}^i.$$

Stąd całka Γ , niezależna od drogi całkowania dla małych odkształceń ma postać

$$\Gamma_n = \int_S \left\{ \left[\sigma_k^i + s t_k^i + M t_k^i + (s D^i - \varepsilon^{ik} \varphi_{,i}) \varphi_k \right] u_{;n}^k n_i - \left[\rho (\zeta + \eta) - \frac{1}{2} \varepsilon^{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k} \right] u_{;n}^j n_j \right\} ds. \quad (4.19)$$

4.3 Współczynniki intensywności natężenia elektrostatycznego, uogólnione współczynniki intensywności naprężeń

Znane z mechaniki pękania definicje współczynników intensywności naprężeń uogólnione zostaną teraz za przypadek pól elektrosprężystych.

Wprowadźmy układ współrzędnych cylindrycznych r, α, z o początku położonym w narożu szczeliny, związany z układem współrzędnych kartezjańskich x, y, z o początku w narożu szczeliny relacjami

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad z = z.$$

Przyjmijmy, że równanie powierzchni segmentu szczeliny zawartego w otoczeniu jej naroża jest

$$S_c : r < r_0, \quad \alpha = \left\{ \frac{0}{2\pi} \right\}.$$

Wprowadzamy następującą definicję współczynnika intensywności pola elektrostatycznego w dielektryku I

$$I \equiv -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{r \rightarrow 0} r^{-\frac{1}{2}} \varphi(r, \pi, z). \quad (4.20)$$

Dla *szczeliny próżniowej* w przypadku płaskim, gdy potencjał elektrostatyczny nie zależy od z , z rozwiązania dla przybliżenia quasiliniowego (3.38) – (3.40) otrzymujemy $I = 0$. Pole elektrostatyczne jest w tym przypadku regularne w otoczeniu naroża szczeliny.

Dla *szczeliny przewodzącej* z rozwiązania lokalnego dla zagadnienia płaskiego (3.49) wynika

$$I = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathcal{A}_1. \quad (4.21)$$

Pole elektrostatyczne w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej można wyrazić w zależności od współczynnika intensywności I

$$E_r = r^{-\frac{1}{2}} \frac{I}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \quad E_\alpha = r^{-\frac{1}{2}} \frac{I}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^0). \quad (4.22)$$

Współczynnik intensywności pola elektrostatycznego jest tu dowolnym współczynnikiem liczbowym, który można wyznaczyć z warunków zszycia pól w otoczeniu naroża

szczeliny i pola w obszarze zewnętrznym. Zależy on zatem od zewnętrznego pola elektrostatycznego oraz geometrii dielektryka i szczeliny.

Definicje współczynników intensywności naprężeń mechanicznych przyjmujemy zgodnie z klasycznymi, stosowanymi w mechanice pęknięcia

$$K_I^M = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{\alpha\alpha}(r, \pi, z), \quad K_{II}^M = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{r\alpha}(r, \pi, z), \quad K_{III}^M = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{z\alpha}(r, \pi, z). \quad (4.23)$$

Ponadto wprowadzimy definicje współczynników intensywności naprężeń elektrycznych

$$\begin{aligned} K_I^E &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} [{}_s t_{\alpha\alpha}(r, \pi, z) + {}_M t_{\alpha\alpha}(r, \pi, z)], \\ K_{II}^E &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} [{}_s t_{r\alpha}(r, \pi, z) + {}_M t_{r\alpha}(r, \pi, z)], \\ K_{III}^E &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} [{}_s t_{z\alpha}(r, \pi, z) + {}_M t_{z\alpha}(r, \pi, z)]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

W płaskim przypadku, dla pól niezależnych od zmiennej z , $K_{III}^M = 0$, $K_{III}^E = 0$.

Z rozwiązania dla przybliżenia quasilineowego otrzymuje się następujące rezultaty.

Dla szczeliny próżniowej z definicji (4.23) oraz funkcji opisujących rozkład naprężeń w otoczeniu naroża szczeliny (3.112) — (3.114) wynika, że współczynniki intensywności naprężeń mechanicznych są zależne od dowolnych współczynników liczbowych C_1 , D_1 występujących w rozwiązaniu lokalnym zagadnienia brzegowego dla równań Lamégo (3.106), $K_I^M = 2\mu\sqrt{2\pi}C_1$, $K_{II}^M = 2\mu\sqrt{2\pi}D_1$. Współczynniki intensywności naprężeń mechanicznych są zatem w tym przypadku dowolnymi współczynnikami liczbowymi, które można wyznaczyć z warunków ciągłości przemieszczeń na wspólnej granicy otoczenia naroża szczeliny i pozostałego obszaru dielektryka. Naprężenia elektrostatyczne są regularne zatem $K_I^E = 0$, $K_{II}^E = 0$.

Dla szczeliny przewodzącej otrzymamy (3.117)–(3.118)

$$\begin{aligned} K_I^M &= 2\mu\sqrt{2\pi}C_1, \\ K_{II}^M &= \mu\sqrt{2\pi} \left\{ 2D_1 + \frac{A_1 A_2}{2\mu} \left[2(a_5 + \varepsilon) + (2a_2 + a_5) \left(2 - \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 5\mu} - \frac{3\lambda + 5\mu}{3\lambda + 7\mu} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Widać, że współczynnik intensywności naprężeń mechanicznych K_{II}^M zależy od stałej dowolnej D_1 i parametrów pola elektrostatycznego. Nie jest on tu zatem dowolnym współczynnikiem liczbowym. Przedstawimy go w postaci sumy

$$K_{II}^M = K_{II}^{MC} + K_{II}^{ME}, \quad (4.26)$$

gdzie K_{II}^{MC} jest dowolnym współczynnikiem liczbowym, który odpowiada klasycznemu mechanicznemu współczynnikowi intensywności naprężeń. Można go wyznaczyć z warunków ciągłości przemieszczeń na wspólnej granicy otoczenia naroża szczeliny i pozostałego obszaru dielektryka. K_{II}^{ME} jest elektryczną częścią współczynnika intensywności naprężeń mechanicznych i jest on znany i ściśle określony, jeżeli pole elektrostatyczne w całym obszarze dielektryka ze szczeliną zostało wyznaczone, czyli wyznaczone

zostały dowolne współczynniki $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ związane z lokalnym charakterem rozwiązania dla pola elektrostatycznego występujące w poniższym wzorze

$$K_{II}^{ME} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \left[2(a_5 + \varepsilon) + (2a_2 + a_5) \left(2 - \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 5\mu} - \frac{3\lambda + 5\mu}{3\lambda + 7\mu} \right) \right]. \quad (4.27)$$

Współczynniki intensywności naprężeń elektrostatycznych na podstawie definicji (4.24) i rezultatów (3.119) – (3.120), są dane za pomocą wzorów

$$K_I^E = 0, \quad K_{II}^E = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 (a_5 + \varepsilon). \quad (4.28)$$

Podobnie jak w przypadku współczynnika K_{II}^{ME} , współczynnik K_{II}^E jest dany, jeżeli pole w obszarze całego dielektryka jest znane.

Zastępując stałe dowolne i wielkości elektryczne występujące w rozwiązaniach lokalnych problemu brzegowego dla równań Lamégo dla szczeliny próżniowej i szczeliny przewodzącej przez zdefiniowane tutaj uogólnione współczynniki intensywności naprężeń, można przedstawić przemieszczenia i naprężenia w otoczeniu naroża szczeliny w zależności od tych współczynników. Zostanie to wykorzystane przy sformułowaniu uogólnionego kryterium Irvina.

4.4 Uogólnione kryterium Irvina

Oznaczmy teraz współrzędne kartezjańskie układu o początku w narożu szczeliny, przed przyrostem jej długości, przez x_1, x_2, x_3 . Powierzchnia szczeliny dana jest za pomocą relacji $S_\varepsilon : x_1 < 0, x_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} (0 \pm \delta), |z| < \infty$. Załóżmy, że szczelina doznaje przyrostu długości w dodatnim kierunku osi x_1 o dx_1 . W kryterium Griffitha (4.17) można teraz przyjęc parametr \mathbf{l} w postaci $l_1 = x_1, l_2 = l_3 = 0$. Biorąc pod uwagę, że $\partial_1 x_k = \partial_1 u_k$, gdzie \mathbf{u} jest wektorem przemieszczenia a $\cos\alpha$ można zastąpić przez składową n_1 jednostkowego wektora normalnego zewnętrznego do powierzchni S_ε , kryterium (4.17) można zapisać w postaci

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left\{ [(\sigma_{kl} + s t_{kl} + M t_{kl}) u_{k,1} + ({}_s D_l - \varepsilon_{kl} \varphi_{,k}) \varphi_{,1}] n_l - \left[\rho(\varepsilon + \eta) - \frac{1}{2} \varepsilon^{ik} \varphi_{,i} \varphi_{,k} \right] n_1 \right\} ds, \quad f_{,i} = \frac{df}{dx_i}, \quad f_{,1'} = \frac{df}{dx_{1'}}. \quad (4.29)$$

Powierzchnia S_ε jest dowolną powierzchnią otaczającą naroże szczeliny, łatwo bowiem wykazać na podstawie równań sprężystego dielektryka, że dywergencja wyrażenia podcałkowego, w obszarze nie zawierającym defektu znika. Wartość całki (4.29) nie zależy zatem od drogi całkowania.

Wprowadźmy teraz układ współrzędnych kartezjańskich x'_1, x'_2, x'_3 o początku w narożu szczeliny taki, że w chwili gdy szczelina nie doznała przyrostu długości pokrywa się on z

układem x_1, x_2, x_3 a w chwili gdy szczelina doznała przyrostu długości o Δl w kierunku osi x_1 , jest związany z układem x_1, x_2, x_3 relacjami

$$x'_1 = x_1 - \Delta l, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3.$$

Wybermy jako powierzchnię S_ξ powierzchnię prostopadłościanu $S_\xi : -a \leq x'_1 \leq a, -\xi \leq x'_2 \leq \xi, |x'_3| < \infty$. Gdy $\xi \rightarrow 0$ powierzchnia prostopadłościanu dąży do dwustronnego odcinka $-a \leq x'_1 \leq a, x'_2 = \pm 0, |x'_3| < \infty$. Ponieważ na pionowych powierzchniach bocznych prostopadłościanu $x'_1 = \pm a, -\xi \leq x'_2 \leq \xi, |x'_3| < \infty$ funkcje podcałkowe nie mają osobliwości, wkład do energii \mathcal{G} dadzą tylko wartości funkcji podcałkowych na powierzchniach poziomych. Pochodne funkcji podcałkowych względem x_1 rozumiemy jako granicę przyrostu funkcji w tym samym punkcie wywołanego wzrostem długości szczeliny gdy $\Delta l \rightarrow 0$. Kryterium (4.29) możemy więc zapisać w postaci

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{S_\xi} \left\{ \left[\sigma_{k2}(x'_1, x'_2) + st_{k2}(x'_1, x'_2) + Mt_{k2}(x'_1, x'_2) \right] \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u_k(\Delta l - x'_1, x'_2) - u_k(x'_1, x'_2)}{\Delta l} + D_2(x'_1, x'_2) \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta l - x'_1, x'_2) - \varphi(x'_1, x'_2)}{\Delta l} \right\} \Bigg|_{x'_2 = -\xi}^{x'_2 = \xi} dx'_1, \quad (4.30)$$

gdzie $D_2 = {}_sD_2 - \varepsilon_{2k} \varphi_{,k}$. Przez $f(x'_1, x'_2)$ należy tu rozumieć wartość funkcji f w punkcie x'_1, x'_2 w układzie primowanym przed przyrostem długości szczeliny, a więc w chwili gdy $x'_1 = x_1$. Funkcja $f(\Delta l - x'_1, x'_2)$ oznacza tu wartość funkcji w tym samym punkcie mierzoną w momencie gdy szczelina doznała przyrostu długości i $x'_1 = x_1 - \Delta l$.

Po dokonaniu przejścia granicznego $\xi \rightarrow 0$, kryterium (4.30) przyjmie następującą formę

$$\mathcal{G} = -\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \int_{-a}^a \left\{ [\sigma_{k2}(x'_1, 0) + st_{k2}(x'_1, 0) + Mt_{k2}(x'_1, 0)] [u_k(\Delta l - x'_1, 0) - u_k(x'_1, 0)] + D_2(x'_1, 0) [\varphi(\Delta l - x'_1, 0) - \varphi(x'_1, 0)] \right\} dx'_1. \quad (4.31)$$

Ta postać kryterium Griffitha prowadzi do uogólnionego kryterium Irvina.

Dla szczeliny przed przyrostem jej długości o Δl zachodzi

$$\begin{aligned} \sigma_{k2}(x'_1, 0) + st_{k2}(x'_1, 0) + Mt_{k2}(x'_1, 0) \Big|_{x'_1 = x_1 < 0} &= 0, \\ u_k(x'_1, 0) \Big|_{x'_1 = x_1 > 0} &= 0. \end{aligned}$$

Gdy długość szczeliny wzrasta o Δl mamy

$$\begin{aligned} \sigma_{k2}(x'_1, 0) + st_{k2}(x'_1, 0) + Mt_{k2}(x'_1, 0) \Big|_{x'_1 = x_1 - \Delta l < 0} &= 0, \\ u_k(x'_1, 0) \Big|_{x'_1 = x_1 - \Delta l > 0} &= 0. \end{aligned}$$

Stąd naprężenia i przemieszczenia są jednocześnie różne od zera w tych samych punktach osi x'_1 tylko w przedziale $-\Delta l \leq x'_1 \leq 0$. Są to naprężenia dla stanu przed przyrostem długości szczeliny w punktach $x'_1 = x_1$ i odpowiadające im przemieszczenia dla stanu po przyroście długości szczeliny $u_k(\Delta l - x_1, 0)$.

Dla przybliżenia *quasiliniowego* otrzymujemy następujące wyniki. W przypadku szczeliny próżniowej pole elektrostatyczne nie zawiera w narożu szczeliny osobliwości a naprężenia elektrostatyczne są regularne i wyrazy zawierające w sposób jawny naprężenia elektrostatyczne oraz indukcję i potencjał elektrostatyczny nie dają wkładu w energię \mathcal{G} . Stąd dla szczeliny próżniowej energia powierzchniowa \mathcal{G} będzie dana wzorem analogicznym do klasycznego, znanego z mechanicznej teorii pękania

$$\mathcal{G} = - \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \int_0^{\Delta l} \sigma_{2k}(x_1, 0) u_k(\Delta l - x_1, 0) dx_1. \quad (4.32)$$

W przypadku szczeliny przewodzącej pole elektrostatyczne oraz generowane przez nie fizyczne naprężenia elektrostatyczne (3.92) mają w narożu szczeliny osobliwość rzędu $r^{-\frac{1}{2}}$. Dla pola elektrostatycznego przed przyrostem długości szczeliny mamy

$$\begin{aligned} D_2(x'_1, 0)|_{x'_1=x_1>0} &= 0, \\ \varphi(x'_1, 0)|_{x'_1=x_1<0} &= 0. \end{aligned}$$

Po przyroście długości szczeliny zachodzi

$$\begin{aligned} D_2(x'_1, 0)|_{x'_1=x_1-\Delta l>0} &= 0, \\ \varphi(x'_1, 0)|_{x'_1=x_1-\Delta l<0} &= 0. \end{aligned}$$

Stąd dla szczeliny przewodzącej kryterium (4.31) ma postać

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = & - \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \int_0^{\Delta l} \left\{ [\sigma_{k2}(x_1, 0) + s_{tk2}(x_1, 0) + Mt_{k2}(x_1, 0)] u_k(\Delta l - x_1, 0) \right. \\ & \left. - D_2(\Delta l - x_1, 0) \varphi(x_1, 0) \right\} dx_1. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Podstawiając rozwiązanie lokalne otrzymane w poprzednim rozdziale do powyższych wzorów można wyrazić energię \mathcal{G} w zależności od uogólnionych współczynników intensywności. Wzory te będą słuszne dla przybliżenia quasiliniowego. Należy przy tym uwzględnić, że przy przyjętym tu układzie współrzędnych między funkcjami stojącymi pod całką a rozwiązaniem lokalnym, otrzymanym w rozdziale 3, zachodzą relacje

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(x_1, 0) &= \sigma_{r\alpha}(r, \pi - \xi)_{r=x_1, \xi=0}, & \sigma_{22}(x_1, 0) &= \sigma_{\alpha\alpha}(r, \pi - \xi)_{r=x_1, \xi=0}, \\ u_1(\Delta l - x_1, 0) &= -u_r(r, \pi - \xi)_{r=\Delta l - x_1, \xi=\pi}, & u_2(\Delta l - x_1, 0) &= -u_\alpha(r, \pi - \xi)_{r=\Delta l - x_1, \xi=\pi}, \\ D_2(\Delta l - x_1, 0) &= -D_\alpha(r, \pi - \xi)_{r=\Delta l - x_1, \xi=\pi}, & \varphi(x_1, 0) &= \varphi(r, \pi - \xi)_{r=x_1, \xi=0}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.4.1 Szczelina próżniowa

Dla szczeliny próżniowej, w płaskim przypadku na podstawie wyników (3.106), (3.112) definicji (4.23) przy uwzględnieniu relacji (4.34) otrzymujemy dla części osobliwej naprężeń i odpowiadającej im części przemieszczeń zależności

$$\sigma_{12}^{(s)}(x_1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_1}} K_{II}^M, \quad \sigma_{22}^{(s)}(x_1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_1}} K_I^M, \quad x_1 > 0,$$

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(s)}(\Delta l - x_1, 0) &= -\sqrt{\frac{\Delta l - x_1}{2\pi}} \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\mu(\lambda + \mu)} K_{II}^M, \\ u_2^{(s)}(\Delta l - x_1, 0) &= -\sqrt{\frac{\Delta l - x_1}{2\pi}} \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\mu(\lambda + \mu)} K_I^M, \end{aligned} \right\} 0 < x_1 < \Delta l.$$

Stąd, ponieważ $\int_0^{\Delta l} \sqrt{\frac{\Delta l - t}{t}} dt = \int_0^{\Delta l} \sqrt{\frac{t}{\Delta l - t}} dt = \frac{1}{2} \Delta l \pi$, otrzymujemy kryterium (4.32) w analogicznej postaci jak klasyczne kryterium Irwina dla płaskiego stanu odkształcenia i naprężenia

$$\mathcal{G} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} \left[(K_I^M)^2 + (K_{II}^M)^2 \right] \quad (4.35)$$

4.4.2 Szczelina przewodząca

W przypadku szczeliny przewodzącej, dla przypadku płaskiego na mocy rezultatów (3.116) – (3.120), definicji współczynników intensywności naprężeń (4.23) – (4.24) przy uwzględnieniu (4.34), część osobliwą naprężeń można przedstawić w postaci

$$\sigma_{12}^{(s)}(x_1, 0) + s_{12}^{(s)}(x_1, 0) + M t_{12}^{(s)}(x_1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_1}} (K_{II}^M + K_{II}^E), \quad x_1 > 0, \quad (4.36)$$

$$\sigma_{22}^{(s)}(x_1, 0) + s_{22}^{(s)}(x_1, 0) + M t_{22}^{(s)}(x_1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_1}} K_I^M, \quad x_1 > 0.$$

Odpowiadające im części przemieszczeń otrzymujemy na podstawie wzorów (3.107), (3.108). Biorąc pod uwagę zależności między stałymi dowolnymi w tym rozwiązaniu oraz współczynnikami intensywności naprężeń (4.25) – (4.28) otrzymujemy, przy uwzględnieniu relacji (4.34), zależności

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\Delta l - x_1}{2\pi}} \left\{ \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} K_{II}^{MC} \right. \\ &\quad \left. + \frac{5\lambda + 13\mu}{4(\lambda + 3\mu)} K_{II}^{ME} + \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 3\mu)} K_{II}^E \right\}, \\ u_2 &= -\frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\Delta l - x_1}{2\pi}} \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} K_I^{MC}, \end{aligned} \right\} 0 < x_1 < \Delta l. \quad (4.37)$$

Dla składowej indukcji elektrycznej D_2 i potencjału φ na podstawie rozwiązania lokalnego (punkt 3.6.1 str. 65), definicji współczynnika intensywności pola elektrostatycznego (4.20) i relacji (4.34) otrzymuje się

$$D_2^{(s)}(\Delta l - x_1, 0) = -\frac{1}{\sqrt{(\Delta l - x_1)\pi}} \varepsilon I, \quad 0 < x_1 < \Delta l, \quad (4.38)$$

$$\varphi^{(s)}(x_1, 0) = \sqrt{x_1} \frac{(-2I)}{\sqrt{\pi}}, \quad x_1 > 0.$$

Po podstawieniu powyższych wartości funkcji do kryterium (4.33), wykonaniu całkowania i przejścia granicznego $\Delta l \rightarrow 0$ otrzymuje się uogólnione kryterium Irvina dla szczeliny przewodzącej w dielektryku znajdującym się pod wpływem pola elektrostatycznego dla przypadku płaskiego

$$\mathcal{G} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} \left[(K_{II}^{MC})^2 + (K_{II}^{MC})^2 \right] + \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} + \frac{5\lambda + 13\mu}{8(\lambda + 3\mu)} \right] K_{II}^{MC} K_{II}^{ME} + \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda + \mu}{4(\lambda + 3\mu)} \right] K_{II}^{MC} K_{II}^E + \frac{5\lambda + 13\mu}{16\mu(\lambda + 3\mu)} (K_{II}^{ME})^2 + \frac{5\lambda + 15\mu}{16\mu(\lambda + 3\mu)} K_{II}^{ME} K_{II}^E + \frac{\lambda + \mu}{8(\lambda + 3\mu)} (K_{II}^E)^2 + \varepsilon I^2. \quad (4.39)$$

Kryterium to, gdy nie ma oddziaływania z polem elektrostatycznym przechodzi w zwykłe kryterium Irvina dla przypadku płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia.

4.5 Wpływ pola elektrostatycznego na propagację szczeliny

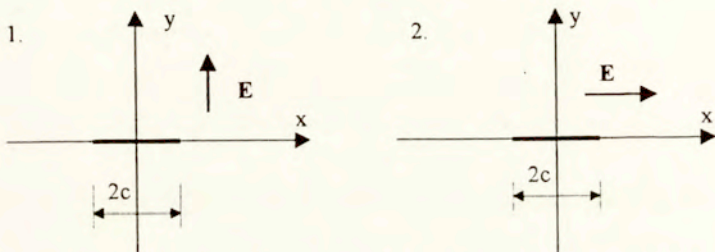
Wpływ pola elektrostatycznego na propagację szczeliny można ocenić korzystając z kryteriów sformułowanych w tym rozdziale. Równość między energią powierzchniową stojącą po lewej stronie kryteriów i prawą stroną tych zależności oznacza, że szczelina jest w stanie równowagi. Jeśli prawe strony są większe od energii powierzchniowej, następuje propagacja szczeliny do momentu, gdy znów zachodzić będzie równość. Tym samym kryteria pęknięcia pozwalają wyznaczyć krytyczną długość szczeliny dla danego obciążenia lub przy ustalonej długości szczeliny krytyczną wartość obciążenia powyżej której nastąpi propagacja szczeliny.

Najwygodniejsze w zastosowaniach jest uogólnione kryterium Irvina w postaci (4.35) dla szczeliny próżniowej lub (4.39) w przypadku szczeliny przewodzącej. Aby z nich korzystać konieczna jest znajomość zależności współczynników intensywności naprężeń i współczynnika intensywności pola elektrostatycznego od zewnętrznego, zadanego pola. Współczynniki te mogą zostać wyznaczone doświadczalnie lub w sposób analityczny. W drugiej części pracy, w Rozdziale 9, pokazana zostanie metoda, która pozwala na wyznaczenie współczynników intensywności z nieskończonego układu równań algebraicznych. Metoda ta nadaje się dla zastosowań numerycznych.

W niektórych, prostszych przypadkach wygodniej jest określić krytyczną długość szczeliny lub krytyczną wartość pola elektrostatycznego wychodząc bezpośrednio z ogólnego sformułowania kryterium Griffitha na podstawie rozwiązania konkretnego problemu brzegowego. Taki przykład został rozwiązany przez autorkę w pracy [27] dla płaskiego przypadku szczeliny Griffitha w rozciągłym jednorodnym i izotropowym dielektryku sprężystym, poddanym działaniu jednorodnego pola elektrostatycznego. Przyjęto, że szczelina zachowuje się pod względem własności elektrycznych jak próżnia. Rozpatrzono dwa przypadki

- pole jest skierowane prostopadle do powierzchni szczeliny
- pole jest równoległe do powierzchni szczeliny.

Dla konstrukcji rozwiązania zastosowano quasilineowe przybliżenia oryginalnego modelu Toupina [64]. Problem sformulowano w układzie współrzędnych kartezjańskich x, y . Obszar dielektryka V_d rozciąga się dla $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Powierzchnia szczeliny o długości $2c$ określona jest relacjami $S_c : |x| \leq c, y = \pm 0$.



Rozwiązanie dla potencjału elektrostatycznego otrzymano jako przejście graniczne dla rozciągniętego dielektryka zawierającego elipsę próżniową, która przechodzi w szczelinę Griffitha gdy mała półoś dąży do zera, skonstruowanej we wcześniejszej pracy autorki [26].

Podamy teraz rozwiązanie tego problemu dla zmodyfikowanego modelu Toupina, omówionego w rozdziale 2 niniejszej pracy.

Zakładamy, że dany jest potencjał pola elektrostatycznego w próżni $\varphi^v(x, y)$. W polu tym umieszczamy dielektryk ze skończoną szczeliną.

Rozpatrujemy dwa przypadki:

1. Potencjał pola zewnętrznego jest postaci $\varphi^v = -Ey$, pole jest prostopadle do powierzchni szczeliny. Otrzymuje się następujące wyniki:

Pole w dielektryku

$$E_x^d = 0, E_y^d = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E.$$

Pole w szczelinie

$$E_x^c = 0, E_y^c = E,$$

gdzie ε jest przenikalnością dielektryczną ośrodka, ε_0 współczynnik przenikalności próżni.

Widać, że w tym przypadku szczelina nie zmienia pola elektrostatycznego w obszarze dielektryka, które pozostaje takie samo jak w rozciągniętym dielektryku bez szczeliny. Wynika to z warunku ciągłości składowej normalnej indukcji na granicy dielektryka i próżni.

2. Potencjał elektrostatyczny pola zewnętrznego jest postaci $\varphi = -Ex$. Pole zewnętrzne jest równoległe do powierzchni szczeliny. Otrzymano wyniki:

Pole w dielektryku

$$E_x^d = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E, \quad E_y^d = 0.$$

Pole w szczelinie

$$E_x^c = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E, \quad E_y^c = 0.$$

Widać, że w tym przypadku pole w szczelinie pozostaje takie samo jak w dielektryku – pole "nie widzi" szczeliny. Wynika to z warunku ciągłości składowej stycznej pola elektrostatycznego na granicy dielektryka i próżni.

Na podstawie tych wyników wyznacza się siły generowane przez pole elektrostatyczne w dielektryku i na powierzchni szczeliny. Zgodnie z przedstawionym w rozdziale 2 przybliżeniem quasiliniowym modelu Toupina składowe naprężeń elektrostatycznych są dane za pomocą wzorów:

Naprężenia sprzężenia

$$\begin{aligned} s t_{xx} &= (a_2 + a_5) E_x^2 + a_2 E_y^2, \\ s t_{yy} &= (a_2 + a_5) E_y^2 + a_2 E_x^2, \\ s t_{xy} &= a_5 E_x E_y. \end{aligned}$$

Naprężenia Maxwella w dielektryku

$$\begin{aligned} M t_{xx} &= \frac{\varepsilon}{2} (E_x^2 - E_y^2), \\ M t_{yy} &= \frac{\varepsilon}{2} (E_y^2 - E_x^2), \\ M t_{xy} &= \varepsilon E_x E_y. \end{aligned}$$

Naprężenia Maxwella w próżni

$$\begin{aligned} M t_{xx}^v &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left[(E_x^v)^2 - (E_y^v)^2 \right], \\ M t_{yy}^v &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left[(E_y^v)^2 - (E_x^v)^2 \right], \\ M t_{xy}^v &= \varepsilon_0 E_x^v E_y^v. \end{aligned}$$

Siły objętościowe w rozpatrywanym przypadku są równe zeru, gdyż $\text{div}(s\mathbf{t} + M\mathbf{t}) = 0$.

Równania dla przemieszczeń można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} [2(1-\nu)\partial_{xx}^2 + (1-2\nu)\partial_{yy}^2]u_x + \partial_{xy}^2 u_y &= 0 \\ \partial_{xy}^2 u_x + [2(1-\nu)\partial_{yy}^2 + (1-2\nu)\partial_{xx}^2]u_y &= 0 \end{aligned}$$

Przez ∂_{xy}^2, \dots oznaczono pochodne $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \dots$, ν jest współczynnikiem Poissona.

Na powierzchni szczeliny zadane są naprężeniowe warunki brzegowe

$$\sigma_{xy}(x, \pm 0) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, \pm 0) = -p_0, \quad \text{dla } |x| \leq c$$

gdzie z warunków brzegowych (2.24) oraz na podstawie powyższych wzorów dla naprężeń elektrostatycznych otrzymujemy

$$p_0 = \epsilon_0 \left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon^2} \left(a_2 + a_5 + \frac{\epsilon}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] E^2 \quad \text{dla pola zewnętrznego } \mathbf{E} = (0, E), \quad (1)$$

$$p_0 = \frac{\epsilon_0}{2} \left[a_2 + \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{2} \right] E^2 \quad \text{dla pola zewnętrznego } \mathbf{E} = (E, 0). \quad (2)$$

Naprężenia σ są zdefiniowane za pomocą klasycznych związków liniowej teorii sprężystości. Z symetrii problemu wynika dodatkowy warunek

$$u_y(x, \pm 0) = 0, \quad \text{dla } |x| > c.$$

Ponadto powinny być spełnione warunki w nieskończoności

$$\sigma_{xx}(x, y) \rightarrow 0, \quad \sigma_{xy}(x, y) \rightarrow 0, \quad \sigma_{yy}(x, y) \rightarrow 0, \quad \text{dla } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty.$$

Widać, że przypadek oddziaływania dielektryka z jednorodnym polem elektrostatycznym jest równoważny działaniu na powierzchni szczeliny ciśnienia p_0 . Można tu skorzystać z klasycznych rozwiązań z teorii sprężystości dla przemieszczeń.

Zgodnie z ogólnym sformułowaniem kryterium Griffitha (*str. 76*) można przyjąć, że energia zużyta na utworzenie powierzchni szczeliny jest równa różnicy całkowitej energii wewnętrznej ciała bez szczeliny i ciała ze szczeliną przy tym samym obciążeniu zewnętrznym. Ponieważ w przypadku szczeliny próżniowej energia elektrostatyczna nie wpływa bezpośrednio na proces pęknięcia, różnica ta wynika wyłącznie z energii sprężystej i energii sprężenia i pochodzi z pracy naprężeń Maxwella działających na powierzchnię szczeliny, od strony szczeliny. Stąd

$$\gamma = 4c\mathcal{G} = 4 \int_0^c (-M t_{yy}^v n_y) u_y dx, \quad (4.40)$$

\mathbf{n} jest jednostkowym wektorem normalnym, zewnętrznym do powierzchni szczeliny. Znak minus wynika z faktu, że naprężenia dodatnie, działające w kierunku normalnej zewnętrznej do powierzchni szczeliny ma przeciwny kierunek niż dodatnia składowa przemieszczenia.

Rozpatrzmy teraz oba przypadki.

1. Pole zewnętrzne $\mathbf{E} = (0, E)$

Składowa tensora Maxwella od strony szczeliny jest równa

$$M_{yy}^v = \frac{\epsilon_0}{2} E^2.$$

Jeżeli $\frac{\epsilon_0}{\epsilon^2} (a_2 + a_5 + \frac{\epsilon}{2}) > \frac{1}{2}$ to składowa przemieszczenia $u_y(x, 0)$ dana jest wzorem [61]

$$u_y(x, 0) = \frac{(1-\nu)\epsilon_0}{G} \left[\frac{\epsilon_0}{\epsilon^2} \left(a_2 + a_5 + \frac{\epsilon}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] E^2 \sqrt{c^2 - x^2},$$

gdzie G jest modułem sztywności. Lecz tensor Maxwella M_{yy}^v jest dodatni i skierowany w kierunku normalnej zewnętrznej do powierzchni szczeliny. Zatem w tym wypadku pole elektrostatyczne "zamyka" szczelinę, przeciwdziałając wzrostowi jej długości.

W przypadku gdy $\frac{\epsilon_0}{\epsilon^2} (a_2 + a_5 + \frac{\epsilon}{2}) < \frac{1}{2}$ na powierzchni szczeliny działa równomierne obciążenie również zamykające szczelinę.

2. Pole zewnętrzne $\mathbf{E} = (E, 0)$.

Jeżeli $2a_2 + \epsilon_0 > \epsilon$ to [61]

$$u_y(x, 0) = \frac{(1-\nu)\epsilon_0}{2G} \left[a_2 + \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{2} \right] E^2 \sqrt{c^2 - x^2}.$$

Naprężenie Maxwella działające od strony szczeliny jest

$$M_{yy}^v = -\frac{\epsilon_0^3}{2\epsilon^2} E^2.$$

Jest to naprężenie działające w kierunku przeciwnym do normalnej zewnętrznej do powierzchni szczeliny. Wynika stąd, że pole skierowane równoległe do powierzchni szczeliny dla przyjętej tu relacji między stałymi materiałowymi sprzyja wzrostowi długości szczeliny. Z kryterium Griffitha (4.40) wyznaczyć można krytyczną wartość pola elektrostatycznego dla szczeliny o długości $2c$

$$E_{kr} = \left[\frac{32G\epsilon^2}{\pi c (1-\nu) \epsilon_0^4 (2a_2 - \epsilon + \epsilon_0)} \right]^{\frac{1}{4}}.$$

Z powyższych rezultatów wynika, że gdy pole elektrostatyczne w którym umieszczony jest dielektryk sprężysty ze szczeliną skierowane jest prostopadle do powierzchni szczeliny, to niezależnie od zwrotu wektora pola, wpływa ono hamująco na propagację szczeliny. Jest to zgodne z rezultatami doświadczalnymi [14].

Gdy pole jest skierowane równoległe do powierzchni szczeliny to zależnie od wartości stałych materiałowych może ono przyspieszać lub hamować propagację szczeliny. W szczególności, dla materiałów w których $a_2 \approx 0$, pole będzie działać hamująco na propagację szczeliny.

Część II
Zagadnienia dynamiczne

Elektromagneto-sprężystość dielektryków różni się od elektrosprężystości modelem oddziaływań w których poza natężeniem pola elektrycznego i indukcją elektryczną uwzględnia się indukcję magnetyczną i magnetyzację. Występują tu również różnice jakościowe w opisie pól. Jak widać z pierwszej części poświęconej zagadnieniom statycznym, w przypadku płaskim gdy przyjmowano, że funkcje opisujące stan dielektryka zależą tylko od dwóch zmiennych przestrzennych, pole elektrostatyczne miało tylko dwie składowe i generowało płaski stan odkształcenia i naprężenia. W przypadku pola elektromagnetycznego, pole elektromagnetyczne zmienne w czasie i zależne od dwóch zmiennych przestrzennych ma wszystkie trzy składowe i generuje przestrzenny stan odkształcenia i naprężenia. Dlatego nie można otrzymać pełnej teorii pęknięcia dielektryków pod wpływem pola elektrostatycznego w wyniku bezpośredniego przejścia z teorii pęknięcia dielektryków w polu elektromagnetycznym i muszą być rozwijane obie teorie, chociaż formalnie występuje pewna zbieżność niektórych formuł.

W rozwijanej tu teorii elektromagnetycznego pęknięcia dielektryków oparto się na szczególnym przypadku modelu dielektryka sprężystego Dixona-Eringena [8]. Pełna teoria Dixona-Eringena została rozwinięta dla dielektryków polarnych. Przez pominięcie efektów kwadrupolowych otrzymuje się model dielektryka w którym tensor naprężeń jest symetryczny. Otrzymana w ten sposób teoria jest nieliniowa i obowiązuje dla dużych odkształceń. Przyjmując założenie małych odkształceń, otrzymuje się, podobnie jak w elektrostatyce dielektryków, quasilineowe przybliżenie modelu. Nieliniowość pozostaje tu w opisie sił elektromagnetycznych, które są nieliniowe ze względu na składowe pola elektromagnetycznego. Przybliżenie to opisuje dobrze oddziaływania silnych pól elektromagnetycznych z dielektrykiem sprężystym.

Tak jak w części pierwszej ogólne kryteria pęknięcia sformułowane są tu dla pełnego nieliniowego modelu dielektryka, natomiast rozwiązania problemów brzegowych dla dielektryków ze szczelinami konstruowane będą w oparciu o przybliżenie quasilineowe. Definicje dielektryka ze szczeliną przyjęte tutaj są takie same jak podane w części pierwszej, dlatego nie będą tu rozważane szczegółowo modele dielektryka zawierającego szczelinę próżniową lub przewodzącą. Również stosowana tu metoda konstrukcji rozwiązań lokalnych w otoczeniu naroża szczeliny jest taka sama jak w przypadku statycznym. Dlatego nie będzie ona szczegółowo omawiana a uwaga skoncentrowana będzie na wynikach.

Ta część pracy składa się z pięciu rozdziałów (4-9). W rozdziale 5 podano równania nieliniowego modelu dielektryka Dixona-Eringena oraz równania dla przybliżenia quasilineowego wraz z dodatkowymi warunkami energetycznymi, które muszą być spełnione w dielektrykach zawierających szczeliny. Rozdziały 6 i 7 poświęcone są badaniu rozkładu pól elektromagneto-sprężystych w otoczeniu naroża szczelin próżniowej i przewodzącej dla szczelin nieruchomych oraz propagujących się ze stałą prędkością. W rozdziale 8 sformułowane zostały kryteria pęknięcia i wprowadzono definicje współczynników intensywności pola elektromagnetycznego oraz uogólnione definicje intensywności naprężeń mechanicznych i elektromagnetycznych. W rozdziale 9 naszkicowano metodę analityczną wyznaczania współczynników intensywności naprężeń, która prowadzi do pełnej algebraizacji zagadnienia, dzięki czemu nadaje się do zastosowań numerycznych. Po-

dany zostanie też przykład numeryczny zastosowania tej metody dla wyznaczenia jednego ze współczynników intensywności naprężeń mechanicznych w dielektrycznym walcu kołowym z radialną szczeliną, poddanym działaniu pola elektrostatycznego o dużym natężeniu.

Rozdział 5

Elektromagnetosprężystość dielektryków

5.1 Model dielektryka Dixona–Eringena

W ogólnym modelu dielektryka polarnego autorzy przyjęli, że dielektryk składa się z cząstek, przyczym każda z tych cząstek zawiera mikroskopowy rozkład ładunków oraz ładunków związanych, dipoli i multipoli. Założono, że dielektryk jest idealny i nie zawiera ładunków swobodnych. Gdy dielektryk znajduje się w polu elektromagnetycznym na każdy ładunek działa siła Lorentza. Przez procedurę uśrednienia wyznacza się siłę działającą na podstawową cząstkę dielektryka. Otrzymuje się w ten sposób elektromagnetyczne siły objętościowe i powierzchniowe (naprężenia elektromagnetyczne) generowane przez pole elektromagnetyczne w dielektryku. Siły te występują w równaniach ruchu oraz odpowiadających im warunkach brzegowych. Równania pola elektromagnetycznego oraz odpowiadające im warunki brzegowe przyjmuje się tu zgodnie z ogólnie przyjętą makroskopową teorią elektromagnetyzmu w ciałach materialnych poruszających się.

Z rozważań energetycznych wynikają dodatkowo związki konstytutywne dla wektorów indukcji elektrycznej i magnetycznej oraz naprężeń.

Pomijając w tym modelu efekty kwadrupolowe i wyższych rzędów, tzn. przyjmując, że dielektryk zawiera wyłącznie dipole, otrzymuje się układ równań i warunków brzegowych, które są tu przyjęte jako model dielektryka sprężystego znajdującego się pod wpływem pola elektromagnetycznego oraz obciążenia mechanicznego. Jest to model dielektryka z symetrycznym tensorem naprężeń. Podstawowy układ równań składa się z równań Maxwella oraz równań ruchu wraz z odpowiadającymi im warunkami brzegowymi. Uzupełniają je związki konstytutywne dla wielkości elektromagnetycznych i mechanicznych.

Podamy teraz równania dielektryka dla pól elektromagneto-sprężystych w dielektryku. Przyjmijmy, że dielektryka zajmuje objętość V_d o brzegu $S_d = S_v + S_p$, gdzie przez S_v oznaczono granicę dielektryka i próżni a przez S_p granicę dielektryka i przewod-

nika.

Pole elektromagnetyczne opisywane jest przez równania Maxwella i odpowiadające im warunki brzegowe:

Równania Maxwella

$$\left. \begin{aligned} -\dot{b}^k &= \epsilon^{kij} \epsilon_{j,i}, & d^k_{,k} &= q, \\ \dot{d}^k &= \epsilon^{kij} \eta_{j,i}, & b^k_{,k} &= 0, \end{aligned} \right\} w V_d. \quad (5.1)$$

Gdzie $\dot{b}^k \equiv \dot{b}^k + b^k v^j_{,j} - b^j v^k_{,j}$, $\dot{d}^k = \partial_t b^k + b^k_{,i} v^i$ - pochodna materialna, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ jest prędkością cząstki materialnej. Przez \mathbf{d} , \mathbf{b} oznaczono odpowiednio wektor indukcji elektrycznej i magnetycznej, q - gęstość rozkładu ładunków swobodnych, ϵ - efektywne natężenie pola elektrycznego, η - efektywne natężenie pola magnetycznego. Wprowadza się dodatkowo polaryzację \mathbf{p} , magnetyzację \mathbf{m} , natężenie pola elektrycznego \mathbf{e} i magnetycznego \mathbf{h} w nieruchomym dielektryku. Między tymi funkcjami zachodzą następujące związki

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d} &\equiv \epsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}, & \mathbf{b} &\equiv m_0 (\mathbf{h} + \mathbf{m} - \mathbf{p} \times \mathbf{v}), \\ \boldsymbol{\epsilon} &\equiv \mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b}, & \boldsymbol{\eta} &\equiv \mathbf{h} - \mathbf{v} \times \mathbf{d}, \end{aligned} \right\} (5.2)$$

gdzie ϵ_0 , m_0 odpowiednio przenikalność elektryczna i magnetyczna próżni.

Warunki brzegowe

$$\left. \begin{aligned} (\epsilon^{ijk} \|e_j\| + \|b^i\| \dot{u}^k) n_k &= 0, & \left\| \begin{aligned} d^k \\ b^k \end{aligned} \right\| n_k &= 0, \\ (\epsilon^{ijk} \|h_j\| - \|d^i\| \dot{u}^k) n_k &= 0, & \left\| \begin{aligned} n_k \\ n_k \end{aligned} \right\| &= 0, \end{aligned} \right\} \text{na } S_v, \quad (5.3)$$

$$\left. \begin{aligned} (\epsilon^{ijk} e_j + b^i \dot{u}^k) n_k &= 0, \end{aligned} \right\} \text{na } S_p.$$

Tutaj $\| \|$ oznacza skok wielkości na powierzchni, \mathbf{n} - jednostkowy wektor normalny, zewnętrzny do powierzchni.

Powyższe równania zapisane są tu w układzie CGS. W pewnych wypadkach będą one stosowane w zapisie w układzie jednostek Gaussa.

Przemieszczenia generowane przez pole elektromagnetyczne i obciążenie mechaniczne są opisywane przez następujące równania ruchu i odpowiadające im warunki brzegowe:

Równania ruchu

$$\left. \begin{aligned} (\sigma^i_j + \tau^i_j)_{,i} + \Phi_j + \rho f_j &= \rho \ddot{u}_i, \\ \epsilon^{ijk} (\sigma^i_j + \tau^i_j) &= 0, \end{aligned} \right\} w V_d. \quad (5.4)$$

Tutaj $\boldsymbol{\sigma}$ jest tensorem naprężeń mechanicznych, $\boldsymbol{\tau}$ - tensorem naprężeń elektromagnetycznych, \mathbf{f} - siłą masową, $\boldsymbol{\Phi}$ - elektromagnetyczną siłą objętościową, ρ - gęstość masy.

Tensor naprężeń elektromagnetycznych oraz elektromagnetyczna siła objętościowa są zdefiniowane następująco

$$\begin{aligned}\Phi_i &\equiv \varepsilon_i (q - p_{,m}^m) + \epsilon_{ijk} \left(\dot{p}^j + \epsilon^{jmn} m_{n,m} \right) b^k, \\ \tau_i^j &\equiv p^j \varepsilon_i + \epsilon_{smn} \epsilon^{jml} m_l b^n.\end{aligned}\quad (5.5)$$

Warunki brzegowe

$$\|\sigma^{ij} + \tau^{ij}\| n_j = 0 \} \text{ na } S_d. \quad (5.6)$$

Równania powyższe są uzupełnione przez związki konstytutywne wynikające z prawa zachowania energii.

Globalna postać prawa zachowania energii dla przedstawianego tu modelu dielektryka jest

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{V_d} \rho \left(\epsilon + \frac{1}{2} \dot{u}_i \dot{u}^i \right) dv &= \int_{V_d} (\rho f_i + \Phi_i) \dot{u}^i dv \\ &+ \oint_{S_d} [(\sigma^{ki} + \tau^{ki}) \dot{u}_i - \epsilon^{kij} \varepsilon_i \eta_j] n_k ds,\end{aligned}\quad (5.7)$$

gdzie ϵ – gęstość energii wewnętrznej.

Z globalnej postaci wynika postać lokalna prawa zachowania energii

$$\rho \dot{\epsilon} = (\sigma^{ki} + \tau^{ki}) d_{ki} + \eta_i \dot{b}^i + \varepsilon_i \dot{d}^i, \quad (5.8)$$

gdzie

$$d_{ki} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i;k} + \dot{u}_{k;i}). \quad (5.9)$$

Przyjmuje się, że energia wewnętrzna jest funkcją niezależnych zmiennych, zdefiniowanych w układzie materialnym

$$\epsilon = \epsilon (E_{KL}, D^K, B^K)$$

dla których zachodzą związki

$$\dot{E}_{KL} = 2x^k_{;K} x^l_{;L} d_{kl}, \quad \dot{D}^K = \frac{\rho_0}{\rho} X^K_{;k} \dot{d}^k, \quad \dot{B}^K = \frac{\rho_0}{\rho} X^K_{;k} \dot{b}^k, \quad (5.10)$$

gdzie ρ_0, ρ oznaczają gęstość masy odpowiednio nieodkształconego i odkształconego dielektryka.

Z lokalnego prawa zachowania energii (5.8) wynikają dla sprężystego i jednorodnego dielektryka związki konstytutywne

$$\sigma^{kl} + \tau^{kl} = \rho x^k_{;K} x^l_{;L} \frac{\partial \epsilon}{\partial E_{KL}}, \quad \varepsilon_k = \rho_0 X^K_{;k} \frac{\partial \epsilon}{\partial D^K}, \quad \eta_k = \rho_0 X^K_{;k} \frac{\partial \epsilon}{\partial B^K}. \quad (5.11)$$

Równania Maxwella (5.1), równania ruchu (5.4) wraz z odpowiadającymi im warunkami brzegowymi (5.3), (5.6), definicjami oddziaływań elektromagnetycznych (5.5) oraz równaniami konstytutywnymi (5.11) stanowią pełny układ równań opisujących stan dielektryka sprężystego znajdującego się pod wpływem obciążenia mechanicznego oraz pola elektromagnetycznego z brzegiem gładkim. Jest to układ równań nieliniowych, sprzężonych, słusznych w zakresie dużych odkształceń.

W przypadku osobliwości geometrycznych takich jak szczeliny równania te niewystarczają dla jednoznacznej konstrukcji rozwiązania i muszą być uzupełnione dodatkowym warunkiem. Jako warunek ten przyjmuje się warunek istnienia skończonej prędkości energii wewnętrznej ciała

$$\frac{d}{dt} \int_{V_d} \rho \epsilon dv < \infty. \quad (5.12)$$

Warunek w tej postaci jest niewygodny do stosowania. Dlatego zastępować go tu będziemy warunkami równoważnymi, które wynikają z następującego rozumowania.

Ponieważ źródłem osobliwości jest naroże szczeliny, zamiast warunku, że energia jest skończona w całym obszarze dielektryka, wystarczy założyć, że jest ona skończona w pewnym otoczeniu materialnym naroża szczeliny. Jeżeli teraz napiszemy bilans energii dla tego obszaru i przeniesiemy wszystkie wyrazy na lewą stronę równości to

gdy szczelina jest nieruchoma prawo zachowania energii musi być spełnione w związku z czym suma wyrazów po lewej stronie musi dawać 0.

gdy szczelina propaguje się, wówczas suma wyrazów po lewej stronie nie równa się 0, lecz równa się energii zużywanej na utworzenie nowej powierzchni. Energia ta musi być skończona.

Na podstawie tego rozumowania otrzymuje się następujące warunki energetyczne w narożu szczeliny

1. dla szczeliny nieruchomej

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{S_\xi} [(\sigma^{ij} + \tau^{ij}) \dot{u}_j - \epsilon^{ijk} \epsilon_j \eta_k] n_i ds = 0, \quad (5.13)$$

2. dla szczeliny propagującej się

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{S_\xi} [(\sigma^{ij} + \tau^{ij}) \dot{u}_j - \epsilon^{ijk} \epsilon_j \eta_k] n_i ds < \infty, \quad (5.14)$$

gdzie S_ξ jest dowolną powierzchnią otaczającą naroże szczeliny a parametr ξ jest tak dobrany, że powierzchnia S_ξ zbiega do naroża szczeliny gdy $\xi \rightarrow 0$.

Warunki powyższe mają głęboki sens fizyczny. Warunek (5.13) jest równoważny temu, że naroże nieruchomej szczeliny nie może być źródłem energii. Z warunku (5.14) wynika, że z propagacją szczeliny związana jest pewna dodatkowa energia, jednakże energia ta musi być ograniczona.

Sposób otrzymania tych warunków staje się widoczny po zapoznaniu się ze sposobem wyprowadzenia formuły na energię pęknięcia z kryterium Griffitha w rozdziale 8.

5.2 Przybliżenie quasiliniowe modelu Dixona – Erin-gena

Podobnie jak w przypadku statycznym wprowadzamy tu uproszczony model dielektryka sprężystego słuszny w zakresie małych odkształceń i małych prędkości przemieszczeń. Przy założeniu małych odkształceń zachodzą relacje

$$\epsilon_{KL} \approx \delta_K^k \delta_L^l (u_{k;l} + u_{l;k}), \quad B^K \approx \delta_K^k b^k, \quad D^K \approx \delta_K^k d^k$$

i związki konstytutywne przyjmują postać

$$\sigma^{kl} + \tau^{kl} = \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial e_{kl}}, \quad \epsilon_k = \rho_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial d^k}, \quad \eta_k = \rho_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial b^k}. \quad (5.15)$$

Energię wewnętrzną $\rho \epsilon$ można przedstawić w postaci sumy

$$\rho \epsilon = \rho \epsilon^M + \rho \epsilon^C + \rho \epsilon^E, \quad (5.16)$$

gdzie

$$\epsilon^M = \epsilon^M(e_{ij}), \quad \epsilon^C = \epsilon^C(e_{ij}, d_k, b_k), \quad \epsilon^E = \epsilon^E(d_k, b_k)$$

$\rho \epsilon^M$ jest energią odkształcenia, $\rho \epsilon^C$ jest energią sprzężenia a $\rho \epsilon^E$ jest energią elektromagnetyczną. Teraz związki konstytutywne (5.15) można zapisać w wygodniejszej dla naszych celów postaci

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \rho \frac{\partial \epsilon^M}{\partial e_{ij}}, & \tau^{ij} &= \rho \frac{\partial \epsilon^C}{\partial e_{ij}}, \\ \epsilon_k &= \rho_0 \left(\frac{\partial \epsilon^C}{\partial d^k} + \frac{\partial \epsilon^E}{\partial d^k} \right), & \eta_k &= \rho_0 \left(\frac{\partial \epsilon^C}{\partial b^k} + \frac{\partial \epsilon^E}{\partial b^k} \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Z założenia małych prędkości $\dot{\mathbf{v}}$, wynika

$$\boldsymbol{\epsilon} \approx \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\eta} \approx \mathbf{h}, \quad \mathbf{m} \approx \frac{1}{m_0} \mathbf{b} - \mathbf{h}. \quad (5.18)$$

Rozważamy dielektryk jednorodny i izotropowy. Energię odkształcenia przyjmuje się w postaci takiej jak w liniowej teorii sprężystości (małe odkształcenia). Zakładając, że

mamy do czynienia z silnymi zewnętrznymi polami elektromagnetycznymi, energię pola elektromagnetycznego przyjmuje się jak dla ciała sztywnego

$$\rho \epsilon^E = \frac{1}{2} (\epsilon \epsilon_i d^i + m h_i b^i).$$

Energję sprzężenia przyjmuje się w postaci

$$\rho \epsilon^C = \tau_{ij} e^{ij},$$

gdzie τ_{ij} są naprężeniami elektromagnetycznymi zdefiniowanymi wzorem (5.5).

W rezultacie dla izotropowego i jednorodnego dielektryka sprężystego otrzymany następujące związki konstytutywne

$$\begin{aligned} \sigma_j^i &= 2\mu e_j^i + \lambda \xi_j^i e_k^k, \\ \tau_j^i &= (\epsilon - \epsilon_0) e^i e_j + \frac{m(m - m_0)}{m_0} \epsilon_{jkn} \epsilon^{ikl} h_l h^n, \\ \mathbf{d} &= \epsilon \mathbf{e}, \quad \mathbf{b} = m \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

gdzie μ , λ stałe Lamégo.

Ostatecznie otrzymuje się następujący układ równań opisujących jednorodny i izotropowy dielektryk sprężysty, przy założeniu małych odkształceń i małych prędkości $\dot{\mathbf{u}}$:

Równania Maxwella i odpowiadające im warunki brzegowe

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{c} \partial_t b^k &= \epsilon^{kij} e_{j;i}, \quad b^k{}_{;k} = 0, \\ \frac{1}{c} \partial_t d^k &= \epsilon^{kij} h_{j;i}, \quad d^k{}_{;k} = 0, \end{aligned} \right\} \text{ w } V_d, \quad (5.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^{ijk} \|e_j\| n_k &= 0, \quad \left\| \frac{d^k}{b^k} \right\| n_k = 0, \\ \epsilon^{ijk} \|h_j\| n_k &= 0, \quad \left\| \frac{d^k}{b^k} \right\| n_k = 0, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{na granicy dielektryka} \\ \text{i próżni,} \end{array} \quad (5.21)$$

$$\epsilon^{ijk} e_j n_k = 0 \quad \text{na granicy dielektryka i przewodnika.} \quad (5.22)$$

Równania ruchu i warunki brzegowe

$$(\sigma_j^i + \tau_j^i)_{;i} + \Phi_j = \rho \partial_u^2 u_j \quad \text{w } V_d, \quad (5.23)$$

$$(\sigma_j^i + \tau_j^i) n_i = 0 \quad \text{na } S_d. \quad (5.24)$$

Elektromagnetyczna siła objętościowa w przybliżeniu quasiliniowym dana jest wzorem

$$\Phi_i = \epsilon_0 e_i e_{;m}^m + \epsilon_{ijk} \left[m_0 (\epsilon - \epsilon_0) \partial_t e^j + \frac{m(m - m_0)}{m_0} \epsilon^{jmn} h_{n;m} \right] h^k. \quad (5.25)$$

Powyższy układ równań uzupełniony związkami konstytutywnymi (5.19) stanowi pełny układ równań opisujących pola w dielektryku z brzegiem gładkim.

Dla dielektryka ze szczeliną w przybliżeniu quasiliniowym warunki (5.13), (5.14), równoważne warunkowi ograniczoności energii można zapisać w postaci [41]

1. dla szczeliny nieruchomej

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{S_\xi} [(\sigma^{ij} + \tau^{ij}) \dot{u}_j - \epsilon^{ijk} e_j h_k] n_i ds = 0, \quad (5.26)$$

2. dla szczeliny propagującej się

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{S_\xi} [(\sigma^{ij} + \tau^{ij}) \dot{u}_j - \epsilon^{ijk} e_j h_k] n_i ds < \infty. \quad (5.27)$$

Powyższy układ równań pozwala na jednoznaczne wyznaczenie pól elektromagnetycznych w dielektryku ze szczeliną.

Rozdział 6

Rozkład pól elektromagnetycznych – sprężystych w otoczeniu naroża szczeliny nieruchomej

Rozdział niniejszy jest poświęcony badaniu zachowania się pól elektromagnetycznych sprężystych w otoczeniu naroża szczeliny. Zagadnieniu temu poświęcone zostały prace [31], w której badany był rozkład pól stacjonarnych wokół naroża szczeliny próżniowej oraz [37], w której skonstruowano funkcje opisujące niestacjonarne pola elektromagnetycznych sprężystych w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej. Założono, że zagadnienie jest płaskie w tym sensie, że stan dielektryka zależy od dwóch zmiennych przestrzennych i czasu. Tutaj badany będzie również płaski stan dielektryka ale zajmować się będziemy tylko polami niestacjonarnymi. Rozpatrywane będą przypadki szczeliny próżniowej oraz szczeliny przewodzącej (*definicje str 27*).

Zadanie związane jest z konstrukcją rozwiązania lokalnego odpowiedniego problemu początkowo – brzegowego w otoczeniu naroża szczeliny. Rozwiązanie to musi spełniać w otoczeniu naroża szczeliny równania Maxwella, równania ruchu z uwzględnieniem związków konstytutywnych, warunki brzegowe na powierzchni szczeliny oraz warunki energetyczne w jej narożu i powinno zawierać dowolne parametry, które pozwolą spełnić dowolne warunki brzegowe na granicy otoczenia. Parametry te można wyznaczyć z warunków zszycia pól w otoczeniu naroża szczeliny i pól w obszarze zewnętrznym.

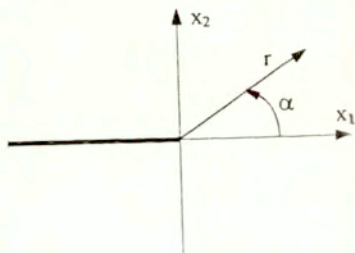
Wyjściowym modelem dla sformułowania odpowiedniego problemu początkowo-brzegowego jest tu quasilineowe przybliżenie modelu dielektryka sprężystego Dixona–Eringena [8] omówione w poprzednim rozdziale. Ponieważ na ogół warunki początkowe zadaje się w postaci funkcji regularnych przyjęto tu zerowe warunki początkowe, bowiem nie ma to wpływu na postać funkcji opisujących pola w bliskim otoczeniu naroża szczeliny, w szczególności części osobliwych rozwiązania, które są tu głównym przedmiotem badań.

6.1 Sformułowanie problemu początkowo – brzegowego

Wprowadzamy układ współrzędnych kartezjańskich x_1, x_2, x_3 o początku w narożu szczeliny oraz układ współrzędnych cylindrycznych r, α, z . Współrzędne cylindryczne związane są ze współzrędnymi kartezjańskimi relacjami

$$x_1 = r \cos \alpha, \quad x_2 = r \sin \alpha, \quad x_3 = z. \quad (6.1)$$

Rozpatrujemy obszar $V_0 : 0 < r < r_0, -\pi < \alpha < \pi, |z| < \infty$ ograniczony powierzchnią $S_0 : r = r_0, -\pi < \alpha < \pi, |z| < \infty$ i segmentem szczeliny zawartym w $V_0, S_s : 0 < r < r_0, \alpha = \pm \pi, |z| < \infty$.



Zgodnie z przybliżeniem quasiliniowym pole elektromagnetyczne wyznaczamy jak dla ciała sztywnego ze szczeliną. Należy zatem skonstruować najpierw rozwiązanie problemu dla równań Maxwella (5.19) – (5.22). Rozwiązanie to musi spełniać warunek energetyczny $\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{S_\xi} \epsilon^{ijk} e_j h_k n_i ds = 0$. Następnie w oparciu o to rozwiązanie wyznaczyć siły elektromagnetyczne a potem przemieszczenia generowane przez siły elektromagnetyczne. Zakłada się tu, że dielektryk jest pod wpływem pola elektromagnetycznego i nie uwzględnia się obciążeń mechanicznych, co nie wpływa na ogólność rozwiązania lokalnego, które gdy pole elektromagnetyczne znika przechodzi w rozwiązanie dla problemu czysto mechanicznego. Przyjmuje się ponadto, że dielektryk jest idealny i nie zawiera ładunków swobodnych.

6.1.1 Pole elektromagnetyczne

Szczelina próżniowa

Segment szczeliny próżniowej o powierzchni S_s definiujemy jako granicę ciągu obszarów klinowych (definicje szczeliny – paragraf p.2.1, str 20) $S_s = \lim_{\delta \rightarrow 0} S_{s\delta}, S_{s\delta} : 0 < r < r_0, \pi - \delta < \alpha < \pi + \delta, |z| < \infty$.

Należy skonstruować rozwiązanie równań Maxwella w obszarze dielektryka i w obszarze klina:

Równania Maxwella w dielektryku

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \partial_\alpha e_z &= -m \partial_t h_r, & \frac{1}{r} [\partial_r (r h_\alpha) - \partial_\alpha h_r] &= \varepsilon \partial_t e_z, \\ \partial_r e_z &= m \partial_t h_\alpha, & \frac{1}{r} [\partial_r (r e_\alpha) - \partial_\alpha e_r] &= -m \partial_t h_z, \\ \frac{1}{r} \partial_\alpha h_z &= \varepsilon \partial_t e_r, & \frac{1}{r} [\partial_r (r h_r) + \partial_\alpha h_\alpha] &= 0, \\ \partial_r h_z &= -\varepsilon \partial_t e_\alpha, & \frac{1}{r} [\partial_r (r e_r) + \partial_\alpha e_\alpha] &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ w } V_{0\delta}, \quad (6.2)$$

gdzie $V_{0\delta} : 0 < r < r_0, -\pi + \delta < \alpha < \pi - \delta, |z| < \infty, \partial_r = \frac{\partial}{\partial r}, \dots,$

Równania Maxwella w obszarze klina próżniowego

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \partial_\alpha e_z^s &= -m_0 \partial_t h_r^s, & \frac{1}{r} [\partial_r (r h_\alpha^s) - \partial_\alpha h_r^s] &= e_0 \partial_t e_z^s, \\ \partial_r e_z^s &= m_0 \partial_t h_\alpha^s, & \frac{1}{r} [\partial_r (r e_\alpha^s) - \partial_\alpha e_r^s] &= -m_0 \partial_t h_z^s, \\ \frac{1}{r} \partial_\alpha h_z^s &= e_0 \partial_t e_r^s, & \frac{1}{r} [\partial_r (r h_r^s) + \partial_\alpha h_\alpha^s] &= 0, \\ \partial_r h_z^s &= -e_0 \partial_t e_\alpha^s, & \frac{1}{r} [\partial_r (r e_r^s) + \partial_\alpha e_\alpha^s] &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ w } V_{s\delta}, \quad (6.3)$$

$V_{s\delta} : 0 < r < r_0, \pi - \delta < \alpha < \pi + \delta, |z| < \infty.$

Warunki brzegowe na powierzchni szczeliny

$$\begin{aligned} \varepsilon \lim_{\delta \rightarrow 0} e_\alpha|_{\alpha=\{-\pi+\delta\}} &= e_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} e_\alpha^s|_{\alpha=\{\pi+\delta\}}, & m \lim_{\delta \rightarrow 0} h_\alpha|_{\alpha=\{-\pi+\delta\}} &= m_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} h_\alpha^s|_{\alpha=\{\pi+\delta\}}, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} e_r|_{\alpha=\{-\pi+\delta\}} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} e_r^s|_{\alpha=\{\pi+\delta\}}, & \lim_{\delta \rightarrow 0} h_r|_{\alpha=\{-\pi+\delta\}} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} h_r^s|_{\alpha=\{\pi+\delta\}}, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} e_z|_{\alpha=\{-\pi+\delta\}} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} e_z^s|_{\alpha=\{\pi+\delta\}}, & \lim_{\delta \rightarrow 0} h_z|_{\alpha=\{-\pi+\delta\}} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} h_z^s|_{\alpha=\{\pi+\delta\}}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Warunki początkowe

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(r, \alpha, 0) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}(r, \alpha, 0) = 0, \quad \partial_t \mathbf{e}|_{t=0} = 0, \quad \partial_t \mathbf{h}|_{t=0} = 0, \\ \mathbf{e}^s(r, \alpha, 0) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}^s(r, \alpha, 0) = 0, \quad \partial_t \mathbf{e}^s|_{t=0} = 0, \quad \partial_t \mathbf{h}^s|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Warunek energetyczny

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} (e_\alpha^s h_z^s - e_z^s h_\alpha^s) r d\alpha + \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} (e_\alpha h_z - e_z h_\alpha) r d\alpha \right] = 0. \quad (6.6)$$

Rozwiązanie lokalne definiujemy jako granicę rozwiązania zależnego od parametru δ , dla $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{e}(\delta), \quad \mathbf{h} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{h}(\delta), \quad -\text{w dielektryku}, \\ \mathbf{e}^s &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{e}^s(\delta), \quad \mathbf{h}^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{h}^s(\delta), \quad -\text{w szczelinie}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Rozwiązanie to powinno zawierać dowolne parametry w takiej liczbie, żeby można było spełnić dowolne warunki brzegowe na powierzchni S_0

$$\begin{aligned} e_z(r_0, \alpha) &= \mathcal{E}(\alpha), \quad e_z^*(r_0) = S, \\ h_z(r_0, \alpha) &= \mathcal{H}(\alpha), \quad h_z^*(r_0) = T, \end{aligned} \quad (6.8)$$

gdzie \mathcal{E} , \mathcal{H} są dowolnymi funkcjami α , S , T – dowolne stałe.

Szczelina przewodząca

W przypadku szczeliny przewodzącej posługiwanie się procedurą przejścia granicznego nie jest konieczne. Wynika to z charakteru warunków brzegowych na granicy dielektryka i przewodnika. Problem dla równań Maxwella, który należy rozwiązać składa się z równań Maxwella, warunków brzegowych na powierzchni szczeliny, warunków początkowych i warunku energetycznego w narożu szczeliny. Rozwiązanie powinno zawierać dowolne współczynniki w takiej liczbie, aby można było spełnić dowolne warunki brzegowe na granicy otoczenia V_0 . Poniżej podajemy układ tych równań i warunków:

Równania Maxwella

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \partial_\alpha e_z &= -m \partial_t h_r, & \frac{1}{r} [\partial_r (r h_\alpha) - \partial_\alpha h_r] &= \varepsilon \partial_t e_z, \\ \partial_r e_z &= m \partial_t h_\alpha, & \frac{1}{r} [\partial_r (r e_\alpha) - \partial_\alpha e_r] &= -m \partial_t h_z, \\ \frac{1}{r} \partial_\alpha h_z &= \varepsilon \partial_t e_r, & \frac{1}{r} [\partial_r (r h_r) + \partial_\alpha h_\alpha] &= 0, \\ \partial_r h_z &= -\varepsilon \partial_t e_\alpha, & \frac{1}{r} [\partial_r (r e_r) + \partial_\alpha e_\alpha] &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ w } V_0. \quad (6.9)$$

Warunki brzegowe na powierzchni szczeliny

$$e_z|_{\alpha=\{\pm\pi}} = 0, \quad e_r|_{\alpha=\{\pm\pi}} = 0. \quad (6.10)$$

Warunki początkowe

$$\mathbf{e}(r, \alpha, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}(r, \alpha, 0) = \mathbf{0}, \quad \partial_t \mathbf{e}|_{t=0} = 0, \quad \partial_t \mathbf{h}|_{t=0} = 0. \quad (6.11)$$

Warunek energetyczny

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} (e_\alpha h_z - e_z h_\alpha) r d\alpha = 0. \quad (6.12)$$

Ponadto rozwiązanie musi zawierać dowolne parametry w takiej liczbie, aby można było spełnić dowolne warunki brzegowe na powierzchni S_0

$$e_z(r_0, \alpha) = \mathcal{E}(\alpha), \quad h_z(r_0, \alpha) = \mathcal{H}(\alpha). \quad (6.13)$$

6.1.2 Siły elektromagnetyczne

Na podstawie rozwiązania zagadnienia dla równań Maxwella należy wyznaczyć siły elektromagnetyczne, wyrazy o charakterze siły objętościowej $F_i = \tau_{i,k}^k + \Phi_i$, które występują w równaniach ruchu (5.23) oraz naprężenia elektromagnetyczne obecne w warunkach brzegowych (5.24). Siły te w przybliżeniu quasiliniowym grają rolę obciążenia zewnętrznego.

We współrzędnych cylindrycznych składowe siły objętościowej \mathbf{F} dane są w zależności od składowych pola elektromagnetycznego za pomocą następujących zależności wynikających z definicji (5.19), (5.25) i równań Maxwella (5.20)

$$F_r = \left\{ (\varepsilon - \varepsilon_0) \left[e_r \frac{\partial e_r}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\alpha \left(\frac{\partial e_r}{\partial \alpha} - e_\alpha \right) \right] + m (\varepsilon - \varepsilon_0) [(\partial_t e_\alpha) h_z - (\partial_t e_z) h_\alpha] + \right. \\ \left. - \frac{m(m - m_0)}{m_0} \left[\frac{1}{r} h_r \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} + h_r \right) - h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial r} - h_z \frac{\partial h_z}{\partial r} \right] \right\}, \quad (6.14)$$

$$F_\alpha = \left\{ (\varepsilon - \varepsilon_0) \left[e_r \frac{\partial e_\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\alpha \left(\frac{\partial e_\alpha}{\partial \alpha} + e_r \right) \right] + m (\varepsilon - \varepsilon_0) [(\partial_t e_z) h_r - (\partial_t e_r) h_z] + \right. \\ \left. + \frac{m(m - m_0)}{m_0} \left[\frac{1}{r} h_z \frac{\partial h_z}{\partial \alpha} - h_\alpha \frac{\partial h_r}{\partial r} + \frac{1}{r} h_r \left(\frac{\partial h_r}{\partial \alpha} - h_\alpha \right) \right] \right\}, \quad (6.15)$$

$$F_z = \left\{ \varepsilon e_z \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial e_\alpha}{\partial \alpha} \right] + (\varepsilon - \varepsilon_0) \left(e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) e_z + \right. \\ \left. + m (\varepsilon - \varepsilon_0) [(\partial_t e_r) h_\alpha - (\partial_t e_\alpha) h_r] \right\}. \quad (6.16)$$

Składowe naprężeń są dane wzorami

$$\tau_{rr} = \left[(\varepsilon - \varepsilon_0) e_r^2 + \frac{m(m - m_0)}{m_0} (h_\alpha^2 + h_z^2) \right], \\ \tau_{\alpha\alpha} = \left[(\varepsilon - \varepsilon_0) e_\alpha^2 + \frac{m(m - m_0)}{m_0} (h_r^2 + h_z^2) \right], \\ \tau_{r\alpha} = \tau_{\alpha r} = \left[(\varepsilon - \varepsilon_0) e_r e_\alpha - \frac{m(m - m_0)}{m_0} h_r h_\alpha \right], \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned}\tau_{rz} = \tau_{zr} &= \left[(\varepsilon - \varepsilon_0) e_r e_z - \frac{m(m - m_0)}{m_0} h_r h_z \right], \\ \tau_{\alpha z} = \tau_{z\alpha} &= \left[(\varepsilon - \varepsilon_0) e_\alpha e_z - \frac{m(m - m_0)}{m_0} h_\alpha h_z \right], \\ \tau_{zz} &= \left[(\varepsilon - \varepsilon_0) e_z^2 + \frac{m(m - m_0)}{m_0} (h_r^2 + h_\alpha^2) \right].\end{aligned}\quad (6.17) \text{ c.d.}$$

6.1.3 Przemieszczenia generowane przez pole elektromagnetyczne

Przemieszczenia generowane przez pole elektromagnetyczne wyznaczymy rozwiązując odpowiednie zagadnienie początkowo-brzegowe dla równań ruchu. Podstawiając związki konstytutywne dla naprężeń mechanicznych (5.19) do równań ruchu (5.23) otrzymuje się równania Lamégo, które we współrzędnych cylindrycznych mają postać:

Równania Lamégo

$$\left. \begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \partial_r \left\{ \frac{1}{r} [\partial_r (r u_r) + \partial_\alpha u_\alpha] \right\} - \frac{\mu}{r^2} \partial_\alpha [\partial_r (r u_\alpha) - \partial_\alpha u_r] + F_r &= \rho \partial_{tt}^2 u_r, \\ \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \partial_\alpha [\partial_r (r u_r) + \partial_\alpha u_\alpha] + \mu \partial_r \left\{ \frac{1}{r} [\partial_r (r u_\alpha) - \partial_\alpha u_r] \right\} + F_\alpha &= \rho \partial_{tt}^2 u_\alpha, \\ \mu \left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\alpha^2 \right) u_z + F_z &= \rho \partial_{tt}^2 u_z,\end{aligned} \right\} \text{ w } V_0. \quad (6.18)$$

Funkcja \mathbf{u} musi spełniać na powierzchni szczeliny warunki brzegowe (5.24):

Warunki brzegowe na powierzchni szczeliny

$$\left. \begin{aligned}\left[\frac{\lambda + 2\mu}{r} + \lambda \partial_r \right] u_r + \frac{\lambda + 2\mu}{r} \partial_\alpha u_\alpha &= -\tau_{\alpha\alpha}, \\ \mu \left[\left(\partial_r - \frac{1}{r} \right) u_\alpha + \frac{1}{r} \partial_\alpha u_r \right] &= -\tau_{r\alpha}, \\ \mu \frac{1}{r} \partial_\alpha u_z &= -\tau_{\alpha z},\end{aligned} \right\} \text{ na } S_s. \quad (6.19)$$

Rozwiązanie powinno spełniać warunek energetyczny (5.25). Ponieważ pole elektromagnetyczne spełnia warunek skończoności całki z wektora Poyntinga, warunek ten sprowadza się do warunku równoważnego warunkowi nałożonemu na energię odkształcenia i energię sprężenia:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} [(\sigma_{rr} + \tau_{rr}) \partial_t u_r + (\sigma_{r\alpha} + \tau_{r\alpha}) \partial_t u_\alpha + (\sigma_{zr} + \tau_{zr}) \partial_t u_z] n_r ds = 0. \quad (6.20)$$

Przyjmujemy jednorodne warunki początkowe.

$$\mathbf{u}(r, \alpha, 0) = \mathbf{0}, \quad \partial_t \mathbf{u}|_{t=0} = 0.$$

Ponadto funkcja \mathbf{u} powinna zawierać dowolne parametry, które pozwolą spełnić dowolne warunki brzegowe na granicy S_0 otoczenia naroża szczeliny V_0

$$\mathbf{u}(r_0, \alpha) = \mathcal{U}(\alpha). \quad (6.21)$$

Jest to pełny układ równań i warunków pozwalających w sposób jednoznaczny skonstruować rozwiązanie lokalne dla przemieszczeń.

Pełne rozwiązanie problemu dla pól harmonicznie zmiennych w czasie w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej podano w pracy [31]. W pracy [37] podano rozwiązanie problemu dla pól niestacjonarnych w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej. Tutaj podano konstrukcję rozwiązania dla pola elektromagnetycznego niestacjonarnego oraz szczegółową konstrukcję rozwiązania ogólnego równań Lamégo. Problem wyznaczenia części rozwiązania zależnej bezpośrednio od sił elektromagnetycznych sprowadzony tu został do znalezienia funkcji spełniających nieskończony układ równań różniczkowych zwyczajnych o strukturze trójkątnej, pozwalającej na efektywne ich wyznaczenie. Ostateczne rozwiązanie zostanie podane w postaci asymptotycznej w bliskim otoczeniu naroża szczeliny, najbardziej interesującej z punktu widzenia problematyki pęknięcia.

6.2 Rozkład pól w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej

6.2.1 Pole elektromagnetyczne

Dla rozwiązania zagadnienia dla równań Maxwella stosujemy metodę transformacji Laplace'a. Przyjmujemy rozwiązanie w dielektryku postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(r, \alpha, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \hat{\mathbf{e}}(r, \alpha, \zeta) e^{\zeta t} d\zeta, \quad \hat{\mathbf{e}} = \int_0^{\infty} \mathbf{e} e^{-\zeta t} dt, \\ \mathbf{h}(r, \alpha, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \hat{\mathbf{h}}(r, \alpha, \zeta) e^{\zeta t} d\zeta, \quad \mathbf{h} = \int_0^{\infty} \hat{\mathbf{h}} e^{-\zeta t} dt, \end{aligned} \quad (6.22)$$

i w analogicznej postaci rozwiązanie w klinie próżniowym.

Biorąc pod uwagę warunki początkowe (6.5), układ równań Maxwella w dielektryku (6.24) i w klinie przybliżającym szczelinę (6.3) sprowadza się do następujących równań na transformaty Laplace'a składowych w kierunku z oraz związku między transformatami w kierunku z oraz pozostałymi składowymi:

W dielektryku

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - k^2 \zeta^2 \right) \hat{e}_z &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{e}_z}{\partial \alpha} &= -m\zeta \hat{h}_r, \quad \frac{\partial \hat{e}_z}{\partial r} = m\zeta \hat{h}_\alpha, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - k^2 \zeta^2 \right) \hat{h}_z &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{h}_z}{\partial \alpha} &= \varepsilon \zeta \hat{e}_r, \quad \frac{\partial \hat{h}_z}{\partial r} = -\varepsilon \zeta \hat{e}_\alpha, \\ k^2 &= \varepsilon m, \end{aligned} \right\} \text{ w } V_{0\delta}. \quad (6.23)$$

W klinie próżniowym

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - k_0^2 \zeta^2 \right) \hat{e}_z^s &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{e}_z^s}{\partial \alpha} &= -m\zeta \hat{h}_r^s, \quad \frac{\partial \hat{e}_z^s}{\partial r} = m\zeta \hat{h}_\alpha^s, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - k_0^2 \zeta^2 \right) \hat{h}_z^s &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{h}_z^s}{\partial \alpha} &= \varepsilon \zeta \hat{e}_r^s, \quad \frac{\partial \hat{h}_z^s}{\partial r} = -\varepsilon \zeta \hat{e}_\alpha^s, \\ k_0^2 &= \varepsilon_0 m_0, \end{aligned} \right\} \text{ w } V_{s\delta}. \quad (6.24)$$

Rozwiązanie przyjmujemy w postaci
w dielektryku

$$\begin{aligned} \hat{e}_z &= \sum_{n=L}^{\infty} \left[\hat{A}_n(\zeta) \sin \lambda_n \alpha + \hat{B}_n(\zeta) \cos \lambda_n \alpha \right] I_{\lambda_n}(k\zeta r), \\ \hat{h}_z &= \sum_{n=L}^{\infty} \left[\hat{G}_n(\zeta) \sin \lambda_n \alpha + \hat{H}_n(\zeta) \cos \lambda_n \alpha \right] I_{\lambda_n}(k\zeta r), \end{aligned} \quad (6.25)$$

w szczelinie

$$\begin{aligned} \hat{e}_z^s &= \sum_{n=L}^{\infty} \left[\hat{\alpha}_n(\zeta) \sin \lambda_n \alpha + \hat{\beta}_n(\zeta) \cos \lambda_n \alpha \right] I_{\lambda_n}(k_0 \zeta r), \\ \hat{h}_z^s &= \sum_{n=L}^{\infty} \left[\hat{\gamma}_n(\zeta) \sin \lambda_n \alpha + \hat{\eta}_n(\zeta) \cos \lambda_n \alpha \right] I_{\lambda_n}(k_0 \zeta r). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Tutaj $\{\lambda_n\}$ jest ciągiem nieznanymi liczb rzeczywistych, który wyznacza się z warunku rozwiązalności równań równoważnych warunkom brzegowym na powierzchni szczeliny (6.4), I_{λ_n} - zmodyfikowane funkcje Bessela, L - liczba całkowita, którą wyznacza się z warunku energetycznego (6.6), $\hat{A}_n, \hat{B}_n, \hat{G}_n, \hat{H}_n, \hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n, \hat{\gamma}_n, \hat{\eta}$ - dowolne współczynniki funkcyjne, które wyznaczane są z warunków brzegowych na powierzchni szczeliny i dowolnych warunków na granicy otoczenia naroża szczeliny (6.8). Metoda wyznaczenia

nieznanych wielkości jest analogiczna do metody opisanej dla przypadku statycznego (p.3.3.1, str 40)

Uwzględniając definicję zmodyfikowanych funkcji Bessela [19]

$$I_{\lambda_n}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} z^{\lambda_n+2l} \gamma_{\lambda_n}^{2l}, \quad \gamma_{\lambda_n}^{2l} = \frac{1}{2^{\lambda_n+2l} l! \Gamma(\lambda_n + l + 1)}, \quad (6.27)$$

można przedstawić rozwiązanie (6.25), (6.26) w postaci szeregów potęgowych względem r . Podstawiamy rozwiązanie (6.25) dla \hat{e}_z i (6.26) dla \hat{e}_z^s w postaci szeregów potęgowych względem r do warunków brzegowych (6.4) dla \hat{e}_z , \hat{h}_r , \hat{h}_a na szczelinie. Otrzymujemy następujący układ niezależnych równań

$$\begin{aligned} & \sum_{n=L}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} [(\hat{A}_n \sin \lambda_n (\pi - \delta) + \hat{B}_n \cos \lambda_n (\pi - \delta))] k^{2s+\lambda_n} \\ & \quad - (\hat{\alpha}_n \sin \lambda_n (\pi - \delta) + \hat{\beta}_n \cos \lambda_n (\pi - \delta)) k_0^{2s+\lambda_n} r^{2s+\lambda_n} \gamma_{2s}^{\lambda_n} = 0, \\ & \sum_{n=L}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} [(\hat{A}_n \sin \lambda_n (-\pi + \delta) + \hat{B}_n \cos \lambda_n (-\pi + \delta))] k^{2s+\lambda_n} \\ & \quad - (-\hat{\alpha}_n \sin \lambda_n (\pi + \delta) + \hat{\beta}_n \cos \lambda_n (\pi + \delta)) k_0^{2s+\lambda_n} r^{2s+\lambda_n} \gamma_{2s}^{\lambda_n} = 0, \\ & \sum_{n=L}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} [(\hat{A}_n \cos \lambda_n (\pi - \delta) - \hat{B}_n \sin \lambda_n (\pi - \delta))] \frac{k^{2s+\lambda_n}}{m} \\ & \quad - (\hat{\alpha}_n \cos \lambda_n (\pi - \delta) - \hat{\beta}_n \sin \lambda_n (\pi - \delta)) \frac{k_0^{2s+\lambda_n}}{m_0} r^{2s+\lambda_n} \lambda_n \gamma_{2s}^{\lambda_n} = 0, \\ & \sum_{n=L}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} [(\hat{A}_n \cos \lambda_n (-\pi + \delta) - \hat{B}_n \sin \lambda_n (-\pi + \delta))] \frac{k^{2s+\lambda_n}}{m} \\ & \quad - (\hat{\alpha}_n \cos \lambda_n (\pi + \delta) + \hat{\beta}_n \sin \lambda_n (\pi + \delta)) \frac{k_0^{2s+\lambda_n}}{m_0} r^{2s+\lambda_n} \lambda_n \gamma_{2s}^{\lambda_n} = 0. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Z powyższym układem równań związany jest następujący układ równań pomocniczych

$$\begin{aligned} & [\hat{A}_n \sin \lambda_n (\pi - \delta) + \hat{B}_n \cos \lambda_n (\pi - \delta)] k^{\lambda_n} \\ & \quad - [\hat{\alpha}_n \sin \lambda_n (\pi - \delta) + \hat{\beta}_n \cos \lambda_n (\pi - \delta)] k_0^{\lambda_n} = 0, \\ & [\hat{A}_n \sin \lambda_n (-\pi + \delta) + \hat{B}_n \cos \lambda_n (-\pi + \delta)] k^{\lambda_n} \\ & \quad - [-\hat{\alpha}_n \sin \lambda_n (\pi + \delta) + \hat{\beta}_n \cos \lambda_n (\pi + \delta)] k_0^{\lambda_n} = 0, \\ & [\hat{A}_n \cos \lambda_n (\pi - \delta) - \hat{B}_n \sin \lambda_n (\pi - \delta)] \frac{k^{\lambda_n}}{m} \\ & \quad - [\hat{\alpha}_n \cos \lambda_n (\pi - \delta) - \hat{\beta}_n \sin \lambda_n (\pi - \delta)] \frac{k_0^{\lambda_n}}{m_0} = 0, \\ & [\hat{A}_n \cos \lambda_n (-\pi + \delta) - \hat{B}_n \sin \lambda_n (-\pi + \delta)] \frac{k^{\lambda_n}}{m} \\ & \quad - [\hat{\alpha}_n \cos \lambda_n (\pi + \delta) + \hat{\beta}_n \sin \lambda_n (\pi + \delta)] \frac{k_0^{\lambda_n}}{m_0} = 0. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Warunkiem aby ten układ równań był spełniony dla różnych od zera współczynników $\hat{A}_n, \hat{B}_n, \dots$ jest zerowanie się wyznacznika charakterystycznego tego układu. Gdy $\delta \rightarrow 0$ i klin przechodzi w szczelinę otrzymujemy rezultat, że warunek taki jest spełniony dla $\lambda_n = n$. Z warunku energetycznego (6.6) wynika, że $L = 0$.

Podstawiając w warunkach brzegowych (6.28) $\lambda_n = n$ i przechodząc z $\delta \rightarrow 0$, po uporządkowaniu względem jednakowych potęg r i przyrównaniu współczynników stojących przy jednakowych potęgach r otrzymuje się nieskończony układ równań funkcyjnych na współczynniki $\hat{A}_n, \hat{B}_n, \dots$, z których można wyznaczyć $2n$ współczynników w zależności od pozostałych $2n$

$$\begin{aligned}
 k^{2l} \left[\hat{B}_0 \gamma_{2l}^0 + \sum_{s=1}^l \hat{B}_{2s} \gamma_{2l-2s}^{2s} \right] - k_0^{2l} \left[\hat{\beta}_0 \gamma_{2l}^0 + \sum_{s=1}^l \hat{\beta}_{2s} \gamma_{2l-2s}^{2s} \right] &= 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \\
 k^{2l+1} \sum_{s=0}^l \hat{B}_{2s+1} \gamma_{2l-2s}^{2s+1} - k_0^{2l+1} \sum_{s=0}^l \hat{\beta}_{2s+1} \gamma_{2l-2s}^{2s+1} &= 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \\
 \frac{k^{2l}}{m} \sum_{s=1}^l 2s \hat{A}_{2s} \gamma_{2l-2s}^{2s} - \frac{k_0^{2l}}{m_0} \sum_{s=1}^l 2s \hat{\alpha}_{2s} \gamma_{2l-2s}^{2s} &= 0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \\
 \frac{k^{2l+1}}{m} \sum_{s=0}^l (2s+1) \hat{A}_{2s+1} \gamma_{2l-2s}^{2s+1} - \frac{k_0^{2l+1}}{m_0} \sum_{s=0}^l (2s+1) \hat{\alpha}_{2s+1} \gamma_{2l-2s}^{2s+1} &= 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Powyższy układ równań ma strukturę trójkątną co pozwala na efektywne wyznaczenie $2n$ współczynników w zależności od pozostałych, które wyznacza się z warunków brzegowych lub warunków zszycia na granicy S_0 otoczenia naroża szczeliny.

W analogiczny sposób postępujemy z warunkami brzegowymi dla funkcji h_z i h_z^* . Otrzymujemy kolejno wszystkie warunki zastępując w równaniach (6.28) – (6.30) $\hat{A}_n \rightarrow \hat{G}_n, \hat{B}_n \rightarrow \hat{H}_n, \hat{\alpha}_n \rightarrow \hat{\gamma}_n, \hat{\beta}_n \rightarrow \hat{\eta}_n, m \rightarrow \varepsilon, m_0 \rightarrow \epsilon_0$.

Ostatecznie transformaty Laplace'a rozwiązania lokalnego dla pola elektromagnetycznego w dielektryku, w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej mają postać

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_z &= \hat{B}_0 I_0(k\zeta r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{A}_n \sin n\alpha + \hat{B}_n \cos n\alpha \right] I_n(k\zeta r), \\
 \hat{h}_r &= \frac{-1}{m\zeta r} \sum_{n=1}^{\infty} n \left[\hat{A}_n \cos n\alpha - \hat{B}_n \sin n\alpha \right] I_n(k\zeta r), \\
 \hat{h}_\alpha &= \frac{k}{2m} \left\{ 2\hat{B}_0 I_1(k\zeta r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{A}_n \sin n\alpha + \hat{B}_n \cos n\alpha \right] \left[I_{n-1}(k\zeta r) + I_{n+1}(k\zeta r) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_z &= \hat{H}_0 I_0(k\zeta r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{G}_n \sin n\alpha + \hat{H}_n \cos n\alpha \right] I_n(k\zeta r), \\ \hat{e}_r &= \frac{1}{\varepsilon \zeta r} \sum_{n=1}^{\infty} n \left[\hat{G}_n \cos n\alpha - \hat{H}_n \sin n\alpha \right] I_n(k\zeta r), \\ \hat{e}_\alpha &= \frac{-k}{2\varepsilon} \left\{ 2\hat{H}_0 I_1(k\zeta r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{G}_n \sin n\alpha + \hat{H}_n \cos n\alpha \right] [I_{n-1}(k\zeta r) + I_{n+1}(k\zeta r)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.31) \text{ c.d.}$$

Transformaty Laplace'a rozwiązania lokalnego w szczelinie dane są za pomocą funkcji

$$\begin{aligned} \hat{e}_z^s &= \hat{\beta}_0 I_0(k_0 \zeta r) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \hat{\beta}_n I_n(k_0 \zeta r), \\ \hat{h}_r^s &= \frac{-1}{m_0 \zeta r} \sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^n \hat{\alpha}_n I_n(k_0 \zeta r), \\ \hat{h}_\alpha^s &= \frac{k_0}{2m_0} \left\{ 2\hat{\beta}_0 I_1(k_0 \zeta r) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \hat{\beta}_n [I_{n-1}(k_0 \zeta r) + I_{n+1}(k_0 \zeta r)] \right\}, \\ \hat{h}_z^s &= \hat{\eta}_0 I_0(k_0 \zeta r) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \hat{\eta}_n I_n(k_0 \zeta r), \\ \hat{e}_r^s &= \frac{1}{\varepsilon_0 \zeta r} \sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^n \hat{\gamma}_n I_n(k_0 \zeta r), \\ \hat{e}_\alpha^s &= \frac{-k_0}{2\varepsilon_0} \left\{ 2\hat{\eta}_0 I_1(k_0 \zeta r) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \hat{\eta}_n [I_{n-1}(k_0 \zeta r) + I_{n+1}(k_0 \zeta r)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Współczynniki $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$, $\hat{\eta}_n$, $\hat{\gamma}_n$, nie są dowolne lecz związane ze współczynnikami \hat{A}_n , \hat{B}_n , \hat{G}_n , \hat{H}_n równaniami równoważnymi warunkom brzegowym na szczelinie, to znaczy równaniami (6.30) i równaniami analogicznej postaci wynikającymi z warunków brzegowych dla h_z .

Przy obliczaniu pochodnych pola w szczelinie względem α należy postępować zgodnie z procedurą przejścia granicznego opisaną dokładnie w p. 3.3.1 na stronie 43 tzn.

$$\partial_\alpha \hat{e}_z^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \partial_\alpha \hat{e}_z^s(\delta), \quad \partial \hat{h}_z^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \partial_\alpha \hat{h}_z^s(\delta),$$

gdzie $\hat{e}_z^s(\delta)$, $\hat{h}_z^s(\delta)$ są dane wzorami (6.26). Przejście z $\delta \rightarrow 0$ oznacza, że $\lambda_n \rightarrow n$.

Pole elektromagnetyczne w otoczeniu naroża szczeliny opisane jest przez funkcje regularne, które w narożu szczeliny nie mają osobliwości. W bliskim otoczeniu naroża szczeliny pole elektromagnetyczne jest opisane funkcjami:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_z &= r^0 \hat{B}_0 + r^1 k \zeta \frac{1}{2} [\hat{A}_1 \sin \alpha + \hat{B}_1 \cos \alpha] + O(r^2), \\
\hat{h}_r &= r^0 \frac{(-k)}{2m} [\hat{A}_1 \cos \alpha - \hat{B}_1 \sin \alpha] + O(r^1), \\
\hat{h}_\alpha &= r^0 \frac{k}{2m} [\hat{A}_1 \sin \alpha + \hat{B}_1 \cos \alpha] + O(r^1), \\
\hat{h}_z &= r^0 \hat{H}_0 + r^1 k \zeta \frac{1}{2} [\hat{G}_1 \sin \alpha + \hat{H}_1 \cos \alpha] + O(r^2), \\
\hat{e}_r &= r^0 \frac{k}{2\varepsilon} [\hat{G}_1 \cos \alpha - \hat{H}_1 \sin \alpha] + O(r^1), \\
\hat{e}_\alpha &= r^0 \frac{-k}{2\varepsilon} [\hat{G}_1 \sin \alpha + \hat{H}_1 \cos \alpha] + O(r^1).
\end{aligned} \tag{6.33}$$

W szczelinie

$$\begin{aligned}
\hat{e}_z^s &= r^0 \hat{B}_0 - r^1 \frac{1}{2} k \zeta \hat{B}_1 + O(r^2), \\
\hat{h}_r^s &= r^0 \frac{k}{2m} \hat{A}_1 + O(r^1), \\
\hat{h}_\alpha^s &= r^0 \frac{(-k)}{2m_0} \hat{B}_1 + O(r^1), \\
\hat{h}_z^s &= r^0 \hat{H}_0 + r^1 \frac{(-1)}{2} k \zeta \hat{H}_1 + O(r^2), \\
\hat{e}_r^s &= r^0 \frac{(-k)}{2\varepsilon} \hat{G}_1 + O(r^1), \\
\hat{e}_\alpha^s &= r^0 \frac{k}{2\varepsilon_0} \hat{H}_1 + O(r^1).
\end{aligned} \tag{6.34}$$

6.2.2 Siły elektromagnetyczne

Elektromagnetyczne siły objętościowe i naprężenia dane są w zależności od składowych pola elektromagnetycznego wzorami (6.14) – (6.17). Ponieważ w dalszym ciągu przy konstrukcji rozwiązania dla przemieszczeń posługiwac się będziemy metodą transformacji Laplace'a, celowe jest wyznaczenie transformat Laplace'a sił elektromagnetycznych na podstawie transformat Laplace'a składowych pola elektromagnetycznego. Ponieważ siły te są nieliniowymi funkcjami składowych pola elektromagnetycznego, można tu skorzystać z twierdzenia Borela zgodnie z którym transformata Laplace'a iloczynu funkcji jest dana za pomocą wzoru

$$\hat{F}(\zeta) = (\hat{f}\hat{g}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \hat{f}(\eta) \hat{g}(\zeta - \eta) d\eta \tag{6.35}$$

Szczegółowe wzory na transformaty Laplace'a sił elektromagnetycznych w zależności od transformat składowych pola elektromagnetycznego podano w pracy [37].

Podstawiając funkcje opisujące składowe pola elektromagnetycznego w dielektryku do wzorów (6.14) – (6.16) oraz do (6.17), przy uwzględnieniu (6.35) i założeniu bezwzględnej zbieżności szeregów reprezentujących rozwiązanie dla pola elektromagnetycznego, otrzymujemy transformaty Laplace'a elektromagnetycznych sił objętościowych i naprężeń w postaci następujących szeregów potęgowych względem r

$$\hat{\mathbf{F}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \hat{\mathbf{F}}^n(\alpha), \quad \hat{\boldsymbol{\tau}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \hat{\boldsymbol{\tau}}^n(\alpha). \quad (6.36)$$

Współczynniki $\hat{\mathbf{F}}^n(\alpha)$ i $\hat{\boldsymbol{\tau}}^n(\alpha)$ są funkcjami trygonometrycznymi wielokrotności kąta α . Siły elektromagnetyczne generowane przez pole elektromagnetyczne w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej są opisane funkcjami regularnymi i nie mają osobliwości w narożu szczeliny. Z tego powodu siły te nie będą ingerować bezpośrednio w część osobliwą naprężeń mechanicznych generowanych przez pole elektromagnetyczne w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej i dlatego nie są dla nas interesujące z punktu widzenia rozkładu pól w bliskim otoczeniu naroża szczeliny. Mają one znaczenie przy wyznaczaniu współczynników intensywności naprężeń, gdzie potrzebne jest pełne rozwiązanie lokalne.

Dla sił elektromagnetycznych w bliskim otoczeniu naroża szczeliny można podać postać asymptotyczną funkcji.

Elektromagnetyczne siły objętościowe można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} F_r &= r^0 \sum_{l=0}^2 (P_r^l \sin l\alpha + S_r^l \cos l\alpha) + O(r^1), \\ F_\alpha &= r^0 \sum_{l=1}^2 (P_\alpha^l \sin l\alpha + S_\alpha^l \cos l\alpha) + O(r^1), \\ F_z &= r^0 2\mathcal{E}k^2 S_z + O(r^1). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Współczynniki P_r^l , S_r^l , S_z zależą od dowolnych funkcji czasu $A_1(t)$, $A_2(t)$, $B_0(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$, $H_0(t)$, $H_1(t)$, $H_2(t)$, $A_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \hat{A}_1(\zeta) e^{ct} d\zeta, \dots$, obecnych w rozwiązaniu lokalnym (6.31) a które można wyznaczyć z warunków zszycia dla pola elektromagnetycznego w otoczeniu naroża szczeliny i w obszarze zewnętrznym oraz od własności elektromagnetycznych ośrodka.

Rozkład naprężeń elektromagnetycznych w bliskim otoczeniu naroża szczeliny można

opisać za pomocą następujących wyrażeń asymptotycznych

$$\begin{aligned}
 \tau_{rr} &= r^0 \left\{ m\mathcal{M}H_0^2 + \left[\frac{k^2}{4} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} (G_1^2 + H_1^2) + \frac{\mathcal{M}}{m} (A_1^2 + B_1^2) \right] \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left[\frac{\mathcal{M}}{m} A_1 B_1 - \frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} G_1 H_1 \right] \sin 2\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} (G_1^2 - H_1^2) - \frac{\mathcal{M}}{m} (A_1^2 - B_1^2) \right] \cos 2\alpha \right\} \right\} + O(r^1), \\
 \tau_{r\alpha} &= r^0 \frac{k^2}{4} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} (H_1^2 - G_1^2) + \frac{\mathcal{M}}{m} (A_1^2 - B_1^2) \right] \sin 2\alpha \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\mathcal{M}}{m} A_1 B_1 - \frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} G_1 H_1 \right] \cos 2\alpha + O(r^1) \right\}, \\
 \tau_{rz} &= r^0 \frac{k}{2} [-(\mathcal{E}B_0H_1 + \mathcal{M}B_1H_0) \sin \alpha + (\mathcal{E}B_0G_1 + \mathcal{M}A_1H_0) \cos \alpha] + O(r^1), \\
 \tau_{\alpha\alpha} &= r^0 \left\{ m\mathcal{M}H_0^2 + \frac{k^2}{4} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} (G_1^2 + H_1^2) + \frac{\mathcal{M}}{m} (A_1^2 + B_1^2) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left[\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} G_1 H_1 - \frac{\mathcal{M}}{m} A_1 B_1 \right] \sin 2\alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} (H_1^2 - G_1^2) + \frac{\mathcal{M}}{m} (A_1^2 - B_1^2) \right] \cos 2\alpha \right\} \right\} + O(r^1), \\
 \tau_{\alpha z} &= r^0 \frac{(-k)}{2} [(\mathcal{E}B_0H_1 + \mathcal{M}A_1H_0) \sin \alpha + (\mathcal{E}B_0H_1 + \mathcal{M}B_1H_0) \cos \alpha] + O(r^1), \\
 \tau_{zz} &= r^0 \left\{ \varepsilon \mathcal{M} \mathcal{E} B_0^2 + \frac{k^2}{4} \frac{\mathcal{M}}{m} (A_1^2 + B_1^2) \right\} + O(r^1),
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

gdzie

$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}, \quad \mathcal{M} = \frac{m - m_0}{m_0}.$$

Zwróćmy uwagę, że pole elektromagnetyczne, które zależy tylko od dwóch zmiennych przestrzennych r , α , generuje wszystkie trzy składowe siły elektromagnetycznej oraz wszystkie sześć składowych tensora naprężeń elektromagnetycznych. Jest to zasadnicza różnica jakościowa między przypadkiem statycznym, gdzie płaskie pole elektrostatyczne generowało płaski stan naprężenia a przypadkiem dynamicznym, gdzie pole niezależne od zmiennej z nie jest płaskie i generuje trójwymiarowy stan naprężenia.

6.2.3 Przemieszczenia generowane przez pole elektromagnetyczne

Transformaty Laplace'a równań Lamégo (6.18), przy uwzględnieniu postaci sił elektromagnetycznych (6.36) oraz jednorodnych warunków początkowych mają postać

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \partial_r \left\{ \frac{1}{r} [\partial_r (r \dot{u}_r) + \partial_\alpha \dot{u}_\alpha] \right\} - \frac{\mu}{r^2} \partial_\alpha [\partial_r (r \dot{u}_\alpha) - \partial_\alpha \dot{u}_r] - \rho \zeta^2 \dot{u}_r &= - \sum_{l=0}^{\infty} r^l \dot{F}_r^l, \\ \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \partial_\alpha [\partial_r (r \dot{u}_r) + \partial_\alpha \dot{u}_\alpha] + \mu \partial_r \left\{ \frac{1}{r} [\partial_r (r \dot{u}_\alpha) - \partial_\alpha \dot{u}_r] \right\} - \rho \zeta^2 \dot{u}_\alpha &= - \sum_{l=0}^{\infty} r^l \dot{F}_\alpha^l, \\ \mu \left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\alpha\alpha}^2 \right) \dot{u}_z - \rho \zeta^2 \dot{u}_z &= - \sum_{l=0}^{\infty} r^l \dot{F}_z^l, \end{aligned} \quad (6.39)$$

gdzie

$$\hat{\mathbf{u}}(r, \alpha, \zeta) = \int_0^{\infty} \mathbf{u}_z(r, \alpha, t) e^{-\zeta t} dt. \quad (6.40)$$

Odpowiadają im warunki brzegowe na powierzchni szczeliny (6.19)

$$\begin{aligned} \left\{ \left[\frac{\lambda + 2\mu}{r} + \lambda \partial_r \right] \dot{u}_r + \frac{\lambda + 2\mu}{r} \partial_\alpha \dot{u}_\alpha \right\} \Big|_{\alpha=\{\pm\pi\}} &= - \sum_{l=0}^{\infty} r^l \dot{\tau}_{\alpha\alpha}^l(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\pm\pi\}}, \\ \mu \left[\left(\partial_r - \frac{1}{r} \right) \dot{u}_\alpha + \frac{1}{r} \partial_\alpha \dot{u}_r \right] \Big|_{\alpha=\{\pm\pi\}} &= - \sum_{l=0}^{\infty} r^l \dot{\tau}_{r\alpha}^l(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\pm\pi\}}, \\ \mu \frac{1}{r} \partial_\alpha \dot{u}_z \Big|_{\alpha=\{\pm\pi\}} &= - \sum_{l=0}^{\infty} r^l \dot{\tau}_{\alpha z}^l(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\pm\pi\}}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Rozwiązanie równań Lamégo przedstawimy w postaci sumy

$$\hat{\mathbf{u}}(r, \alpha, \zeta) = \hat{\mathbf{u}}^0(r, \alpha, \zeta) + \hat{\mathbf{u}}^s(r, \alpha, \zeta). \quad (6.42)$$

Przez $\hat{\mathbf{u}}^0$ oznaczono rozwiązanie jednorodnych równań Lamégo zawierające dowolne współczynniki, które pozwolą spełnić warunki brzegowe na powierzchni szczeliny oraz dowolne warunki na granicy S_0 otoczenia naroża szczeliny. Natomiast $\hat{\mathbf{u}}^s$ jest funkcją spełniającą niejednorodne równania Lamégo niezawierającą dowolnych współczynników, którą przyjmujemy w postaci

$$\hat{\mathbf{u}}^s = \sum_{l=0}^{\infty} r^{l+2} \hat{\mathbf{w}}^l(\alpha). \quad (6.43)$$

Tak przyjęta funkcja spełnia warunek energetyczny (6.20). Podstawiając tę postać rozwiązania do równań Lamégo (6.39) i przyrównując wyrazy stojące przy jednakowych

potęgach r po obu stronach równań otrzymuje się nieskończony układ równań różniczkowych zwyczajnych na współczynniki $\hat{\mathbf{w}}^l(\alpha)$ postaci

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)(l + 1) [(l + 3) \hat{w}_r^l + d_\alpha \hat{w}_\alpha^l] - \mu [(l + 3) d_\alpha \hat{w}_\alpha^l - d_{\alpha\alpha}^2 \hat{w}_r^l] - \zeta^2 \hat{w}_r^{l-2} &= -\hat{F}_r^l, \\(\lambda + 2\mu) [(l + 3) d_\alpha \hat{w}_r^l + d_{\alpha\alpha}^2 \hat{w}_\alpha^l] + \mu (l + 1) [(l + 2) \hat{w}_\alpha^l - d_\alpha \hat{w}_r^l] - \zeta^2 \hat{w}_\alpha^{l-2} &= -\hat{F}_\alpha^l, \\ \mu [(l + 2)^2 + d_{\alpha\alpha}^2] \hat{w}_z^l - \zeta^2 \hat{w}_z^{l-2} &= -\hat{F}_z^l,\end{aligned}\tag{6.44}$$

gdzie $l = 0, 1, 2, \dots$, $\hat{\mathbf{w}}^l = 0$ dla $l < 0$.

Prawe strony są funkcjami trygonometrycznymi wielokrotności kąta α i konstrukcja rozwiązania tych równań nie nastęrcza większych trudności.

Przejdźmy teraz do konstrukcji rozwiązania ogólnego równań Lamégo. Składowe w kierunku r i α rozwiązania przedstawimy w zależności od potencjałów

$$\hat{u}_r = \partial_r \hat{V}_1 + \frac{1}{r} \partial_\alpha \hat{V}_2, \quad \hat{u}_\alpha = \frac{1}{r} \partial_\alpha \hat{V}_1 - \partial_r \hat{V}_2.\tag{6.45}$$

Wówczas równania (6.39) dla $\hat{\mathbf{F}}^l = \mathbf{0}$ można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\partial_r \hat{W}_1 - \frac{1}{r} \partial_\alpha \hat{W}_2 &= 0, \\ \frac{1}{r} \partial_\alpha \hat{W}_1 + \partial_r \hat{W}_2 &= 0,\end{aligned}\tag{6.46}$$

gdzie

$$\hat{W}_1 = -(\lambda + 2\mu) \hat{L}_1 \hat{V}_1, \quad \hat{W}_2 = \mu \hat{V}_2,\tag{6.47}$$

$$\begin{aligned}\hat{L}_1 &= \left[\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\alpha\alpha}^2 - c_1^2 \zeta^2 \right], \\ \hat{L}_2 &= \left[\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\alpha\alpha}^2 - c_2^2 \zeta^2 \right],\end{aligned}\tag{6.48}$$

c_1, c_2 są odwrotnościami prędkości fali podłużnej i poprzecznej

$$c_1^{-2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^{-2} = \frac{\mu}{\rho}.\tag{6.49}$$

Rozwiązanie równań (6.46) ma postać

$$\hat{W}_1 = (\partial_\alpha + r \partial_r) \hat{P}, \quad \hat{W}_2 = (r \partial_r - \partial_\alpha) \hat{P},\tag{6.50}$$

gdzie \hat{P} jest rozwiązaniem równania Laplace'a

$$\left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\alpha\alpha}^2 \right) \hat{P} = 0.\tag{6.51}$$

Przyjmujemy funkcję \hat{P} w formie szeregu

$$\hat{P} = \sum_{n=N}^{\infty} r^{\lambda_n} \left(\hat{a}_n \cos \lambda_n \alpha + \hat{b}_n \sin \lambda_n \alpha \right) \quad (6.52)$$

gdzie N jest liczbą całkowitą dodatnią lub ujemną, którą określa się na podstawie warunku energetycznego (6.20), $\{\lambda_n\}$ jest ciągiem nieznanych liczb rzeczywistych wyznaczanych z warunku rozwiązalności równań związanych z warunkami brzegowymi (6.19), $\hat{a}(\zeta)$, $\hat{b}(\zeta)$ są dowolnymi współczynnikami funkcyjnymi. Procedura wyznaczania tych wielkości jest szczegółowo omówiona w [31]. Jest ona analogiczna do stosowanej w przypadku pola elektromagnetycznego w p. 6.2.1.

Podstawienie (6.52) do (6.50) a następnie do (6.47) prowadzi do równań na funkcje \hat{V}_1, \hat{V}_2 postaci

$$\begin{pmatrix} \hat{L}_1 & 0 \\ 0 & \hat{L}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{pmatrix} = \sum_{n=N}^{\infty} r^{\lambda_n} \lambda_n \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left(\hat{M}_n \cos \lambda_n \alpha + \hat{N}_n \sin \lambda_n \alpha \right) \\ \frac{1}{\mu} \left(-\hat{M}_n \sin \lambda_n \alpha + \hat{N}_n \cos \lambda_n \alpha \right) \end{pmatrix}, \quad (6.53)$$

gdzie $\hat{M}_n(\zeta)$, $\hat{N}_n(\zeta)$ są dowolnymi współczynnikami.

Rozwiązanie tego układu równań jest sumą

$$\hat{V}_i = \hat{V}_i^{(0)} + \hat{V}_i^{(s)}, \quad (i = 1, 2), \quad (6.54)$$

gdzie $\hat{V}_i^{(0)}$ jest rozwiązaniem równań jednorodnych

$$\begin{aligned} \hat{V}_1^{(0)} &= \sum_{n=N}^{\infty} I_{\lambda_n+2} (c_1 \zeta r) \left[\hat{C}_n \cos (\lambda_n + 2) \alpha + \hat{D}_n \sin (\lambda_n + 2) \alpha \right], \\ \hat{V}_2^{(0)} &= \sum_{n=N}^{\infty} I_{\lambda_n+2} (c_2 \zeta r) \left[\hat{C}_n \sin (\lambda_n + 2) \alpha + \hat{D}_n \cos (\lambda_n + 2) \alpha \right], \end{aligned} \quad (6.55)$$

a $\hat{V}_i^{(s)}$ rozwiązaniem równań niejednorodnych [31]

$$\begin{aligned} \hat{V}_1^{(s)} &= \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m+\lambda_n+2} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\bar{\delta}_{2m}^{\lambda_n}}{\bar{\delta}_0^{\lambda_n}} (c_1 \zeta)^{2m} \left[\hat{K}_n \cos \lambda_n \alpha + \hat{E}_n \sin \lambda_n \alpha \right], \\ \hat{V}_2^{(s)} &= \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m+\lambda_n+2} \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\bar{\delta}_{2m}^{\lambda_n}}{\bar{\delta}_0^{\lambda_n}} (c_2 \zeta)^{2m} \left[-\hat{K}_n \sin \lambda_n \alpha + \hat{E}_n \cos \lambda_n \alpha \right]. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Tutaj $\hat{C}_n(\zeta)$, $\hat{D}_n(\zeta)$, $\hat{K}_n(\zeta)$, $\hat{E}_n(\zeta)$ - dowolne współczynniki, $\hat{K}_n = \hat{M}_n \bar{\delta}_0^{\lambda_n} \lambda_n \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)}$, $\hat{E}_n = \hat{N}_n \bar{\delta}_0^{\lambda_n} \lambda_n \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)}$,

$$\bar{\delta}_{2m}^{\lambda_n} = \frac{1}{4^{m+1} (m+1)! (\lambda_n + 1) (\lambda_n + 1) \dots (\lambda_n + m + 1)}. \quad (6.57)$$

Rozwiązanie ogólne dla składowej przemieszczenia w kierunku z jest

$$\hat{u}_z = \sum_{n=K}^{\infty} I_{\gamma_n} (c_2 \zeta r) \left[\hat{S}_n \cos \gamma_n \alpha + \hat{Q}_n \sin \gamma_n \alpha \right], \quad (6.58)$$

gdzie $\{\gamma_n\}$ – nieznaną ciąg liczbowy, K – liczba całkowita określana na podstawie warunku energetycznego.

Korzystając z definicji zmodyfikowanych funkcji Bessela (6.27) można przedstawić funkcje $\hat{V}_i^{(0)}$ oraz \hat{u}_z w postaci uogólnionego szeregu potęgowego względem r . Składowe naprężenia mechaniczne można również zapisać w formie szeregów potęgowych i warunki brzegowe (6.68) będą miały postać

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m+\lambda_n} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(0)nm}(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi}{2}, \pi\}} + \sum_{l=0}^{\infty} r^{l+1} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(s)nm}(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi}{2}, \pi\}} &= - \sum_{l=0}^{\infty} r^l \tau_{\alpha\alpha}^l(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi}{2}, \pi\}}, \\ \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m+\lambda_n} \hat{\sigma}_{r\alpha}^{(0)nm}(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi}{2}, \pi\}} + \sum_{l=0}^{\infty} r^{l+1} \hat{\sigma}_{r\alpha}^{(s)nm}(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi}{2}, \pi\}} &= - \sum_{l=0}^{\infty} r^l \tau_{r\alpha}^l(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi}{2}, \pi\}}, \\ \sum_{n=K}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m+\gamma_n-1} \hat{\sigma}_{z\alpha}^{(0)nm}(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi}{2}, \pi\}} + \sum_{l=0}^{\infty} r^{l+1} \hat{\sigma}_{z\alpha}^{(s)nm}(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi}{2}, \pi\}} &= - \sum_{l=0}^{\infty} r^l \tau_{z\alpha}^l(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi}{2}, \pi\}}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Przez $\sum_{l=0}^{\infty} r^{l+1} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(s)nm}(\alpha)$ oznaczono tu naprężenia mechaniczne od rozwiązania szczególnego niejednorodnych równań Lamégo.

Rozpatrzmy teraz pomocniczy układ równań związany z (6.59)

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(0)n0}(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi}{2}, \pi\}} = 0, \quad \hat{\sigma}_{r\alpha}^{(0)n0}(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi}{2}, \pi\}}, \quad n = N, N+1, \dots, 0, 1, \dots, \\ \hat{\sigma}_{z\alpha}^{(0)n0}(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi}{2}, \pi\}} = 0, \quad n = K, K+1, \dots, 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6.60)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(0)n0}(\alpha) &= \mu(\lambda_n + 1) \{ (\lambda_n + 2)(K_n \cos \lambda_n \alpha + E_n \sin \lambda_n \alpha) - \Gamma_n \cos(\lambda_n + 2)\alpha + \Lambda_n \sin(\lambda_n + 2)\alpha \}, \\ \hat{\sigma}_{r\alpha}^{(0)n0}(\alpha) &= \mu(\lambda_n + 1) \{ (K_n \sin \lambda_n \alpha - E_n \cos \lambda_n \alpha) - \Gamma_n \sin(\lambda_n + 2)\alpha + \Lambda_n \cos(\lambda_n + 2)\alpha \}, \\ \hat{\sigma}_{z\alpha}^{(0)n0}(\alpha) &= \mu\gamma_n \left[-\hat{S}_n \sin \gamma_n \alpha + \hat{Q}_n \cos \gamma_n \alpha \right]. \end{aligned}$$

Wprowadzono tu nowe dowolne współczynniki

$$\hat{\Gamma}_n = (\lambda_n + 2) (c_1^{\lambda_n+2} + c_2^{\lambda_n+2}) \gamma_0^{\lambda_n+2} \hat{C}_n, \quad \hat{\Lambda}_n = (\lambda_n + 2) (c_1^{\lambda_n+2} - c_2^{\lambda_n+2}) \gamma_0^{\lambda_n+2} \hat{D}_n.$$

Równania te nie będą używane dla wyznaczenia dowolnych współczynników lecz stanowią pomocniczy układ równań potrzebny do wyznaczenia ciągów $\{\lambda_n\}$ i $\{\gamma_n\}$. Warunkiem aby istniało niezerowe rozwiązanie czterech pierwszych równań jest zerowanie się wyznacznika charakterystycznego tych równań. Wyznacznik charakterystyczny P -tego układu jest

$$W_P = 16 (\lambda_P + 1) \sin^2 2\lambda_P \pi.$$

Stąd $\lambda_P = \frac{P}{2}$. Z warunku energetycznego (6.20), przy $\lambda_n = \frac{n}{2}$ wynika, że $N = -1$.

Ostatnie dwa z równań (6.60) mają nietrywialne rozwiązanie dla $\{\gamma_n\} = \{\frac{n}{2}\}$, natomiast z warunku energetycznego wynika, że należy przyjąć $K = 1$.

Ostatecznie rozwiązanie równań Lamégo można, korzystając z definicji zmodyfikowanych funkcji Bessela (6.27), zapisać w postaci szeregu

$$\begin{aligned} \hat{u}_r = & \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}+2m+1} \left\{ \frac{\zeta^{2m}}{\lambda + \mu} \left[\left(2m + \frac{n}{2} + 2 \right) \mu c_1^{2m} - \frac{n}{2} (\lambda + 2\mu) c_2^{2m} \right] \right. \\ & \times \frac{\delta_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}}{\delta_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}} \left(\hat{K}_n \cos \frac{n}{2} \alpha + \hat{E}_n \sin \frac{n}{2} \alpha \right) + \hat{\Gamma}_n \frac{\gamma_{2m}^{\frac{n}{2}+2}}{\gamma_0^{\frac{n}{2}+2}} \frac{\zeta^{\frac{n}{2}+2m+2}}{c_1^{\frac{n}{2}+2} + c_2^{\frac{n}{2}+2}} \\ & \times \left[\left(1 + \frac{4m}{n+4} \right) c_1^{\frac{n}{2}+2m+2} + c_2^{\frac{n}{2}+2m+2} \right] \cos \left(\frac{n}{2} + 2 \right) \alpha \\ & + \hat{\Lambda}_n \frac{\gamma_{2m}^{\frac{n}{2}+2}}{\gamma_0^{\frac{n}{2}+2}} \frac{\zeta^{\frac{n}{2}+2m+2}}{c_1^{\frac{n}{2}+2} - c_2^{\frac{n}{2}+2}} \left[\left(1 + \frac{4m}{n+4} \right) c_1^{\frac{n}{2}+2m+2} - c_2^{\frac{n}{2}+2m+2} \right] \sin \left(\frac{n}{2} + 2 \right) \alpha \left. \right\} \\ & + \sum_{l=0}^{\infty} r^{l+2} \hat{w}_r^l(\alpha), \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_\alpha = & \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}+2m+1} \left\{ \frac{\zeta^{2m}}{\lambda + \mu} \left[\frac{n}{2} c_1^{2m} - \left(2m + \frac{n}{2} + 2 \right) (\lambda + 2\mu) c_2^{2m} \right] \right. \\ & \times \frac{\delta_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}}{\delta_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}} \left(-\hat{K}_n \sin \frac{n}{2} \alpha + \hat{E}_n \cos \frac{n}{2} \alpha \right) - \hat{\Gamma}_n \frac{\gamma_{2m}^{\frac{n}{2}+2}}{\gamma_0^{\frac{n}{2}+2}} \frac{\zeta^{\frac{n}{2}+2m+2}}{c_1^{\frac{n}{2}+2} + c_2^{\frac{n}{2}+2}} \\ & \times \left[c_1^{\frac{n}{2}+2m+2} + c_2^{\frac{n}{2}+2m+2} \left(1 + \frac{4m}{n+4} \right) \right] \sin \left(\frac{n}{2} + 2 \right) \alpha \\ & + \hat{\Lambda}_n \frac{\gamma_{2m}^{\frac{n}{2}+2}}{\gamma_0^{\frac{n}{2}+2}} \frac{\zeta^{\frac{n}{2}+2m+2}}{c_1^{\frac{n}{2}+2} - c_2^{\frac{n}{2}+2}} \left[c_1^{\frac{n}{2}+2m+2} - \left(1 + \frac{4m}{n+4} \right) c_2^{\frac{n}{2}+2m+2} \right] \cos \left(\frac{n}{2} + 2 \right) \alpha \left. \right\} \\ & + \sum_{l=0}^{\infty} r^{l+2} \hat{w}_\alpha^l(\alpha), \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$\hat{u}_z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}+2m} (c_2 \zeta)^{\frac{n}{2}+2m} \gamma_{\frac{n}{2m}}^{\frac{n}{2}} \left[\hat{S}_n \cos \frac{n}{2} \alpha + \hat{Q}_n \sin \frac{n}{2} \alpha \right] + \sum_{l=0}^{\infty} r^{l+2} \hat{w}_z^l(\alpha). \quad (6.63)$$

Podstawiając powyższe rozwiązanie do warunków brzegowych otrzymuje się, po uporządkowaniu względem jednakowych potęg r i przyrównaniu wyrazów stojących przy jednakowych potęgach r po obu stronach równań, nieskończony układ równań funkcyjnych z których można wyznaczyć $(2+1)n$ dowolnych współczynników. Układ ten ma strukturę trójkątną co oznacza, że wszystkie współczynniki można wyznaczyć w sposób efektywny. Ponieważ interesuje nas rozkład przemieszczeń i naprężeń w bliskim otoczeniu naroża szczeliny, ograniczymy się tu do równań wynikających z przyrównania współczynników stojących w naprężeniach przy $r^{-\frac{1}{2}}$ i przy r^0 . Mają one postać

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{K}_{-1} + \hat{\Gamma}_{-1} &= 0, \\ 2\mu \left(2\hat{K}_0 - \hat{\Gamma}_0 \right) &= -m\mathcal{M} \left(\hat{H}_0^2 \right) - \frac{k^2}{8} \left[\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} \left(\left(\hat{H}_1^2 \right) - \left(\hat{G}_1^2 \right) \right) + \frac{\mathcal{M}}{m} \left(\left(\hat{A}_1^2 \right) - \left(\hat{B}_1^2 \right) \right) \right], \\ \frac{3}{2} \hat{E}_{-1} - \hat{\Lambda}_{-1} &= 0, \\ 2\mu \hat{\Lambda}_0 &= \frac{k^2}{8} \left[\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} \left(\hat{G}_1 \hat{H}_1 \right) - \frac{\mathcal{M}}{m} \left(\hat{A}_1 \hat{B}_1 \right) \right], \\ \hat{S}_1 &= 0, \\ \mu c_2 \zeta \hat{Q}_2 &= \frac{k}{2} \left[\mathcal{E} \left(\hat{B}_0 \hat{H}_1 \right) + \mathcal{M} \left(\hat{H}_0 \hat{B}_1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Układ równań równoważnych naprężeniowym warunkom brzegowym charakteryzuje się tym, że równania na nieznanne współczynniki o nieparzystych wskaźnikach są jednorodnie, natomiast równania na nieznanne współczynniki o parzystych wskaźnikach są niejednorodnie. Stąd w przemieszczeniach i naprężeniach mechanicznych wyrazy stojące przy ułamkowych potęgach r nie zależą w sposób jawny od pola elektromagnetycznego w otoczeniu naroża szczeliny. Wpływ pola elektromagnetycznego tkwi tylko w dowolnych współczynnikach, które należy wyznaczyć z warunków zszycia rozwiązań na wspólnej granicy otoczenia naroża szczeliny i obszaru zewnętrznego. Natomiast wyrazy stojące przy całkowitych potęgach r zależą w sposób jawny od parametrów pola elektromagnetycznego w otoczeniu naroża szczeliny. Wynika to z rozkładu sił elektromagnetycznych.

Ostatecznie w bliskim otoczeniu naroża szczeliny próżniowej rozkład przemieszczeń w zależności od zmiennych przestrzennych jest taki sam jak w dynamicznym przypadku czysto mechanicznym. Od przypadku statycznego różni on się tym, że nie występują tu stałe dowolne lecz dowolne współczynniki, które są funkcją czasu.

Dla przemieszczeń otrzymujemy następujące wyrażenia asymptotyczne

$$\begin{aligned}
 u_r &= r^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left\{ K_{-1} \left[\frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + \mu} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3}{2}\alpha \right] - E_{-1} \left[\frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + \mu} \sin \frac{\alpha}{2} - 3 \sin \frac{3}{2}\alpha \right] \right\} + O(r^1), \\
 u_\alpha &= r^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left\{ -K_{-1} \left[\frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + \mu} \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3}{2}\alpha \right] - E_{-1} \left[\frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + \mu} \cos \frac{\alpha}{2} - 3 \cos \frac{3}{2}\alpha \right] \right\} \\
 &\quad + O(r^1), \\
 u_z &= r^{\frac{1}{2}} P_1 \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^1),
 \end{aligned} \tag{6.65}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 K_{-1}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \hat{K}_{-1}(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta, & E_{-1}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \hat{E}_{-1}(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta, \\
 P_1(t) &= c_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \zeta^{\frac{1}{2}} \hat{Q}_1(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta.
 \end{aligned}$$

6.3 Rozkład pól w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej

6.3.1 Pole elektromagnetyczne

Podobnie jak poprzednio dla rozwiązania zagadnienia dla równań Maxwella stosujemy metodę transformacji Laplace'a i przyjmujemy rozwiązanie w obszarze dielektryka w postaci

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}(r, \alpha, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \hat{\mathbf{e}}(r, \alpha, \zeta) e^{\zeta t} d\zeta, & \hat{\mathbf{e}} &= \int_0^\infty \mathbf{e} e^{-\zeta t} dt, \\
 \mathbf{h}(r, \alpha, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \hat{\mathbf{h}}(r, \alpha, \zeta) e^{\zeta t} d\zeta, & \mathbf{h} &= \int_0^\infty \hat{\mathbf{h}} e^{-\zeta t} dt.
 \end{aligned} \tag{6.66}$$

Ponieważ przyjmujemy jednorodne warunki początkowe (6.11), układ równań Maxwella (6.9) w dielektryku sprowadza się do następujących równań na transformaty La-

plac'e'a składowych pola

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - k^2 \zeta^2 \right) \hat{e}_z &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{e}_z}{\partial \alpha} &= -m \zeta \hat{h}_r, \quad \frac{\partial \hat{e}_z}{\partial r} = m \zeta \hat{h}_\alpha, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - k^2 \zeta^2 \right) \hat{h}_z &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{h}_z}{\partial \alpha} &= \varepsilon \zeta \hat{e}_r, \quad \frac{\partial \hat{h}_z}{\partial r} = -\varepsilon \zeta \hat{e}_\alpha, \\ k^2 &= \varepsilon m, \end{aligned} \right\} w V_0. \quad (6.67)$$

Warunki brzegowe na powierzchni szczeliny (6.10) są

$$\hat{e}_z|_{\alpha=\pm\pi} = 0, \quad \hat{e}_r|_{\alpha=\pm\pi} = 0, \quad (6.68)$$

Funkcje \hat{e} , \hat{h} powinny spełniać warunek energetyczny (6.2)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} (\hat{e}_\alpha \hat{h}_z - \hat{e}_z \hat{h}_\alpha) r d\alpha = 0 \quad (6.69)$$

Ogólna postać rozwiązania jest

$$\begin{aligned} \hat{e}_z &= \sum_{n=L}^{\infty} \left[\hat{A}_n \sin \lambda_n \alpha + \hat{C}_n \cos \lambda_n \alpha \right] I_{\lambda_n}(k\zeta r), \\ \hat{h}_z &= \sum_{n=L}^{\infty} \left[\hat{B}_n \sin \lambda_n \alpha + \hat{D}_n \cos \lambda_n \alpha \right] I_{\lambda_n}(k\zeta r), \end{aligned} \quad (6.70)$$

gdzie $\{\lambda_n\}$ jest nieznanym ciągiem liczbowym, który zostanie wyznaczony na podstawie warunków brzegowych (6.68), L jest liczbą całkowitą dodatnią lub ujemną, która zostanie wyznaczona z warunku energetycznego (6.69), $k^2 = \varepsilon m$, I_{λ_n} - zmodyfikowane funkcje Bessela.

Podstawmy rozwiązanie (6.70) do warunków brzegowych (6.68). Otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} \sum_{n=L}^{\infty} \left[\hat{A}_n \sin \lambda_n \pi + \hat{C}_n \cos \lambda_n \pi \right] I_{\lambda_n}(k\zeta r) &= 0, \\ \sum_{n=L}^{\infty} \left[-\hat{A}_n \sin \lambda_n \pi + \hat{C}_n \cos \lambda_n \pi \right] I_{\lambda_n}(k\zeta r) &= 0, \\ \sum_{n=L}^{\infty} \lambda_n \left[\hat{B}_n \cos \lambda_n \pi - \hat{D}_n \sin \lambda_n \pi \right] I_{\lambda_n}(k\zeta r) &= 0, \\ \sum_{n=L}^{\infty} \lambda_n \left[\hat{B}_n \cos \lambda_n \pi + \hat{D}_n \sin \lambda_n \pi \right] I_{\lambda_n}(k\zeta r) &= 0. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Warunkiem istnienia nietrywialnego rozwiązania tych równań jest zerowanie się wyznaczników charakterystycznych $W_n = \sin 2\lambda_n \alpha = 0$, skąd otrzymujemy $\{\lambda_n\} = \{\frac{n}{2}\}$.

Z warunku energetycznego wynika, że należy przyjąć $L = 0$. Ostatecznie otrzymujemy następującą postać rozwiązania równań Maxwella, spełniającego warunki brzegowe na powierzchni szczeliny przewodzącej oraz warunek energetyczny

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_z &= \sum_{l=0}^{\infty} \hat{A}_{2l+1}(\zeta) I_{l+\frac{1}{2}}(k\zeta r) \cos\left(l + \frac{1}{2}\right) \alpha + \sum_{l=1}^{\infty} \hat{A}_{2l}(\zeta) I_l(k\zeta r) \sin l\alpha, \\
 \hat{h}_r &= \frac{1}{m\zeta r} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \hat{A}_{2l+1}(\zeta) \left(l + \frac{1}{2}\right) I_{l+\frac{1}{2}}(k\zeta r) \sin\left(l + \frac{1}{2}\right) \alpha \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{l=1}^{\infty} l \hat{A}_{2l}(\zeta) I_l(k\zeta r) \cos l\alpha \right\}, \\
 \hat{h}_\alpha &= \frac{k}{2m} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \hat{A}_{2l+1}(\zeta) \left[I_{l-\frac{1}{2}}(k\zeta r) + I_{l+\frac{3}{2}}(k\zeta r) \right] \cos\left(l + \frac{1}{2}\right) \alpha \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l=1}^{\infty} \hat{A}_{2l}(\zeta) \left[I_{l-1}(k\zeta r) + I_l(k\zeta r) \right] \sin l\alpha \right\}, \\
 \hat{h}_z &= \sum_{l=0}^{\infty} \hat{B}_{2l+1}(\zeta) I_{l+\frac{1}{2}}(k\zeta r) \sin\left(l + \frac{1}{2}\right) \alpha + \sum_{l=0}^{\infty} \hat{B}_{2l}(\zeta) I_l(k\zeta r) \cos l\alpha, \\
 \hat{e}_r &= \frac{1}{\varepsilon\zeta r} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \hat{B}_{2l+1}(\zeta) \left(l + \frac{1}{2}\right) I_{l+\frac{1}{2}}(k\zeta r) \cos\left(l + \frac{1}{2}\right) \alpha \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{l=1}^{\infty} l \hat{B}_{2l}(\zeta) I_l(k\zeta r) \sin l\alpha \right\}, \\
 \hat{e}_\alpha &= -\frac{k}{2\varepsilon} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \hat{B}_{2l+1}(\zeta) \left[I_{l-\frac{1}{2}}(k\zeta r) + I_{l+\frac{3}{2}}(k\zeta r) \right] \sin\left(l + \frac{1}{2}\right) \alpha \right. \\
 &\quad \left. + 2\hat{B}_0 I_1(k\zeta r) + \sum_{l=1}^{\infty} \hat{B}_{2l}(\zeta) \left[I_{l-1}(k\zeta r) + I_{l+1}(k\zeta r) \right] \cos l\alpha \right\},
 \end{aligned} \tag{6.72}$$

gdzie $\hat{A}_n(\zeta)$, $\hat{B}_n(\zeta)$ – dowolne współczynniki.

Widać, że spośród sześciu funkcji opisujących składowe pola elektromagnetycznego w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej tylko dwie, opisujące składowe e_z , h_z są regularne. Pozostałe składowe pola mają w narożu szczeliny osobliwość rzędu $r^{-\frac{1}{2}}$.

Asymptotyczna postać funkcji opisujących pole w bliskim otoczeniu naroża szczeliny

jest

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_z &= r^{\frac{1}{2}} \hat{A}_1 (k\zeta)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^1), \\
 \hat{h}_r &= r^{-\frac{1}{2}} \hat{A}_1 \frac{1}{2m} \sqrt{\frac{k}{\zeta}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\alpha}{2} + r^0 \hat{A}_2 \frac{(-k)}{m} \cos \alpha + O(r^{\frac{1}{2}}), \\
 \hat{h}_\alpha &= r^{-\frac{1}{2}} \hat{A}_1 \frac{1}{2m} \sqrt{\frac{k}{\zeta}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \frac{\alpha}{2} + r^0 \hat{A}_2 \frac{k}{m} \sin \alpha + O(r^{\frac{1}{2}}), \\
 \hat{h}_z &= r^0 \hat{B}_0 + r^{\frac{1}{2}} \hat{B}_1 (k\zeta)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^1), \\
 \hat{e}_r &= r^{-\frac{1}{2}} \hat{B}_1 \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{k}{\zeta}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \frac{\alpha}{2} + r^0 \hat{B}_2 \frac{(-k)}{\varepsilon} \sin \alpha + O(r^{\frac{1}{2}}), \\
 \hat{e}_\alpha &= r^{-\frac{1}{2}} \hat{B}_1 \frac{(-1)}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{k}{\zeta}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\alpha}{2} + r^0 \hat{B}_2 \frac{(-k)}{2\varepsilon} \cos \alpha + O(r^{\frac{1}{2}}).
 \end{aligned} \tag{6.73}$$

6.3.2 Siły elektromagnetyczne

Osobliwości pola elektromagnetycznego powodują silne osobliwości sił elektromagnetycznych. Zakładając bezwzględna zbieżność szeregów reprezentujących rozwiązanie możemy je mnożyć zgodnie z regułami mnożenia szeregów. Podstawiając rozwiązanie (6.72) do wzorów (6.14)–(6.16) na składowe elektromagnetycznej siły objętościowej oraz do wzorów (6.17) dla składowych tensora naprężeń elektromagnetycznych, wykorzystując przy tym definicję zmodyfikowanych funkcji Bessela (6.27), otrzymuje się reprezentację sił elektromagnetycznych w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej w postaci uogólnionych szeregów potęgowych względem r

$$F_r = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-2} F_r^n(\alpha, t), \quad F_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-2} F_\alpha^n(\alpha, t), \quad F_z = \sum_{n=2}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-2} F_z^n(\alpha, t), \tag{6.74}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{rr} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \tau_{rr}^n(\alpha, t), & \tau_{r\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \tau_{r\alpha}^n(\alpha, t), \\
 \tau_{\alpha\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \tau_{\alpha\alpha}^n(\alpha, t), & \tau_{zz} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \tau_{zz}^n(\alpha, t), \\
 \tau_{rz} &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \tau_{rz}^n(\alpha, t), & \tau_{\alpha z} &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \tau_{\alpha z}^n(\alpha, t).
 \end{aligned} \tag{6.75}$$

W bliskim otoczeniu naroża szczeliny elektromagnetyczne siły objętościowe można

przedstawić za pomocą wyrażeń asymptotycznych

$$\begin{aligned}
 F_r &= r^{-2} \frac{(-k)}{4\pi} \left[\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} (I^E)^2 + \frac{\mathcal{M}}{m} (I^H)^2 \right] \\
 &\quad + r^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \frac{k}{2} \left\{ \frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} B_2 I^E - \frac{\mathcal{M}}{m} A_2 I^H \right\} \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^{-1}), \\
 F_\alpha &= r^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \frac{k}{2} \left\{ \frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} B_2 I^E - \frac{\mathcal{M}}{m} A_2 I^H \right\} \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^{-1}), \\
 F_z &= r^{-1} \frac{k}{2\pi} \mathcal{E} (A_1 B_1 + \tilde{B}_1 \tilde{A}_1) + O(r^{-\frac{1}{2}}),
 \end{aligned} \tag{6.76}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 I^E &= \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \zeta^{-\frac{1}{2}} \hat{B}_1(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta, \quad I^H = \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \zeta^{-\frac{1}{2}} \hat{A}_1(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta, \\
 A_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \zeta^{\frac{1}{2}} \hat{A}_1(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta, \quad \tilde{A}_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \zeta^{-\frac{1}{2}} \hat{A}_1(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta, \\
 B_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \zeta^{-\frac{1}{2}} \hat{B}_1(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta, \quad \tilde{B}_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \zeta^{\frac{1}{2}} \hat{B}_1(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta, \\
 A_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \hat{A}_2(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta, \quad B_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \hat{B}_2(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta.
 \end{aligned}$$

Wyrażenia asymptotyczne dla naprężeń mają postać

$$\begin{aligned}
 \tau_{rr} &= r^{-1} \frac{k}{4\pi} \left[\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} (I^E)^2 + \frac{\mathcal{M}}{m} (I^H)^2 \right] (1 + \cos \alpha) + \\
 &\quad + r^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \left(-\frac{k}{2} \right) \left(\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} B_2 I^E - \frac{\mathcal{M}}{m} A_2 I^H \right) \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2} \alpha \right) \\
 &\quad + O(r^0),
 \end{aligned} \tag{6.77}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{\alpha\alpha} &= r^{-1} \frac{k c^2}{4\pi} \left[\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} (I^E)^2 + \frac{\mathcal{M}}{m} (I^H)^2 \right] (1 - \cos \alpha) + \\
 &\quad + r^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \frac{k}{2} \left(-\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} B_2 I^E + \frac{\mathcal{M}}{m} A_2 I^H \right) \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3}{2} \alpha \right) + O(r^0),
 \end{aligned} \tag{6.78}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{r\alpha} &= r^{-1} \frac{(-k)}{4\pi} \left[\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} (I^E)^2 + \frac{\mathcal{M}}{m} (I^H)^2 \right] \sin \alpha + \\
 &\quad + r^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \left(-\frac{k}{2} \right) \left(\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} B_2 I^E - \frac{\mathcal{M}}{m} A_2 I^H \right) \cos \frac{3}{2} \alpha + O(r^0)
 \end{aligned} \tag{6.79}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz} &= r^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} [-(m-1) B_0 I^H] \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \\
\tau_{\alpha z} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} [-(m-1) B_0 I^H] \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \\
\tau_{zz} &= r^{-1} \frac{k}{2} \frac{\mathcal{M}}{m} (I^H)^2 + r^{-\frac{1}{2}} k \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \frac{\mathcal{M}}{m} A_2 I^H \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^0),
\end{aligned} \tag{6.80}$$

gdzie $B_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \hat{B}_0(\xi) e^{\xi t} d\xi$.

6.3.3 Przemieszczenia generowane przez pole elektromagnetyczne

Należy skonstruować rozwiązanie problemu (6.18) – (6.21). Pობobnie jak w przypadku szczeliny próżniowej stosujemy tu metodę transformacji Laplace'a. Równania na transformaty przemieszczeń mają postać

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu) \partial_r \left\{ \frac{1}{r} [\partial_r (r \hat{u}_r) + \partial_\alpha \hat{u}_\alpha] \right\} - \frac{\mu}{r^2} \partial_\alpha [\partial_r (r \hat{u}_\alpha) - \partial_\alpha \hat{u}_r] - \rho \zeta^2 \hat{u}_r &= - \sum_{l=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}-2} \hat{F}_r^l, \\
\frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \partial_\alpha [\partial_r (r \hat{u}_r) + \partial_\alpha \hat{u}_\alpha] + \mu \partial_r \left\{ \frac{1}{r} [\partial_r (r \hat{u}_\alpha) - \partial_\alpha \hat{u}_r] \right\} - \rho \zeta^2 \hat{u}_\alpha &= - \sum_{l=1}^{\infty} r^{\frac{1}{2}-2} \hat{F}_\alpha^l, \\
\mu \left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\alpha^2 \right) \hat{u}_z - \rho \zeta^2 \hat{u}_z &= - \sum_{l=2}^{\infty} r^{\frac{1}{2}-2} \hat{F}_z^l.
\end{aligned} \tag{6.81}$$

Warunki brzegowe na powierzchni szczeliny są równoważne następującym równaniom w transformatach Laplace'a

$$\begin{aligned}
\left\{ \left[\frac{\lambda + 2\mu}{r} + \lambda \partial_r \right] \hat{u}_r + \frac{\lambda + 2\mu}{r} \partial_\alpha \hat{u}_\alpha \right\} \Big|_{\alpha=\{\pm\pi\}} &= - \sum_{l=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}-1} \hat{\tau}_{\alpha\alpha}^l(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\pm\pi\}}, \\
\mu \left[\left(\partial_r - \frac{1}{r} \right) \hat{u}_\alpha + \frac{1}{r} \partial_\alpha \hat{u}_r \right] \Big|_{\alpha=\{\pm\pi\}} &= - \sum_{l=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}-1} \hat{\tau}_{r\alpha}^l(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\pm\pi\}}, \\
\mu \frac{1}{r} \partial_\alpha \hat{u}_z \Big|_{\alpha=\{\pm\pi\}} &= - \sum_{l=1}^{\infty} r^{\frac{1}{2}-1} \hat{\tau}_{\alpha z}^l(\alpha) \Big|_{\alpha=\{\pm\pi\}}.
\end{aligned} \tag{6.82}$$

Rozwiązania poszukiwać będziemy w postaci szeregu

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{n=N}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \hat{\mathbf{u}}^n(\alpha, \zeta). \tag{6.83}$$

Składowe współczynników $\hat{\mathbf{u}}^n$ w kierunku r i α wyrazimy w zależności od funkcji pomocniczych

$$\hat{u}_r^n = \left(\frac{n}{2} + 1\right) \hat{V}_1^{n+2} + d_\alpha \hat{V}_2^{n+2}, \quad \hat{u}_\alpha^n = d_\alpha \hat{V}_1^{n+2} - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \hat{V}_2^{n+2}, \quad d_\alpha = \frac{d}{d\alpha}. \quad (6.84)$$

Podstawiając (6.82), (6.84) do równań Lamégo (6.81) i przyrównując wyrazy stojące przy jednakowych potęgach r po obu stronach równań otrzymuje się układ równań różniczkowych zwyczajnych na współczynniki \hat{V}_i^{n+2} , ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \left(\frac{n}{2} - 1\right) \left[L_1^{n+2} \hat{V}_1^{n+2} - c_1^2 \zeta^2 \hat{V}_1^{n-2} \right] + \\ + \mu d_\alpha \left[L_2^{n+2} \hat{V}_2^{n+2} - c_2^2 \zeta^2 \hat{V}_2^{n-2} \right] = \hat{G}_1^{n+2}, \end{aligned} \quad (6.85)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) d_\alpha \left[L_1^{n+2} \hat{V}_1^{n+2} - c_1^2 \zeta^2 \hat{V}_1^{n-2} \right] + \\ - \mu \left(\frac{n}{2} - 1\right) \left[L_2^{n+2} \hat{V}_2^{n+2} - c_2^2 \zeta^2 \hat{V}_2^{n-2} \right] = \hat{G}_2^{n+2}, \end{aligned}$$

dla ($n = N, N + 1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$), gdzie

$$\begin{aligned} L_i^{n+2} &= \frac{(n+2)^2}{4} + d_{\alpha\alpha}^2, \quad \hat{V}_i^{n+2} = 0 \text{ dla } n < N, \quad (i = 1, 2), \\ \hat{G}_1^{n+2} &= \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 0 \\ -\hat{F}_r^n & \text{dla } n \geq 0 \end{cases}, \quad \hat{G}_2^{n+2} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 1 \\ -\hat{F}_\alpha^n & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Układ równań na współczynniki \hat{u}_z^n ma postać

$$\mu \left[\left(\frac{n^2}{4} + d_{\alpha\alpha}^2\right) \hat{u}_z^n - c_2^2 \zeta^2 \hat{u}_z^{n-4} \right] = \hat{G}_z^n, \quad \hat{u}_z^n = 0 \text{ dla } n < N, \quad (6.86)$$

($n = N, N + 1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$), gdzie

$$\hat{G}_z^n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 2 \\ -\hat{F}_z^n & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}.$$

Warunki brzegowe (6.82) na powierzchni szczeliny można zastąpić równoważnym układem równań postaci

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}^n(\pm\pi, t) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } n = N, N + 1, \dots, -1, \\ -\hat{\tau}_{\alpha\alpha}^n(\pm\pi, t) & \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \\ \hat{\sigma}_{r\alpha}^n(\pm\pi, t) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } n = N, N + 1, \dots, -1, \\ -\hat{\tau}_{r\alpha}^n(\pm\pi, t) & \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \\ \hat{\sigma}_{z\alpha}^n(\pm\pi, t) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } n = N, N + 1, \dots, -1, \\ -\hat{\tau}_{z\alpha}^n(\pm\pi, t) & \text{dla } n = 1, 2, \dots, \end{cases} \end{aligned} \quad (6.87)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}^n &= \left\{ \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \left[\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \lambda + 2\mu \right] + (\lambda + 2\mu) d_{\alpha\alpha}^2 \right\} \hat{V}_1^{n+2} - n\mu d_{\alpha} \hat{V}_2^{n+2} \\ \hat{\sigma}_{r\alpha}^n &= \mu \left\{ n d_{\alpha} \hat{V}_1^{n+2} + \left[\left(1 - \frac{n^2}{4} \right) + d_{\alpha\alpha}^2 \right] \hat{V}_2^{n+2} \right\}, \\ \hat{\sigma}_{z\alpha}^n &= \mu d_{\alpha} \hat{u}_z^n.\end{aligned}\quad (6.88)$$

Funkcje \hat{V}_i^n , ($i = 1, 2$), \hat{u}_z^n przedstawimy w postaci sum

$$\hat{V}_i^n = \hat{V}_i^{0^n} + \hat{V}_i^{s^n}, \quad (i = 1, 2), \quad \hat{u}_z^n = \hat{u}_z^{0^n} + \hat{u}_z^{s^n}, \quad (6.89)$$

gdzie funkcje $\hat{V}_i^{0^n}$, $\hat{u}_z^{0^n}$ są rozwiązaniem ogólnym równań Lamégo, natomiast $\hat{V}_i^{s^n}$, $\hat{u}_z^{s^n}$ są funkcjami spełniającymi niejednorodne równania Lamégo, które nie zawierają żadnych dowolnych współczynników. Konstrukcja rozwiązania ogólnego jest taka sama jak dla szczeliny próżniowej.

Zauważmy, że aby spełnić układ równań niejednorodnych oraz warunki brzegowe (6.87) należałoby przyjąć w szeregu (6.83) $N = 0$. Jednak wówczas warunek energetyczny (6.20) nie byłby spełniony. Sytuacja jest tu analogiczna jak w przypadku szczeliny przewodzącej w dielektryku poddanyemu działaniu pola elektrostatycznego (p. 3.5.2). W związku z tym stosujemy tu również procedurę regularyzacji omówioną szczegółowo na stronie 59. Przypomnijmy, że zdefiniowano tam fizyczne siły elektromagnetyczne jako tę część wyrażeń otrzymanych na drodze formalnej dla sił elektromagnetycznych, która generuje fizycznie dopuszczalne przemieszczenia, a zatem przemieszczenia rzędu $\mathbf{u} = r^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}^1(\alpha, t) + O(r^1)$ spełniające warunek energetyczny w narożu szczeliny dla energii odkształcenia i sprzężenia. Fizyczne siły elektromagnetyczne są zatem zdefiniowane przez szeregi, które otrzymamy przez odrzucenie w szeregach (6.74) dla sił objętościowych wyrazów rzędu r^{-2} a w szeregach (6.75) dla naprężeń wyrazów rzędu r^{-1} . W rezultacie otrzymujemy następujące szeregi reprezentujące fizyczne siły elektromagnetyczne

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-2} \mathbf{F}^n(\alpha, t), \quad \boldsymbol{\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \boldsymbol{\tau}^n(\alpha, t). \quad (6.90)$$

Ostatecznie rozwiązanie otrzymujemy w postaci szeregów

$$\begin{aligned}\hat{u}_r &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}+2m} \left[\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \hat{V}_{1m}^{0^{n+2}} + d_{\alpha} \hat{V}_{2m}^{0^{n+2}} \right] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \left[\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \hat{V}_1^{s^{n+2}} + d_{\alpha} \hat{V}_2^{s^{n+2}} \right], \\ \hat{u}_{\alpha} &= \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}+2m} \left[d_{\alpha} \hat{V}_{1m}^{0^{n+2}} - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \hat{V}_{2m}^{0^{n+2}} \right]\end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \left[d_{\alpha} \hat{V}_1^{s^{n+2}} - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \hat{V}_2^{s^{n+2}} \right],$$

$$\hat{u}_z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2} + 2m} (c_2 \zeta)^{\frac{n}{2} + 2m} \gamma_{2m}^{\frac{n}{2}} \left[\hat{S}_n \cos \frac{n}{2} \alpha + \hat{Q}_n \sin \frac{n}{2} \alpha \right] + \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \hat{u}_z^{s^n},$$

gdzie

$$\hat{V}_{1m}^{0^{n+2}} = (c_1 \zeta)^{2m} \left\{ \gamma_{2m}^{\frac{n}{2} + 1} (c_1 \zeta)^{\frac{n}{2} + 1} \left[\hat{C}_{n-2} \cos \left(\frac{n}{2} + 1\right) \alpha + \hat{D}_{n-2} \sin \left(\frac{n}{2} + 1\right) \alpha \right] \right. \\ \left. + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\delta_{2m}^{-\frac{n}{2} + 1}}{\delta_0^{\frac{n}{2} + 1}} \left[\hat{K}_{n-2} \cos \left(\frac{n}{2} - 1\right) \alpha + \hat{E}_{n-2} \sin \left(\frac{n}{2} - 1\right) \alpha \right] \right\},$$

$$\hat{V}_{2m}^{0^{n+2}} = (c_2 \zeta)^{2m} \left\{ \gamma_{2m}^{\frac{n}{2} + 1} (c_2 \zeta)^{\frac{n}{2} + 1} \left[\hat{C}_{n-2} \sin \left(\frac{n}{2} + 1\right) \alpha + \hat{D}_{n-2} \cos \left(\frac{n}{2} + 1\right) \alpha \right] \right. \\ \left. + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\delta_{2m}^{-\frac{n}{2} + 1}}{\delta_0^{\frac{n}{2} + 1}} \left[-\hat{K}_{n-2} \sin \left(\frac{n}{2} - 1\right) \alpha + \hat{E}_{n-2} \cos \left(\frac{n}{2} - 1\right) \alpha \right] \right\}.$$

Współczynniki liczbowe $\gamma_{2m}^{\frac{n}{2} + 1}$ są związane ze zmodyfikowanymi funkcjami Bessela (6.27), $\delta_{2m}^{\frac{n}{2} + 1}$ dane są wzorami (6.57). $3n$ dowolnych współczynników występujących w tych wzorach wyznacza się z równań (6.87) równoważnych warunkom brzegowym na powierzchni szczeliny. Pozostałe $3n$ współczynników pozwala spełnić dowolne warunki brzegowe na granicy S_0 otoczenia naroża szczeliny. Współczynniki $\hat{V}_1^{s^{n+2}}$, $\hat{u}_z^{s^n}$ są funkcjami spełniającymi nieskończony układ niejednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych postaci (6.85), (6.86). Układ ten ma strukturę trójkątną co umożliwia efektywne wyznaczenie tych funkcji.

Asymptotyczną postać rozwiązania spełniającego warunki brzegowe na powierzchni szczeliny można przedstawić w następującej formie

$$u_r = r^{\frac{1}{2}} \left\{ A(t) \left[-\frac{\lambda + 5\mu}{3(\lambda + \mu)} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2} \alpha \right] \right. \\ \left. - F_1(t) \frac{2}{3(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{\lambda + 5\mu}{\mu} + \frac{4\lambda + 11\mu}{\lambda + \mu} \right] \sin \frac{\alpha}{2} \right. \\ \left. + B(t) \left[\frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + \mu} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3}{2} \alpha \right] \right\} + O(r^1),$$

$$u_{\alpha} = r^{\frac{1}{2}} \left\{ A(t) \left[-\frac{3\lambda + 7\mu}{3(\lambda + \mu)} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2} \alpha \right] \right. \\ \left. - F_1(t) \frac{2}{3(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{3(\lambda + 3\mu)}{\mu} + \frac{4\lambda + 11\mu}{\lambda + \mu} \right] \cos \frac{\alpha}{2} \right\}$$

$$-B(t) \left[\frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + \mu} \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3}{2}\alpha \right] \Big\} + O(r^1),$$

$$u_z = r^{\frac{1}{2}} C(t) \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^1),$$

gdzie $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – dowolne współczynniki, F_1 współczynnik związany z szeregiami (6.76) reprezentującymi elektromagnetyczne siły objętościowe

$$F_1 = -\frac{k}{4} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \left(\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} B_2 I^E - \frac{\mathcal{M}}{m} A_2 I^H \right). \quad (6.91)$$

6.4 Wnioski

Z przedstawionych tu rezultatów wynikają różnice między rozkładem pól w otoczeniu szczeliny próżniowej i szczeliny przewodzącej. Te różnice formalne są wyrazem różnic fizycznych. Rzutują one na rozkład pola elektromagnetycznego, które w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej opisane jest funkcjami regularnymi zarówno w dielektryku jak i w szczelinie (6.33), (6.34), natomiast w przypadku szczeliny przewodzącej tylko składowe pola w kierunku z są regularne. Pozostałe składowe mają w narożu szczeliny osobliwość rzędu $r^{-\frac{1}{2}}$. To jest z kolei powodem, że siły elektromagnetyczne w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej mają osobliwości, które wymagają stosowania procedury regularyzacji, podczas gdy w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej są one regularne.

Wpływa to na ostateczny rozkład naprężeń. W bliskim otoczeniu naroża *szczeliny próżniowej* dominuje część mechaniczna naprężeń, część osobliwa której pod względem formalnym nie różni się od przypadku czysto mechanicznego:

Naprężenia mechaniczne w bliskim otoczeniu naroża szczeliny próżniowej dane są wzorami

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} \left\{ K_{-1}(t) \left(5 \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3}{2}\alpha \right) \right. \\ &\quad \left. + E_{-1}(t) \left(-5 \sin \frac{\alpha}{2} + 3 \sin \frac{3}{2}\alpha \right) \right\} + O(r^0), \\ \sigma_{r\alpha} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} \left\{ K_{-1}(t) \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha \right) \right. \\ &\quad \left. + E_{-1}(t) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + 3 \cos \frac{3}{2}\alpha \right) \right\} + O(r^0), \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} \left\{ K_{-1}(t) \left(3 \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2}\alpha \right) \right. \\ &\quad \left. - E_{-1}(t) \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha \right) \right\} + O(r^0), \\ \sigma_{rz} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} P_1(t) \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \\ \sigma_{z\alpha} &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} P_1(t) \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \\ \sigma_{zz} &= 0. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Pamiętać jednak należy, że chociaż nie widać tu bezpośredniego wpływu pola elektromagnetycznego na część osobliwą naprężeń, wpływ ten tkwi w dowolnych współczynnikach, które należy wyznaczyć z warunku zszycia pól na wspólnej granicy otoczenia naroża szczeliny i obszaru zewnętrznego.

Rozkład naprężeń elektromagnetycznych dany jest wzorami (6.38).

W przypadku *szczeliny przewodzącej* zarówno naprężenia mechaniczne jak i elektromagnetyczne są osobliwe. Ponadto naprężenia mechaniczne zawierają w sposób jawny wyrazy zależne od parametrów pola elektromagnetycznego w otoczeniu naroża szczeliny

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= r^{-\frac{1}{2}}\mu \left\{ A(t) \left(-\frac{5}{3} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha \right) + B(t) \left(5 \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3}{2}\alpha \right) \right. \\
 &\quad \left. - F_1(t) \frac{16}{3\mu} \sin \frac{\alpha}{2} \right\} + O(r^0), \\
 \sigma_{r\alpha} &= r^{-\frac{1}{2}}\mu \left\{ A(t) \left(\frac{1}{3} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2}\alpha \right) + B(t) \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha \right) \right. \\
 &\quad \left. + F_1(t) \frac{4}{\mu} \cos \frac{\alpha}{2} \right\} + O(r^0), \\
 \sigma_{\alpha\alpha} &= r^{-\frac{1}{2}}\mu \left\{ -A(t) \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha \right) - B(t) \left(3 \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2}\alpha \right) \right. \\
 &\quad \left. - F_1(t) \frac{3(4\lambda + 9\mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \sin \frac{\alpha}{2} \right\} + O(r^0), \\
 \sigma_{rz} &= r^{-\frac{1}{2}}\frac{\mu}{2} C(t) \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \\
 \sigma_{z\alpha} &= r^{-\frac{1}{2}}\frac{\mu}{2} C(t) \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^0),
 \end{aligned} \tag{6.93}$$

gdzie $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ są dowolnymi współczynnikami, natomiast $F_1(t)$ jest danym współczynnikiem zależnym od parametrów pola elektromagnetycznego w otoczeniu naroża szczeliny (6.91). Widać, że przy odpowiednim przyporządkowaniu dowolnych współczynników oraz dla $F_1(t) = 0$ wzory dla naprężeń mechanicznych w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej przechodzą we wzory dla przypadku szczeliny próżniowej.

Rozkład *fizycznych* naprężeń elektromagnetycznych w otoczeniu naroża szczeliny

przewodzącej jest następujący

$$\tau_{rr} = r^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \left(-\frac{k}{2}\right) \left(\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} B_2 I^E - \frac{\mathcal{M}}{m} A_2 I^H\right) \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha\right) + O(r^0),$$

$$\tau_{r\alpha} = r^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \left(-\frac{k}{2}\right) \left(\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} B_2 I^E - \frac{\mathcal{M}}{m} A_2 I^H\right) \cos \frac{3}{2}\alpha + O(r^0),$$

$$\tau_{\alpha\alpha} = r^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \frac{k}{2} \left(-\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon} B_2 I^E + \frac{\mathcal{M}}{m} A_2 I^H\right) \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3}{2}\alpha\right) + O(r^0),$$

$$\tau_{rz} = r^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} [-(m-1) B_0 I^H] \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^0),$$

$$\tau_{\alpha z} = r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} [-(m-1) B_0 I^H] \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^0),$$

$$\tau_{zz} = r^{-\frac{1}{2}} k \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \frac{\mathcal{M}}{m} A_2 I^H \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^0).$$

Stan naprężeń w otoczeniu naroża szczeliny w dielektryku poddanym działaniu pola elektromagnetycznego charakteryzowany jest przez sumę naprężeń mechanicznych σ i elektromagnetycznych τ . Widać, że chociaż składowa σ_{zz} naprężeń mechanicznych jest równa zero, ponieważ $\partial_z \mathbf{u} = \mathbf{0}$, działa w dielektryku składowa τ_{zz} naprężenia elektromagnetycznego. Mamy zatem tutaj wszystkie sześć składowych naprężenia

$$\begin{aligned} t_{rr} &= \sigma_{rr} + \tau_{rr}, & t_{r\alpha} &= \sigma_{r\alpha} + \tau_{r\alpha}, \\ t_{\alpha\alpha} &= \sigma_{\alpha\alpha} + \tau_{\alpha\alpha}, & t_{rz} &= \sigma_{rz} + \tau_{rz}, \\ t_{\alpha z} &= \sigma_{\alpha z} + \tau_{\alpha z}, & t_{zz} &= \tau_{zz}. \end{aligned}$$

Jest to cecha różniąca w sposób zasadniczy przypadek ciała sprężystego obciążonego siłami mechanicznymi od przypadku dielektryka sprężystego poddanego działaniu pola elektromagnetycznego.

Rozdział 7

Pole elektromagnetyczne w otoczeniu naroża szczeliny propagującej się ze stałą prędkością

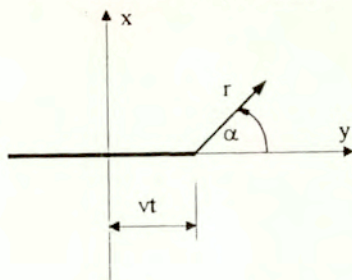
W przypadku pęknięcia dielektryków pod wpływem silnych pól elektromagnetycznych analiza rozkładu pól w otoczeniu naroża szczeliny propagującej jest szczególnie ważna, ponieważ ruch szczeliny powoduje zmiany jakościowe w opisie pól. Dotyczy to pola elektromagnetycznego w przypadku szczeliny przewodzącej. W przypadku pęknięcia pod wpływem obciążenia mechanicznego rząd osobliwości naprężeń mechanicznych nie zależy od ruchu szczeliny. Jest on taki sam niezależnie od tego, czy szczelina jest nieruchoma, czy propaguje się. W przypadku działania na dielektryk ze szczeliną pola elektromagnetycznego ruch szczeliny powoduje zmianę rzędu osobliwości niektórych składowych pola elektromagnetycznego. To z kolei jest przyczyną, że w przypadku szczeliny nieruchomej pole elektromagnetyczne nie daje wkładu w energię pęknięcia, natomiast w przypadku szczeliny propagującej się istnieje wkład energii elektromagnetycznej do energii pęknięcia. To ostatnie zagadnienie omówione zostanie w następnym rozdziale.

W niniejszym rozdziale omówione zostaną oba przypadki szczelin propagujących się ze stałą prędkością, szczeliny próżniowej i szczeliny przewodzącej. Chociaż przypadek szczeliny próżniowej jest z punktu widzenia teorii pęknięcia mniej interesujący, zostanie tu również przedstawiony. Zagadnieniu rozkładu pól elektromagnetycznych w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej propagującej się ze stałą prędkością w przypadku pól harmonicznie zmiennych w czasie poświęcona została praca [33]. Tutaj podany zostanie zarys konstrukcji rozwiązania dla pól niestacjonarnych, natomiast ostateczna postać rozwiązania przedstawiona zostanie w postaci asymptotycznej dla pól w bliskim otoczeniu naroża szczeliny. Konstrukcja rozwiązania lokalnego w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej propagującej się ze stałą prędkością podana została w pracy [40]. Przedstawione zostaną tu najważniejsze rezultaty otrzymane w tej publikacji.

7.1 Sformułowanie problemu

W celu sformułowania problemu dla równań Maxwella i równań Lamégo posługiwać się będziemy dwoma układami współrzędnych. Jeden z nich to układ współrzędnych kartezyjskich x, y, z nieruchomy względem dielektryka, taki, że krawędź szczeliny jest równoległa do osi z i porusza się ze stałą prędkością $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ w dodatnim kierunku osi x . Drugi to układ współrzędnych cylindrycznych o osi z' pokrywającej się z krawędzią szczeliny, poruszający się z prędkością \mathbf{v} względem ośrodka. Współrzędne cylindryczne są związane ze współrzędnymi kartezyjskimi relacjami

$$x = r \cos \alpha + vt, \quad y = r \sin \alpha, \quad z = z' \quad (7.1)$$



Równania Maxwella, równania Lamégo oraz związki konstytutywne dla wielkości mechanicznych i elektromagnetycznych dane są w układzie nieruchomym względem ciała. Tutaj będziemy stosować opis w układzie współrzędnych cylindrycznych, poruszającym się względem dielektryka, stąd konieczne jest przetransformowanie równań z układu kartezyjskiego do układu cylindrycznego.

Równania Maxwella i wszystkie wielkości elektromagnetyczne podawane będą w układzie jednostek Gaussa, ze względu na możliwość stosowania przybliżeń ze względu na $\frac{v}{c} \ll 1$. Stała dielektryczna i przenikalność magnetyczna stosowane w tym opisie różnią się od odpowiednich stałych w jednostkach CGS, są bowiem wielkościami względnymi, jednak dla uproszczenia opisu aby nie mnożyć symboli, będą tu nadal oznaczane odpowiednio przez ϵ i m .

Równania Maxwella, oraz związki konstytutywne, które w dielektryku w układzie kartezyjskim mają postać

$$\begin{aligned} \partial_y e_z &= -\frac{1}{c} \partial_t b_x, & \partial_y h_z &= \frac{1}{c} \partial_t d_x, \\ \partial_x e_z &= \frac{1}{c} \partial_t b_y, & \partial_x h_z &= -\frac{1}{c} \partial_t d_y, \\ \partial_x h_y - \partial_y h_x &= \frac{1}{c} \partial_t d_z, & \partial_x e_y - \partial_y e_x &= -\frac{1}{c} \partial_t b_z, \\ \partial_x b_x + \partial_y b_y &= 0, & \partial_x d_x + \partial_y d_y &= 0, \\ \mathbf{b} &= m\mathbf{h}, & \mathbf{d} &= \epsilon\mathbf{e}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

w układzie cylindrycznym poruszającym się względem ciała można zapisać w formie:

Równania Maxwella

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} \partial_\alpha E_z &= -\frac{1}{c} \partial_t b_r, & \frac{1}{r} [\partial_r (r H_\alpha) - \partial_\alpha H_r] &= \frac{1}{c} \partial_t d_z, \\
 \partial_r E_z &= \frac{1}{c} \partial_t b_\alpha, & \frac{1}{r} [\partial_r (r E_\alpha) - \partial_\alpha E_r] &= -\frac{1}{c} \partial_t b_z, \\
 \frac{1}{r} \partial_\alpha H_z &= \frac{1}{c} \partial_t d_r, & \frac{1}{r} [\partial_r (r b_r) + \partial_\alpha b_\alpha] &= 0, \\
 \partial_r H_z &= -\frac{1}{c} \partial_t d_\alpha, & \frac{1}{r} [\partial_r (r d_r) + \partial_\alpha d_\alpha] &= 0,
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \mathbf{e} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{b}, & \mathbf{H} &= \mathbf{h} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{d}, \\
 \mathbf{e} &= \mathbf{E} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{b}, & \mathbf{h} &= \mathbf{H} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{d}.
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Związki konstytutywne

$$\begin{aligned}
 b_r &= m \left(H_r - \frac{v}{c} \varepsilon E_z \sin \alpha \right) + O \left(\frac{v^2}{c^2} \right), \\
 b_\alpha &= m \left(H_\alpha - \frac{v}{c} \varepsilon E_z \cos \alpha \right) + O \left(\frac{v^2}{c^2} \right), \\
 b_z &= m \left[H_z + \frac{v}{c} \varepsilon (E_r \sin \alpha + E_\alpha \cos \alpha) \right] + O \left(\frac{v^2}{c^2} \right), \\
 d_r &= \varepsilon \left(E_r + \frac{v}{c} m H_z \sin \alpha \right) + O \left(\frac{v^2}{c^2} \right), \\
 d_\alpha &= \varepsilon \left(E_\alpha + \frac{v}{c} m H_z \cos \alpha \right) + O \left(\frac{v^2}{c^2} \right), \\
 d_z &= \varepsilon \left[E_z - \frac{v}{c} m (H_r \sin \alpha + H_\alpha \cos \alpha) \right] + O \left(\frac{v^2}{c^2} \right).
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Z uwagi na fakt, że prędkość szczeliny jest znacznie mniejsza od prędkości światła stosujemy tu przybliżenie z dokładnością do członów liniowych względem $\frac{v}{c}$.

Równania Maxwella w próżni mają postać

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{r}\partial_\alpha - \frac{v}{c^2}\sin\alpha\partial_t\right)E_z^v &= -\frac{1}{c}\partial_t H_r^v, \\
 (\partial_r + \frac{v}{c^2}\cos\alpha\partial_t)E_z^v &= \frac{1}{c}\partial_t H_\alpha^v, \\
 \frac{1}{r}[\partial_r(rH_\alpha^v) - \partial_\alpha H_r^v] + \frac{v}{c^2}\partial_t(H_r^v\sin\alpha + H_\alpha^v\cos\alpha) &= \frac{1}{c}\partial_t E_z^v, \\
 \left(\frac{1}{r}\partial_\alpha - \frac{v}{c^2}\sin\alpha\partial_t\right)H_z^v &= \frac{1}{c}\partial_t E_r^v, \\
 (\partial_r + \frac{v}{c^2}\cos\alpha\partial_t)H_z^v &= -\frac{1}{c}\partial_t E_\alpha^v, \\
 \frac{1}{r}[\partial_r(rE_\alpha^v) - \partial_\alpha E_r^v] + \frac{v}{c^2}\partial_t(E_r^v\sin\alpha + E_\alpha^v\cos\alpha) &= -\frac{1}{c}\partial_t H_z^v,
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

gdzie

$$\mathbf{e}^v = \mathbf{E}^v - \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}^v, \quad \mathbf{h}^v = \mathbf{H}^v + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{E}^v. \tag{7.7}$$

Zastosowano tu formalną transformację współrzędnych przestrzennych, mając na uwadze związki między składowymi wektora we współrzędnych kartezjańskich i cylindrycznych

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} &= (w_x, w_y, w_z) = (w_r, w_\alpha, w_z), \\
 w_x &= w_r \cos\alpha - w_\alpha \sin\alpha, \quad w_y = w_r \sin\alpha + w_\alpha \cos\alpha, \\
 w_z &= w_z.
 \end{aligned}$$

Funkcje \mathbf{E} , \mathbf{H} traktujemy tu jako funkcje pomocnicze, jednakże z fizycznego punktu widzenia opisują one z dokładnością do członów liniowych ze względu na $\frac{v}{c}$ pole elektromagnetyczne w układzie poruszającym się względem ośrodka. Z tego powodu warunek energetyczny dla funkcji \mathbf{E} , \mathbf{H} w układzie cylindrycznym, w którym szczelina jest nieruchoma, będzie miał postać

1. szczelina próżniowa, modelowana klinem o kącie rozwarcia 2δ

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\pi+\delta}^{\pi-\delta} (E_\alpha^v H_z^v - H_\alpha^v E_z^v) r d\alpha + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} (E_\alpha H_z - H_\alpha E_z) r d\alpha \right] = 0 \tag{7.8}$$

2. Szczelina przewodząca

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} (E_\alpha H_z - H_\alpha E_z) r d\alpha = 0. \tag{7.9}$$

Interesować nas będzie jednak przede wszystkim pole \mathbf{e} , \mathbf{h} w układzie spoczynkowym, chociaż wyrażać je będziemy w zależności od zmiennych r , α , z , związanych z układem poruszającym się względem ośrodka.

Równania Lamégo w układzie cylindrycznym, poruszającym się względem ciała mają postać

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \partial_r \left\{ \frac{1}{r} [\partial_r (ru_r) + \partial_\alpha u_\alpha] \right\} - \frac{\mu}{r^2} \partial_\alpha [\partial_r (ru_\alpha) - \partial_\alpha u_r] + \\
 & \quad + \rho v \left\{ \left[-v \left(D^2 - \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \right) + 2D \partial_t \right] u_r + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{r} \left[-v \left(\sin \alpha D - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} \right) + \sin \alpha \partial_t \right] u_\alpha \right\} + F_r = \rho \partial_{tt}^2 u_r, \\
 & \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \partial_\alpha [\partial_r (ru_r) + \partial_\alpha u_\alpha] + \mu \partial_r \left\{ \frac{1}{r} [\partial_r (ru_\alpha) - \partial_\alpha u_r] \right\} + \\
 & \quad + \rho v \left\{ \left[-v \left(D^2 - \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \right) + 2D \partial_t \right] u_\alpha + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{r} \left[v \left(\sin \alpha D - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} \right) - \sin \alpha \partial_t \right] u_r \right\} + F_\alpha = \rho \partial_{tt}^2 u_\alpha, \\
 & \mu \left\{ (1 - a_2^2 \cos^2 \alpha) \partial_{rr}^2 + \frac{1 - a_2^2 \sin^2 \alpha}{r} \partial_r + \frac{1 - a_2^2 \sin^2 \alpha}{r} \partial_{\alpha\alpha}^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{a_2^2 \sin 2\alpha}{r} \partial_{r\alpha}^2 - \frac{a_2^2 \sin 2\alpha}{r^2} \partial_\alpha + 2v c_2^{-2} D \partial_t \right\} u_z + F_z = \rho \partial_{tt}^2 u_z,
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

gdzie \mathbf{F} oznacza siły elektromagnetyczne o charakterze sił objętościowych, operatory D , D^2 oraz współczynniki c_2 , a_2 są zdefiniowane następująco

$$\begin{aligned}
 D^2 &= \cos^2 \alpha \partial_{rr}^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{r} \left(\partial_r + \frac{1}{r} \partial_{\alpha\alpha}^2 \right) - \frac{\sin 2\alpha}{r} \partial_\alpha \left(\partial_r - \frac{1}{r} \right), \\
 D &= \cos \alpha \partial_r - \frac{\sin \alpha}{r} \partial_\alpha, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad a_2^2 = \frac{v^2}{c_2^2}.
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Związki konstytutywne dla naprężeń mechanicznych mają taką samą postać jak w układzie cylindrycznym spoczynkowym względem ciała

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \left[(\lambda + 2\mu) \partial_r + \frac{\lambda}{r} \right] u_r + \frac{\lambda}{r} \partial_\alpha u_\alpha \\
 \sigma_{\alpha\alpha} &= \left[\frac{\lambda + 2\mu}{r} + \lambda \partial_r \right] u_r + \frac{\lambda + 2\mu}{r} \partial_\alpha u_\alpha \\
 \sigma_{r\alpha} &= \mu \left[\left(\partial_r - \frac{1}{r} \right) u_\alpha + \frac{1}{r} \partial_\alpha u_r \right] \\
 \sigma_{rz} &= \mu \partial_r u_z, \quad \sigma_{\alpha z} = \mu \frac{1}{r} \partial_\alpha u_z
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

7.1.1 Pole elektromagnetyczne

Podamy sformułowanie problemu początkowo brzegowego dla każdego z dwóch rodzajów szczelin. Równania Maxwella w dielektryku (7.3) oznaczone zostaną symbolicznie przez $\mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathbf{0}$, w próżni (7.6) przez $\mathbf{M}^v(\mathbf{E}^v, \mathbf{H}^v) = \mathbf{0}$

Szczelina próżniowa

Szczelinę modelujemy klinem o kącie rozwarcia 2δ . Otoczenie naroża szczeliny będzie określone relacjami

$$V_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} V_{0\delta} : r < r_0, -\pi + \delta < \alpha < \pi - \delta, |z| < \infty.$$

Obszar V_0 ograniczony jest powierzchnią, która jest sumą powierzchni S_0 , będącą wspólną granicą otoczenia naroża szczeliny i obszaru zewnętrznego oraz powierzchni szczeliny S_s

$$S_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} S_{0\delta} : r = r_0, -\pi + \delta < \alpha < \pi - \delta, |z| < \infty,$$

$$S_s = \lim_{\delta \rightarrow 0} S_{s\delta} : r < r_0, \alpha = \left\{ \frac{\pi + \delta}{\pi - \delta}, |z| < \infty. \right.$$

Przez V_s oznaczymy obszar szczeliny zawarty w otoczeniu naroża

$$V_s = \lim_{\delta \rightarrow 0} V_{s\delta} : r < r_0, \pi - \delta < \alpha < \pi + \delta, |z| < \infty.$$

Należy skonstruować rozwiązanie równań Maxwella w obszarze dielektryka \mathbf{E}, \mathbf{H} i równań Maxwella w obszarze próżni $\mathbf{E}^v, \mathbf{H}^v$

$$\mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathbf{0} \text{ w } V_{0\delta}, \mathbf{M}^v(\mathbf{E}^v, \mathbf{H}^v) = \mathbf{0} \text{ w } V_{s\delta}, \quad (7.13)$$

spełniające warunki brzegowe na powierzchni szczeliny

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \left[E_z - \frac{v}{c} (b_r \sin \alpha + b_\alpha \cos \alpha) \right]_{|\alpha=\left\{ \frac{\pi-\delta}{-\pi+\delta} \right\}} = \left[E_z^v - \frac{v}{c} (H_r^v \sin \alpha + H_\alpha^v \cos \alpha) \right]_{|\alpha=\left\{ \frac{\pi-\delta}{\pi+\delta} \right\}} \right\} \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ b_\alpha \Big|_{|\alpha=\left\{ \frac{\pi-\delta}{-\pi+\delta} \right\}} = \left[H_\alpha^v - \frac{v}{c} E_z^v \cos \alpha \right]_{|\alpha=\left\{ \frac{\pi-\delta}{\pi+\delta} \right\}} \right\} \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \left[H_r - \frac{v}{c} d_z \sin \alpha \right]_{|\alpha=\left\{ \frac{\pi-\delta}{-\pi+\delta} \right\}} = \left[H_r^v - \frac{v}{c} E_z^v \sin \alpha \right]_{|\alpha=\left\{ \frac{\pi-\delta}{\pi+\delta} \right\}} \right\} \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \left[H_z + \frac{v}{c} (d_r \sin \alpha + d_\alpha \cos \alpha) \right]_{|\alpha=\left\{ \frac{\pi-\delta}{-\pi+\delta} \right\}} = \left[H_z^v + \frac{v}{c} (E_r^v \sin \alpha + E_\alpha^v \cos \alpha) \right]_{|\alpha=\left\{ \frac{\pi-\delta}{\pi+\delta} \right\}} \right\} \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ d_\alpha \Big|_{|\alpha=\left\{ \frac{\pi-\delta}{-\pi+\delta} \right\}} = \left[E_\alpha^v + \frac{v}{c} H_z^v \cos \alpha \right]_{|\alpha=\left\{ \frac{\pi-\delta}{\pi+\delta} \right\}} \right\} \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \left[E_r + \frac{v}{c} b_z \sin \alpha \right]_{|\alpha=\left\{ \frac{\pi-\delta}{-\pi+\delta} \right\}} = \left[E_r^v + \frac{v}{c} H_z^v \sin \alpha \right]_{|\alpha=\left\{ \frac{\pi-\delta}{\pi+\delta} \right\}} \right\} \end{aligned} \quad (7.14)$$

warunek energetyczny (7.8), jednorodne warunki początkowe

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|_{t=0} &= \mathbf{0}, \mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{0}, \partial_t \mathbf{E}|_{t=0} = \mathbf{0}, \partial_t \mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{E}^v|_{t=0} &= \mathbf{0}, \mathbf{H}^v|_{t=0} = \mathbf{0}, \partial_t \mathbf{E}^v|_{t=0} = \mathbf{0}, \partial_t \mathbf{H}^v|_{t=0} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

oraz zawierające taką liczbę dowolnych współczynników aby na powierzchni S_0 i na granicy segmentu szczeliny można było spełnić dowolne warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{\Gamma}, \quad \text{na } S_0, \\ \mathbf{H}^v &= \mathbf{S}, \quad \mathbf{E}^v = \mathbf{T} \quad \text{dla } r = r_0, \alpha = \pm\pi, \end{aligned} \quad (7.16)$$

gdzie $\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Gamma}$ dowolne funkcje zmiennej α i czasu t , \mathbf{S}, \mathbf{T} dowolne funkcje czasu, które spełniają warunki początkowe zgodne z (7.15).

Szczelina przewodząca

Celem jest skonstruowanie rozwiązania równań Maxwella w obszarze dielektryka

$$\mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathbf{0} \text{ w } V_0, \quad (7.17)$$

spełniającego warunki brzegowe na powierzchni szczeliny

$$\begin{aligned} \left(E_r + \frac{v}{c} b_z \sin \alpha \right)_{|\alpha=\{\pm\pi}} &= 0, \\ \left[E_z - \frac{v}{c} (b_r \sin \alpha + b_\alpha \cos \alpha) \right]_{|\alpha=\{\pm\pi}} &= 0, \end{aligned} \quad (7.18)$$

warunki energetyczne (7.9), jednorodne warunki początkowe

$$\mathbf{E}|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \partial_t \mathbf{E}|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \partial_t \mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad (7.19)$$

oraz zawierającego taką liczbę dowolnych współczynników, która pozwoli na spełnienie dowolnych warunków brzegowych na powierzchni S_0 (7.16).

7.1.2 Siły elektromagnetyczne

W oparciu o wyznaczone funkcje \mathbf{E}, \mathbf{H} należy wyznaczyć składowe pola elektromagnetycznego \mathbf{e}, \mathbf{h} w układzie spoczynkowym i podstawiając je do odpowiednich wzorów wyznaczyć elektromagnetyczne siły objętościowe występujące w równaniach Lamégo oraz naprężenia elektromagnetyczne obecne w naprężeniowych warunkach brzegowych na powierzchni szczeliny. Poniżej podane zostaną wzory dla składowych sił objętościowych i naprężeń w cylindrycznym układzie współrzędnych, w układzie jednostek Gaussa

Elektromagnetyczne siły objętościowe

$$\begin{aligned} F_r &= \frac{1}{4\pi} \left\{ (\varepsilon - 1) \left[e_r \frac{\partial e_r}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\alpha \left(\frac{\partial e_r}{\partial \alpha} - e_\alpha \right) \right] + \right. \\ &+ m(\varepsilon - 1) \frac{1}{c} [(\partial_t e_\alpha) h_z - (\partial_t e_z) h_\alpha] + \\ &\left. - m(m - 1) \left[\frac{1}{r} h_r \left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} + h_r \right) - h_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial r} - h_z \frac{\partial h_z}{\partial r} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha} = & \frac{1}{4\pi} \left\{ (\varepsilon - 1) \left[e_r \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial r} + \frac{1}{r} e_{\alpha} \left(\frac{\partial e_{\alpha}}{\partial \alpha} + e_r \right) \right] + \right. \\
 & + m (\varepsilon - 1) \frac{1}{c} [(\partial_t e_z) h_r - (\partial_t e_r) h_z] + \\
 & \left. + m (m - 1) \left[\frac{1}{r} h_z \frac{\partial h_z}{\partial \alpha} - h_{\alpha} \frac{\partial h_r}{\partial r} + \frac{1}{r} h_r \left(\frac{\partial h_r}{\partial \alpha} - h_{\alpha} \right) \right] \right\}, \quad (7.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_z = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \varepsilon e_z \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial \alpha} \right] + \right. \\
 & + (\varepsilon - 1) \left(e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) e_z + \\
 & \left. + m (\varepsilon - 1) \frac{1}{c} [(\partial_t e_r) h_{\alpha} - (\partial_t e_{\alpha}) h_r] \right\}. \quad (7.22)
 \end{aligned}$$

Naprężenia elektromagnetyczne

$$\begin{aligned}
 \tau_{rr} &= \frac{1}{4\pi} [(\varepsilon - 1) e_r^2 + m(m - 1) (h_{\alpha}^2 + h_z^2)], \\
 \tau_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{4\pi} [(\varepsilon - 1) e_{\alpha}^2 + m(m - 1) (h_r^2 + h_z^2)], \\
 \tau_{r\alpha} &= \tau_{\alpha r} = \frac{1}{4\pi} [(\varepsilon - 1) e_r e_{\alpha} - m(m - 1) h_r h_{\alpha}], \\
 \tau_{rz} &= \tau_{zr} = \frac{1}{4\pi} [(\varepsilon - 1) e_r e_z - m(m - 1) h_r h_z], \\
 \tau_{\alpha z} &= \tau_{z\alpha} = \frac{1}{4\pi} [(\varepsilon - 1) e_{\alpha} e_z - m(m - 1) h_{\alpha} h_z], \\
 \tau_{zz} &= \frac{1}{4\pi} [(\varepsilon - 1) e_z^2 + m(m - 1) (h_r^2 + h_{\alpha}^2)].
 \end{aligned} \quad (7.23)$$

7.1.3 Przemieszczenia generowane przez pole elektromagnetyczne

Oznaczmy symbolicznie równania Lamégo (7.10) przez $\mathbf{L}(\mathbf{u}) = -\mathbf{F}$.

Poszukujemy funkcji $\mathbf{u} = (u_r, u_{\alpha}, u_z)$ spełniającej równania Lamégo w obszarze dielektryka

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = -\mathbf{F} \quad \text{w } V_0, \quad (7.24)$$

warunki brzegowe na powierzchni szczeliny

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\alpha} + \tau_{\alpha\alpha} &= 0 \\
 \sigma_{r\alpha} + \tau_{r\alpha} &= 0 \\
 \sigma_{z\alpha} + \tau_{z\alpha} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad \text{na } S_s, \quad (7.25)$$

jednorodne warunki początkowe

$$\mathbf{u}(r, \alpha, 0) = 0, \quad \partial_t \mathbf{u}|_{t=0} = 0. \quad (7.26)$$

Zauważmy, że funkcje \mathbf{u} , $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau}$ chociaż opisane w zależności od zmiennych r , α , z są przemieszczeniami, naprężeniami mechanicznymi i elektromagnetycznymi mierzonymi w układzie spoczynkowym. Z tego powodu warunek energetyczny, który muszą spełniać rozwiązanie \mathbf{u} i naprężenia elektromagnetyczne $\boldsymbol{\tau}$, dla przypadku szczeliny propagującej się, zapisany w zmiennych r , α , będzie miał postać

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ (\sigma_{rr} + \tau_{rr}) Du_r + (\sigma_{r\alpha} + \tau_{r\alpha}) Du_\alpha + (\sigma_{rz} + \tau_{rz}) Du_z \right\} r d\alpha < \infty. \quad (7.27)$$

Ponadto funkcja \mathbf{u} musi zawierać taką liczbę dowolnych współczynników, która pozwoli spełnić dowolne warunki na powierzchni S_0

$$\mathbf{u}(r_0, \alpha, t) = \Theta(\alpha, t), \quad (7.28)$$

Θ – dowolna funkcja zmiennej α i czasu, spełniająca jednorodne warunki początkowe.

Powyższe warunki pozwalają znaleźć w sposób jednoznaczny rozwiązanie lokalne problemu.

7.2 Rozkład pól w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej

7.2.1 Pole elektromagnetyczne

Stosujemy transformację Laplace'a

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(r, \alpha, \xi) &= \int_0^{\infty} \mathbf{E}(r, \alpha, t) e^{-\xi t} dt, & \mathbf{E}(r, \alpha, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \hat{\mathbf{E}} e^{\xi t} d\xi, \\ \hat{\mathbf{H}}(r, \alpha, \xi) &= \int_0^{\infty} \mathbf{H}(r, \alpha, t) e^{-\xi t} dt, & \mathbf{H}(r, \alpha, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \hat{\mathbf{H}} e^{\xi t} d\xi. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Przyjmując rozwiązanie równań Maxwella (7.13) w transformatach Laplace'a w postaci

$$\hat{E}_z = e^{-\xi \epsilon m \frac{z}{2r} \cos \alpha} \hat{F}(r, \alpha), \quad \hat{E}_z^v = e^{-\xi \frac{z}{2r} \cos \alpha} \hat{F}^v(r, \alpha), \quad (7.30)$$

możemy sprowadzić równania Maxwella na E_z , B_r , B_α , E_z^v , H_r^v , H_α^v , oraz odpowiadające im warunki brzegowe (7.14), uwzględniając przy tym związki konstytutywne (7.5), do

następujących równań na funkcje \hat{F} , \hat{F}^v , z dokładnością do członów liniowych ze względu na $\frac{v}{c}$,

$$\begin{cases} \left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\alpha\alpha}^2 - k^2 \xi^2 \right) \hat{F} = 0 & \text{w } V_{0\delta}, \\ \left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\alpha\alpha}^2 - k_0^2 \xi^2 \right) \hat{F}^v = 0 & \text{w } V_{s\delta}, \end{cases} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{v \sin \alpha}{\xi r} \partial_\alpha \right) e^{-\xi \varepsilon m \frac{v}{c^2} r \cos \alpha} \hat{F}(r, \alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi-\delta}{\pi+\delta}\}} \right\} \\ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{v \sin \alpha}{\xi r} \partial_\alpha \right) e^{-\xi \frac{v}{c^2} r \cos \alpha} \hat{F}^v(r, \alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi-\delta}{\pi+\delta}\}} \right\}, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{m} \partial_\alpha \left[e^{-\xi \varepsilon m \frac{v}{c^2} r \cos \alpha} \hat{F}(r, \alpha) \right] \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi-\delta}{\pi+\delta}\}} \right\} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \partial_\alpha e^{-\xi \frac{v}{c^2} r \cos \alpha} \hat{F}^v(r, \alpha) \Big|_{\alpha=\{\frac{\pi-\delta}{\pi+\delta}\}} \right\}, \end{aligned} \quad (7.32)$$

gdzie

$$k^2 = \frac{\varepsilon m}{c^2}, \quad k_0^2 = \frac{1}{c^2}.$$

Przyjmujemy rozwiązanie tych równań w postaci

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \sum_{n=N}^{\infty} I_{\lambda_n}(k\xi r) \left(\hat{A}_n \sin \lambda_n \alpha + \hat{B}_n \cos \lambda_n \alpha \right), \\ \hat{F}^v &= \sum_{n=N}^{\infty} I_{\lambda_n}(k_0 \xi r) \left(\hat{G}_n \sin \lambda_n \alpha + \hat{H}_n \cos \lambda_n \alpha \right), \end{aligned} \quad (7.33)$$

gdzie $\{\lambda_n\}$ jest nieznanym ciągiem liczb rzeczywistych, który zostanie wyznaczony na podstawie warunków brzegowych, N – liczba całkowita dodatnia lub ujemna określana na podstawie warunku energetycznego, $\hat{A}_n, \hat{B}_n, \hat{G}_n, \hat{H}_n$ – dowolne współczynniki zależne od parametru ξ . Część z nich wyznacza się z warunków brzegowych na powierzchni szczeliny.

Biorąc pod uwagę definicję zmodyfikowanych funkcji Bessela I_{λ_n} (6.27) oraz rozwijając w szereg potęgowy funkcje wykładnicze, ograniczając się przy tym do wyrazów liniowych względem $\frac{v}{c}$, otrzymujemy następujący układ równań równoważnych warunkom

brzegowym (7.32)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_{2p}^{\lambda_n} k^{\lambda_n+2p} \left(\hat{A}_n \sin \lambda_n \alpha + \hat{B}_n \cos \lambda_n \alpha \right) \left\{ r^{\lambda_n+2p} \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - r^{\lambda_n+2p+1} \xi \varepsilon \frac{v}{c^2} \cos \alpha \right\} \right\}_{|\alpha=\{\frac{\pi-\delta}{\pi+\delta}\}} \\
 & = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_{2p}^{\lambda_n} k_0^{\lambda_n+2p} \left(\hat{G}_n \sin \lambda_n \alpha + \hat{H}_n \cos \lambda_n \alpha \right) \left\{ r^{\lambda_n+2p} \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - r^{\lambda_n+2p+1} \xi \frac{v}{c^2} \cos \alpha \right\} \right\}_{|\alpha=\{\frac{\pi-\delta}{\pi+\delta}\}}, \\
 & \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_{2p}^{\lambda_n} k^{\lambda_n+2p} \left\{ r^{\lambda_n+2p} \frac{\lambda_n}{m} \left(\hat{A}_n \cos \lambda_n \alpha - \hat{B}_n \sin \lambda_n \alpha \right) \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - r^{\lambda_n+2p+1} \xi \varepsilon \frac{v}{c^2} \left\{ \lambda_n \cos \alpha \left(\hat{A}_n \cos \lambda_n \alpha - \hat{B}_n \sin \lambda_n \alpha \right) \right. \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. - \sin \alpha \left(\hat{A}_n \sin \lambda_n \alpha + \hat{B}_n \cos \lambda_n \alpha \right) \right\} \right\} \right\}_{|\alpha=\{\frac{\pi-\delta}{\pi+\delta}\}} \\
 & = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_{2p}^{\lambda_n} k_0^{\lambda_n+2p} \left\{ r^{\lambda_n+2p} \lambda_n \left(\hat{G}_n \cos \lambda_n \alpha - \hat{H}_n \sin \lambda_n \alpha \right) \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - r^{\lambda_n+2p+1} \xi \frac{v}{c^2} \left\{ \lambda_n \cos \alpha \left(\hat{G}_n \cos \lambda_n \alpha - \hat{H}_n \sin \lambda_n \alpha \right) \right. \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. - \sin \alpha \left(\hat{G}_n \sin \lambda_n \alpha + \hat{H}_n \cos \lambda_n \alpha \right) \right\} \right\} \right\}_{|\alpha=\{\frac{\pi-\delta}{\pi+\delta}\}}.
 \end{aligned} \tag{7.34}$$

Z układem tym związany jest układ równań pomocniczych

$$\begin{aligned}
 & k^{\lambda_n} \left(\hat{A}_n \sin \lambda_n \pi + \hat{B}_n \cos \lambda_n \pi \right) - k_0^{\lambda_n} \left(\hat{G}_n \sin \lambda_n \pi + \hat{H}_n \cos \lambda_n \pi \right) = 0, \\
 & k^{\lambda_n} \left(-\hat{A}_n \sin \lambda_n \pi + \hat{B}_n \cos \lambda_n \pi \right) - k_0^{\lambda_n} \left(\hat{G}_n \sin \lambda_n \pi + \hat{H}_n \cos \lambda_n \pi \right) = 0, \\
 & \frac{k^{\lambda_n}}{m} \left(\hat{A}_n \cos \lambda_n \pi + \hat{B}_n \sin \lambda_n \pi \right) - k_0^{\lambda_n} \left(\hat{G}_n \cos \lambda_n \pi - \hat{H}_n \sin \lambda_n \pi \right) = 0, \\
 & \frac{k^{\lambda_n}}{m} \left(\hat{A}_n \cos \lambda_n \pi - \hat{B}_n \sin \lambda_n \pi \right) - k_0^{\lambda_n} \left(\hat{G}_n \cos \lambda_n \pi - \hat{H}_n \sin \lambda_n \pi \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeżeli przyjmiemy $N = n$, to jest to układ równań otrzymany przez przyrównanie do zera współczynników stojących przy najniższej potęgze r w równaniach (7.34), równoważnych warunkom brzegowym. Warunkiem istnienia niezerowego rozwiązania tego układu jest znikanie wyznacznika charakterystycznego, skąd znajdujemy $\{\lambda_n\} = n$. Z warunku energetycznego wynika, że należy przyjąć $N = 0$.

Podstawiając w równaniach (7.34) $\lambda_n = n$, $N = 0$, $\delta = 0$ przechodzimy z warunkami brzegowymi na powierzchni klina do warunków brzegowych na powierzchni szczyliny. Porządkując następnie równania względem jednakowych potęg r i przyrównując wyrazy stojące przy jednakowych potęgach r po obu stronach równań, otrzymuje się nieskończony układ równań funkcyjnych na dowolne współczynniki obecne w rozwiązaniu. Można

wyznaczyć $2n$ współczynników a ponieważ układ ma strukturę trójkątną, wyznacza się je w sposób efektywny. Pozostałe $2n$ dowolnych współczynników można wyznaczyć z warunków zszycia funkcji w otoczeniu naroża szczeliny z odpowiednimi funkcjami w obszarze zewnętrznym.

W analogiczny sposób znajdujemy rozwiązanie pozostałych równań dla $\hat{H}_z, \hat{E}_r, \hat{E}_\alpha, \hat{H}_z^v, \hat{E}_r^v, \hat{E}_\alpha^v$.

Ostateczną postać rozwiązania z dokładnością do członów liniowych względem $\frac{v}{c}$ można zapisać w formie

$$\begin{aligned}\hat{E} &= \left(1 - \varepsilon m \xi \frac{v}{c^2} r \cos \alpha\right) \mathbf{E}^0, & \hat{H} &= \left(1 - \varepsilon m \xi \frac{v}{c^2} r \cos \alpha\right) \hat{H}, \\ \hat{E}^v &= \left(1 - \xi \frac{v}{c^2} r \cos \alpha\right) \mathbf{E}^{v0}, & \hat{H}^v &= \left(1 - \xi \frac{v}{c^2} r \cos \alpha\right) \hat{H}^{v0},\end{aligned}\quad (7.35)$$

gdzie $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ i $\mathbf{E}^{v0}, \mathbf{H}^{v0}$ są odpowiednio rozwiązaniami w dielektryku i w próżni dla szczeliny nieruchomej. Jak widać ruch szczeliny nie wpłynął tu na rząd osobliwości pola w układzie poruszającym się względem ośrodka. Ze wzorów (7.4), (7.7) oraz związków konstytutywnych wynika, że również rząd rozwiązania w układzie spoczynkowym względem dielektryka pozostanie taki sam.

Asymptotyczna postać rozwiązania w bliskim otoczeniu naroża szczeliny jest następująca:

$$\begin{aligned}\hat{E}_z &= r^0 \hat{B}_0 + r^1 k \xi \left[\hat{A}_1 \sin \alpha + \hat{B}_1 \cos \alpha - \hat{B}_0 \varepsilon m \xi \frac{v}{c^2} \cos \alpha \right] + O(r^2), \\ \hat{H}_r &= r^0 \frac{(-ck)}{2m} \left(\hat{A}_1 \cos \alpha - \hat{B}_1 \sin \alpha \right) + O(r^1), \\ \hat{H}_\alpha &= r^0 \frac{ck}{2m} \left(\hat{A}_1 \sin \alpha + \hat{B}_1 \cos \alpha \right) + O(r^1), \\ \hat{H}_z &= r^0 \hat{H}_0 + r^1 k \xi \left[\left(\hat{G}_1 \sin \alpha + \hat{H}_1 \cos \alpha \right) - \hat{H}_0 \varepsilon m \xi \frac{v}{c^2} \cos \alpha \right] + O(r^2), \\ \hat{E}_r &= r^0 \frac{ck}{2\varepsilon} \left(\hat{G}_1 \cos \alpha - \hat{H}_1 \sin \alpha \right) + O(r^1), \\ \hat{E}_\alpha &= r^0 \frac{-ck}{2\varepsilon} \left(\hat{G}_1 \sin \alpha + \hat{H}_1 \cos \alpha \right) + O(r^1).\end{aligned}\quad (7.36)$$

Rozkład pól mierzonych w układzie spoczynkowym, w otoczeniu naroża szczeliny z dokładnością do członów liniowych względem $\frac{v}{c}$ jest postaci:

w dielektryku

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_z &= r^0 \left[\hat{B}_0 - \frac{vk}{2} (\hat{A}_1 \sin \alpha + \hat{B}_1 \cos \alpha) \right] + O(r^1), \\
 \hat{h}_r &= r^0 \frac{(-ck)}{2m} (\hat{A}_1 \cos \alpha - \hat{B}_1 \sin \alpha) + O(r^1), \\
 \hat{h}_\alpha &= r^0 \left[\frac{ck}{2m} (\hat{A}_1 \sin \alpha + \hat{B}_1 \cos \alpha) - \frac{v}{c} \varepsilon \hat{B}_0 \right] + O(r^1), \\
 \hat{h}_z &= r^0 \left[\hat{H}_0 - \frac{vk}{2} (\hat{G}_1 \sin \alpha + \hat{H}_1 \cos \alpha) \right] + O(r^1), \\
 \hat{e}_r &= r^0 \frac{ck}{2\varepsilon} (\hat{G}_1 \cos \alpha - \hat{H}_1 \sin \alpha) + O(r^1), \\
 \hat{e}_\alpha &= r^0 \left[\frac{-ck}{2\varepsilon} (\hat{G}_1 \sin \alpha + \hat{H}_1 \cos \alpha) - \frac{v}{c} m \hat{H}_0 \right] + O(r^1).
 \end{aligned} \tag{7.37}$$

Z warunków brzegowych (7.20) wynika następujący rozkład pola w szczelinie

$$\begin{aligned}
 \hat{e}_z^v &= r^0 \left(\hat{B}_0 + \frac{vk}{2} \hat{B}_1 \right) + O(r^1), \\
 \hat{h}_r^v &= r^0 \frac{ck}{2m} \hat{A}_1 + O(r^1), \\
 \hat{h}_\alpha^v &= r^0 \left(-\frac{ck}{2} \hat{B}_1 - \frac{v}{c} \varepsilon m \hat{B}_0 \right) + O(r^1), \\
 \hat{h}_z^v &= r^0 \left(\hat{H}_0 + \frac{vk}{2} \hat{H}_1 \right) + O(r^1), \\
 \hat{e}_r^v &= r^0 \frac{(-ck)}{2\varepsilon} \hat{G}_1 + O(r^1), \\
 \hat{e}_\alpha^v &= r^0 \left(\frac{ck}{2} \hat{H}_1 - \frac{v}{c} m \varepsilon \hat{H}_0 \right) + O(r^1).
 \end{aligned} \tag{7.38}$$

7.2.2 Siły elektromagnetyczne

Podstawiając rozwiązanie dla pola elektromagnetycznego mierzonego w układzie spoczynkowym do wzorów na siły elektromagnetyczne (7.20) – (7.23), przy założeniu bezwzględnej zbieżności szeregów co pozwala na ich mnożenie zgodnie z regułami mnożenia szeregów, otrzymuje się wyrażenia na siły elektromagnetyczne, które można zapisać w postaci szeregów potęgowych

$$\mathbf{F} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathbf{F}^n(\alpha, t), \quad \boldsymbol{\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \boldsymbol{\tau}^n(\alpha, t). \tag{7.39}$$

Funkcje opisujące siły elektromagnetyczne w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej propagującej się ze stałą prędkością są regularne, podobnie jak to było w przypadku szczeliny

próżniowej nieruchomej. Nie dadzą one więc wkładu do części osobiwej naprężeń mechanicznych ani też do energii pęknięcia. Z punktu widzenia oceny tendencji do pęknięcia dielektryka nie są one interesujące. Należy jednak pamiętać, że ich szczegółowa postać potrzebna jest do konstrukcji pełnego rozwiązania w otoczeniu naroża szczeliny, co z kolei jest potrzebne, gdy chcemy wyznaczyć wartości dowolnych współczynników występujących w rozwiązaniu lokalnym dla przemieszczeń. Współczynniki te bowiem będą zależne poprzez siły elektromagnetyczne od pola elektromagnetycznego zarówno w otoczeniu naroża szczeliny jak i w obszarze zewnętrznym.

7.2.3 Przemieszczenia generowane przez pole elektromagnetyczne

Rozwiązania problemu dla równań Lamégo (7.24) – (7.27) poszukiwać będziemy w postaci szeregu

$$\mathbf{u}(r, \alpha, t) = \sum_{n=N}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \mathbf{u}^n(\alpha, t), \quad (7.40)$$

gdzie N jest liczbą całkowitą, dodatnią lub ujemną, która będzie określona na podstawie warunku energetycznego (7.27). Wychodzimy tu z założenia, że rozwiązanie dla szczeliny propagującej się ze stałą prędkością powinno mieć taką samą strukturę jak rozwiązanie dla szczeliny nieruchomej, bowiem dla $v = 0$, rozwiązanie którego to poszukujemy powinno przechodzić w rozwiązanie dla szczeliny nieruchomej.

Składowe współczynników \mathbf{u}^n w kierunku r i α wyrazimy za pomocą funkcji pomocniczych $V_i^{n+2}(\alpha, t)$, ($i = 1, 2$)

$$u_r^n = \left(\frac{n}{2} + 1\right) V_1^{n+2} + \partial_\alpha V_2^{n+2}, \quad u_\alpha^n = \partial_\alpha V_1^{n+2} - \left(\frac{n}{2} + 1\right) V_2^{n+2}. \quad (7.41)$$

Podstawiając (7.40) i (7.41) do pierwszego z równań Lamégo (7.10), i biorąc pod uwagę postać objętościowych sił elektromagnetycznych a następnie przyrównując wyrazy stojące przy tych samych potęgach r po obu stronach równania, otrzymuje się nieskończony układ równań różniczkowych na współczynniki $V_i^n(\alpha, t)$, $u_i^n(\alpha, t)$ postaci

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \left(\frac{n}{2} - 1\right) [L_1^{n+2} V_1^{n+2} + D_1^n V_1^n - c_1^{-2} \partial_{tt}^2 V_1^{n-2}] + \\ + \mu \partial_\alpha [L_2^{n+2} V_2^{n+2} + D_2^n V_2^n - c_2^{-2} \partial_{tt}^2 V_2^{n-2}] = G_1^{n+2}, \\ (\lambda + 2\mu) \partial_\alpha [L_1^{n+2} V_1^{n+2} + D_1^n V_1^n - c_1^{-2} \partial_{tt}^2 V_1^{n-2}] + \\ - \mu \left(\frac{n}{2} - 1\right) [L_2^{n+2} V_2^{n+2} + D_2^n V_2^n - c_2^{-2} \partial_{tt}^2 V_2^{n-2}] = G_2^{n+2}, \end{aligned} \quad (7.42)$$

dla ($n = N, N - 1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$). Wprowadzono tu oznaczenia

$$L_i^{n+2} = \frac{(n+2)^2}{4} + \partial_{\alpha\alpha}^2 - \frac{a_i^2}{2} \left\{ \frac{(n+2)^2}{4} + \cos 2\alpha \left[\left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{n}{2} - 1\right) - \partial_{\alpha\alpha}^2 \right] \right\}$$

$$-n \sin 2\alpha \partial_\alpha \}, \quad D_i^n = \frac{v}{c_i^2} [n \cos \alpha - 2 \sin \alpha \partial_\alpha] \partial_t,$$

$$V_i^{n+2} = 0 \text{ dla } n < N, \quad a_i^2 = \frac{v^2}{c_i^2}, \quad (i = 1, 2), \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho},$$

$$G_1^{n+2} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 0 \text{ i dla } n = 2l + 1, \quad l \geq 0, \\ -F_r^n & \text{dla } n = 2l, \quad l \geq 0, \end{cases},$$

$$G_2^{n+2} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 0 \text{ i dla } n = 2l + 1, \quad l \geq 0, \\ -F_\alpha^n & \text{dla } n = 2l, \quad l \geq 0, \end{cases}.$$

Równanie na współczynniki u_z^n , równoważne trzeciemu z równań (7.10)₃, ma postać

$$\mu [L_2^n u_z^n + D_2^{n-2} u_z^{n-2} - c_2^{-2} \partial_t^2 u_z^{n-4}] = G_z^n$$

$$u_z^n = 0 \text{ dla } n < N, \quad (n = N, N + 1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots) \quad (7.43)$$

gdzie

$$G_z^n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 0 \text{ i dla } n = 2l + 1, \quad l \geq 0 \\ -F_z^n & \text{dla } n = 2l, \quad l \geq 0 \end{cases}$$

Warunki brzegowe (7.25) na powierzchni szczeliny można zastąpić przez równoważny im układ równań

$$\sigma_{\alpha\alpha}^n(\pm\pi, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 0 \text{ i dla } n = 2l + 1, \quad l \geq 0, \\ -\tau_{\alpha\alpha}^n(\pm\pi, t) & \text{dla } n = 2l, \quad l \geq 0, \end{cases}$$

$$\sigma_{r\alpha}^n(\pm\pi, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 0 \text{ i dla } n = 2l + 1, \quad l \geq 0, \\ -\tau_{r\alpha}^n(\pm\pi, t) & \text{dla } n = 2l, \quad l \geq 0, \end{cases} \quad (7.44)$$

$$\sigma_{z\alpha}^n(\pm\pi, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 0 \text{ i dla } n = 2l + 1, \quad l \geq 0, \\ -\tau_{z\alpha}^n(\pm\pi, t) & \text{dla } n = 2l, \quad l \geq 0, \end{cases}$$

gdzie

$$\sigma_{\alpha\alpha}^n = \left\{ \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \left[\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \lambda + 2\mu \right] + (\lambda + 2\mu) \partial_\alpha^2 \right\} V_1^{n+2} - n\mu \partial_\alpha V_2^{n+2},$$

$$\sigma_{r\alpha}^n = \mu \left\{ n \partial_\alpha V_1^{n+2} + \left[\left(1 - \frac{n^2}{4} \right) + \partial_\alpha^2 \right] V_2^{n+2} \right\}, \quad (7.45)$$

$$\sigma_{z\alpha}^n = \mu \partial_\alpha u_z^n.$$

Współczynniki τ^n związane są z naprężeniami elektromagnetycznymi (7.39).

Zauważmy, że współczynniki V_i^{n+2} i u_z^n dla $n < 1$ spełniają jednorodne równania Lamégo i jednorodne warunki brzegowe. Z warunku energetycznego (7.27) wynika, że rozwiązanie jest fizycznie dopuszczalne dla $N = 1$. Ponieważ interesuje nas postać asymptotyczna rozwiązania w bliskim otoczeniu naroża szczeliny, a w szczególności część osobliwa naprężeń, poszukujemy tu funkcji $V_i^3(\alpha, t)$ i $u_z^1(\alpha, t)$. Funkcje te oznaczymy tu dla odróżnienia od rozwiązania równań niejednorodnych odpowiednio przez

$V_i^{\circ 3}(\alpha, t), \dot{u}_z^{\circ 1}(\alpha, t)$. Szukujemy ich będziemy w postaci szeregów względem parametrów $\delta_i = \frac{v_i^2}{2c_i^2}$:

$$\begin{aligned} V_i^{\circ 3}(\alpha, t) &= \dot{\Psi}_i^{\circ 0}(\alpha, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\delta_i)^k}{k!} \dot{\Psi}_i^{\circ k}(\alpha, t), \\ \dot{u}_z^{\circ 1}(\alpha, t) &= \dot{w}_z^{\circ 0}(\alpha, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\delta_2)^k}{k!} \dot{w}_z^{\circ k}(\alpha, t), \end{aligned} \quad (7.46)$$

gdzie współczynniki $\dot{\Psi}_i^{\circ n}, \dot{w}_z^{\circ n}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) są zdefiniowane zgodnie z definicją współczynników szeregu Taylora

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_i^{\circ 0}(\alpha, t) &= V_i^3(\alpha, t)|_{\delta_i=0}, \quad \dot{\Psi}_i^{\circ k}(\alpha, t) = \left[\frac{\partial^k V_i^3(\alpha, t)}{\partial \delta_i^k} \right]_{|\delta_i=0}, \\ \dot{w}_z^{\circ 0}(\alpha, t) &= u_z^1(\alpha, t)|_{\delta_2=0}, \quad \dot{w}_z^{\circ k}(\alpha, t) = \left[\frac{\partial^k u_z^1(\alpha, t)}{\partial \delta_2^k} \right]_{|\delta_2=0}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Rozwijając równania (7.42) dla $n = 3$ i (7.43) dla $n = 1$ w szereg Taylora względem parametrów δ_i i przyrównując wyrazy stojące przy tych samych potęgach δ_i do zera, otrzymuje się następujący nieskończony układ równań różniczkowych, o strukturze trójkątnej, na współczynniki $\dot{\Psi}_i^{\circ n}, \dot{w}_z^{\circ n}$

$$\begin{aligned} \left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{9}{4} \right) \dot{\Psi}_i^{\circ 0} &= \begin{cases} \frac{1}{\lambda+2\mu} \left[-M_3 \sin \frac{\alpha}{2} + N_3 \cos \frac{\alpha}{2} \right] & \text{dla } i = 1 \\ \frac{1}{\mu} \left[M_3 \cos \frac{\alpha}{2} + N_3 \sin \frac{\alpha}{2} \right] & \text{dla } i = 2 \end{cases}, \\ \left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{9}{4} \right) \dot{\Psi}_i^{\circ 1} + \mathcal{L}_3 \dot{\Psi}_i^{\circ 0} &= 0, \\ \dots \\ \left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{9}{4} \right) \dot{\Psi}_i^{\circ k} + k \mathcal{L}_3 \dot{\Psi}_i^{\circ k-1} &= 0, \\ \dots \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned} \left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{1}{4} \right) \dot{w}_z^{\circ 0} &= 0, \\ \left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{1}{4} \right) \dot{w}_z^{\circ 1} + \mathcal{L}_1 \dot{w}_z^{\circ 0} &= 0, \\ \dots \\ \left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{1}{4} \right) \dot{w}_z^{\circ k} + k \mathcal{L}_1 \dot{w}_z^{\circ k-1} &= 0, \\ \dots \end{aligned} \quad (7.49)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= - \left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{1}{4} \right) + \cos 2\alpha \left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{3}{4} \right) - \sin 2\alpha \partial_\alpha, \\ \mathcal{L}_3 &= - \left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{9}{4} \right) + \cos 2\alpha \left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{9}{4} \right) + \sin 2\alpha \partial_\alpha. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Wyrazy $r^{\frac{3}{2}} \overset{\circ}{\Psi}_1, r^{\frac{1}{2}} \overset{\circ}{w}_z$ odpowiadają części rozwiązania jednorodnych równań Lamégo $\overset{\circ}{\mathbf{u}} = r^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}^1$ dla $v = 0$. Stąd przyjmujemy (6.53) - (6.56)

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Psi}_1(\alpha, t) &= \mathcal{A}(t) \sin \frac{3}{2}\alpha - \mathcal{B}(t) \cos \frac{3}{2}\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left[-\mathcal{M}(t) \sin \frac{\alpha}{2} + \mathcal{N}(t) \cos \frac{\alpha}{2} \right], \\ \overset{\circ}{\Psi}_2(\alpha, t) &= -\mathcal{A}(t) \cos \frac{3}{2}\alpha - \mathcal{B}(t) \sin \frac{3}{2}\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{\mu} \left[\mathcal{M}(t) \cos \frac{\alpha}{2} + \mathcal{N}(t) \sin \frac{\alpha}{2} \right], \\ \overset{\circ}{w}_z(\alpha, t) &= C(t) \sin \frac{\alpha}{2} + D(t) \cos \frac{\alpha}{2}, \end{aligned} \quad (7.51)$$

gdzie $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, C, D$ są dowolnymi współczynnikami zależnymi od czasu.

Rozwiązując pozostałe równania układu (7.48), (7.49) otrzymujemy następujące wzory dla współczynników $\overset{\circ}{\Psi}_1^k, \overset{\circ}{w}_z^k, (k = 1, 2, 3, \dots)$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Psi}_1^k(\alpha, t) &= \frac{3}{4} \left[-\mathcal{A}(t) \sum_{s=0}^{k-1} Q_s^k \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha + \right. \\ &\quad \left. -\mathcal{B}(t) \sum_{s=0}^{k-1} Q_s^k \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right] + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left[-\mathcal{M}(t) \sum_{s=0}^k Q_s^{k+1} \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{N}(t) \sum_{s=0}^k Q_s^{k+1} \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right], \end{aligned} \quad (7.52)$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Psi}_2^k(\alpha, t) &= \frac{3}{4} k \left[-\mathcal{A}(t) \sum_{s=0}^{k-1} Q_s^k \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{B}(t) \sum_{s=0}^{k-1} Q_s^k \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right] + \end{aligned} \quad (7.53)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\mu} \left[\mathcal{M}(t) \sum_{s=0}^k Q_s^{k+1} \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha + \right. \\
& \left. + \mathcal{N}(t) \sum_{s=0}^k Q_s^{k+1} \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right], \\
\dot{w}_z^k & = \frac{k}{4} \left[-C(t) \sum_{s=0}^{k-1} S_s^k \sin \left(2s + \frac{3}{2} \right) \alpha + \right. \\
& \left. + D(t) \sum_{s=0}^{k-1} S_s^k \cos \left(2s + \frac{3}{2} \right) \alpha \right].
\end{aligned} \tag{7.54}$$

Q_s^k, S_s^k są współczynnikami numerycznymi danymi za pomocą wzorów rekurencyjnych

$$\begin{aligned}
Q_0^1 & = 1, \quad Q_0^2 = 1, \quad Q_1^2 = \frac{1}{8}, \\
Q_s^{k+1} & = \frac{k}{2 [9 - (4s+1)^2]} \left\{ [(4s+5)(4s+7) - 3] Q_{s+1}^k + \right. \\
& \left. - 2 [(4s+1)^2 - 9] Q_s^k + [(4s-3)(4s-5) - 3] Q_{s-1}^k \right\}, \\
& (k = 2, 3, \dots), \quad (s = 0, 1, 2, \dots),
\end{aligned} \tag{7.55}$$

gdzie $Q_s^k = 0$ dla $s < 0$ i $s > k-1$.

$$\begin{aligned}
S_0^1 & = 1, \quad S_0^2 = 1, \quad S_1^2 = -\frac{1}{8}, \\
S_s^{k+1} & = \frac{k}{2 [1 - (4s+3)^2]} \left\{ [(4s+5)(4s+7) - 3] S_{s+1}^k + \right. \\
& \left. - 2 [(4s+3)^2 - 1] S_s^k + [(4s-1)(4s+1) - 3] S_{s-1}^k \right\}, \\
& (k = 2, 3, \dots), \quad (s = 0, 1, 2, \dots),
\end{aligned} \tag{7.56}$$

gdzie $S_s^k = 0$ dla $s < 0$ i $s > k-1$.

Podstawienie otrzymanego rozwiązania do równań (7.44) – (7.45) równoważnych warunkom brzegowym na powierzchni szczeliny, dla $n = 1$, prowadzi do układu równań

$$\begin{aligned}
a_1 A + m_1 M & = 0, \\
b_1 B + n_1 N & = 0, \\
d_1 D & = 0,
\end{aligned} \tag{7.57}$$

gdzie A, B, M, N są nowymi dowolnymi współczynnikami

$$A = 3A, B = 3B, M = \frac{\mathcal{M}}{2\mu(\lambda + 2\mu)}, N = \frac{\mathcal{N}}{2\mu(\lambda + 2\mu)}. \quad (7.58)$$

Współczynniki numeryczne a_1, b_1, m_1, n_1, d_1 dane są za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} a_1 &= \mu + \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \sum_{s=0}^{n-1} Q_s^n \left\{ \left[((4s+1)^2 - 6)(\lambda + 2\mu) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 3\lambda \right] \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n - 2(4s+1)\mu \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right\}, \\ b_1 &= -1 + \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \sum_{s=0}^{n-1} Q_s^n \left\{ 2(4s+1) \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + \right. \\ &\quad \left. + [3 - (4s+1)^2] \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right\}, \\ m_1 &= \mu \left\{ -3(\lambda + \mu) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n Q_s^{n+1} \left\{ \left[((4s+1)^2 - 6)(\lambda + 2\mu) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 3\lambda \right] \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + 2(4s+1)(\lambda + 2\mu) \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right\} \right\}, \\ n_1 &= (\lambda + \mu) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n Q_s^{n+1} \left\{ -2\mu(4s+1) \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + \right. \\ &\quad \left. + (\lambda + 2\mu) [3 - (4s+1)^2] \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right\}, \\ d_1 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \sum_{s=0}^{n-1} (4s+3) S_s^n \right\}. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Z równań tych wyznaczamy 3 spośród 5 dowolnych współczynników

$$M = -\frac{a_1}{m_1} A, N = -\frac{b_1}{n_1} B, D = 0. \quad (7.60)$$

W wyniku otrzymujemy następujący asymptotyczny rozkład przemieszczeń w bliskim otoczeniu naroża szczeliny, spełniających naprężeniowe warunki brzegowe na powierzchni szczeliny i warunki energetyczne w jej narożu

$$\begin{aligned} u_r &= r^{\frac{1}{2}} \left\{ A(t) \left\{ (\lambda + 5\mu) \frac{a_1}{m_1} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2} \alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[3a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + (4s+1) a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\} + \right. \\ &\quad \left. - B(t) \left\{ (\lambda + 5\mu) \frac{b_1}{n_1} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2} \alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[3b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + (4s+1) b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\} \right\} + O(r^1), \end{aligned} \quad (7.61)$$

$$\begin{aligned}
 u_\alpha = & r^{\frac{1}{2}} \left\{ A(t) \left\{ (3\lambda + 7\mu) \frac{a_1}{m_1} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2} \alpha + \right. \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[(4s+1) a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + 3a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \left. \right\} + \\
 & + B(t) \left\{ (3\lambda + 7\mu) \frac{b_1}{n_1} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2} \alpha + \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[(4s+1) b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + 3b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\} + O(r^1), \quad (7.62)
 \end{aligned}$$

$$u_z = r^{\frac{1}{2}} C(t) \left[\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \sum_{s=0}^{n-1} S_s^n \sin \left(2s + \frac{3}{2} \right) \alpha \right] + O(r^1), \quad (7.63)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 a_1^{ns} &= -\frac{n}{8} Q_s^n + \mu \frac{a_1}{m_1} Q_s^{n+1}, & a_2^{ns} &= \frac{n}{8} Q_s^n + (\lambda + 2\mu) \frac{a_1}{m_1} Q_s^{n+1}, \\
 b_1^{ns} &= \frac{n}{8} Q_s^n + \mu \frac{b_1}{n_1} Q_s^{n+1}, & b_2^{ns} &= -\frac{n}{8} Q_s^n + (\lambda + 2\mu) \frac{b_1}{n_1} Q_s^{n+1}.
 \end{aligned} \quad (7.64)$$

Odpowiada im następujący rozkład naprężeń mechanicznych

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} = & r^{-\frac{1}{2}} \left\{ A(t) \left\{ \mu \left[5(\lambda + \mu) \frac{a_1}{m_1} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2} \alpha \right] \right. \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[\left[3 \left(\frac{3}{2} \lambda + \mu \right) - (4s+1)^2 \frac{\lambda}{2} \right] a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
 & \left. + \mu (4s+1) a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \left. \right\} \\
 & - B(t) \left\{ \mu \left[5(\lambda + \mu) \frac{b_1}{n_1} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2} \alpha \right] \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[\left[3 \left(\frac{3}{2} \lambda + \mu \right) - (4s+1)^2 \frac{\lambda}{2} \right] b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
 & \left. + \mu (4s+1) b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \left. \right\} + O(r^0), \quad (7.65)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{r\alpha} = r^{-\frac{1}{2}} \mu \left\{ A(t) \left\{ -(\lambda + \mu) \frac{a_1}{m_1} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2} \alpha \right. \right. \quad (7.66)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[(4s+1) a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} [(4s+1)^2 - 3] a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \} \\
& + B(t) \left\{ -(\lambda + \mu) \frac{b_1}{n_1} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2} \alpha \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[(4s+1) b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} [(4s+1)^2 - 3] b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \} + O(r^0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\alpha} = & r^{-\frac{1}{2}} \left\{ A(t) \left\{ \mu \left[3(\lambda + \mu) \frac{a_1}{m_1} \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3}{2} \alpha \right] \right. \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[\frac{1}{2} [(6 - (4s+1)^2)(\lambda + 2\mu) + 3\lambda] a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
& - \left. \mu(4s+1) a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \} \\
& - B(t) \left\{ \mu \left[3(\lambda + \mu) \frac{b_1}{n_1} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3}{2} \alpha \right] \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[\frac{1}{2} [(6 - (4s+1)^2)(\lambda + 2\mu) + 3\lambda] b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
& - \left. \mu(4s+1) b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \} + O(r^0),
\end{aligned} \tag{7.67}$$

$$\sigma_{rz} = r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} C(t) \left[\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \sum_{s=0}^{n-1} S_s^n \sin \left(2s + \frac{3}{2} \right) \alpha \right] + O(r^0), \tag{7.68}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha z} = & r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} C(t) \left[\cos \frac{\alpha}{2} \right. \\
& - \left. \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \sum_{s=0}^{n-1} (4s+3) S_s^n \cos \left(2s + \frac{3}{2} \right) \alpha \right] + O(r^0).
\end{aligned} \tag{7.69}$$

$A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ są tu dowolnymi współczynnikami zależnymi od czasu, które można wyznaczyć z warunków zszycia na wspólnej granicy otoczenia naroża szczeliny i obszaru zewnętrznego.

Z otrzymanych rezultatów widać, że w bliskim otoczeniu naroża szczeliny próżniowej dominują naprężenia mechaniczne. Naprężenia elektromagnetyczne są opisane funkcjami regularnymi

$$\tau = r^0 \tau^0 + O(r^1).$$

Otrzymana postać rozwiązania jest szczególnie wygodna w przypadku stosowania przybliżeń ze względu na stosunek prędkości szczeliny do prędkości falowej. Dla małych $\frac{v^2}{c^2}$ nieskończone szeregi trygonometryczne obecne w rozwiązaniu przechodzą w szeregi skończone. Dla $v = 0$ rozwiązanie przechodzi w rozwiązanie dla szczeliny próżniowej nieruchomej (6.61) – (6.63). Wynika to z metody konstrukcji rozwiązania.

7.3 Rozkład pól w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej

7.3.1 Pole elektromagnetyczne

Podobnie jak w przypadku szczeliny próżniowej stosujemy transformację Laplace'a (7.29). Transformaty Laplace'a równań Maxwella (7.3) przy uwzględnieniu równań konstytutywnych (7.5) i warunków początkowych (7.19) można sprowadzić do postaci

$$\left[\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{2\varepsilon m v \xi}{c^2} \left(\cos \alpha \partial_r - \frac{1}{r} \sin \alpha \partial_\alpha \right) \right] \hat{E}_z + \quad (7.70)$$

$$-\frac{\varepsilon m \xi^2}{c^2} \hat{E}_z = 0,$$

$$\left[\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{2\varepsilon m v \xi}{c^2} \left(\cos \alpha \partial_r - \frac{1}{r} \sin \alpha \partial_\alpha \right) \right] \hat{H}_z + \quad (7.71)$$

$$-\frac{\varepsilon m \xi^2}{c^2} \hat{H}_z = 0,$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_r &= \left(\frac{c}{\varepsilon \xi} \frac{1}{r} \partial_\alpha - m \frac{v}{c} \sin \alpha \right) \hat{H}_z, & \hat{E}_\alpha &= - \left(\frac{c}{\varepsilon \xi} \partial_r + m \frac{v}{c} \cos \alpha \right) \hat{H}_z, \\ \hat{H}_r &= \left(-\frac{c}{m \xi} \frac{1}{r} \partial_\alpha + \varepsilon \frac{v}{c} \sin \alpha \right) \hat{H}_z, & \hat{H}_\alpha &= \left(\frac{c}{m \xi} \partial_r + \varepsilon \frac{v}{c} \cos \alpha \right) \hat{E}_z. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Równania te opisują z dokładnością do członów liniowych względem $\frac{v}{c}$ pole elektromagnetyczne w układzie poruszającym się względem ośrodka.

Warunki brzegowe na powierzchni szczeliny (7.18) można zastąpić przez równoważne warunki brzegowe dla funkcji w układzie ruchomym

$$\left(\hat{E}_z \right)_{|\alpha=\pm\pi} = 0, \quad \left(\partial_\alpha \hat{H}_z \right)_{|\alpha=\pm\pi} = 0. \quad (7.73)$$

Przypomnijmy, że warunek energetyczny dla pola w układzie poruszającym się, w którym szczelina jest nieruchoma ma postać (7.9)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} (E_{\alpha} H_z - H_{\alpha} E_z) r d\alpha = 0.$$

Rozwiązanie lokalne otrzymujemy w postaci

$$\hat{E}_z = e^{-\frac{\varepsilon m \xi}{c^2} r \cos \alpha} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \hat{A}_{2l+1}(\xi) I_{l+\frac{1}{2}}(\kappa \xi r) \cos \left(l + \frac{1}{2} \right) \alpha + \sum_{l=1}^{\infty} \hat{A}_{2l}(\xi) I_l(\kappa \xi r) \sin l \alpha \right\}, \quad (7.74)$$

$$\hat{H}_z = e^{-\frac{\varepsilon m \xi}{c^2} r \cos \alpha} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \hat{B}_{2l+1}(\xi) I_{l+\frac{1}{2}}(\kappa \xi r) \sin \left(l + \frac{1}{2} \right) \alpha + \hat{B}_0(\xi) I_0(\kappa \xi r) + \sum_{l=1}^{\infty} \hat{B}_{2l}(\xi) I_l(\kappa \xi r) \cos l \alpha \right\}, \quad (7.75)$$

gdzie

$$\kappa^2 = \frac{\varepsilon m}{c^2} \left(1 + \varepsilon m \frac{v^2}{c^2} \right),$$

$I_{\frac{1}{2}}$ są zmodyfikowanymi funkcjami Bessla, \hat{A}_n, \hat{B}_n - dowolne współczynniki, które mogą zostać wyznaczone z warunków zszycia pól na wspólnej granicy otoczenia naroża szczeliny i obszaru zewnętrznego.

Dla $\frac{v}{c} \ll 1$ można przyjąć

$$\kappa^2 = \frac{\varepsilon m}{c^2} + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \quad (7.76)$$

Pole elektromagnetyczne w układzie poruszającym się względem dielektryka w bliskim otoczeniu naroża szczeliny opisane jest przez następującą postać asymptotyczną funkcji

$$\begin{aligned} E_z &= r^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \tilde{I}^E \cos \frac{\alpha}{2} + r \tilde{A}_2 \frac{\kappa}{2} \sin \alpha + O\left(r^{\frac{3}{2}}\right), \\ E_r &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} I^E \cos \frac{\alpha}{2} - r^0 B_2 \frac{c\kappa}{2\varepsilon} \sin \alpha + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right), \\ E_{\alpha} &= -r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} I^E \sin \frac{\alpha}{2} - r^0 B_2 \frac{c\kappa}{2\varepsilon} \cos \alpha + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right), \end{aligned} \quad (7.77)$$

$$\begin{aligned}
 H_z &= r^0 B_0 + r^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\pi}} \tilde{I}^H \sin \frac{\alpha}{2} + r \tilde{B}_2 \frac{\kappa}{2} \cos \alpha + O\left(r^{\frac{3}{2}}\right), \\
 H_r &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{m} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} I^H \sin \frac{\alpha}{2} - r^0 A_2 \frac{c\kappa}{2m} \cos \alpha + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right), \\
 H_\alpha &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{m} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} I^H \cos \frac{\alpha}{2} + r^0 A_2 \frac{c\kappa}{2m} \sin \alpha + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right),
 \end{aligned} \tag{7.78}$$

gdzie

$$I^E = \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \xi^{-\frac{1}{2}} \hat{B}_1(\xi) e^{\xi t} d\xi, \quad I^H = \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \xi^{-\frac{1}{2}} \hat{A}_1(\xi) e^{\xi t} d\xi. \tag{7.79}$$

\tilde{I}^E, \tilde{I}^H są związane ze współczynnikami I^E, I^H zależnościami

$$\tilde{I}^E = \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \xi \tilde{I}^E(\xi) e^{\xi t} d\xi, \quad \tilde{I}^H = \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \xi \tilde{I}^H(\xi) e^{\xi t} d\xi. \tag{7.80}$$

Zależność pozostałych dowolnych współczynników od ich transformat Laplace'a jest następująca

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \hat{A}_2(\xi) e^{\xi t} d\xi, \quad \bar{A}_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \xi \hat{A}_2(\xi) e^{\xi t} d\xi, \\
 B_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \hat{B}_0(\xi) e^{\xi t} d\xi, \\
 B_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \hat{B}_2(\xi) e^{\xi t} d\xi, \quad \bar{B}_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \xi \hat{A}_2(\xi) e^{\xi t} d\xi.
 \end{aligned} \tag{7.81}$$

Biorąc pod uwagę zależności (7.4) między polem elektromagnetycznym mierzonym w dielektryku nieruchomym i w poruszającym się ze stałą prędkością, otrzymujemy rozkład pola elektromagnetycznego w dielektryku nieruchomym w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej propagującej się ze stałą prędkością w postaci

$$\begin{aligned}
 e_r &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} I^E \cos \frac{\alpha}{2} + r^0 \left(-B_2 \frac{c\kappa}{2\varepsilon} + \frac{v}{c} m B_0 \right) \sin \alpha + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right), \\
 e_\alpha &= -r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} I^E \sin \frac{\alpha}{2} + r^0 \left(-B_2 \frac{c\kappa}{2\varepsilon} + \frac{v}{c} m B_0 \right) \cos \alpha + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right), \\
 e_z &= r^{-\frac{1}{2}} v \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} I^H \cos \frac{\alpha}{2} + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right),
 \end{aligned} \tag{7.82}$$

$$\begin{aligned}
 h_r &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{m} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} I^H \sin \frac{\alpha}{2} - r^0 \frac{c\kappa}{2m} A_2 \cos \alpha + O(r^{\frac{1}{2}}), \\
 h_\alpha &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{m} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} I^H \cos \frac{\alpha}{2} + r^0 \frac{c\kappa}{2m} A_2 \sin \alpha + O(r^{\frac{1}{2}}), \\
 h_z &= r^{-\frac{1}{2}} v \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} I^E \sin \frac{\alpha}{2} + r^0 \left(B_0 - v \frac{\kappa}{2} B_2 \right) + O\left(r^{\frac{1}{2}}\right).
 \end{aligned} \tag{7.83}$$

Zauważmy, że w odróżnieniu od pola w otoczeniu naroża nieruchomej szczeliny przewodzącej (6.73), gdzie składowe w kierunku z opisane były funkcjami regularnymi, wszystkie składowe pola elektromagnetycznego mają tu osobliwość rzędu $r^{-\frac{1}{2}}$. Będzie to miało wpływ na ostateczną postać wzoru na energię pęknięcia, co zostanie pokazane w następnym rozdziale, poświęconym kryteriom pęknięcia.

7.3.2 Siły elektromagnetyczne

Podstawiając rozwiązanie dla pola \mathbf{e} , \mathbf{h} do wzorów (7.20) – (7.22) dla elektromagnetycznych sił objętościowych i (7.23) dla naprężeń przy założeniu bezwzględnej zbieżności szeregów, otrzymujemy formalne wyrażenia dla sił elektromagnetycznych, które można przedstawić w postaci

$$F_r = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-2} F_r^n(\alpha, t), \quad F_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-2} F_\alpha^n(\alpha, t), \tag{7.84}$$

$$F_z = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-2} F_z^n(\alpha, t),$$

$$\tau = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \tau^n(\alpha, t). \tag{7.85}$$

Podobnie jak to było w przypadku szczeliny przewodzącej nieruchomej (p. 6.3.2 i 6.3.3), siły i naprężenia elektromagnetyczne otrzymane w sposób formalny nie są fizycznie, gdyż generują przemieszczenia nie spełniające warunku energetycznego (7.27). Przeprowadza się tu rozumowanie analogiczne do podanego w p. 6.3.3. Z tego powodu podobnie jak w tamtym wypadku stosujemy procedurę regularyzacji, definiując siły fizyczne jako tę część wyrażeni formalnych, która generuje fizycznie dopuszczalne przemieszczenia, czyli przemieszczenia spełniające warunek energetyczny (7.27).

Ostatecznie w bliskim otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej, propagującej się ze stałą prędkością $\mathbf{v} = (v \cos \alpha, -v \sin \alpha, 0)$, otrzymuje się następujący rozkład fizycznych sił elektromagnetycznych :

Siły objętościowe

$$F_r = r^{-\frac{3}{2}} \frac{(-1)}{8\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \left\{ \left[vm \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} + m - 1 \right) B_0 - \frac{\kappa c^2 \varepsilon - 1}{2 \varepsilon^2} B_2 \right] I^E + \right.$$

$$+ \frac{\kappa c^2}{2} \frac{m-1}{m} A_2 I^H \left. \right\} \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^{-1}), \quad (7.86)$$

$$F_\alpha = r^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \left\{ \left[v m \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} + m-1 \right) B_0 - \frac{\kappa c^2}{2} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon^2} B_2 \right] I^E + \right. \\ \left. + \frac{\kappa c^2}{2} \frac{m-1}{m} A_2 I^H \right\} \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^{-1}), \quad (7.87)$$

$$F_z = r^{-\frac{3}{2}} \frac{(-1)}{16\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} v \kappa c \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} B_2 I^H \sin \frac{3}{2} \alpha + O(r^{-1}). \quad (7.88)$$

Naprężenia elektromagnetyczne

$$\tau_{rr} = r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \left\{ \left[\left[v m \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} + 2(m-1) \right) B_0 - \frac{\kappa c^2}{2} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon^2} B_2 \right] I^E + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\kappa c^2}{2} \frac{m-1}{m} A_2 I^H \right] \sin \frac{\alpha}{2} + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} v m B_0 - \frac{\kappa c^2}{2} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon^2} B_2 \right) I^E + \frac{\kappa c^2}{2} \frac{m-1}{m} A_2 I^H \right] \sin \frac{3}{2} \alpha \right\} + \\ + O(r^0), \quad (7.89)$$

$$\tau_{\alpha\alpha} = r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \left\{ \left[\left[v m \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} + 2(m-1) \right) B_0 - \frac{\kappa c^2}{2} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon^2} B_2 \right] I^E + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\kappa c^2}{2} \frac{m-1}{m} A_2 I^H \right] \sin \frac{\alpha}{2} + \right. \\ \left. - \left[\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} v m B_0 - \frac{\kappa c^2}{2} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon^2} B_2 \right) I^E + \frac{\kappa c^2}{2} \frac{m-1}{m} A_2 I^H \right] \sin \frac{3}{2} \alpha \right\} + \\ + O(r^0), \quad (7.90)$$

$$\tau_{r\alpha} = r^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \left[\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \left(v m B_0 - \frac{\kappa c^2}{2\varepsilon} B_2 \right) I^E + \right. \\ \left. + \frac{\kappa c^2}{2} \frac{m-1}{m} A_2 I^H \right] \cos \frac{3}{2} \alpha + O(r^0), \quad (7.91)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz} = & r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \left\{ \left[\left(-(m-1) B_0 + v \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon} + m-1 \right) B_2 \right) I^H + \right. \right. \\ & \left. \left. - v \frac{\kappa}{4} (m-1) A_2 I^E \right] \sin \frac{\alpha}{2} + \right. \\ & \left. + v \frac{\kappa}{4} \left[\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} B_2 I^H + (m-1) A_2 I^E \right] \sin \frac{3}{2} \alpha \right\} + O(r^0), \end{aligned} \quad (7.92)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha z} = & r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{16\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \left\{ \left[\left(-(m-1) B_0 + v \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon} + m-1 \right) B_2 \right) I^H + \right. \right. \\ & \left. \left. - v \frac{\kappa}{4} (m-1) A_2 I^E \right] \cos \frac{\alpha}{2} + \right. \\ & \left. + v \frac{\kappa}{4} \left[\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} B_2 I^H + (m-1) A_2 I^E \right] \cos \frac{3}{2} \alpha \right\} + O(r^0), \end{aligned} \quad (7.93)$$

$$\tau_{zz} = r^{-\frac{1}{2}} \frac{\kappa c^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \frac{m-1}{m} A_2 I^H \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^0). \quad (7.94)$$

Zauważmy, że podobnie jak to było w przypadku nieruchomej szczeliny przewodzącej, pole elektromagnetyczne niezależne od zmiennej z generuje wszystkie sześć składowych tensora naprężeń elektromagnetycznych. Wpływa to na stan naprężenia w dielektryku, który jest przestrzenny a nie płaski i antypłaski jak w analogicznym przypadku czysto mechanicznym.

7.3.3 Przemieszczenia generowane przez pole elektromagnetyczne

Rozwiązania problemu dla równań Lamégo (7.24) – (7.27) poszukujemy w postaci szeregu reprezentującego fizycznie dopuszczalne przemieszczenia

$$\mathbf{u}(r, \alpha, t) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \mathbf{u}^n(\alpha, t). \quad (7.95)$$

Składowe współczynników \mathbf{u}^n w kierunku r i α wyrazimy za pomocą potencjałów $V_i^{n+2}(\alpha, t)$, ($i = 1, 2$)

$$u_r^n = \left(\frac{n}{2} + 1 \right) V_1^{n+2} + \partial_\alpha V_2^{n+2}, \quad u_\alpha^n = \partial_\alpha V_1^{n+2} - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) V_2^{n+2} \quad (7.96)$$

Równania Lamégo zastępujemy równoważnym im nieskończonym układem równań, wynikających z podstawienia (7.95) i (7.96) do (7.10) a następnie przyrównania wyrazów

stojących przy jednakowych potęgach r

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{n}{2} - 1\right) [L_1^{n+2} V_1^{n+2} + D_1^n V_1^n - c_1^{-2} \partial_{tt}^2 V_1^{n-2}] + \\ + \mu \partial_\alpha [L_2^{n+2} V_2^{n+2} + D_2^n V_2^n - c_2^{-2} \partial_{tt}^2 V_2^{n-2}] = G_1^{n+2}, \quad (7.97)$$

$$(\lambda + 2\mu) \partial_\alpha [L_1^{n+2} V_1^{n+2} + D_1^n V_1^n - c_1^{-2} \partial_{tt}^2 V_1^{n-2}] + \\ - \mu \left(\frac{n}{2} - 1\right) [L_2^{n+2} V_2^{n+2} + D_2^n V_2^n - c_2^{-2} \partial_{tt}^2 V_2^{n-2}] = G_2^{n+2}, \\ \mu [L_2^n u_z^n + D_2^{n-2} u_z^{n-2} - c_2^{-2} \partial_{tt}^2 u_z^{n-4}] = G_z^n,$$

dla $(n = 1, 2, \dots)$, gdzie

$$G_1^{n+2} = \begin{cases} 1 & \text{dla } n < 1 \\ -F_r^n & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}, \quad G_2^{n+2} = \begin{cases} 1 & \text{dla } n < 1 \\ -F_\alpha^n & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}, \\ G_z^n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n < 1 \\ -F_z^n & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}.$$

Pozostałe oznaczenia jak w (7.42) – (7.43).

Postępując w analogiczny sposób zastępujemy warunki brzegowe (7.25) równoważnym im, nieskończonym układem równań

$$\sigma_{\alpha\alpha}^n(\pm\pi, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 1, \\ -\tau_{\alpha\alpha}^n(\pm\pi, t) & \text{dla } n = 1, 2, \dots, \end{cases} \\ \sigma_{r\alpha}^n(\pm\pi, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 1, \\ -\tau_{r\alpha}^n(\pm\pi, t) & \text{dla } n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (7.98) \\ \sigma_{z\alpha}^n(\pm\pi, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 1, \\ -\tau_{z\alpha}^n(\pm\pi, t) & \text{dla } n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

gdzie $\tau^n(\alpha, t)$ są współczynnikami uogólnionego szeregu potęgowego reprezentującego fizyczne naprężenia elektromagnetyczne. σ^n dane są w zależności od V_i^n i u_z^n wzorami (7.45).

Rozwiązania poszukiwać będziemy w postaci sumy

$$V_i^n(\alpha, t) = \overset{\circ}{V}_i^n(\alpha, t) + \overset{s}{V}_i^n(\alpha, t), \quad u_z^n(\alpha, t) = \overset{\circ}{u}_z^n(\alpha, t) + \overset{s}{u}_z^n(\alpha, t), \quad (7.99)$$

gdzie $\overset{\circ}{V}_i^n, \overset{\circ}{u}_z^n(\alpha, t)$ spełniają jednorodne równania (7.97) i zawierają taką liczbę dowolnych współczynników, która pozwoli spełnić równania równoważne warunkom brzegowym na powierzchni szczeliny (7.98) oraz dowolne warunki brzegowe na granicy otoczenia naroża szczeliny, $\overset{s}{V}_i^n, \overset{s}{u}_z^n(\alpha, t)$ są funkcjami spełniającymi niejednorodne równania (7.97). Konstrukcja funkcji $\overset{s}{V}_i^n, \overset{s}{u}_z^n(\alpha, t)$ podana została w p. 7.2.3. Taką samą procedurę stosujemy w celu wyznaczenia funkcji $\overset{s}{V}_i^n, \overset{s}{u}_z^n(\alpha, t)$.

Interesują nas tu funkcje $V_i^{s^3 s}$. Przedstawiamy je w postaci szeregów Taylora

$$V_i^{s^3}(\alpha, t) = \Psi_i^0(\alpha, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\delta_1)^k}{k!} \Psi_i^k(\alpha, t), \quad (7.100)$$

$$u_z^{s^1}(\alpha, t) = w_z^0(\alpha, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\delta_2)^k}{k!} w_z^k(\alpha, t).$$

Współczynniki $\Psi_i^k(\alpha, t)$, $w_z^k(\alpha, t)$ są zdefiniowane zgodnie z (7.47). Podstawiając (7.100) do równań (7.97) a następnie przyrównując wyrazy stojące po obu stronach równań przy takich samych potęgach δ_i otrzymujemy następujące trójkątnie układy równań różniczkowych na współczynniki szeregów (7.100)

$$\begin{aligned} \left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{9}{4} \right) \Psi_i^0 &= \frac{-2}{\lambda + 2\mu} F_1 \sin \frac{\alpha}{2}, \\ \left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{9}{4} \right) \Psi_i^1 + \mathcal{L}_3 \Psi_i^0 &= 0, \end{aligned} \quad (7.101)$$

$$\left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{9}{4} \right) \Psi_i^k + k \mathcal{L}_3 \Psi_i^{k-1} = 0,$$

$$\begin{aligned} \left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{1}{4} \right) w_z^0 &= -\frac{1}{\mu} Z_1 \sin \frac{3}{2} \alpha, \\ \left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{1}{4} \right) w_z^1 + \mathcal{L}_1 w_z^0 &= 0, \end{aligned} \quad (7.102)$$

$$\left(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \frac{1}{4} \right) w_z^k + k \mathcal{L}_1 w_z^{k-1} = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \left\{ \left[v m \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} + m - 1 \right) B_0 - \frac{\kappa c^2 \varepsilon - 1}{2 \varepsilon^2} B_2 \right] I^E + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa c^2 m - 1}{2 m} A_2 I^H \right\}, \end{aligned} \quad (7.103)$$

$$Z_1 = \frac{(-1)}{16\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} v \kappa c \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} B_2 I^H.$$

Rozwiązanie otrzymuje się w postaci

$$V_1^{s^3} = -\frac{F_1}{\lambda + 2\mu} \left\{ \sin \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta_1)^n}{n!} \sum_{s=0}^n Q_s^{n+1} \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\},$$

$$V_2^{s3} = 0, \quad (7.104)$$

$$u_z^1 = \frac{Z_1}{2\mu} \left\{ \sin \frac{3}{2} \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta_2)^n}{n!} \sum_{s=0}^n S_s^{n+1} \sin \left(2s + \frac{3}{2} \right) \alpha \right\}.$$

Współczynniki numeryczne Q_s^{n+1} , S_s^{n+1} dane są za pomocą wzorów rekurencyjnych (7.55), (7.56).

Podstawiając funkcje $V_i^3 = V_i^{\circ 3} + V_i^{s3}$ ($i = 1, 2$) i $u_z^1 = u_z^{\circ 1} + u_z^{s1}$ do równań (7.98) równoważnych warunkom brzegowym na powierzchni szczeliny otrzymuje się dla $n = 1$ równania postaci

$$\begin{aligned} a_1 A + m_1 M &= -f_1 F_1 - \tau_{\alpha\alpha}^1, \\ b_1 B + n_1 N &= 0, \\ d_1 D &= 0, \end{aligned} \quad (7.105)$$

gdzie

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)} \left\{ -(4\lambda + 5\mu) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \sum_{s=0}^n Q_s^{n+1} [((4s+1)^2 - 6)(\lambda + 2\mu) - 3\lambda] \right\}, \\ \tau_{\alpha\alpha}^1(\pi, t) &= 4F_1(t). \end{aligned} \quad (7.106)$$

Współczynniki a_1, b_1, m_1, n_1, d_1 dane są wzorami (7.59), $A(t), B(t), M(t), N(t), D(t)$ dowolne współczynniki zależne od czasu.

Z równań (7.105) wyznaczamy

$$M = -\frac{1}{m_1} [a_1 A + (4 + f_1) F_1], \quad N = -\frac{b_1}{n_1} B, \quad D = 0.$$

Ostatecznie otrzymujemy następującą asymptotyczną postać przemieszczeń w bliskim otoczeniu naroża szczeliny

$$\begin{aligned} u_r &= r^{\frac{1}{2}} \left\{ A(t) \left\{ (\lambda + 5\mu) \frac{a_1}{m_1} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2} \alpha \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[3a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + (4s+1) a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\} \right. \\ &\quad \left. + F_1(t) \left\{ \left[(\lambda + 5\mu) \frac{4 + f_1}{m_1} - \frac{3}{2(\lambda + 2\mu)} \right] \sin \frac{\alpha}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n Q_s^{n+1} \left[3\mathcal{F}_1 \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + (4s+1) \mathcal{F}_2 \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\} \right\} \end{aligned} \quad (7.107)$$

$$-B(t) \left\{ (\lambda + 5\mu) \frac{b_1}{n_1} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2}\alpha \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[3b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + (4s+1) b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\} + O(r^1),$$

$$u_\alpha = r^{\frac{1}{2}} \left\{ A(t) \left\{ (3\lambda + 7\mu) \frac{a_1}{m_1} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2}\alpha \right. \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[(4s+1) a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + 3a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\} \\ + F_1(t) \left\{ \left[(3\lambda + 7\mu) \frac{4+f_1}{m_1} - \frac{1}{2(\lambda+2\mu)} \right] \cos \frac{\alpha}{2} \right. \quad (7.108) \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n Q_s^{n+1} \left[(4s+1) \mathcal{F}_1 \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + 3\mathcal{F}_2 \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\} \\ + B(t) \left\{ (3\lambda + 7\mu) \frac{b_1}{n_1} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[(4s+1) b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + 3b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\} + O(r^1),$$

$$u_z = r^{\frac{1}{2}} \left\{ C(t) \left[\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \sum_{s=0}^{n-1} S_s^{n-1} \sin \left(2s + \frac{3}{2} \right) \alpha \right] \right. \quad (7.109) \\ \left. + \frac{Z_1(t)}{2\mu} \left[\sin \frac{3}{2}\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \sum_{s=0}^n S_s^{n+1} \sin \left(2s + \frac{3}{2} \right) \alpha \right] \right\} + O(r^1),$$

Tutaj

$$\mathcal{F}_1 = \mu \frac{4+f_1}{m_1} - \frac{1}{2(\lambda+2\mu)}, \quad \mathcal{F}_2 = (\lambda+2\mu) \frac{4+f_1}{m_1}. \quad (7.110)$$

Współczynniki liczbowe a_i^{ns} , b_i^{ns} podane są wzorami (7.64). Funkcje te spełniają warunki brzegowe na powierzchni szczeliny (7.98), warunek energetyczny w narożu szczeliny oraz zawierają dowolne współczynniki $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, które można wyznaczyć z warunków zszycia rozwiązania w otoczeniu naroża szczeliny z rozwiązaniem odpowiedniego problemu w obszarze zewnętrznym.

Rozkład naprężeń mechanicznych w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej, propagującej się ze stałą prędkością w dielektryku poddanym działaniu pola elektromagnetycznego jest opisany przez funkcje

$$\sigma_{rr} = r^{-\frac{1}{2}} \left\{ A(t) \left\{ \mu \left[5(\lambda + \mu) \frac{a_1}{m_1} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha \right] \right. \right. \quad (7.111)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[\left[3 \left(\frac{3}{2} \lambda + \mu \right) - (4s+1)^2 \frac{\lambda}{2} \right] a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
& + \left. \mu (4s+1) a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \} \\
& + F_1(t) \left\{ \left[5\mu (\lambda + \mu) \frac{4+f_1}{m_1} - \frac{2(2\lambda+3\mu)}{\lambda+2\mu} \right] \sin \frac{\alpha}{2} \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n Q_s^{n+1} \left[\left[3 \left(\frac{3}{2} \lambda + \mu \right) - (4s+1)^2 \frac{\lambda}{2} \right] \mathcal{F}_1 \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
& + \left. \mu (4s+1) \mathcal{F}_2 \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \} \\
& - B(t) \left\{ 2\mu \left[(3\lambda+5\mu) \frac{b_1}{n_1} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2} \alpha \right] \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[\left[3 \left(\frac{3}{2} \lambda + \mu \right) - (4s+1)^2 \frac{\lambda}{2} \right] b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
& + \left. \mu (4s+1) b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \} + O(r^0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\alpha} = & r^{-\frac{1}{2}} \mu \left\{ A(t) \left\{ -(\lambda + \mu) \frac{a_1}{m_1} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2} \alpha \right. \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[(4s+1) a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} [(4s+1)^2 - 3] a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \} \\
& + F_1(t) \left\{ - \left[(\lambda + \mu) \frac{4+f_1}{m_1} + \frac{1}{\lambda+2\mu} \right] \cos \frac{\alpha}{2} \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n Q_s^{n+1} \left[(4s+1) \mathcal{F}_1 \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} [(4s+1)^2 - 3] \mathcal{F}_2 \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \} \\
& + B(t) \left\{ -(\lambda + \mu) \frac{b_1}{n_1} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2} \alpha \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[(4s+1) b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} [(4s+1)^2 - 3] b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \} \left. \right\} + O(r^0),
\end{aligned} \tag{7.112}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\alpha} = & r^{-\frac{1}{2}} \left\{ A(t) \left\{ \mu \left[3(\lambda + \mu) \frac{a_1}{m_1} \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3}{2} \alpha \right] \right. \right. & (7.113) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[\frac{1}{2} [(6 - (4s + 1)^2)(\lambda + 2\mu) + 3\lambda] a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
& \left. - \mu(4s + 1) a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \left. \right\} \\
& + F_1(t) \left\{ \left[3\mu(\lambda + \mu) \frac{4 + f_1}{m_1} - \frac{4\lambda + 5\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \right] \sin \frac{\alpha}{2} \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n Q_s^{n+1} \left[\frac{1}{2} [(6 - (4s + 1)^2)(\lambda + 2\mu) + 3\lambda] \mathcal{F}_1 \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
& \left. - \mu(4s + 1) \mathcal{F}_2 \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \left. \right\} \\
& - B(t) \left\{ \mu \left[3(\lambda + \mu) \frac{b_1}{n_1} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3}{2} \alpha \right] \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[\frac{1}{2} [(6 - (4s + 1)^2)(\lambda + 2\mu) + 3\lambda] b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
& \left. - \mu(4s + 1) b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \left. \right\} + O(r^0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rz} = & r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} \left\{ C(t) \left[\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \sum_{s=0}^{n-1} S_s^n \sin \left(2s + \frac{3}{2} \right) \alpha \right] \right. & (7.114) \\
& \left. + \frac{Z_1(t)}{2\mu} \left[\sin \frac{3}{2} \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \sum_{s=0}^n S_s^{n+1} \sin \left(2s + \frac{3}{2} \right) \alpha \right] \right\} + O(r^0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha z} = & r^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{2} \left\{ C(t) \left[\cos \frac{\alpha}{2} \right. \right. & (7.115) \\
& - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \sum_{s=0}^{n-1} (4s + 3) S_s^n \cos \left(2s + \frac{3}{2} \right) \alpha \left. \right\} \\
& + \frac{Z_1(t)}{2\mu} \left[3 \cos \frac{3}{2} \alpha \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \sum_{s=0}^n (4s + 3) S_s^{n+1} \cos \left(2s + \frac{3}{2} \right) \alpha \right] \left. \right\} + O(r^0).
\end{aligned}$$

Powyższe funkcje dla $F_1 = 0$ i dla $Z_1 = 0$ przechodzą w odpowiednie funkcje dla szczeliny próżniowej. Dla $v = 0$ i $F_1 \neq 0$, $Z_1 \neq 0$ funkcje te przechodzą w odpowiednie funkcje dla szczeliny przewodzącej nieruchomej.

7.4 Wnioski

Z otrzymanych rozwiązań wynikają następujące wnioski.

W przypadku *szczeliny próżniowej*, propagującej się ze stałą prędkością ruch szczeliny nie wpływa na rząd osobliwości funkcji opisujących pola elektromagneto-sprężyste w otoczeniu naroża szczeliny. Wynika stąd, że energia elektromagnetyczna nie ma wpływu na propagację szczeliny. Propagacja szczeliny zależć będzie tylko od energii odkształcenia, która w rozpatrywanym tu przypadku oddziaływania pola elektromagnetycznego z dielektrykiem sprężystym zależy od zewnętrznego pola elektromagnetycznego.

W przypadku *szczeliny przewodzącej*, propagującej się ze stałą prędkością ruch szczeliny wpływa na rząd osobliwości pola elektromagnetycznego. Konsekwencją tego jest wkład energii elektromagnetycznej do energii zużywanej na utworzenie nowej powierzchni szczeliny. Konsekwencją tego jest, że jeżeli chcemy badać wpływ pola elektromagnetycznego na proces pęknięcia to właściwymi rozwiązaniami są tylko rozwiązania problemów dla szczelin propagujących się. Jest to zasadnicza cecha, która różni analizę procesu pęknięcia w polu elektromagnetycznym od pęknięcia pod wpływem obciążenia czysto mechanicznego.

Rozdział 8

Parametry pękania elektromagnetycznego

Prezentowane tu podejście do problemu pękania jest takie jak powszechnie stosowane w mechanice pękania. Rozpatrujemy dielektryk w którym znajduje się szczelina. Problemem, który na ogół chce się rozstrzygnąć, jest pod wpływem jakiego obciążenia zacznie się proces propagacji szczeliny, czyli pękania materiału. W przypadku szczelin już propagujących się stawia się również pytanie o relację między prędkością szczeliny a obciążeniem. Ocenę taką przeprowadza się w oparciu o wielkość parametrów pękania takich jak energia potrzebna na utworzenie jednostkowej powierzchni szczeliny, wielkość współczynników intensywności naprężeń czy też geometria naroża jak w przypadku kryterium Barenblatta [28].

W rozpatrywanym tu przypadku obciążeniem jest pole elektromagnetyczne. Jest to z punktu widzenia pękania dielektryków zagadnienie bardzo ciekawe, bowiem jest to rodzaj pola, które wnika w głąb materiału. Może ono mieć działanie powodujące pęknięcie ale znane jest również z faktów doświadczalnych hamujące działanie na propagujące się szczeliny [14]. Z tego powodu stworzenie podstaw teoretycznych, pozwalających na ocenę oddziaływania pola elektromagnetycznego na pęknięcie materiałów o własnościach elektromagnetycznych, wydaje się bardzo potrzebne. Temu celowi służą kryteria pękania. Nie można tu stosować wprost kryteriów sformułowanych w mechanice pękania. W przypadku pękania elektromagnetycznego jedyną właściwą oceną, jak to już podkreślono w Rozdziale 4 przy omawianiu problemów pękania dielektryków pod wpływem pola elektrostatycznego, wydają się być kryteria wynikające z bilansu energii. Ze względu na specyfikę problemu kryteria te wymagają uogólnienia, które pozwoli je stosować w przypadku oddziaływania ośrodka z polem elektromagnetycznym. Obecnie wielu autorów podejmuje takie zadania. Tutaj przedstawimy podejście do problemów dynamicznych rozwinięte przez autorkę w pracach [30], [38] oraz w oddanej w tym roku do druku pracy [41].

8.1 Uogólnione kryterium Griffitha

Jak już wspomiano w części poświęconej zagadnieniom statycznym, w przypadku oddziaływania pola elektromagnetycznego z dielektrykiem sprężystym najbardziej właściwym podejściem do zagadnienia pęknięcia jest podejście biorące za punkt wyjścia bilans energii. Ponieważ dielektryki są na ogół materiałami ceramicznymi zajmować się będziemy problemem pęknięcia kruchego.

Najbardziej znanym i stosowanym kryterium pęknięcia kruchego jest kryterium Griffitha. Ogólne sformułowanie tego kryterium [21] jest szczególnie wygodne w przypadku pęknięcia pod wpływem pola elektromagnetycznego. Wychodzi się tu z bilansu energetycznego dla objętości materialnej ciała zawierającej propagującą się szczelinę, uwzględniając prędkość energii zużywanej na utworzenie nowej powierzchni szczeliny

$$\dot{A} + \dot{Q} - \dot{U} - \dot{T} = \dot{W}, \quad (8.1)$$

gdzie \dot{A} jest mocą sił zewnętrznych działających na ciało, \dot{Q} – ciepło dostarczane w jednostce czasu, \dot{U} – prędkość energii wewnętrznej, \dot{T} – prędkość energii kinetycznej, \dot{W} – moc absorbowana na utworzenie nowej powierzchni szczeliny. Przez siły zewnętrzne rozumiemy oczywiście uogólnione siły zewnętrzne to znaczy nie tylko siły pochodzenia mechanicznego.

Rozpatrzmy teraz objętość materialną dielektryka V_d ograniczoną powierzchnią materialną S_d i zawierającą segment szczeliny o powierzchni S_s . Jeżeli szczelina nie propaguje się, to dla objętości V_d przy pominięciu energii cieplnej spełnione jest prawo zachowania energii (5.7)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_d} \rho \left(\epsilon + \frac{1}{2} \dot{u}_i \dot{u}^i \right) dv &= \int_{V_d} (\rho f_i + \Phi_i) \dot{u}^i dv \\ &+ \oint_{S_d + S_s} [(\sigma^{ki} + \tau^{ki}) \dot{u}_i - \epsilon^{kij} \varepsilon_i \eta_j] n_k ds, \end{aligned} \quad (8.2)$$

gdzie ϵ – gęstość energii wewnętrznej, \mathbf{u} – wektor przemieszczenia, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau}$ – mechaniczny i elektromagnetyczny tensor naprężeń, \mathbf{f} – siła masowa, $\boldsymbol{\Phi}$ – elektromagnetyczna siła objętościowa, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b}$, $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{h} - \mathbf{v} \times \mathbf{d}$ – efektywne natężenie pola elektrycznego i magnetycznego, \mathbf{n} – jednostkowy wektor normalny zewnętrzny do powierzchni. Wychodzimy tu z pełnego nieliniowego modelu dielektryka Dixona – Eringena (p. 5.1, str 97).

Gdy szczelina propaguje się, bilans energii należy uzupełnić o moc zużywaną na utworzenie nowej powierzchni szczeliny $\dot{\gamma}$. Mamy wówczas

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= - \frac{d}{dt} \int_{V_d} \rho \left(\epsilon + \frac{1}{2} \dot{u}_i \dot{u}^i \right) dv + \int_{V_d} (\rho f_i + \Phi_i) \dot{u}^i dv \\ &+ \oint_{S_d + S_s} [(\sigma^{ki} + \tau^{ki}) \dot{u}_i - \epsilon^{kij} \varepsilon_i \eta_j] n_k ds. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Pamiętać należy, że różniczkowanie względem czasu całki po V_d jest różniczkowaniem całki po zmiennej objętości, która może zawierać w wyrażeniu podcałkowym osobliwość. Z tego powodu stosuje się w takim wypadku procedurę przejścia granicznego. Krawędź szczeliny otaczamy powierzchnią S_ϵ . Jest to powierzchnia walca o przekroju kołowym o środku w narożu szczeliny i promieniu ϵ . Walec ten przesuwa się wraz z krawędzią szczeliny gdy szczelina propaguje się. Oznaczając przez V_ϵ objętość walca możemy obliczyć pochodną względem czasu pierwszej całki w 8.3

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_d} \rho \left(\epsilon + \frac{1}{2} \dot{u}_i \dot{u}^i \right) dv &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_{V_d - V_\epsilon} \rho \left(\epsilon + \frac{1}{2} \dot{u}_i \dot{u}^i \right) dv \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_d - V_\epsilon} \rho (\dot{\epsilon} + \ddot{u}_i \dot{u}^i) dv + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \rho \left(\epsilon + \frac{1}{2} \dot{u}_i \dot{u}^i \right) v^m n_m dv, \end{aligned}$$

gdzie \mathbf{v} jest prędkością propagacji szczeliny, \mathbf{n} – jednostkowym wektorem normalnym, zewnętrznym do S_ϵ .

Bilans energii (8.3) przybiera formę

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_d - V_\epsilon} \rho (\dot{\epsilon} + \ddot{u}_i \dot{u}^i) dv + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \rho \left(\epsilon + \frac{1}{2} \dot{u}_i \dot{u}^i \right) v^m n_m dv \\ &\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_d - V_\epsilon} (\rho f_i + \Phi_i) \dot{u}^i dv + \oint_{S_d + S_\epsilon} [(\sigma^{ki} + \tau^{ki}) \dot{u}_i - \epsilon^{kij} \varepsilon_i \eta_j] n_k ds. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Biorąc pod uwagę lokalną postać prawa zachowania energii (5.8)

$$\rho \dot{\epsilon} = (\sigma^{ki} + \tau^{ki}) d_{ki} + \dot{\eta}_i \dot{b}^i + \varepsilon_i \dot{d}^i,$$

równania równowagi (5.4)

$$(\sigma^i_j + \tau^i_j)_{;i} + \Phi_j + \rho f_j = \rho \ddot{u}_i$$

i równania Maxwella (5.1)

$$-\dot{b}^k = \epsilon^{kij} \varepsilon_{j;i}, \quad \dot{d}^k = \epsilon^{kij} \eta_{j;i},$$

oraz stosując twierdzenie Greena i biorąc pod uwagę warunki brzegowe na powierzchni szczeliny, znajdujemy następującą postać uogólnionego kryterium Griffitha

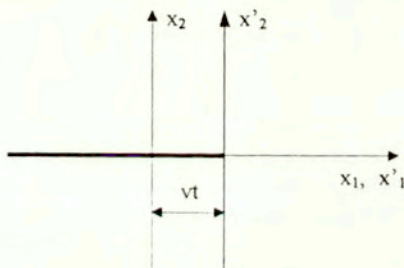
$$\dot{\gamma} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[(\sigma^{ij} + \tau^{ij}) \dot{u}_j - \epsilon^{ijk} \varepsilon_j \eta_k + \rho \left(\epsilon + \frac{1}{2} \dot{u}_j \dot{u}^j \right) v^i \right] n_i ds. \quad (8.5)$$

Tutaj \mathbf{n} jest jednostkowym wektorem normalnym *zewnątrznym* do powierzchni S_ϵ . Jest to postać uogólnionego kryterium Griffitha w jednostkach CGS. W pewnych wypadkach wygodniej jest używać jednostek Gaussa. W jednostkach Gaussa kryterium ma postać

$$\dot{\gamma} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[(\sigma^{ij} + \tau^{ij}) \dot{u}_j - \frac{c}{4\pi} \epsilon^{ijk} \epsilon_j \eta_k + \rho \left(\epsilon + \frac{1}{2} \dot{u}_j \dot{u}^j \right) v^i \right] n_i ds. \quad (8.6)$$

W wyrażeniu podcałkowym we wzorach (8.5), (8.6) występują funkcje określone w układzie współrzędnych, który jest układem spoczynkowym dla dielektryka. Przyjmijmy jako układ spoczynkowy kartezjański układ współrzędnych $O: (x_1, x_2, x_3)$. Załóżmy, że powierzchnia szczeliny określona jest w tym układzie relacjami $S_s: x_1 < vt, x_2 = \pm 0, |x_3| < \infty$. Wprowadźmy teraz układ kartezjański $O': (x'_1, x'_2, x'_3)$, o osi x'_2 pokrywającej się z krawędzią szczeliny, związany z układem spoczynkowym

$$x'_1 = x_1 - vt, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3.$$



Dla funkcji wyrażonych w zależności od zmiennych x'_1, x'_2, t zachodzą relacje

$$f(x'_1, x'_2, t) = f(x_1 - vt, x_2, t), \quad \dot{f} = \partial_1 f - v \partial_{t'} f.$$

Funkcje w wyrażeniu podcałkowym w (8.5) lub (8.6) wygodnie jest wyrazić w zależności od zmiennych x'_1, x'_2, t . Związane jest to z faktem, że całkowanie odbywa się po powierzchni poruszającej się względem układu spoczynkowego a nieruchomej w układzie x'_1, x'_2, x'_3 . Weźmy pod uwagę, że wkład do mocy pęknięcia $\dot{\gamma}$ dadzą tylko części osobliwe funkcji podcałkowych. Ogólnie możemy zapisać funkcje osobliwe w otoczeniu naroża szczeliny w postaci asymptotycznej

$$f = r^{-\kappa} f_0(x'_1, x'_2, t) + O\left(r^{-\kappa + \frac{1}{2}}\right), \quad r = \sqrt{(x'_1)^2 + (x'_2)^2}, \quad \kappa > 0,$$

gdzie przez f_0 oznaczono część regularną funkcji. Ponieważ pochodna cząstkowa względem czasu nie zmienia rzędu osobliwości funkcji, można przyjąć dla części osobliwych funkcji

$$\dot{f} \approx -v \partial_{t'} f. \quad (8.7)$$

Jeżeli uwzględnimy sformułowanie Griffitha, że $\dot{\gamma} = 2Gvdt$, gdzie vdt jest przyrostem długości szczeliny a G powierzchniowa energia właściwą to otrzymamy ostatecznie następującą postać kryterium pęknięcia

$$G = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left\{ \left[(\sigma^{ij} + \tau^{ij}) u_{j;1'} + \frac{1}{v} \epsilon^{ijk} \varepsilon_j \eta_k \right] n_{i'} - \rho \left[\epsilon + \frac{v^2}{2} (u_{j;1'})^2 \right] n_{1'} \right\} ds,$$

$$G = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left\{ \left[(\sigma^{ij} + \tau^{ij}) u_{j;1'} + \frac{c}{4\pi v} \epsilon^{ijk} \varepsilon_j \eta_k \right] n_{i'} - \rho \left[\epsilon + \frac{v^2}{2} (u_{j;1'})^2 \right] n_{1'} \right\} ds. \quad (8.8)$$

Jest to postać kryterium dla ogólnego nieliniowego modelu dielektryka Dixona-Eringtona zapisane odpowiednio w układzie jednostek CGS i Gaussa.

Dla pól wyznaczonych w oparciu o przybliżenie quasiliniowe kryterium Griffitha można zapisać w nieco innej formie. Przy założeniu małych prędkości przemieszczeń $\varepsilon \approx e$, $\eta \approx h$.

Pełną energię wewnętrzną przedstawiamy w postaci sumy (5.16)

$$\rho\epsilon = \rho\epsilon^M + \rho\epsilon^C + \rho\epsilon^E \quad (8.9)$$

gdzie

$$\epsilon^M = \epsilon^M(e_{ij}), \quad \epsilon^C = \epsilon^C(e_{ij}, d_k, b_k), \quad \epsilon^E = \epsilon^E(d_k, b_k)$$

$\rho\epsilon^M$ jest energią odkształcenia, $\rho\epsilon^C$ energią sprzężenia elektromagneto-sprężystego, $\rho\epsilon^E$ energią elektromagnetyczną dla ciała sztywnego. Związki konstytutywne dla wielkości elektromagnetycznych można przedstawić w postaci sumy

$$\begin{aligned} e_k &= e_k^C + e_k^E, & h_k &= h_k^C + h_k^E, \\ e_k^C &\equiv \rho \frac{\partial \epsilon^C}{\partial d^k}, & h_k^C &\equiv \rho \frac{\partial \epsilon^C}{\partial b^k}, \\ e_k^E &\equiv \rho \frac{\partial \epsilon^E}{\partial d^k}, & h_k^E &\equiv \rho \frac{\partial \epsilon^E}{\partial b^k}, \end{aligned} \quad (8.10)$$

gdzie e_k^E , h_k^E są opisane przez związki konstytutywne dla ciała sztywnego i zależą tylko od indukcji dielektrycznej i magnetycznej, natomiast związki konstytutywne dla e_k^C , h_k^C wynikają z energii sprzężenia i zależą od wielkości elektromagnetycznych oraz odkształceń.

Dla przybliżenia quasiliniowego dla izotropowego i jednorodnego dielektryka kryterium (8.8) można zapisać w postaci

$$G = G^{MC} + G^E, \quad (8.11)$$

gdzie

$$G^{MC} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left\{ (\sigma^{ij} + \tau^{ij}) u_{j;1'} n_{i'} - \rho \left[\epsilon^M + \epsilon^C + \frac{v^2}{2} (u_{j;1'})^2 \right] n_{1'} \right\} ds. \quad (8.12)$$

G^E odpowiednio w układzie jednostek CGS i Gaussa dane jest wzorami

$$G^E = -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left\{ \frac{1}{v} \epsilon^{ijk} e_j h_k n_{i'} - \frac{1}{2} [\epsilon (e_i)^2 + m (h_i)^2] n_{1'} \right\} ds,$$

$$G^E = -\frac{1}{8\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left\{ \frac{c}{v} \epsilon^{ijk} e_j h_k n_{i'} - \frac{1}{2} [\epsilon (e_i)^2 + m (h_i)^2] n_{1'} \right\} ds. \quad (8.13)$$

Zatem w przybliżeniu quasiliniowym całkowita energia powierzchniowa zużyta na utworzenie jednostkowej powierzchni szczeliny jest równa sumie energii pochodzącej od energii mechanicznej i energii sprzężenia oraz wkładu energii pola elektromagnetycznego dla ciała sztywnego.

Wzory te stanowią wyjściowe formuły dla otrzymania uogólnionego kryterium Irvina dla pęknięcia elektromagnetycznego, znacznie wygodniejsze do stosowania niż (8.8).

8.2 Niezmiennicza \mathcal{J} całka

Zdefiniujmy teraz następującą całkę

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{2} \int_S \left\{ [(\sigma^{ij} + \tau^{ij}) u_{j;1'} + \epsilon^{ijk} \epsilon_j \eta_k] n_{i'} - \left[\rho \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} (u_{j;1'})^2 \right) - H \right] n_{1'} \right\} ds, \quad (8.14)$$

gdzie H jest funkcją spełniającą równanie

$$\frac{\partial H}{\partial x_{1'}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{1'}} (\rho f_{j'} + \Phi_{j'}). \quad (8.15)$$

Tutaj S jest dowolną powierzchnią otaczającą naroże szczeliny, ustaloną w układzie poruszającym się względem dielektryka O' , a w układzie spoczynkowym O poruszającą się z prędkością $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Należy pamiętać, że funkcje podcałkowe są zdefiniowane w układzie spoczynkowym O .

W układzie O' równania ruchu mają postać

$$(\sigma_{ij} + \tau_{ij})_{;i'} = -(\rho f_j + \Phi_j) + \rho \left(v^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_{1'}^2} - 2v \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_{1'}} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right). \quad (8.16)$$

Zauważmy, że z lokalnego prawa zachowania energii

$$\rho \dot{\epsilon} = (\sigma^{ki} + \tau^{ki}) d_{ki} + \eta_i \dot{b}^i + \epsilon_i \dot{d}^i$$

ze względu na (8.7), wynika następujący związek dla części osobliwych funkcji

$$-v (\rho \epsilon^{(s)})_{;1'} = -v (\sigma^{ki} + \tau^{ki})^{(s)} (u_{k;1'})^{(s)} + \left(\eta_i \dot{b}^i \right)^{(s)} + \left(\epsilon_i \dot{d}^i \right)^{(s)}.$$

Część osobliwa pól elektromagneto-sprężystych będzie spełniała równania

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{ij}^{(s)} + \tau_{ij}^{(s)} \right)_{;i'} &= - \left(\rho f_j^{(s)} + \Phi_j^{(s)} \right) + \rho v^2 \frac{\partial^2 u_i^{(s)}}{\partial x_{j'}^2} \\ \epsilon_{ijk} \varepsilon_{j'}^{(s)} &= - \left(\dot{b}_i \right)^{(s)}, \quad \epsilon_{ijk} \eta_k^{(s)} = \left(\dot{d}^i \right)^{(s)} \end{aligned} \quad (8.17)$$

Funkcje są tu określone w układzie spoczynkowym w tym sensie, że nie użyto tu wzorów transformacyjnych. Dotyczy to przede wszystkim pola elektromagnetycznego. Natomiast różniczkowanie odbywa się względem zmiennych x_i' ($i = 1, 2$) przy czym dla zmiennych przestrzennych $f_{;a} = f_{;i'}$.

Biorąc po uwagę powyższe związki można wykazać, że wartość całki \mathcal{J} obliczonej z części osobliwych funkcji podcałkowych po powierzchni ograniczającej obszar nie zawierający szczeliny jest równa zeru. Tym samym wartość całki nie zależy od drogi całkowania, czyli od wyboru powierzchni S . Całka ta ma bliski związek z całką (8.8) wynikającą z uogólnionego kryterium Griffitha i reprezentuje bilans energii w obszarze ograniczonym powierzchnią S .

Pomijając we wzorach (8.14), (8.15) wyrazy pochodzenia elektromagnetycznego, otrzymuje się całkę \mathcal{J} znaną z mechaniki pęknięcia [43], [6].

Dla przybliżenia quasiliniowego izotropowego i jednorodnego dielektryka niezmienniczą całkę \mathcal{J} można przedstawić w postaci dwóch całek niezmienniczych

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}^{MC} + \mathcal{J}^E, \quad (8.18)$$

gdzie

$$\mathcal{J}^{MC} = -\frac{1}{2} \int_S \left\{ (\sigma^{ij} + \tau^{ij}) u_{j;1'} n_{i'} - \left[\rho \left(\epsilon^M + \epsilon^C + \frac{v^2}{2} (u_{j;1'})^2 \right) - H \right] n_{1'} \right\} ds, \quad (8.19)$$

natomiast \mathcal{J}^E odpowiednio w układzie jednostek CGS i Gaussa jest dane wzorami

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^E &= -\frac{1}{2} \int_S \left\{ \frac{1}{v} \epsilon^{ijk} e_j h_k n_{i'} - \frac{1}{2} [\varepsilon (e_i)^2 + m (h_i)^2] n_{1'} \right\} ds \quad - \text{CGS} \\ \mathcal{J}^E &= -\frac{1}{8\pi} \int_S \left\{ \frac{c}{v} \epsilon^{ijk} e_j h_k n_{i'} - \frac{1}{2} [\varepsilon (e_i)^2 + m (h_i)^2] n_{1'} \right\} ds \quad - \text{Gauss} \end{aligned} \quad (8.20)$$

Wzory te mają związek z uogólnionym kryterium pęknięcia Griffitha w postaci (8.11) – (8.13). Energia G^E oraz całka \mathcal{J}^E w granicy gdy powierzchnia $S \rightarrow 0$ są sobie równe. W tym sensie całka \mathcal{J}^E reprezentuje wkład energii elektromagnetycznej w energię zużytą na utworzenie jednostki powierzchni szczeliny. W przypadku energii G^{MC} i niezmienniczej całki \mathcal{J}^{MC} związek między obydwoma całkami jest bardziej skomplikowany. Należy tu wziąć pod uwagę dwa przypadki.

1. Siła masowa \mathbf{f} i elektromagnetyczna siła objętościowa Φ nie mają osobliwości w narożu szczeliny. Tak jest w przypadku szczeliny próżniowej. Wówczas energia G^{MC} dana wzorem (8.12) oraz całka \mathcal{J}^{MC} w granicy, gdy powierzchnia $S \rightarrow 0$, są sobie równe.
2. Elektromagnetyczna siła objętościowa ma w narożu szczeliny fizycznie dopuszczalną osobliwość rzędu $r^{-\frac{3}{2}}$. Ma to miejsce w przypadku szczeliny przewodzącej. Wówczas wyrażenia podcałkowe we wzorze na wkład energii odkształcenia i sprężenia do energii potrzebnej na utworzenie jednostki powierzchni szczeliny G^{MC} i w całce \mathcal{J}^{MC} różnią się o wyraz H . Oznaczmy wartość całki $\mathcal{J}_\epsilon^{MC}$ obliczonej po powierzchni S_ϵ zdefiniowanej tak jak we wzorze (8.12) przez $\mathcal{J}_\epsilon^{MC}$. Ponieważ wartość całki obliczonej z części osobliwych funkcji nie zależy od wyboru drogi całkowania możemy w szczególności wybrać jako powierzchnię S_ϵ prostopadłościan o ścianach poziomych $|x_{1'}| < a$, $|x_{2'}| = \epsilon$ i pionowych $|x_{1'}| = a$, $|x_{2'}| < \epsilon$. Wówczas mamy

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\epsilon^{MC} = -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^a [(\sigma_{2i} + \tau_{2i}) u_{i,1'}] \Big|_{x_{2'}=-\epsilon}^{x_{2'}=\epsilon} dx_{1'}. \quad (8.21)$$

Widać, że w granicy po ciągu prostopadłościanów mamy odpowiedniość

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\epsilon^{MC} = G^{MC}. \quad (8.22)$$

A zatem można przyjąć, że granica z niezmienniczej całki \mathcal{J}^{MC} , obliczonej po ciągu prostopadłościanów zbiegających do dwustronnego odcinka pokrywającego się z powierzchnią szczeliny i jej przedłużeniem, jest równa wkładowi energii odkształcenia i energii sprężenia do energii zużywanej na utworzenie nowej powierzchni szczeliny.

8.3 Uogólnione współczynniki intensywności

W mechanice pękania mamy do czynienia ze współczynnikami intensywności naprężeń, które w rozwiązywaniu lokalnym dla przemieszczeń w otoczeniu naroża szczeliny są dowolnymi współczynnikami. Współczynniki te wyznacza się dla konkretnej geometrii ciała ze szczeliną i danego obciążenia zewnętrznego analitycznie lub doświadczalnie. Wprowadzenie definicji współczynników intensywności naprężeń pozwoliło przejść od kryterium Griffitha do kryterium Irvina, które wyraża zależność energii zużytej na utworzenie nowej powierzchni szczeliny od współczynników intensywności naprężeń. Kryterium w postaci Irvina jest więc znacznie wygodniejsze dla prognozowania propagacji szczeliny niż w oryginalnym sformułowaniu Griffitha.

Ponieważ chcemy otrzymać uogólnioną postać kryterium Irvina wprowadzimy teraz definicje uogólnionych współczynników intensywności. Będą to definicje współczynników

intensywności pola elektromagnetycznego, współczynników intensywności naprężeń mechanicznych i współczynników intensywności naprężeń elektromagnetycznych. Współczynniki intensywności definiować będziemy w układzie współrzędnych cylindrycznych r, α, z , o początku w narożu szczeliny, takim samym jaki używany był w poprzednich rozdziałach dla opisu pól w otoczeniu naroża szczeliny (*Rozdział 6, 7*).

Współczynniki intensywności pola elektromagnetycznego oznaczать będziemy przez \mathcal{I}^E i \mathcal{I}^H . Zdefiniujemy je tu następująco

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^E &= \varepsilon \lim_{r \rightarrow 0} r^{\frac{1}{2}} e_r(r, 0, t), & \mathcal{I}^H &= m \lim_{r \rightarrow 0} r^{\frac{1}{2}} h_\alpha(r, 0, t), & - \text{CGS}, \\ \mathcal{I}^E &= \frac{\varepsilon}{c} \lim_{r \rightarrow 0} r^{\frac{1}{2}} e_r(r, 0, t), & \mathcal{I}^H &= \frac{m}{c} \lim_{r \rightarrow 0} r^{\frac{1}{2}} h_\alpha(r, 0, t). & - \text{Gauss.} \end{aligned} \quad (8.23)$$

Nazywać będziemy \mathcal{I}^E współczynnikiem intensywności pola elektrycznego a \mathcal{I}^H współczynnikiem intensywności pola magnetycznego. Współczynniki te w rozwiązaniu lokalnym dla pola elektromagnetycznego w otoczeniu naroża szczeliny są dowolne i dla danej geometrii ciała ze szczeliną oraz zadanego pola zewnętrznego wyznacza się je z warunków ciągłości pól w otoczeniu naroża szczeliny i w obszarze zewnętrznym.

Zauważmy, że współczynniki intensywności pola elektrycznego i magnetycznego w przypadku szczeliny próżniowej, zarówno dla szczeliny nieruchomej jak i propagującej się, są równe zeru (6.33). W przypadku nieruchomej szczeliny przewodzącej są one różne od zera i rozkład pola elektromagnetycznego w bliskim otoczeniu naroża szczeliny można przedstawić w postaci (6.73) (w układzie jedn. Gaussa)

$$\begin{aligned} e_z &= r^{\frac{1}{2}} 2\tilde{\mathcal{I}}^H \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^1), \\ h_r &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{\eta} \mathcal{I}^H \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \\ h_\alpha &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{\eta}{m} \mathcal{I}^H \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \\ h_z &= r^0 B_0 + O(r^{\frac{1}{2}}), \\ e_r &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{\varepsilon} \mathcal{I}^E \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \\ e_\alpha &= -r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{\varepsilon} \mathcal{I}^E \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \end{aligned} \quad (8.24)$$

gdzie $\tilde{\mathcal{I}}^H = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \zeta \mathcal{I}^H(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta$, \mathcal{I}^H transformata Laplace'a współczynnika intensywności pola magnetycznego.

Pole w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej propagującej się ze stałą prędkością

w bliskim otoczeniu naroża szczeliny jest opisane funkcjami (w układzie Gaussa)

$$\begin{aligned}
 e_z &= r^{-\frac{1}{2}} v \mathcal{I}^H \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \\
 h_r &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{\mathcal{I}} \mathcal{I}^H \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \\
 h_\alpha &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{\eta}{m} \mathcal{I}^H \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \\
 h_z &= r^{-\frac{1}{2}} v \mathcal{I}^E \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \\
 e_r &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{\varepsilon} \mathcal{I}^E \cos \frac{\alpha}{2} + O(r^0), \\
 e_\alpha &= -r^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{\varepsilon} \mathcal{I}^E \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^0).
 \end{aligned} \tag{8:25}$$

Widać, że tylko składowe w kierunku z różnią się opisem w przypadku szczeliny nieruchomej i ruchomej. W przypadku szczeliny nieruchomej są one opisane funkcjami regularnymi, podczas gdy w przypadku szczeliny propagującej się składowe te mają w narożu osobliwość rzędu $r^{-\frac{1}{2}}$. Rzutuje to na wkład energii pola elektromagnetycznego do energii zużywanej na utworzenie nowej powierzchni szczeliny. Wynika stąd, że pole elektromagnetyczne daje wkład do tej energii tylko wówczas, gdy szczelina doznaje przyrostu długości. Wynika to z różnicy w opisie pola w przypadku gdy ośrodek się porusza w stosunku do opisu w układzie spoczynkowym, co związane jest z postacią równań Maxwella.

Współczynniki intensywności naprężeń definiujemy zgodnie z definicją klasyczną

$$\begin{aligned}
 K_I^M &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{\alpha\alpha}(r, 0, t), & K_{II}^M &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{r\alpha}(r, 0, t), \\
 K_{III}^M &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{z\alpha}(r, 0, t).
 \end{aligned} \tag{8.26}$$

W analogiczny sposób definiujemy współczynniki intensywności naprężeń elektromagnetycznych

$$\begin{aligned}
 K_I^E &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{\alpha\alpha}(r, 0, t), & K_{II}^E &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{r\alpha}(r, 0, t), \\
 K_{III}^E &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{z\alpha}(r, 0, t).
 \end{aligned} \tag{8.27}$$

Współczynniki intensywności naprężeń elektromagnetycznych w rozwiązaniu dla przemieszczeń nie są dowolnymi współczynnikami, lecz zależą od parametrów pola elektromagnetycznego w otoczeniu naroża szczeliny. Biorąc pod uwagę rozkład naprężeń elektromagnetycznych w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej, propagującej się ze stałą prędkością $\mathbf{v} = (v \cos \alpha, -v \sin \alpha, 0)$ (7.90) – (7.93) definicje współczynników intensywności naprężeń elektromagnetycznych dla tego przypadku są

$$\begin{aligned}
 K_I^E &= 0, & K_{II}^E &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left(v m B_0 - \frac{\kappa c^2}{2\varepsilon} B_2 \right) \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \mathcal{I}^E + \frac{\kappa c^2}{2} \frac{m - 1}{m} A_2 \mathcal{I}^H \right], \\
 K_{III}^E &= \frac{c}{8\sqrt{2\pi}} \left[-(m - 1) B_0 + v \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} + m - 1 \right) B_2 \right] \mathcal{I}^H.
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

A_2, B_0, B_2 są tu dowolnymi współczynnikami zależnymi od czasu, związanymi z rozwiązaniem lokalnym dla pola elektromagnetycznego, $\mathcal{I}^E, \mathcal{I}^H$ - współczynniki intensywności pola elektromagnetycznego (8.23).

Dla nieruchomej szczeliny przewodzącej odpowiednie definicje otrzymuje się przez podstawienie $v = 0$ we wzorach (8.28).

Dla szczelin próżniowych nieruchomej oraz propagującej się naprężenia elektromagnetyczne w otoczeniu naroża szczeliny są opisane funkcjami regularnymi i współczynniki intensywności naprężeń elektromagnetycznych są równe zeru.

W przypadku szczeliny próżniowej, zarówno nieruchomej jak i propagującej się naprężenia mechaniczne nie zawierają w sposób jawny wyrazów pochodzenia elektromagnetycznego (6.92), (7.65) - (7.69). Jednak w przypadku szczeliny przewodzącej naprężenia mechaniczne zawierają w sposób jawny wyrazy zależne od parametrów pola elektromagnetycznego w otoczeniu naroża szczeliny (6.93), (7.111) - (7.115). Stąd współczynniki intensywności naprężeń mechanicznych K_{II}^M, K_{III}^M zdefiniowane przez (8.26) nie są w rozwiązaniu lokalnym dla przemieszczeń dowolne, bowiem zawierają wyrazy zależne od pola elektromagnetycznego w otoczeniu naroża szczeliny. Z tego względu współczynniki intensywności naprężeń mechanicznych K_{II}^M, K_{III}^M przedstawiamy w postaci sumy

$$K_{II}^M = K_{II}^{MC} + K_{II}^{ME}, \quad K_{III}^M = K_{III}^{MC} + K_{III}^{ME}. \quad (8.29)$$

Jako współczynniki $K_{II}^{ME}, K_{III}^{ME}$ definiuje się tu tę część współczynników K_{II}^M, K_{III}^M , która zależy w sposób jawny od parametrów pola elektromagnetycznego w otoczeniu naroża szczeliny. Współczynniki $K_{II}^{MC}, K_{III}^{MC}$ są w rozwiązaniu lokalnym dla przemieszczeń dowolne i odpowiadają współczynnikom intensywności naprężeń dla przypadku mechanicznego.

Dla szczeliny próżniowej współczynniki $K_{II}^{ME}, K_{III}^{ME}$ są równe zeru. Dla szczeliny przewodzącej propagującej się ze stałą prędkością na podstawie wzorów (7.112), (7.115) oraz definicji (8.26), (8.29) otrzymuje się

$$\begin{aligned} K_{II}^{ME} &= \sqrt{2\pi} F_1(t) k_{II}^E, \\ K_{III}^{ME} &= \sqrt{2\pi} Z_1(t) k_{III}^E \end{aligned} \quad (8.30)$$

gdzie (7.103)

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \frac{1}{8\pi} \left\{ \left[vm \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} + m - 1 \right) B_0 - \frac{\kappa c^2 \varepsilon - 1}{2 \varepsilon^2} B_2 \right] \mathcal{I}^E \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa c^2 m - 1}{2 m} A_2 \mathcal{I}^H \right\} \\ Z_1(t) &= -\frac{1}{16\pi} v \kappa c \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} B_2 \mathcal{I}^H \\ \kappa^2 &= \frac{\varepsilon m}{c^2} + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

We wzorach tych poza współczynnikami intensywności pola elektrycznego i magnetycznego występują dowolne współczynniki zależne od czasu A_2, B_0, B_2 , które wyznacza

się z warunków zszycia dla pola elektromagnetycznego na wspólnej granicy otoczenia naroża szczeliny i obszaru zewnętrznego. Gdy znane jest pole elektromagnetyczne w całym obszarze współczynniki $F_1(t)$, $Z_1(t)$ są danymi funkcjami czasu. Współczynniki numeryczne k_{II}^E , k_{III}^E są dane za pomocą wzorów (7.55) – (7.56), (7.59), (7.106), (7.110)

$$\begin{aligned}
 k_{II}^E &= \mu \left\{ - \left[(\lambda + \mu) \frac{4 + f_1}{m_1} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right] \right. \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n Q_s^{n+1} \left[(4s + 1) \mathcal{F}_1 \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} [(4s + 1)^2 - 3] \mathcal{F}_2 \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \right\}, \\
 k_{III}^E &= \frac{1}{4} \left\{ 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \sum_{s=0}^n (4s + 3) S_s^{n+1} \right\}
 \end{aligned} \tag{8.31}$$

Dla szczeliny przewodzącej nieruchomej współczynniki K_{II}^{ME} , K_{III}^{ME} są różne od zera a odpowiednie formuły otrzymuje się przez podstawienie we wzorach dla współczynników K_{II}^{ME} , K_{III}^{ME} dla szczeliny propagującej się (8.30)–(8.31) $v = 0$.

Gdy pole elektromagnetyczne znika wówczas $K_{II}^{ME} = 0$, $K_{III}^{ME} = 0$ i $K_{II}^M = K_{II}^{MC}$, $K_{III}^M = K_{III}^{MC}$. Współczynniki intensywności K_{II}^M , K_{II}^{MC} , K_{III}^{MC} odpowiadają w tym sensie klasycznym mechanicznym współczynnikom intensywności naprężeń.

Można teraz wyrazić przemieszczenia w otoczeniu naroża szczeliny za pomocą wprowadzonych tu współczynników intensywności naprężeń.

Dla szczeliny przewodzącej propagującej się ze stałą prędkością $\mathbf{v} = (v \cos \alpha, -v \sin \alpha, 0)$ mamy

$$\begin{aligned}
 u_r &= \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \frac{K_I^M(t)}{k_I} \left\{ (\lambda + 5\mu) \frac{b_1}{n_1} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2} \alpha \right. \right. \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[3b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + (4s + 1) b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \left. \right\} \\
 &\quad + \frac{K_{II}^{MC}(t)}{k_{II}^C} \left\{ (\lambda + 5\mu) \frac{a_1}{m_1} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2} \alpha \right. \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[3a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + (4s + 1) a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \left. \right\} \\
 &\quad + \frac{K_{II}^{ME}(t)}{k_{II}^E} \left\{ \left[(\lambda + 5\mu) \frac{4 + f_1}{m_1} - \frac{3}{2(\lambda + 2\mu)} \right] \sin \frac{\alpha}{2} \right. \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n Q_s^{n+1} \left[3\mathcal{F}_1 \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + (4s + 1) \mathcal{F}_2 \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \left. \right\} \\
 &\quad + O(r^1),
 \end{aligned} \tag{8.32}$$

$$\begin{aligned}
u_\alpha = & \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ -\frac{K_I^M(t)}{k_I} \left\{ (3\lambda + 7\mu) \frac{b_1}{n_1} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha \right. \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[(4s+1) b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2}\right)^n + 3b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2}\right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2}\right) \alpha \left. \right\} \\
& + \frac{K_{II}^{MC}(t)}{k_{II}^C} \left\{ (3\lambda + 7\mu) \frac{a_1}{m_1} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2}\alpha \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[(4s+1) a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2}\right)^n + 3a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2}\right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2}\right) \alpha \left. \right\} \\
& + \frac{K_{II}^{ME}(t)}{k_{II}^E} \left\{ \left[(3\lambda + 7\mu) \frac{4+f_1}{m_1} - \frac{1}{2(\lambda+2\mu)} \right] \cos \frac{\alpha}{2} \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n Q_s^{n+1} \left[(4s+1) \mathcal{F}_1 \left(\frac{v^2}{c_1^2}\right)^n + 3\mathcal{F}_2 \left(\frac{v^2}{c_2^2}\right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2}\right) \alpha \left. \right\} \\
& + O(r^1),
\end{aligned} \tag{8.33}$$

$$\begin{aligned}
u_z = & \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \frac{K_{III}^{MC}(t)}{k_{III}^C} \left[\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2}\right)^n \sum_{s=0}^{n-1} S_s^n \sin \left(2s + \frac{3}{2}\right) \alpha \right] \right. \\
& + \frac{K_{III}^{ME}(t)}{2\mu k_{III}^E} \left[\sin \frac{3}{2}\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2}\right)^n \sum_{s=0}^n S_s^{n+1} \sin \left(2s + \frac{3}{2}\right) \alpha \right] \left. \right\} + O(r^1),
\end{aligned} \tag{8.34}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
k_I = & \left\{ \mu \left[3(\lambda + \mu) \frac{b_1}{n_1} - 1 \right] + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[\frac{1}{2} \left[(6 - (4s+1)^2) (\lambda + 2\mu) + 3\lambda \right] b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2}\right)^n \right. \\
& \left. \left. - \mu (4s+1) b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2}\right)^n \right] \right\}, \\
k_{II}^C = & \mu \left\{ -(\lambda + \mu) \frac{a_1}{m_1} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[(4s+1) a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2}\right)^n \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \left[(4s+1)^2 - 3 \right] a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2}\right)^n \right] \right\}, \\
k_{III}^C = & \frac{\mu}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2}\right)^n \sum_{s=0}^{n-1} (4s+3) S_s^n \right\}.
\end{aligned}$$

Współczynniki numeryczne występujące tutaj są dane wzorami (7.56), (7.59), (7.64).

Dla szczeliny próżniowej propagującej się ze stałą prędkością $\mathbf{v} = (v \cos \alpha, -v \sin \alpha, 0)$ otrzymuje się wzory

$$\begin{aligned}
 u_r = & \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \frac{K_I^M(t)}{k_I} \left\{ (\lambda + 5\mu) \frac{b_1}{n_1} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2}\alpha \right. \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[3b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + (4s+1) b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \left. \right\} \\
 & + \frac{K_{II}^{MC}(t)}{k_{II}^C} \left\{ (\lambda + 5\mu) \frac{a_1}{m_1} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[3a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + (4s+1) a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\} + O(r^1),
 \end{aligned} \tag{8.35}$$

$$\begin{aligned}
 u_\alpha = & \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ -\frac{K_I^M(t)}{k_I} \left\{ (3\lambda + 7\mu) \frac{b_1}{n_1} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha \right. \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[(4s+1) b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + 3b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \sin \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \left. \right\} \\
 & - \frac{K_{II}^{MC}(t)}{k_{II}^C} \left\{ (3\lambda + 7\mu) \frac{a_1}{m_1} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2}\alpha \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \sum_{s=0}^n \left[(4s+1) a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + 3a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \cos \left(2s + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\} + O(r^1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_z = & \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \frac{K_{III}^{MC}(t)}{k_{III}^C} \left[\sin \frac{\alpha}{2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \sum_{s=0}^{n-1} S_s^n \sin \left(2s + \frac{3}{2} \right) \alpha \right] \right\} + O(r^1).
 \end{aligned} \tag{8.37}$$

Odpowiednie wzory dla nieruchomych szczelin przewodzącej i próżniowej otrzymać można przez podstawienie w powyższych formułach $v = 0$. I tak dla szczeliny przewodzącej otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 u_r = & \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \frac{K_I^M(t)}{4\mu} \left[\frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + \mu} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3}{2}\alpha \right] \right. \\
 & + \frac{K_{II}^{MC}(t)}{4\mu} \left[-\frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + \mu} \sin \frac{\alpha}{2} + 3 \sin \frac{3}{2}\alpha \right] \\
 & \left. - K_{II}^{ME}(t) \frac{4(\lambda + 2\mu)(\lambda + 8\mu)}{\mu(\lambda + \mu)(4\lambda + 5\mu)} \sin \frac{\alpha}{2} \right\} + O(r^1),
 \end{aligned} \tag{8.38}$$

$$u_\alpha = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \frac{K_I^M(t)}{4\mu} \left[-\frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + \mu} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha \right] \right. \quad (8.39)$$

$$+ \frac{K_{II}^{MC}(t)}{4\mu} \left[-\frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + \mu} \cos \frac{\alpha}{2} + 3 \cos \frac{3}{2}\alpha \right] \\ \left. - K_{II}^{ME}(t) \frac{4(\lambda + 2\mu)(3\lambda + 10\mu)}{\mu(\lambda + \mu)(4\lambda + 5\mu)} \cos \frac{\alpha}{2} \right\} + O(r^1),$$

$$u_z = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{2}{\mu} K_{III}^{MC}(t) \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^1), \quad (8.40)$$

gdzie (6.76)

$$K_{II}^{ME} = -\frac{\kappa c^2}{48\sqrt{2\pi}} \frac{4\lambda + 5\mu}{(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2} B_2 \mathcal{I}^E - \frac{m - 1}{m} A_2 \mathcal{I}^H \right).$$

Dla nieruchomej szczeliny próżniowej mamy

$$u_r = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{1}{4\mu} \left\{ K_I^M(t) \left[\frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + \mu} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3}{2}\alpha \right] \right. \quad (8.41)$$

$$\left. + K_{II}^{MC}(t) \left[-\frac{\lambda + 5\mu}{\lambda + \mu} \sin \frac{\alpha}{2} + 3 \sin \frac{3}{2}\alpha \right] \right\} + O(r^1),$$

$$u_\alpha = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{1}{4\mu} \left\{ K_I^M(t) \left[-\frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + \mu} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3}{2}\alpha \right] \right. \quad (8.42)$$

$$\left. + K_{II}^{MC}(t) \left[-\frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + \mu} \cos \frac{\alpha}{2} + 3 \cos \frac{3}{2}\alpha \right] \right\} + O(r^1),$$

$$u_z = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{2}{\mu} K_{III}^{MC}(t) \sin \frac{\alpha}{2} + O(r^1). \quad (8.43)$$

Współczynniki intensywności naprężeń mechanicznych K_I^M , K_{II}^{MC} , K_{III}^{MC} są tu dowolnymi współczynnikami, będącymi funkcjami czasu, które wyznacza się z warunków zszycia przemieszczeń na wspólnej granicy otoczenia naroża i obszaru zewnętrznego.

8.4 Uogólnione kryterium Irvina

Rozpatrzmy kryterium Griffitha w postaci sumy (8.11) – (8.13). Zauważmy, że całka G^E reprezentująca wkład energii elektromagnetycznej do energii zużywanej na utworzenie nowej powierzchni szczeliny nie zależy od wyboru drogi całkowania i jest identyczna z granicą, przy powierzchni $S \rightarrow 0$, z całki \mathcal{J}^E . Moglibyśmy zatem przyjąć dla obliczenia tej całki dowolną powierzchnię otaczającą naroże szczeliny. Pozostaniemy jednakże przy wprowadzonej w definicji całki niewłaściwej powierzchni S_ε jako powierzchni walca kołowego.

W przypadku szczeliny próżniowej pole elektromagnetyczne w otoczeniu naroża szczeliny opisane jest funkcjami regularnymi rzędu r^0 i w granicy gdy powierzchnia S_ϵ zbiega do naroża szczeliny $G^E = 0$.

W przypadku szczeliny przewodzącej propagującej się ze stałą prędkością $\mathbf{v} = (v \cos \alpha, -v \sin \alpha, 0)$, biorąc pod uwagę, że składowe styczne pola elektrycznego na powierzchni szczeliny znikają, skąd wynika również, że $h_\alpha|_{\alpha=\mp\pi} = 0$, wzór na G^E ma postać

$$G^E = -\frac{1}{8\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{c}{v} [e_\alpha h_z - e_z h_\alpha] - \frac{1}{2} [\epsilon (e_r^2 + e_\alpha^2 + e_z^2) + m (h_r^2 + h_\alpha^2 + h_z^2)] \cos \alpha \right\}_{|r=\epsilon} \epsilon d\alpha. \quad (8.44)$$

Podstawiając do tego wzoru wartości funkcji (8.25) dla $r = \epsilon$ i wykonując całkowanie, w granicy dla $\epsilon \rightarrow 0$ otrzymujemy (w układzie jedn. Gaussa)

$$G^E = \frac{c^2}{4} \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{m v^2}{4 c^2} \right) (\mathcal{I}^E)^2 + \left(\frac{1}{m} - \frac{\epsilon v^2}{4 c^2} \right) (\mathcal{I}^H)^2 \right\}. \quad (8.45)$$

Stąd z dokładnością do członów liniowych względem $\frac{v}{c}$ otrzymuje się

$$G^E = \frac{c^2}{4} \left\{ \frac{1}{\epsilon} (\mathcal{I}^E)^2 + \frac{1}{m} (\mathcal{I}^H)^2 \right\}. \quad (8.46)$$

Tę postać wzoru na wkład energii pola elektromagnetycznego do energii potrzebnej na utworzenie jednostki powierzchni szczeliny nazwiemy uogólnionym kryterium Irvina dla energii pola elektromagnetycznego. Należy podkreślić, że otrzymane wyrażenie na wkład energii elektromagnetycznej do energii zużytej na utworzenie jednostki powierzchni szczeliny nie zależy od prędkości szczeliny. Będzie ono zatem obowiązywać również dla szczeliny nieruchomej.

Zauważmy, że podstawienie do wzoru (8.44) na G^E funkcji opisujących pole elektromagnetyczne w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej nieruchomej daje $G^E = 0$. Wynik ten oznacza, że jedynym właściwym postępowaniem jest podstawienie do kryterium rozwiązania dla szczeliny propagującej się. Wynika to z jakościowej różnicy w opisie pola elektromagnetycznego w otoczeniu szczeliny nieruchomej i propagującej się i jest fizycznym oddzwierciedleniem faktu, że jeżeli szczelina jest nieruchoma to pole elektromagnetyczne nie daje wkładu w energię potrzebną do utworzenia nowej powierzchni szczeliny. Jest to sytuacja zupełnie inna niż w przypadku czysto mechanicznym, gdzie rząd osobliwości naprężeń mechanicznych i odkształceń nie zależy od tego czy szczelina jest nieruchoma, czy też propaguje się i podstawienie do kryterium Griffitha rozwiązania lokalnego dla szczeliny nieruchomej prowadzi do klasycznej postaci kryterium Irvina.

Rozpatrzmy teraz wkład energii odkształcenia i energii sprzężenia do energii potrzebnej na utworzenie jednostki powierzchni szczeliny dany wzorami (8.21), (8.22).

Przyjmijmy, że szczelina doznała przyrostu długości o Δl . Wówczas mamy

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_{1'}} = \lim_{(-\Delta l) \rightarrow 0} \frac{u_i(x_{1'} - \Delta l, x_{2'}, t) - u_i(x_{1'}, x_{2'}, t)}{(-\Delta l)},$$

gdzie $u_i(x_{1'} - \Delta l, x_{2'}, t) - u_i(x_{1'}, x_{2'}, t)$ jest przyrostem przemieszczenia wywołanym zmianą długości szczeliny. Całkę $\mathcal{J}_\epsilon^{MC}$ można teraz zapisać w postaci

$$\mathcal{J}_\epsilon^{MC} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \int_{-a}^a [\sigma_{2i}(x_{1'}, x_{2'}, t) + \tau_{2i}(x_{1'}, x_{2'}, t)] [u_i(x_{1'} - \Delta l, x_{2'}, t) - u_i(x_{1'}, x_{2'}, t)] \Big|_{x_{2'} = -\epsilon}^{x_{2'} = \epsilon} dx_{1'}.$$

W granicy, gdy $\epsilon \rightarrow 0$ otrzymujemy na podstawie (8.22)

$$G^{MC} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \int_{-a}^a [\sigma_{2i}(x_{1'}, 0, t) + \tau_{2i}(x_{1'}, 0, t)] [u_i(x_{1'} - \Delta l, 0, t) - u_i(x_{1'}, 0, t)] \Big|_{x_{2'} = -\epsilon}^{x_{2'} = \epsilon} dx_{1'}. \quad (8.47)$$

Jest to postać wzoru na wkład energii odkształcenia i energii sprzężenia do energii potrzebnej na utworzenie nowej powierzchni szczeliny, która prowadzi do uogólnionej postaci kryterium Irwina na tę energię.

Zapiszmy teraz otrzymaną relację w układzie cylindrycznym o osi z pokrywającej się z krawędzią szczeliny. Między współrzędnymi tensora naprężeń i wektora przemieszczeń w układzie kartezjańskim i cylindrycznym zachodzą relacje

$$\begin{aligned} (\sigma_{22} + \tau_{22}) \Big|_{x_{1'} = r, x_{2'} = 0} &= \sigma_{\alpha\alpha}(r, 0, t) + \tau_{\alpha\alpha}(r, 0, t), \\ (\sigma_{12} + \tau_{12}) \Big|_{x_{1'} = r, x_{2'} = 0} &= \sigma_{r\alpha}(r, 0, t) + \tau_{r\alpha}(r, 0, t), \\ (\sigma_{32} + \tau_{32}) \Big|_{x_{1'} = r, x_{2'} = 0} &= \sigma_{z\alpha}(r, 0, t) + \tau_{z\alpha}(r, 0, t), \\ u_2 \Big|_{x_{1'} = r - \Delta l, x_{2'} = 0} &= -u_\alpha(\Delta l - r, \pi, t), \\ u_1 \Big|_{x_{1'} = r - \Delta l, x_{2'} = 0} &= -u_r(\Delta l - r, \pi, t), \\ u_3 \Big|_{x_{1'} = r - \Delta l, x_{2'} = 0} &= u_z(\Delta l - r, \pi, t). \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że naprężenia są na powierzchni szczeliny równe zeru a część przemieszczeń dająca wkład do całki jest równa zeru na przedłużeniu szczeliny [38] otrzymamy

$$\begin{aligned} G^{MC} &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \int_0^{\Delta l} \left\{ -[\sigma_{\alpha\alpha}(r, 0, t) + \tau_{\alpha\alpha}(r, 0, t)] u_\alpha(\Delta l - r, \pi, t) \right. \\ &\quad - [\sigma_{r\alpha}(r, 0, t) + \tau_{r\alpha}(r, 0, t)] u_r(\Delta l - r, \pi, t) \\ &\quad \left. + [\sigma_{z\alpha}(r, 0, t) + \tau_{z\alpha}(r, 0, t)] u_z(\Delta l - r, \pi, t) \right\} dr. \quad (8.48) \end{aligned}$$

Podstawiając do tego wzoru wartości naprężeń oraz przemieszczeń, uwzględniając przy tym definicje współczynników intensywności naprężeń wprowadzone w poprzednim paragrafie, po wykonaniu całkowania i przejściu do granicy otrzymuje się dla propagującej się szczeliny przewodzącej następującą postać uogólnionego kryterium Irvina dla części energii pochodzącej od energii odkształcenia i sprężenia

$$G^{MC} = \frac{1}{4} \left\{ (K_I^{MC})^2 U_\alpha^M - \left\{ \left[(K_{II}^{MC})^2 + K_{II}^{MC} K_{II}^{EE} \right] U_r^M + \left[(K_{II}^{ME})^2 + K_{II}^{ME} K_{II}^{EE} \right] U_r^E + K_{II}^{MC} K_{II}^{ME} (U_r^M + U_r^E) \right\} + \left[(K_{III}^{MC})^2 + K_{III}^{MC} K_{III}^{EE} \right] U_z^M + \left[(K_{III}^{ME})^2 + K_{III}^{ME} K_{III}^{EE} \right] U_z^E + K_{III}^{MC} K_{III}^{ME} (U_z^M + U_z^E) \right\}, \quad (8.49)$$

gdzie

$$U_r^M = \frac{1}{k_{II}^C} \left\{ (\lambda + 5\mu) \frac{a_1}{m_1} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^n \frac{1}{2^n n!} \left[3a_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + (4s+1) a_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \right\},$$

$$U_r^E = \frac{1}{k_{II}^E} \left\{ (\lambda + 5\mu) \frac{4 + f_1}{m_1} - \frac{3}{2(\lambda + 2\mu)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^n \frac{1}{2^n n!} Q_s^{n+1} \left[3\mathcal{F}_1 \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + (4s+1) \mathcal{F}_2 \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \right\},$$

$$U_\alpha^M = \frac{1}{k_I} \left\{ (3\lambda + 7\mu) \frac{b_1}{n_1} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^n \frac{1}{2^n n!} \left[(4s+1) b_1^{ns} \left(\frac{v^2}{c_1^2} \right)^n + 3b_2^{ns} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \right] \right\},$$

$$U_z^M = \frac{1}{k_{III}^C} \left[1 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \sum_{s=0}^{n-1} S_s^n \right],$$

$$U_z^E = -\frac{1}{2\mu k_{III}^E} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{v^2}{c_2^2} \right)^n \sum_{s=0}^n S_s^{n+1} \right].$$

Dla propagującej się szczeliny próżniowej współczynniki intensywności naprężeń elektromagnetycznych są równe zero. Również część elektromagnetyczna współczynników intensywności naprężeń mechanicznych jest równa zero. Stąd kryterium Irvina będzie miało postać taką samą jak w przypadku szczeliny propagującej się ze stałą prędkością w przypadku mechanicznym

$$G^{MC} = \frac{1}{4} \left[(K_I^{MC})^2 U_\alpha^M - (K_{II}^{MC})^2 U_r^M + (K_{III}^{MC})^2 U_z^M \right]. \quad (8.50)$$

Podstawiając w powyższych wzorach prędkość $v = 0$ otrzymuje się uogólnione kryterium Irvina dotyczące energii odkształcenia i sprężenia dla szczelin nieruchomych, przewodzącej i próżniowej.

Dla *nieruchomej szczeliny przewodzącej* otrzymujemy

$$G^{MC} = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \left\{ (K_I^M)^2 + (K_{II}^{MC} + K_{II}^{ME} + K_{II}^E) \left[K_{II}^{MC} + \frac{4(\lambda + 8\mu)}{4\lambda + 5\mu} K_{II}^{ME} \right] \right\} + \frac{1}{2\mu} K_{III}^{MC} (K_{III}^{MC} + K_{III}^E). \quad (8.51)$$

Dla *nieruchomej szczeliny próżniowej* uogólnione kryterium Irvina przyjmuje taką samą postać jak klasyczne kryterium Irvina dla przypadku mechanicznego

$$G^{MC} = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \left[(K_I^M)^2 + (K_{II}^{MC})^2 \right] + \frac{1}{2\mu} (K_{III}^{MC})^2. \quad (8.52)$$

Pamiętać jednak należy, że jedyne dowolnymi współczynnikami w powyższych kryteriach są współczynniki intensywności mechanicznej części naprężeń mechanicznych to znaczy K_I^M , K_{II}^{MC} , K_{III}^{MC} . Pozostałe współczynniki to znaczy K_{II}^E , K_{III}^E , K_{II}^{ME} , K_{III}^{ME} są dane i określone jeżeli pole elektromagnetyczne w całym obszarze dielektryka ze szczeliną jest wyznaczone.

Ostatecznie, najogólniejsza pełna postać kryterium Irvina dla pękania elektromagnetycznego w przypadku *przewodzącej szczeliny propagującej się* ze stałą prędkością będzie

$$G = \frac{1}{4} \left\{ (K_I^{MC})^2 U_\alpha^M - \left[(K_{II}^{MC})^2 + K_{II}^{MC} K_{II}^E \right] U_r^M + \left[(K_{II}^{ME})^2 + K_{II}^{ME} K_{II}^E \right] U_r^E + K_{II}^{MC} K_{II}^{ME} (U_r^M + U_r^E) \right\} + \left[(K_{III}^{MC})^2 + K_{III}^{MC} K_{III}^E \right] U_z^M + \left[(K_{III}^{ME})^2 + K_{III}^{ME} K_{III}^E \right] U_z^E + K_{III}^{MC} K_{III}^{ME} (U_z^M + U_z^E) + c^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{I}^E)^2 + \frac{1}{m} (\mathcal{I}^H)^2 \right\}. \quad (8.53)$$

Dla *szczeliny przewodzącej nieruchomej* kryterium upraszcza się i mamy

$$G = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \left\{ (K_I^M)^2 + (K_{II}^{MC} + K_{II}^{ME} + K_{II}^E) \left[K_{II}^{MC} + \frac{4(\lambda + 8\mu)}{4\lambda + 5\mu} K_{II}^{ME} \right] \right\} + \frac{1}{2\mu} K_{III}^{MC} (K_{III}^{MC} + K_{III}^E) + \frac{c^2}{4} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{I}^E)^2 + \frac{1}{m} (\mathcal{I}^H)^2 \right\}. \quad (8.54)$$

Dla szczelin próżniowych $G^E = 0$, stąd $G = G^{MC}$ i postać uogólnionego kryterium Irvina będzie taka sama jak w przypadku mechanicznym (8.50), (8.52). Pamiętać jednak należy, że współczynniki intensywności naprężeń występujące w tym kryterium zależą od pola elektromagnetycznego, działaniu którego poddany jest dielektryk. Kwestia wyznaczania współczynników intensywności naprężeń mechanicznych K_I^M , K_{II}^{MC} , K_{III}^{MC} w zależności od pola elektromagnetycznego jest tematem następnego rozdziału.

Rozdział 9

Wyznaczanie współczynników intensywności naprężeń

Jak pokazano w poprzednim rozdziale, rozwiązanie lokalne dla przemieszczeń można przedstawić w zależności od współczynników intensywności naprężeń. W przypadku szczeliny próżniowej w zależności od mechanicznej części współczynników intensywności naprężeń mechanicznych K_I^M , K_{II}^{MC} , K_{III}^{MC} , w przypadku szczeliny przewodzącej w zależności od współczynników K_I^M , K_{II}^{MC} , K_{III}^{MC} oraz od części elektromagnetycznej współczynników intensywności naprężeń mechanicznych K_{II}^{ME} , K_{III}^{ME} .

Współczynniki intensywności naprężeń mechanicznych K_I^M , K_{II}^{MC} , K_{III}^{MC} i K_{II}^{ME} , K_{III}^{ME} jak również współczynniki intensywności naprężeń elektromagnetycznych K_{II}^E , K_{III}^E oraz współczynniki intensywności pola elektromagnetycznego \mathcal{I}^E , \mathcal{I}^H występują w uogólnionym kryterium pęknięcia Irwina dla szczelin przewodzących (8.53), (8.54). Współczynniki intensywności pola elektromagnetycznego \mathcal{I}^E , \mathcal{I}^H i współczynniki intensywności naprężeń elektromagnetycznych K_{II}^E , K_{III}^E oraz część elektromagnetyczna współczynników intensywności naprężeń mechanicznych K_{II}^{ME} , K_{III}^{ME} są znane, jeżeli pole w całym obszarze dielektryka ze szczeliną jest wyznaczone. Zależność elektromagnetycznej części współczynników intensywności naprężeń od parametrów pola elektromagnetycznego w otoczeniu naroża szczeliny podano wzorami (8.21), (8.30).

Istnieją metody eksperymentalne wyznaczania współczynników intensywności naprężeń mechanicznych K_I^M , K_{II}^{MC} , K_{III}^{MC} , jednak nie w każdej sytuacji skorzystanie z tych metod jest łatwe. Dlatego pożądana jest możliwość ich numerycznego wyznaczenia na podstawie znajomości rozwiązania analitycznego odpowiedniego problemu. Wymaga to rozwiązania problemu dla równań Lamégo. Dla wielu przypadków mechanicznych takie rozwiązania są znane. Jednak w przypadku, gdy obciążeniem są siły elektromagnetyczne, które nie są dowolnymi funkcjami lecz takimi jakie wynikają z rozwiązania problemu dla równań Maxwella, jest to na ogół trudne.

Seria prac autorki została poświęcona metodzie wyznaczania współczynników intensywności naprężeń mechanicznych dla szczeliny półnieskończonej. Metodę tę sformułowano w pracach [34], [36]. Dla uproszczenia rozpatrywano pola stacjonarne. Następnie w [37]

pokazano, że można ją uogólnić na problemy niestacjonarne.

W metodzie wykorzystano fakt, że siły elektromagnetyczne w otoczeniu naroża szczeliny można przedstawić w postaci uogólnionych szeregów potęgowych względem r . Zasadniczy wpływ na współczynniki intensywności naprężeń mechanicznych ma zachowanie się funkcji opisujących siły elektromagnetyczne w otoczeniu wspólnej granicy otoczenia naroża szczeliny i obszaru zewnętrznego. W otoczeniu tej granicy od strony obszaru zewnętrznego przybliżono funkcje opisujące siły elektromagnetyczne wielomianami. Konstrukcję rozwiązania problemu dla równań Lamégo przeprowadzono przy pomocy rozwiązań pomocniczych. Wprowadzenie funkcji pomocniczych pozwoliło otrzymać rozwiązanie w takiej postaci, że warunki brzegowe na powierzchni szczeliny sprowadziły się do równoważnych im trójkątnych równań algebraicznych dla przypadku stacjonarnego, lub funkcyjnych w przypadku niestacjonarnym na dowolne współczynniki. Ostatecznie problem wyznaczenia każdego ze współczynników intensywności naprężeń mechanicznych sprowadzono do wyznaczenia jednej nieznannej stałej z nieskończonego układu równań algebraicznych w przypadku stacjonarnym [34], [36], lub jednego nieznanego współczynnika z nieskończonego układu równań funkcyjnych w przypadku niestacjonarnym [37].

Metoda jest dobrze dostosowana do obliczeń numerycznych. Weryfikację numeryczną przeprowadzono dla zadania wyznaczenia współczynnika K_I^M , dla walca dielektrycznego z radialną szczeliną przewodzącą poddanego działaniu pola elektrostatycznego [39]. Obliczenia wskazały na szybką jej zbieżność.

Dokładną konstrukcję rozwiązania dla poszczególnych przypadków podano w cytowanych tu pracach. Tutaj ograniczymy się do naszkicowania w sposób ogólny metody w przypadku niestacjonarnym dla szczeliny przewodzącej. Jako ilustrację podamy przykład wyznaczenia współczynnika K_I^M w walcu z radialną szczeliną przewodzącą poddanym działaniu pola elektrostatycznego.

Metodę tę można stosować również w przypadku mechanicznym, szczególnie wówczas gdy obciążenie zewnętrzne zadane jest za pomocą funkcji, które można przybliżać wielomianami ze względu na r .

Pierwszym krokiem jest wyznaczenie pola elektromagnetycznego w całym obszarze dielektryka. W oparciu o otrzymane rozwiązanie wyznaczyć należy siły elektromagnetyczne. Całkowite obciążenie przedstawiamy w postaci sumy części odpowiadających poszczególnym modom. Mode I to taki, że tylko współczynnik K_I^M jest różny od zera, pozostałe współczynniki są równe zero. Obciążenie dla modu II jest tak dobrane, że tylko współczynnik K_{II}^M jest różny od zera. Wreszcie mode III to tak zwany przypadek antyplaski charakteryzowany przez współczynnik K_{III}^M .

Z rozwiązania problemu dla równań Lamégo dla każdego z trzech modów wyznacza się odpowiadający mu współczynnik intensywności naprężeń mechanicznych.

9.1 Pole elektromagnetyczne i siły elektromagnetyczne

Problem opisywać będziemy w cylindrycznym układzie współrzędnych r, α, z . Dążymy do wyznaczenia pola elektromagnetycznego w izotropowym i jednorodnym dielektryku, o stałej dielektrycznej ε i przenikalności magnetycznej m , który zawiera półnieskończoną szczelinę i poddany jest działaniu zewnętrznego pola elektromagnetycznego. Zakładamy przy tym, że jest to pole o natężeniu wywołującym jonizację gazu w szczelinie tak, że staje się ona idealnie przewodząca.

Niech Ω oznacza obszar zajmowany przez dielektryk, a Γ powierzchnię zawartą w dielektryku półnieskończonej szczeliny

$$\begin{aligned}\Omega : 0 < r < \infty, 0 < \alpha < 2\pi, |z| < \infty, \\ \Gamma : 0 < r < \infty, \alpha = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases}, |z| < \infty.\end{aligned}$$

Zakładamy, że na dielektryk działa zewnętrzne pole elektromagnetyczne $\overset{\circ}{\mathbf{E}}(r, \alpha, t)$, $\overset{\circ}{\mathbf{H}}(r, \alpha, t)$ spełniające jednorodne warunki początkowe

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\mathbf{E}}(r, \alpha, 0) &= 0, \quad \partial_t \overset{\circ}{\mathbf{E}} \Big|_{t=0} = 0, \\ \overset{\circ}{\mathbf{H}}(r, \alpha, 0) &= 0, \quad \partial_t \overset{\circ}{\mathbf{H}} \Big|_{t=0} = 0.\end{aligned}\tag{9.1}$$

Wyznaczenie pola elektromagnetycznego w całym obszarze dielektryka wymaga rozwiązania odpowiedniego problemu dla równań Maxwella.

Zakładamy, że pole w dielektryku jest sumą pola zewnętrznego $\overset{\circ}{\mathbf{E}}, \overset{\circ}{\mathbf{H}}$ oraz pola \mathbf{E}, \mathbf{H}

$$\mathbf{e} = \overset{\circ}{\mathbf{E}} + \mathbf{E}, \quad \mathbf{h} = \overset{\circ}{\mathbf{H}} + \mathbf{H}.\tag{9.2}$$

Pole \mathbf{E}, \mathbf{H} spełnia następujące równania i warunki

$$\left. \begin{aligned}-m\partial_t \mathbf{H} &= \text{rot} \mathbf{E}, \quad \text{div} \mathbf{E} = 0, \\ \varepsilon \partial_t \mathbf{E} &= \text{rot} \mathbf{H}, \quad \text{div} \mathbf{H} = 0,\end{aligned} \right\} \text{ w } \Omega,\tag{9.3}$$

$$E_r + \overset{\circ}{E}_r = 0, \quad E_z + \overset{\circ}{E}_z = 0 \text{ na } \Gamma,\tag{9.4}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} (e_\alpha h_z - e_z h_\alpha) r d\alpha = 0,\tag{9.5}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{e} = \overset{\circ}{\mathbf{E}}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{h} = \overset{\circ}{\mathbf{H}},\tag{9.6}$$

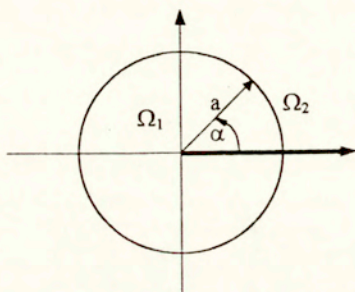
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(r, \alpha, 0) &= 0, \quad \partial_t \mathbf{E} \Big|_{t=0} = 0, \\ \mathbf{H}(r, \alpha, 0) &= 0, \quad \partial_t \mathbf{H} \Big|_{t=0} = 0.\end{aligned}\tag{9.7}$$

W celu skonstruowania rozwiązania tego problemu podzielimy obszar Ω na dwa obszary

$$\begin{aligned}\Omega_1 : 0 < r < a, 0 < \alpha < 2\pi, |z| < \infty, \\ \Omega_2 : a < r < \infty, 0 < \alpha < 2\pi, |z| < \infty.\end{aligned}\quad (9.8)$$

Powierzchnia szczeliny będzie sumą dwóch powierzchni

$$\begin{aligned}\Gamma_1 : 0 < r < a, \alpha = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases}, |z| < \infty, \\ \Gamma_2 : a < r < \infty, \alpha = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases}, |z| < \infty.\end{aligned}\quad (9.9)$$



Funkcje w poszczególnych obszarach oznaczać będziemy odpowiednio przez ${}_1e$, ${}_2e$, ${}_1h$, ${}_2h$, itp. Przez S oznaczmy wspólną granicę obu obszarów

$$S : r = a, 0 < \alpha < 2\pi, |z| < \infty.$$

Stosujemy transformację Laplace'a oraz skończoną transformację Fouriera w przedziale $(0, 2\pi)$

$$\begin{aligned}{}_1e(r, \alpha, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} {}_1\hat{e}(r, \alpha, \xi) e^{\xi t} d\xi, \quad {}_1\hat{e} = \int_0^\infty {}_1e e^{-\xi t} d\xi, \\ {}_2h(r, \alpha, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} {}_2\hat{h}(r, \alpha, \xi) e^{\xi t} d\xi, \quad {}_2\hat{h} = \int_0^\infty {}_2h e^{-\xi t} d\xi, \quad (\nu = 1, 2),\end{aligned}\quad (9.10)$$

gdzie

$$\begin{aligned}{}_1\hat{e}_z &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} {}_1\hat{e}_z^n(r, \xi) \sin \frac{n}{2} \alpha, \quad {}_1\hat{e}_r = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} {}_1\hat{e}_r^n(r, \xi) \sin \frac{n}{2} \alpha, \\ {}_1\hat{e}_\alpha &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} {}_1\hat{e}_\alpha^0(r, \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} {}_1\hat{e}_\alpha^n(r, \xi) \cos \frac{n}{2} \alpha \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_{\nu}\hat{h}_z &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} {}_{\nu}\hat{h}_z^0(r, \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} {}_{\nu}\hat{h}_z^n(r, \xi) \cos \frac{n}{2}\alpha \right], \\
{}_{\nu}\hat{h}_r &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} {}_{\nu}\hat{h}_r^0(r, \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} {}_{\nu}\hat{h}_r^n(r, \xi) \cos \frac{n}{2}\alpha \right], \\
{}_{\nu}\hat{h}_\alpha &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} {}_{\nu}\hat{h}_\alpha^n(r, \xi) \sin \frac{n}{2}\alpha.
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Tutaj

$${}_{\nu}\hat{e}_z^n(r, \xi) = \int_0^{2\pi} {}_{\nu}\hat{e}_z(r, \alpha, \xi) \sin \frac{n}{2}\alpha d\alpha, \quad {}_{\nu}\hat{h}_z^n(r, \xi) = \int_0^{2\pi} {}_{\nu}\hat{h}_z(r, \alpha, \xi) \cos \frac{n}{2}\alpha d\alpha.$$

Biorąc powyższe pod uwagę, możemy zastąpić (9.2) – (9.7) równoważnym układem równań na nieznanne funkcje zmiennej r i parametru ξ

$$\left. \begin{aligned}
&\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{4r^2} - k^2\xi^2 \right) {}_1\hat{e}_z^n = 0 \\
&\frac{n}{2r} {}_1\hat{e}_z^n = -m\xi {}_1\hat{h}_r^n, \quad \frac{d}{{}_1\hat{e}_z^n} = m\xi {}_1\hat{h}_\alpha^n \\
&\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{4r^2} - k^2\xi^2 \right) {}_1\hat{h}_z^n = 0 \\
&-\frac{n}{2r} {}_1\hat{h}_z^n = \varepsilon\xi {}_1\hat{e}_r^n, \quad \frac{d}{{}_1\hat{h}_z^n} = -\varepsilon\xi {}_1\hat{e}_\alpha^n,
\end{aligned} \right\} \text{ w } \Omega_1, \tag{9.12}$$

$$\left. \begin{aligned}
&\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{4r^2} - k^2\xi^2 \right) {}_2\hat{E}_z^n \\
&\quad = -\frac{n}{2r^2} \left[(-1)^n \hat{E}_z(r, 2\pi, \xi) - \hat{E}_z(r, 0, \xi) \right], \\
{}_2\hat{H}_r^n &= \frac{1}{m\xi r} \left[(-1)^n \hat{E}_z(r, 2\pi, \xi) - \hat{E}_z(r, 0, \xi) - \frac{n}{2} {}_2\hat{E}_z^n \right], \\
{}_2\hat{H}_\alpha^n &= \frac{1}{m\xi} \frac{d}{{}_2\hat{E}_z^n}, \\
&\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{4r^2} - k^2\xi^2 \right) {}_2\hat{H}_z^n \\
&\quad = \frac{\varepsilon\xi}{r} \left[(-1)^n \hat{E}_r(r, 2\pi, \xi) - \hat{E}_r(r, 0, \xi) \right], \\
{}_2\hat{E}_r^n &= -\frac{n}{2r\varepsilon\xi} {}_2\hat{H}_z^n, \quad {}_2\hat{E}_\alpha^n = -\frac{1}{\varepsilon\xi} \frac{d}{{}_2\hat{H}_z^n},
\end{aligned} \right\} \text{ w } \Omega_2 \tag{9.13}$$

$$\left. \begin{aligned} {}_1\hat{e}_z^n &= {}_2\hat{E}_z^n + \hat{E}_z^n, & \frac{d_1\hat{e}_z^n}{dr} &= \frac{d}{dr} \left({}_2\hat{E}_z^n + \hat{E}_z^n \right), \\ {}_1\hat{h}_z^n &= {}_2\hat{H}_z^n + \hat{H}_z^n, & \frac{d_1\hat{h}_z^n}{dr} &= \frac{d}{dr} \left({}_2\hat{H}_z^n + \hat{H}_z^n \right), \end{aligned} \right\} \text{ na } S, \quad (9.14)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} ({}_1e_\alpha {}_1h_z - {}_1e_z {}_1h_\alpha) r d\alpha = 0, \quad (9.15)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} {}_2\hat{E}_z^n = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} {}_2\hat{H}_z^n = 0.$$

We wzorach tych $k^2 = \varepsilon m$, $\hat{\mathbf{E}} = \int_0^\infty \mathbf{E} e^{-\varepsilon t} d\xi$, $\hat{\mathbf{H}} = \int_0^\infty \mathbf{H} e^{-\varepsilon t} d\xi$, \hat{E}_z^n , \hat{H}_z^n - współczynniki odpowiednich szeregów Fouriera.

Rozwiązaniem równań (9.12) - (9.13), spełniającym warunki (9.15) są następujące funkcje

$$\begin{aligned} {}_1\hat{e}_z^n &= \hat{A}_n(\xi) I_{\frac{n}{2}}(k\xi r), & {}_1\hat{h}_z^n &= \hat{B}_n(\xi) I_{\frac{n}{2}}(k\xi r), \\ {}_1\hat{e}_r^n &= -\frac{k}{2\varepsilon} \hat{B}_n(\xi) [I_{\frac{n}{2}-1}(k\xi r) - I_{\frac{n}{2}+1}(k\xi r)], \\ {}_1\hat{e}_\alpha^n &= -\frac{k}{2\varepsilon} \hat{B}_n(\xi) [I_{\frac{n}{2}-1}(k\xi r) + I_{\frac{n}{2}+1}(k\xi r)], \\ {}_1\hat{h}_r^n &= -\frac{k}{2m} \hat{A}_n(\xi) [I_{\frac{n}{2}-1}(k\xi r) - I_{\frac{n}{2}+1}(k\xi r)], \\ {}_1\hat{h}_\alpha^n &= \frac{k}{2m} \hat{A}_n(\xi) [I_{\frac{n}{2}-1}(k\xi r) + I_{\frac{n}{2}+1}(k\xi r)], \end{aligned} \quad (9.16)$$

$$\begin{aligned} {}_2\hat{E}_z^n &= \hat{\alpha}_n(\xi) K_{\frac{n}{2}}(k\xi r) + \hat{\Xi}_n(k\xi r), \\ {}_2\hat{H}_r^n &= \frac{1}{m\xi} \left\{ \frac{1}{r} \left[(-1)^n \hat{E}_z(r, 2\pi, \xi) - \hat{E}_z(r, 0, \xi) \right] \right. \\ &\quad \left. + \hat{\alpha}_n(\xi) \frac{k\xi}{2} [K_{\frac{n}{2}-1}(k\xi r) - K_{\frac{n}{2}+1}(k\xi r)] - \frac{n}{2r} \hat{\Xi}_n(r, \xi) \right\}, \\ {}_2\hat{H}_\alpha^n &= \frac{1}{m\xi} \left\{ -\hat{\alpha}_n(\xi) \frac{k\xi}{2} [K_{\frac{n}{2}-1}(k\xi r) - K_{\frac{n}{2}+1}(k\xi r)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dr} \hat{\Xi}_n(r, \xi) \right\}, \\ {}_2\hat{H}_z^n &= \hat{\beta}_n(\xi) K_{\frac{n}{2}}(k\xi r) + \hat{\Psi}_n(r, \xi), \\ {}_2\hat{E}_r^n &= \frac{1}{\varepsilon\xi} \left\{ \frac{k\xi}{2} \hat{\beta}_n(\xi) [K_{\frac{n}{2}-1}(k\xi r) - K_{\frac{n}{2}+1}(k\xi r)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{n}{2r} \hat{\Psi}_n(r, \xi) \right\}, \end{aligned} \quad (9.17)$$

$${}_2\hat{E}_\alpha^n = \frac{1}{\varepsilon\xi} \left\{ \frac{k\xi}{2} \hat{\beta}_n(\xi) [K_{\frac{n}{2}-1}(k\xi r) + K_{\frac{n}{2}+1}(k\xi r)] - \frac{d}{dr} \hat{\Psi}_n(r, \xi) \right\}.$$

Tutaj $I_{\frac{n}{2}}$ i $K_{\frac{n}{2}}$ są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela, \hat{A}_n , \hat{B}_n , $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$ są dowolnymi współczynnikami, które należy wyznaczyć z warunków (9.14) na wspólnej granicy obu obszarów. Funkcje $\hat{\Xi}_n$, $\hat{\Psi}_n$ zależą od pola zewnętrznego i są dane wzorami

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}_n(r, \xi) = & \frac{n}{2} \left\{ K_{\frac{n}{2}}(k\xi r) \int_a^r I_{\frac{n}{2}}(k\xi s) [(-1)^n \overset{\circ}{E}_z(s, 2\pi, \xi) - \overset{\circ}{E}_z(s, 0, \xi)] s^{-1} ds + I_{\frac{n}{2}}(k\xi r) \int_r^\infty K_{\frac{n}{2}}(k\xi s) [(-1)^n \overset{\circ}{E}_z(s, 2\pi, \xi) - \overset{\circ}{E}_z(s, 0, \xi)] s^{-1} ds \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_n(r, \xi) = & -\varepsilon\xi \left\{ K_{\frac{n}{2}}(k\xi r) \int_a^r I_{\frac{n}{2}}(k\xi s) [(-1)^n \overset{\circ}{E}_r(s, 2\pi, \xi) - \overset{\circ}{E}_r(s, 0, \xi)] ds + I_{\frac{n}{2}}(k\xi r) \int_r^\infty K_{\frac{n}{2}}(k\xi s) [(-1)^n \overset{\circ}{E}_r(s, 2\pi, \xi) - \overset{\circ}{E}_r(s, 0, \xi)] ds \right\}. \end{aligned}$$

Otrzymane rozwiązanie należy podstawić do wzorów (7.20) – (7.22) na wyraz o charakterze siły objętościowej występujący w równaniach Lamégo. W obszarze Ω_1 po regularyzacji przeprowadzonej zgodnie z definicją elektromagnetycznej siły fizycznej (str. 59) podobnie jak w rozdziałach 6 i 7 oraz wykorzystując definicję funkcji Bessela (6.27), możemy przedstawić elektromagnetyczną siłę objętościową w postaci uogólnionych szeregów potęgowych względem r

$${}_1\mathbf{F} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{n-3}{2}} {}_1\mathbf{F}^n(\alpha, t), \quad {}_1F_2^0 = 0. \quad (9.18)$$

Podobnie podstawiając rozwiązanie (9.16) do wzorów na składowe naprężenia elektromagnetycznego otrzymujemy szeregi reprezentujące fizyczne naprężenia elektromagnetyczne

$${}_1\boldsymbol{\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{n-1}{2}} {}_1\boldsymbol{\tau}^n(\alpha, t). \quad (9.19)$$

Do rozwiązania problemu dla równań Lamégo potrzebne są tylko składowe naprężenia na powierzchni szczeliny. Z warunku znikania składowych stycznych natężenia pola elektrycznego na powierzchni szczeliny przewodzącej wynika, że $\tau_{r\alpha}|_{\alpha=\{0,2\pi}} = 0$, $\tau_{z\alpha}|_{\alpha=\{0,2\pi}} = 0$. Wystarczy zatem obliczyć tylko składową naprężenia $\tau_{\alpha\alpha}$.

W obszarze Ω_2 funkcje opisujące siły elektromagnetyczne przybliżamy w otoczeniu $r = a$ wielomianami

$${}_2\mathbf{F} \cong \sum_{m=0}^N r^m {}_2\mathbf{F}^m(\alpha, t), \quad {}_2\boldsymbol{\tau} \cong \sum_{m=0}^N r^m {}_2\boldsymbol{\tau}^m(\alpha, t). \quad (9.20)$$

Współczynniki wielomianów wyznaczamy zgodnie ze wzorami

$$f^0 = f|_{r=a} + \sum_{s=1}^N (-1)^s \frac{a^s}{s!} \left(\frac{d^s f}{dr^s} \right) \Big|_{r=a},$$

$$f^m = \sum_{s=m}^N (-1)^{s+m} \frac{a^{s-m}}{m!(s-m)!} \left(\frac{d^s f}{dr^s} \right) \Big|_{r=a}, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Składowe elektromagnetycznych sił objętościowych w kierunku r i α przedstawiamy teraz w postaci sumy części symetrycznej i antysymetrycznej funkcji względem α

$$\begin{aligned} \nu F_r(r, \alpha, t) &= \nu F_{(r)}(r, \alpha, t) + \nu F_{[r]}(r, \alpha, t), \\ \nu F_\alpha(r, \alpha, t) &= \nu F_{(\alpha)}(r, \alpha, t) + \nu F_{[\alpha]}(r, \alpha, t), \\ \nu \tau_{\alpha\alpha}(r, \alpha, t) &= \nu \tau_{(\alpha\alpha)}(r, \alpha, t) + \nu \tau_{[\alpha\alpha]}(r, \alpha, t), \end{aligned}$$

gdzie

$$f_{()}(r, \alpha, t) \equiv \frac{1}{2} [f(r, \alpha, t) + f(r, -\alpha, t)],$$

$$f_{[]} (r, \alpha, t) \equiv \frac{1}{2} [f(r, \alpha, t) - f(r, -\alpha, t)].$$

Dla części symetrycznych i antysymetrycznych fizycznych elektromagnetycznych sił objętościowych i składowej naprężenia $\tau_{\alpha\alpha}$ otrzymujemy szeregi postaci [36], [37]

$${}_1F_{(r)} = \sum_{m=0}^{\infty} r^{m-2} {}_1F_{(r)}^m(\alpha, t), \quad {}_1F_{[r]} = \sum_{m=0}^{\infty} r^{m-\frac{3}{2}} {}_1F_{[r]}^m(\alpha, t), \quad (9.21)$$

$${}_1F_{(\alpha)} = \sum_{m=0}^{\infty} r^{m-2} {}_1F_{(\alpha)}^m(\alpha, t), \quad {}_1F_{[\alpha]} = \sum_{m=0}^{\infty} r^{m-\frac{3}{2}} {}_1F_{[\alpha]}^m(\alpha, t),$$

$${}_1\tau_{(\alpha\alpha)}(r, \alpha, t) = \sum_{m=1}^{\infty} r^{m-1} {}_1T_{(\alpha\alpha)}^m(\alpha, t), \quad (9.22)$$

$${}_1\tau_{\alpha\alpha}(r, \alpha, t) = \sum_{m=0}^{\infty} r^{m-\frac{1}{2}} {}_1T_{[\alpha\alpha]}^m(\alpha, t).$$

Zależność współczynników ${}_1F_{(r)}^m, {}_1F_{[r]}^m, {}_1F_{(\alpha)}^m, {}_1F_{[\alpha]}^m, {}_1T_{(\alpha\alpha)}^m, {}_1T_{[\alpha\alpha]}^m$ od α jest reprezentowana przez funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta α [36], [37].

W obszarze zewnętrznym części symetryczne i antysymetryczne sił elektromagnetycznych przybliżonych przez wielomiany (9.20) reprezentowane są przez skończone szeregi potęgowe względem r

$${}_2F_{(r)} \cong \sum_{m=0}^N r^m {}_2F_{(r)}^m(\alpha, t), \quad {}_2F_{[r]} \cong \sum_{m=0}^N r^m {}_2F_{[r]}^m(\alpha, t), \quad (9.23)$$

$${}_2F_{(\alpha)} \cong \sum_{m=0}^N r^m {}_2F_{(\alpha)}^m(\alpha, t), \quad {}_2F_{[\alpha]} \cong \sum_{m=0}^N r^m {}_2F_{[\alpha]}^m(\alpha, t),$$

$${}_2\tau(r, \alpha, t) \cong \sum_{m=0}^N r^m {}_2T_{(\alpha\alpha)}^m(\alpha, t), \quad (9.24)$$

$${}_2\tau(r, \alpha, t) \cong \sum_{m=0}^N r^m {}_2T_{[\alpha\alpha]}^m(\alpha, t).$$

9.2 Sformułowanie problemu dla równań Lamégo

Sformułujemy teraz problemy początkowo – brzegowe dla równań Lamégo, które należy rozwiązać, aby wyznaczyć współczynniki intensywności naprężeń $K_I^M, K_{II}^{MC}, K_{III}^{MC}$.

Oznaczmy składowe elektromagnetycznej siły objętościowej dla modów I, II odpowiednio przez $\mathbf{F}^I = (F_{(r)}, F_{[\alpha]})$, $\mathbf{F}^{II} = (F_{[r]}, F_{(\alpha)})$.

Składowe przemieszczeń w kierunku r i α dla modu I opisane są przez następujący układ równań:

Równania Lamégo

$$\mu \nabla^2 \nu \mathbf{u}^I + (\lambda + \mu) \text{grad div } \nu \mathbf{u}^I + \nu \mathbf{F}^I = \rho \partial_{tt}^2 \nu \mathbf{u}^I \text{ w } \Omega_\nu. \quad (9.25)$$

Warunki brzegowe na powierzchni szczeliny

$$\left. \begin{aligned} \nu \sigma_{(\alpha\alpha)} + \nu \tau_{(\alpha\alpha)} &= 0, & \nu \sigma_{[\alpha\alpha]} &= 0, \\ \nu \sigma_{(r\alpha)} &= 0, & \nu \sigma_{[r\alpha]} &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ na } \Gamma_\nu. \quad (9.26)$$

Warunki początkowe

$$\nu \mathbf{u}^I(r, \alpha, 0) = 0, \quad \partial_t (\nu \mathbf{u}^I)|_{t=0} = 0. \quad (9.27)$$

Warunek energetyczny

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} [(\sigma_{(rr)} + \tau_{(rr)}) \partial_t ({}_1u_r^I) + (\sigma_{[r\alpha]} + \tau_{[r\alpha]}) \partial_t ({}_1u_\alpha^I)] r d\alpha = 0. \quad (9.28)$$

Warunek w nieskończoności

$$\lim_{r \rightarrow 0} {}_2\mathbf{u}^I = 0. \quad (9.29)$$

Warunki zszycia

$${}_1\mathbf{u}^I(a, \alpha, t) - {}_2\mathbf{u}^I(a, \alpha, t) = 0, \quad \partial_r [{}_1\mathbf{u}^I(r, \alpha, t) - {}_2\mathbf{u}^I(r, \alpha, t)]|_{r=a} = 0. \quad (9.30)$$

Dla modu II składowe przemieszczeń w kierunku r i α spełniają następujący układ równań:

Równania Lamégo

$$\mu \nabla^2 \nu \mathbf{u}^{II} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \nu \mathbf{u}^{II} + \nu \mathbf{F}^{II} = \rho \partial_{tt}^2 \nu \mathbf{u}^{II} \text{ w } \Omega_\nu. \quad (9.31)$$

Warunki brzegowe na powierzchni szczeliny

$$\left. \begin{aligned} \nu \sigma_{[\alpha\alpha]} + \nu \tau_{[\alpha\alpha]} &= 0, & \nu \sigma_{(\alpha\alpha)} &= 0, \\ \nu \sigma_{(r\alpha)} &= 0, & \nu \sigma_{[r\alpha]} &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ na } \Gamma_\nu. \quad (9.32)$$

Warunki początkowe

$$\nu \mathbf{u}^{II}(r, \alpha, 0) = 0, \quad \partial_t (\nu \mathbf{u}^{II})|_{t=0} = 0. \quad (9.33)$$

Warunek energetyczny

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} [(\sigma_{[rr]} + \tau_{[rr]}) \partial_t ({}_1u_r^{II}) + (\sigma_{(r\alpha)} + \tau_{(r\alpha)}) \partial_t ({}_1u_\alpha^{II})] r d\alpha = 0. \quad (9.34)$$

Warunek w nieskończoności

$$\lim_{r \rightarrow 0} {}_2\mathbf{u}^{II} = 0. \quad (9.35)$$

Warunki zszycia

$${}_1\mathbf{u}^{II}(a, \alpha, t) - {}_2\mathbf{u}^{II}(a, \alpha, t) = 0, \quad \partial_r [{}_1\mathbf{u}^{II}(r, \alpha, t) - {}_2\mathbf{u}^{II}(r, \alpha, t)]|_{r=a} = 0. \quad (9.36)$$

Dla wyznaczenia współczynnika intensywności naprężeń K_{III}^{MC} należy rozwiązać następujący układ równań

Równanie dla składowej przemieszczenia w kierunku z

$$\mu \nabla^2 \nu u_z + \nu F_z = \rho \partial_{tt}^2 (\nu u_z) \text{ w } \Omega_\nu. \quad (9.37)$$

Warunki brzegowe na powierzchni szczeliny

$$\nu \sigma_{z\alpha} = 0 \text{ na } \Gamma_\nu. \quad (9.38)$$

Warunki początkowe

$$\nu u_z(r, \alpha, 0) = 0, \quad \partial_t (\nu u_z)|_{t=0} = 0. \quad (9.39)$$

Warunek energetyczny

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} [(\sigma_{rz} + \tau_{rz}) \partial_t (1u_z)] r d\alpha = 0. \quad (9.40)$$

Warunek w nieskończoności

$$\lim_{r \rightarrow 0} {}_2u_z = 0. \quad (9.41)$$

Warunki zszycia

$${}_1u_z(a, \alpha, t) - {}_2u_z(a, \alpha, t) = 0, \quad \partial_r [{}_1u_z(r, \alpha, t) - {}_2u_z(r, \alpha, t)]|_{r=a} = 0. \quad (9.42)$$

Stosując transformację Laplace'a i skończoną cosinusową transformację Fouriera w przedziale $(0, 2\pi)$ stosunkowo łatwo jest otrzymać rozwiązanie równań (9.37) – (9.40) w takiej postaci, że współczynnik K_{III}^{MC} wyznacza się z nieskończonego układu równań funkcyjnych równoważnych warunkom (9.42). Znacznie bardziej skomplikowane jest wyznaczenie współczynników K_I^M i K_{II}^{MC} . W przyjętej tu metodzie równania dla modu I i II zastąpiono równoważnym im układem równań w których wprowadzono dodatkowe nieznanne funkcje – funkcje pomocnicze. Pozornie komplikuje to równania, jednak w efekcie sprowadza problem wyznaczenia współczynników intensywności naprężeń do znalezienia jednej niewiadomej funkcji z nieskończonego układu równań funkcyjnych. Metoda ta zostanie omówiona w następujących paragrafach.

9.3 Wyznaczanie współczynnika K_I^M

Stosujemy metodę transformacji Laplace'a

$${}_v\mathbf{u}^I = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} {}_v\hat{\mathbf{u}}^I(r, \alpha, \xi) e^{\xi t} d\xi, \quad {}_v\hat{\mathbf{u}}^I = \int_0^\infty {}_v\mathbf{u}^I e^{-\xi t} d\xi.$$

Transformata Laplace'a równania (9.25) przy warunkach początkowych (9.27) ma postać

$$\mu \nabla^2 {}_v\hat{\mathbf{u}}^I + (\lambda + \mu) \text{grad div } {}_v\hat{\mathbf{u}}^I - \rho \xi^2 {}_v\mathbf{u}^I = - {}_v\hat{\mathbf{F}}^I \quad \text{w } \Omega_v. \quad (9.43)$$

Rozwiązaniem układu równań dla modu I będzie $\hat{\mathbf{u}}^I = (\hat{u}_{(r)}, \hat{u}_{[\alpha]})$ gdzie $\hat{u}_{(r)}$ jest symetryczną funkcją α , $\hat{u}_{[\alpha]}$ jest antysymetryczną funkcją α . Fakt ten wykorzystujemy stosując w celu konstrukcji rozwiązania odpowiednią dla funkcji symetrycznych i antysymetrycznych skończoną transformację Fouriera. Przedstawiając składową przemieszczenia w kierunku r za pomocą sinusowego szeregu Fouriera a składową w kierunku α za pomocą cosinusowego szeregu Fouriera w przedziale $(0, 2\pi)$ można spełnić dla równań Lamégo dowolne warunki brzegowe na powierzchni szczeliny dla pochodnej $\partial_\alpha u_\alpha$ oraz składowej przemieszczenia u_r , lub składowej przemieszczenia u_r i składowej naprężenia $\sigma_{\alpha\alpha}$. Jeżeli

przedstawimy u_r za pomocą cosinusowego szeregu Fouriera a u_α za pomocą sinusowego szeregu w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ to wówczas można spełnić dowolne warunki brzegowe na powierzchni szczeliny dla składowej przemieszczenia u_α i dla pochodnej $\partial_\alpha u_r$, lub składowej naprężenia $\sigma_{r\alpha}$ i składowej przemieszczenia u_α . Ponieważ musimy spełnić naprężeniowe warunki brzegowe dla składowych $\sigma_{\alpha\alpha}$ i $\sigma_{r\alpha}$ przyjmujemy rozwiązanie w postaci sumy dwóch funkcji

$${}_\nu \hat{\mathbf{u}}^I = {}_\nu \hat{\mathbf{u}}^A + {}_\nu \hat{\mathbf{u}}^B, \quad (9.44)$$

gdzie ${}_\nu \hat{\mathbf{u}}^A$ spełnia równanie (9.43) natomiast ${}_\nu \hat{\mathbf{u}}^B$ spełnia jednorodne równanie (9.43) dla ${}_\nu \hat{\mathbf{F}}^I = 0$.

Składowe wektorów ${}_\nu \hat{\mathbf{u}}^A$, ${}_\nu \hat{\mathbf{u}}^B$ przyjmujemy w postaci następujących szeregów Fouriera

$$\begin{aligned} {}_\nu \hat{u}_{(r)}^A &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} {}_\nu \hat{u}_{(r)}^{2n+1} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha, \\ {}_\nu \hat{u}_{[\alpha]}^A &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} {}_\nu \hat{u}_{[\alpha]}^{2n+1} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha, \\ {}_\nu \hat{u}_{(r)}^B &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} {}_\nu \hat{u}_{(r)}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} {}_\nu \hat{u}_{(r)}^{2n} \cos n\alpha \right], \\ {}_\nu \hat{u}_{[\alpha]}^B &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} {}_\nu \hat{u}_{[\alpha]}^{2n} \sin n\alpha, \end{aligned} \quad (9.45)$$

gdzie

$$\begin{aligned} {}_\nu \hat{u}_{(r)}^{2n+1} &= \int_0^{2\pi} {}_\nu \hat{u}_{(r)}^A \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha, & {}_\nu \hat{u}_{(r)}^{2n} &= \int_0^{2\pi} {}_\nu \hat{u}_{(r)}^B \cos n\alpha, \\ {}_\nu \hat{u}_{[\alpha]}^{2n+1} &= \int_0^{2\pi} {}_\nu \hat{u}_{[\alpha]}^A \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha, & {}_\nu \hat{u}_{[\alpha]}^{2n} &= \int_0^{2\pi} {}_\nu \hat{u}_{[\alpha]}^B \sin n\alpha. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Zakładamy teraz, że funkcje ${}_\nu \hat{\mathbf{u}}^A$, ${}_\nu \hat{\mathbf{u}}^B$ spełniają na powierzchni szczeliny następujące warunki brzegowe

$$\begin{aligned} {}_\nu \hat{\sigma}_{(\alpha\alpha)}^A(r, 0, \xi) - {}_\nu \hat{\sigma}_{(\alpha\alpha)}^A(r, 2\pi, \xi) &= 0, \\ {}_\nu \hat{\sigma}_{(\alpha\alpha)}^A(r, 0, \xi) + {}_\nu \hat{\sigma}_{(\alpha\alpha)}^A(r, 2\pi, \xi) &= -2 \left[{}_\nu \hat{\tau}_{(\alpha\alpha)}(r, 0, \xi) + {}_\nu \hat{Q}_{(\alpha\alpha)}(r, \xi) \right], \\ {}_\nu \hat{u}_{(r)}^A(r, 0, \xi) + {}_\nu \hat{u}_{(r)}^A(r, 2\pi, \xi) &= -2 {}_\nu \hat{X}_{(r)}(r, \xi), \\ {}_\nu \hat{u}_{(r)}^A(r, 0, \xi) - {}_\nu \hat{u}_{(r)}^A(r, 2\pi, \xi) &= 0 \end{aligned} \quad (9.47)$$

$${}_\nu \hat{\sigma}_{[r\alpha]}^B(r, 0, \xi) - {}_\nu \hat{\sigma}_{[r\alpha]}^B(r, 2\pi, \xi) = -2 {}_\nu \hat{Q}_{[r\alpha]}(r, \xi), \quad (9.48)$$

$$\begin{aligned}
\nu\hat{\sigma}_{[r\alpha]}^B(r, 0, \xi) + \nu\hat{\sigma}_{[r\alpha]}^B(r, 2\pi, \xi) &= 0, \\
\nu\hat{u}_{[\alpha]}^B(r, 0, \xi) - \nu\hat{u}_{[\alpha]}^B(r, 2\pi, \xi) &= -2\nu\hat{X}_{[\alpha]}(r, \xi), \\
\nu\hat{u}_{[\alpha]}^B(r, 0, \xi) + \nu\hat{u}_{[\alpha]}^B(r, 2\pi, \xi) &= 0.
\end{aligned}$$

Tutaj $\nu\hat{Q}_{(\alpha\alpha)}$, $\nu\hat{X}_{(r)}$, $\nu\hat{Q}_{[r\alpha]}$, $\nu\hat{X}_{[\alpha]}$ są nieznanymi funkcjami pomocniczymi, które dobieramy tak, aby spełnić warunki brzegowe (9.26). Z warunku aby suma naprężeń normalnych mechanicznych i elektromagnetycznych na powierzchni szczeliny była równa zero, otrzymujemy równanie dla funkcji pomocniczej $\nu\hat{Q}_{(\alpha\alpha)}$

$$\nu\hat{Q}_{(\alpha\alpha)}(r, \xi) = \nu\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}^B(r, 0, \xi). \quad (9.49)$$

Z warunku znikania składowej stycznej naprężenia mechanicznego na powierzchni szczeliny otrzymujemy równanie dla funkcji pomocniczej $\nu\hat{Q}_{[r\alpha]}$

$$\nu\hat{Q}_{[r\alpha]}(r, \xi) = \nu\hat{\sigma}_{r\alpha}^A(r, 0, \xi). \quad (9.50)$$

Współczynniki szeregu Fouriera przedstawiamy w zależności od potencjałów

$$\begin{aligned}
\nu\hat{u}_{(r)}^{2n+1} &= \frac{d}{dr} \nu\hat{\Phi}_1^{2n+1} - \frac{2n+1}{2r} \nu\hat{\Phi}_2^{2n+1}, \\
\nu\hat{u}_{[\alpha]}^{2n+1} &= \frac{2n+1}{2r} \nu\hat{\Phi}_1^{2n+1} - \frac{d}{dr} \nu\hat{\Phi}_2^{2n+1}, \\
\nu\hat{u}_{(r)}^{2n} &= \frac{d}{dr} \nu\hat{\Phi}_1^{2n} + \frac{n}{r} \nu\hat{\Phi}_2^{2n}, \\
\nu\hat{u}_{[\alpha]}^{2n} &= -\frac{n}{r} \nu\hat{\Phi}_1^{2n} - \frac{d}{dr} \nu\hat{\Phi}_2^{2n}.
\end{aligned} \quad (9.51)$$

Dokonując skończonej sinusowej transformacji Fouriera na składowej równania (9.43) w kierunku r i cosinusowej na składowej w kierunku α a następnie odwrotnie, cosinusowej transformacji na składowej w kierunku r i sinusowej na składowej w kierunku α , biorąc pod uwagę warunki brzegowe (9.47), (9.48), otrzymuje się nieskończony układ równań postaci

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} \nu\hat{F}_1^{2n+1} - \mu \frac{2n+1}{2r} \nu\hat{F}_2^{2n+1} &= -\nu\hat{F}_{(r)}^{2n+1} + \mu \frac{2n+1}{r^2} \nu\hat{X}_{(r)}, \\
(\lambda + 2\mu) \frac{2n+1}{2r} \nu\hat{F}_1^{2n+1} - \mu \frac{d}{dr} \nu\hat{F}_2^{2n+1} &= -\nu\hat{F}_{[\alpha]}^{2n+1} - \frac{2}{r} \left[\nu\hat{T}_{(\alpha\alpha)|\alpha=0} \right. \\
&\quad \left. + \nu\hat{Q}_{(\alpha\alpha)} + \mu \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \nu\hat{X}_{(r)} \right], \\
n &= 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned} \quad (9.52)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} \nu\hat{F}_1^{2n} + \mu \frac{n}{r} \nu\hat{F}_2^{2n} = -\frac{2}{r} \left[\nu\hat{Q}_{[r\alpha]} \right] \quad (9.53)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\lambda \frac{d}{dr} - \frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) \nu \hat{X}_{[\alpha]}, \\
(\lambda + 2\mu) \frac{n}{r} \nu \hat{F}_1^{2n} + \mu \frac{d}{dr} \nu \hat{F}_2^{2n} &= -2n \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \nu \hat{X}_{[\alpha]}, \\
n &= 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\nu \hat{F}_\rho^m &= \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{4r^2} - c_\rho^2 \xi^2 \right) \nu \hat{\Phi}_\rho^m, \quad (\nu, \rho = 1, 2), \quad (9.54) \\
\nu \hat{F}_{(\nu)}^{2n+1} &= \int_0^{2\pi} \nu \hat{F}_{(\nu)}(r) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \, d\alpha, \quad \nu \hat{F}_{[\alpha]}^{2n+1} = \int_0^{2\pi} \nu \hat{F}_{[\alpha]}^{2n+1} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \, d\alpha, \\
c_1^2 &= \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}, \quad c_2^2 = \frac{\rho}{\mu}.
\end{aligned}$$

Rozwiązanie układu (9.52) i (9.53) przedstawimy jako sumę rozwiązania równań jednorodnych $\nu \hat{\Phi}_\rho^m$ i funkcji spełniających równania niejednorodne $\nu \hat{\Phi}_\rho^m$

$$\nu \hat{\Phi}_\rho^m = \nu \overset{\circ}{\hat{\Phi}}_\rho^m + \nu \overset{s}{\hat{\Phi}}_\rho^m. \quad (9.55)$$

Zakładamy, że odpowiadające funkcjom $\nu \overset{\circ}{\hat{\Phi}}_\rho^m$ przemieszczenia spełniają jednorodne warunki brzegowe na powierzchni szczeliny

$$\begin{aligned}
\nu \overset{\circ}{\hat{u}}_{(r)}(r, 0, \xi) &= \nu \overset{\circ}{\hat{u}}_{(r)}(r, 2\pi, \xi) = 0, \quad (9.56) \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\nu \overset{\circ}{\hat{u}}_{[\alpha]} \right) \Big|_{\alpha=0} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\nu \overset{\circ}{\hat{u}}_{[\alpha]} \right) \Big|_{\alpha=2\pi} = 0, \\
\nu \overset{\circ}{\hat{u}}_{[\alpha]}(r, 0, \xi) &= \nu \overset{\circ}{\hat{u}}_{[\alpha]}(r, 2\pi, \xi) = 0, \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\nu \overset{\circ}{\hat{u}}_{(r)} \right) \Big|_{\alpha=0} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\nu \overset{\circ}{\hat{u}}_{(r)} \right) \Big|_{\alpha=2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Równania dla funkcji pomocniczych (9.49), (9.50) zastąpimy równoważnymi im warunkami

$$\begin{aligned}
\nu \overset{\circ}{\hat{Q}}_{(\alpha\alpha)}(r, \xi) &= \nu \overset{\circ}{\hat{\sigma}}_{\alpha\alpha}(r, 0, \xi), \quad (9.57) \\
\nu \overset{s}{\hat{\sigma}}_{\alpha\alpha}(r, 0, \xi) &= 0, \\
\nu \overset{\circ}{\hat{Q}}_{[r\alpha]}(r, \xi) &= \nu \overset{\circ}{\hat{\sigma}}_{r\alpha}(r, 0, \xi), \\
\nu \overset{s}{\hat{\sigma}}_{r\alpha}(r, 0, \xi) &= 0.
\end{aligned}$$

Pierwsze i trzecie równanie pozwala wyznaczyć funkcje ${}_{\nu}\hat{Q}_{(\alpha\alpha)}$, ${}_{\nu}\hat{Q}_{[r\alpha]}$ w zależności od rozwiązania jednorodnych równań Lamégo spełniającego na powierzchni szczeliny jednorodne warunki brzegowe (9.56). Podstawiając do związków konstytutywnych dla naprężeń mechanicznych szeregi Fouriera reprezentujące rozwiązanie a następnie przechodząc na powierzchnię szczeliny otrzymuje się równania

$${}_{\nu}\hat{Q}_{(\alpha\alpha)} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{r} + \lambda \frac{d}{dr} \right) {}_{\nu}\hat{u}_{(r)}^{\circ 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{r} \left(n {}_{\nu}\hat{u}_{[\alpha]}^{\circ 2n} + {}_{\nu}\hat{u}_{(r)}^{\circ 2n} \right) + \lambda \frac{d}{dr} {}_{\nu}\hat{u}_{(r)}^{\circ 2n} \right] \right\}, \quad (9.58)$$

$${}_{\nu}\hat{Q}_{[r\alpha]} = \frac{\mu}{\pi} \left[\frac{2n+1}{2r} {}_{\nu}\hat{u}_{(r)}^{\circ 2n+1} + \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) {}_{\nu}\hat{u}_{[\alpha]}^{\circ 2n+1} \right]. \quad (9.59)$$

Postępując w taki sam sposób otrzymujemy drugie i czwarte równanie w postaci

$$\frac{\lambda + 2\mu}{r} \left[{}_{\nu}\hat{X}_{[\alpha]} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 {}_{\nu}\hat{X}_{[\alpha]} + n {}_{\nu}\hat{u}_{[\alpha]}^s{}^{2n} \right) \right] + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{r} + \lambda \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{1}{2} {}_{\nu}\hat{u}_{(r)}^s{}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} {}_{\nu}\hat{u}_{(r)}^s{}^{2n} \right) = 0. \quad (9.60)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (2n+1) \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) {}_{\nu}\hat{\Phi}_1^s{}^{2n+1} - \frac{d}{dr} {}_{\nu}\hat{\Phi}_2^s{}^{2n+1} + \frac{1}{r} \left[2 {}_{\nu}\hat{X}_{(r)} - \frac{(2n+1)^2}{4r} {}_{\nu}\hat{\Phi}_2^s{}^{2n+1} \right] \right\} = 0 \quad (9.61)$$

Ostatnie dwa równania są zatem równaniami na nieznanne funkcje pomocnicze ${}_{\nu}\hat{X}_{(r)}$, ${}_{\nu}\hat{X}_{[\alpha]}$.

Powyższe równania należy uzupełnić warunkami ciągłości przemieszczeń na wspólnej granicy obu obszarów (9.30)

$$\left[\left(\begin{matrix} {}_{1}\hat{u}_{(r)}^{\circ A} + {}_{1}\hat{u}_{(r)}^s{}^A + {}_{1}\hat{u}_{(r)}^{\circ B} + {}_{1}\hat{u}_{(r)}^s{}^B \\ {}_{2}\hat{u}_{(r)}^{\circ A} + {}_{2}\hat{u}_{(r)}^s{}^A + {}_{2}\hat{u}_{(r)}^{\circ B} + {}_{2}\hat{u}_{(r)}^s{}^B \end{matrix} \right) \right]_{|r=a} = 0$$

$$\left\{ \partial_r \left[\left(\begin{matrix} {}_{1}\hat{u}_{(r)}^{\circ A} + {}_{1}\hat{u}_{(r)}^s{}^A + {}_{1}\hat{u}_{(r)}^{\circ B} + {}_{1}\hat{u}_{(r)}^s{}^B \\ {}_{2}\hat{u}_{(r)}^{\circ A} + {}_{2}\hat{u}_{(r)}^s{}^A + {}_{2}\hat{u}_{(r)}^{\circ B} + {}_{2}\hat{u}_{(r)}^s{}^B \end{matrix} \right) \right] \right\}_{|r=a} = 0 \quad (9.62)$$

$$\left[\left(\begin{array}{cc} \circ A & s A \\ 1 \hat{u}_{[\alpha]} + 1 \hat{u}_{[\alpha]} + 1 \hat{u}_{[\alpha]} + 1 \hat{u}_{[\alpha]} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} \circ A & s A \\ 2 \hat{u}_{[\alpha]} + 2 \hat{u}_{[\alpha]} + 2 \hat{u}_{[\alpha]} + 2 \hat{u}_{[\alpha]} \end{array} \right) \right]_{|r=a} = 0$$

$$\left\{ \partial_r \left[\left(\begin{array}{cc} \circ A & s A \\ 1 \hat{u}_{[\alpha]} + 1 \hat{u}_{[\alpha]} + 1 \hat{u}_{[\alpha]} + 1 \hat{u}_{[\alpha]} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} \circ A & s A \\ 2 \hat{u}_{[\alpha]} + 2 \hat{u}_{[\alpha]} + 2 \hat{u}_{[\alpha]} + 2 \hat{u}_{[\alpha]} \end{array} \right) \right] \right\}_{|r=a} = 0 \quad (9.63)$$

Biorąc pod uwagę, że rozwiązanie równań niejednorodnych jest reprezentowane przez szeregi Fouriera, które nie są ciągle przy przechodzeniu na brzeg szczeliny, należy je uzupełnić równaniami

$$\left(1 \hat{X}(r) - 2 \hat{X}(r) \right)_{|r=a} = 0, \quad \left[\frac{d}{dr} \left(1 \hat{X}(r) - 2 \hat{X}(r) \right) \right]_{|r=a} = 0, \quad (9.64)$$

$$\left(1 \hat{X}_{[\alpha]} - 2 \hat{X}_{[\alpha]} \right)_{|r=a} = 0, \quad \left[\frac{d}{dr} \left(1 \hat{X}_{[\alpha]} - 2 \hat{X}_{[\alpha]} \right) \right]_{|r=a} = 0.$$

Jest to pełny układ równań umożliwiający jednoznaczne rozwiązanie problemu. Zauważmy, że w obszarze Ω_1 rozwiązanie jednorodnego układu równań (9.52) można przyjąć

w postaci $1 \hat{\Phi}_\rho = \hat{P}_\rho^{2n+1}(\xi) I_{n+\frac{1}{2}}(c_\rho \xi r)$, gdzie \hat{P}_ρ^{2n+1} – dowolne współczynniki. Biorąc pod uwagę definicję funkcji Bessela w postaci szeregu potęgowego względem zmiennej

(6.27), funkcje $1 \hat{\Phi}_\rho$ można przedstawić za pomocą uogólnionych szeregów potęgowych

$1 \hat{\Phi}_\rho = \sum_{s=0}^{\infty} r^{n+2s+\frac{1}{2}} q_s^{2n+1}(c_\rho \xi)$. Stąd, jeżeli funkcje $1 \hat{X}(r)$ i $1 \hat{Q}_{[r\alpha]}$ przyjmiemy w postaci

$$1 \hat{X}(r) = \sum_{m=1}^{\infty} 1 \hat{X}_{(r)}^m r^m \ln r + \hat{N}_1 r + \hat{N}_2 r^2, \quad (9.65)$$

$$1 \hat{Q}_{[r\alpha]} = \sum_{m=0}^{\infty} r^{m-\frac{1}{2}} 1 \hat{Q}_{[r\alpha]}^m,$$

to równania (9.61), (9.59) można zastąpić równoważnymi im nieskończonymi układami równań funkcyjnych na współczynniki $1 \hat{X}_{(r)}^m$, \hat{N}_1 , \hat{N}_2 i $1 \hat{Q}_{[r\alpha]}^m$. Równania te mają strukturę trójkątną [36], [37], dzięki czemu nieznanne współczynniki wyznacza się w sposób efektywny.

Z kolei funkcje $1 \hat{\Phi}_\rho$ będą się wyrażały przez zmodyfikowane funkcje Bessela $I_n(c_\rho \xi r)$ i wobec tego potencjały te można przedstawić w postaci szeregów potęgowych względem

r : $1 \hat{\Phi}_\rho = \sum_{s=0}^{\infty} r^{n+2s} q_s^{2n}(c_\rho \xi)$. Przyjmując

$$1 \hat{X}_{[\alpha]} = \sum_{m=1}^{\infty} 1 \hat{X}_{[\alpha]}^m r^m \ln r + \hat{M}_1 r + \hat{M}_2 r^2, \quad 1 \hat{Q}_{(\alpha\alpha)} = \sum_{m=1}^{\infty} r^{m-1} 1 \hat{Q}_{(\alpha\alpha)}^m$$

można zastąpić równania (9.60) i (9.58) równoważnymi im nieskończonymi układami równań funkcyjnych. Dla szczeliny przewodzącej okazało się, że można przyjąć ${}_1\hat{X}_{[\alpha]} = 0$ [36], [37]. Nieskończony układ równań na współczynniki ${}_1\hat{Q}_{(\alpha\alpha)}^m$ ma strukturę trójkątną co umożliwia efektywne wyznaczenie niewiadomych.

Konstrukcja funkcji ${}_1\hat{\Phi}_\rho$ i ${}_1\hat{\Phi}_\rho$, biorąc pod uwagę postać sił elektromagnetycznych dla modu I oraz przyjętą postać funkcji pomocniczych, nie następuje trudności.

W obszarze Ω_2 otrzymujemy ${}_2\hat{\Phi}_\rho = \hat{S}_\rho^m(\xi) K_{\frac{m}{2}}(c_\rho \xi r)$, gdzie $K_{\frac{m}{2}}$ zmodyfikowane funkcje Bessela drugiego rodzaju, \hat{S}_ρ^m dowolne współczynniki. Dla szczeliny przewodzącej przyjmuje się funkcje pomocnicze w postaci

$$\begin{aligned} {}_2\hat{Q}_{(\alpha\alpha)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^2 \hat{\Theta}_\nu^{2n} K(c_\nu \xi r), \\ {}_2\hat{Q}_{[r\alpha]} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^2 \hat{\Theta}_\nu^{2n+1} \left[K_{n-\frac{3}{2}}(c_\nu \xi r) + (-1)^\nu K_{n+\frac{3}{2}}(c_\nu \xi r) \right], \\ {}_2\hat{X}_{(r)} &= \sum_{m=1}^{\infty} r^m \ln r \left[{}_2\hat{X}_{(r)}^m \right], \quad {}_2\hat{X}_{[\alpha]} = 0. \end{aligned} \quad (9.66)$$

Warunki zszycia (9.62), (9.63) można zastąpić równoważnym im nieskończonym układem równań funkcyjnych postaci

$$\begin{aligned} &\left[{}_1\hat{u}_{(r)}^{2n+1} + \frac{1}{2} c_{2n+1}^0 {}_1\hat{u}_{(r)}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2n+1}^{2k} {}_1\hat{u}_{(r)}^{2k} \right. \\ &\quad \left. - \left({}_2\hat{u}_{(r)}^{2n+1} + \frac{1}{2} c_{2n+1}^0 {}_2\hat{u}_{(r)}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2n+1}^{2k} {}_2\hat{u}_{(r)}^{2k} \right) \right]_{|r=a} = 0, \\ &\left\{ \frac{d}{dr} \left[{}_1\hat{u}_{(r)}^{2n+1} + \frac{1}{2} c_{2n+1}^0 {}_1\hat{u}_{(r)}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2n+1}^{2k} {}_1\hat{u}_{(r)}^{2k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left({}_2\hat{u}_{(r)}^{2n+1} + \frac{1}{2} c_{2n+1}^0 {}_2\hat{u}_{(r)}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2n+1}^{2k} {}_2\hat{u}_{(r)}^{2k} \right) \right] \right\}_{|r=a} = 0, \end{aligned} \quad (9.67)$$

$$\begin{aligned} &\left[{}_1\hat{u}_{[\alpha]}^{2n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{2n+1}^{2k} {}_1\hat{u}_{[\alpha]}^{2k} - \left({}_2\hat{u}_{[\alpha]}^{2n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{2n+1}^{2k} {}_2\hat{u}_{[\alpha]}^{2k} \right) \right]_{|r=a} = 0, \\ &\left\{ \frac{d}{dr} \left[{}_1\hat{u}_{[\alpha]}^{2n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{2n+1}^{2k} {}_1\hat{u}_{[\alpha]}^{2k} - \left({}_2\hat{u}_{[\alpha]}^{2n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{2n+1}^{2k} {}_2\hat{u}_{[\alpha]}^{2k} \right) \right] \right\}_{|r=a} = 0, \end{aligned} \quad (9.68)$$

gdzie

$$c_{2n+1}^{2k} = \int_0^{2\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \cos k\alpha \, d\alpha = \frac{4(2n+1)}{(2n+1)^2 - 4k^2},$$

$$s_{2n+1}^{2k} = \int_0^{2\pi} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha \sin k\alpha \, d\alpha = \frac{-8k}{(2n+1)^2 - 4k^2}.$$

Transformatę Laplace'a współczynnika intensywności naprężeń mechanicznych \hat{K}_I^M wyznacza się z tego nieskończonego układu równań funkcyjnych jako jeden z $2n + 2k + 1$ nieznanych współczynników. Tak więc przedstawiona metoda sprowadza problem wyznaczenia współczynnika K_I^M do procedury polegającej na rozwiązywaniu nieskończonych układów równań funkcyjnych, przy czym układy równań związane z warunkami brzegowymi na powierzchni szczeliny są trójkątne co umożliwia efektywne wyznaczenie funkcji pomocniczych.

9.4 Wyznaczanie współczynnika K_{II}^{MC}

Podobnie jak poprzednio stosujemy transformację Laplace'a. Transformatę $\nu \hat{u}^{II}$ przemieszczenia dla modu II przyjmujemy w postaci sumy

$$\nu \hat{u}^{II} = \nu \hat{u}^C + \nu \hat{u}^D. \quad (9.69)$$

Funkcje $\nu \hat{u}^C$, $\nu \hat{u}^D$ przedstawiamy również w postaci sumy

$$\nu \hat{u}^C = \nu \overset{\circ}{\hat{u}}^C + \nu \overset{s}{\hat{u}}^C, \quad \nu \hat{u}^D = \nu \overset{\circ}{\hat{u}}^D + \nu \overset{s}{\hat{u}}^D, \quad (9.70)$$

gdzie $\nu \overset{\circ}{\hat{u}}$, $\nu \overset{s}{\hat{u}}$ spełniają jednorodne równania Lamégo (9.31) a funkcje $\nu \overset{s}{\hat{u}}^C$, $\nu \overset{s}{\hat{u}}^D$ niejednorodne równania (9.31).

Warunki brzegowe na powierzchni szczeliny (9.32) Γ_1 zastępujemy następującymi warunkami równoważnymi

$$\begin{aligned} 1 \overset{\circ}{\hat{u}}_{[r]}^C &= 0, & 1 \overset{\circ}{\hat{u}}_{(\alpha)}^D &= 0, & 1 \overset{s}{\hat{u}}_{[r]}^C &= -1 \hat{X}_{[r]}, \\ 1 \overset{\circ}{\hat{\sigma}}_{[\alpha\alpha]}^C &= 0, & 1 \overset{s}{\hat{\sigma}}_{[\alpha\alpha]}^D &= -1 \hat{T}_{[\alpha\alpha]} - 1 \hat{Q}_{[\alpha\alpha]}, & 1 \overset{s}{\hat{u}}_{(\alpha)}^C &= -1 \hat{X}_{(\alpha)}, \\ 1 \overset{\circ}{\hat{\sigma}}_{[\alpha\alpha]}^D &= 1 \hat{Q}_{[\alpha\alpha]}, & 1 \overset{s}{\hat{\sigma}}_{[\alpha\alpha]}^D &= 0, & 1 \overset{s}{\hat{\sigma}}_{(r\alpha)}^C &= 1 \hat{Q}_{(r\alpha)}, \\ 1 \overset{\circ}{\hat{\sigma}}_{(r\alpha)}^D &= 0, & 1 \overset{s}{\hat{\sigma}}_{(r\alpha)}^D &= -1 \hat{Q}_{(r\alpha)}, & 1 \overset{s}{\hat{\sigma}}_{(r\alpha)}^D &= 0. \end{aligned} \quad (9.71)$$

Na powierzchni szczeliny Γ_2 w obszarze zewnętrznym zastępcze warunki brzegowe przyjmujemy w postaci

$$\begin{aligned} 2 \overset{\circ}{\hat{u}}_{[r]}^C &= 0, & 1 \overset{s}{\hat{u}}_{[r]}^C &= -2 \hat{X}_{[r]}, & 2 \overset{\circ}{\hat{u}}_{(\alpha)}^D &= 0, \\ 2 \overset{\circ}{\hat{\sigma}}_{[\alpha\alpha]}^D &= 0, & 2 \overset{s}{\hat{\sigma}}_{[\alpha\alpha]}^D &= -2 \hat{Q}_{[\alpha\alpha]}, & 2 \overset{s}{\hat{u}}_{(\alpha)}^C &= -2 \hat{X}_{(\alpha)}, \\ 2 \overset{s}{\hat{\sigma}}_{[\alpha\alpha]}^C &= 2 \hat{Q}_{[\alpha\alpha]}, & 2 \overset{\circ}{\hat{\sigma}}_{[\alpha\alpha]}^D &= -2 \hat{T}_{[\alpha\alpha]}, & 2 \overset{s}{\hat{\sigma}}_{(r\alpha)}^D &= -2 \hat{Q}_{(r\alpha)}, \\ 2 \overset{s}{\hat{\sigma}}_{(r\alpha)}^C &= 0, & 2 \overset{\circ}{\hat{\sigma}}_{(r\alpha)}^D &= 0, & 2 \overset{s}{\hat{\sigma}}_{(r\alpha)}^D &= -2 \hat{Q}_{(r\alpha)}. \end{aligned} \quad (9.72)$$

Wprowadzone zostały tu funkcje pomocnicze ${}_{\nu}\hat{X}_{|r|}$, ${}_{\nu}\hat{X}_{(\alpha)}$, ${}_{\nu}\hat{Q}_{|\alpha\alpha|}$, ${}_{\nu}\hat{Q}_{(r\alpha)}$, które przyjmujemy w następującej postaci

$$\begin{aligned} {}_1\hat{X}_{|r|} &= \sum_{m=0}^{\infty} {}_1\hat{X}_{|r|}^m r^{m+\frac{1}{2}} \ln r + \hat{G}_1 r^{\frac{1}{2}} + \hat{G}_2 r^{\frac{3}{2}}, & {}_2\hat{X}_{|r|} &= 0, \\ {}_1\hat{X}_{(\alpha)} &= \hat{H}_1 r + \hat{H}_2 r^2, & {}_2\hat{X}_{(\alpha)} &= \sum_{m=1}^{\infty} {}_2\hat{X}_{(\alpha)}^m r^m \ln r, \\ {}_1\hat{Q}_{|\alpha\alpha|} &= \sum_{m=0}^{\infty} r^{m-\frac{1}{2}} {}_1\hat{Q}_{|\alpha\alpha|}^m, & {}_2\hat{Q}_{|\alpha\alpha|} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^2 \hat{\sigma}_{\nu}^{2m+1} K_{m+\frac{1}{2}}(c_{\nu}\xi r), \\ {}_1\hat{Q}_{(r\alpha)} &= \sum_{m=0}^{\infty} r^m {}_1\hat{Q}_{(r\alpha)}^m, & {}_2\hat{Q}_{(r\alpha)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^2 \hat{\sigma}_{\nu}^{2m} K_m(c_{\nu}\xi r). \end{aligned} \quad (9.73)$$

Stosujemy metodę skończonej transformacji Fouriera w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Funkcje ${}_{\nu}\hat{u}^C$, ${}_{\nu}\hat{u}^D$ przyjmujemy w postaci

$$\begin{aligned} {}_{\nu}\hat{u}_{|r|}^C &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} {}_{\nu}\hat{u}_{|r|}^{2n} \sin n\alpha, \\ {}_{\nu}\hat{u}_{(\alpha)}^C &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \hat{u}_{(\alpha)}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} {}_{\nu}\hat{u}_{(\alpha)}^{2n} \cos n\alpha \right], \\ {}_{\nu}\hat{u}_{|r|}^D &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} {}_{\nu}\hat{u}_{|r|}^{2n+1} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha, \\ {}_{\nu}\hat{u}_{(\alpha)}^D &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} {}_{\nu}\hat{u}_{(\alpha)}^{2n+1} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha, \end{aligned} \quad (9.74)$$

gdzie

$$\begin{aligned} {}_{\nu}\hat{u}_{|r|}^{2n} &= \int_0^{2\pi} {}_{\nu}\hat{u}_{|r|}^C \sin n\alpha \, d\alpha, & {}_{\nu}\hat{u}_{|r|}^{2n+1} &= \int_0^{2\pi} {}_{\nu}\hat{u}_{|r|}^D \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \, d\alpha, \\ {}_{\nu}\hat{u}_{(\alpha)}^{2n} &= \int_0^{2\pi} {}_{\nu}\hat{u}_{(\alpha)}^C \cos n\alpha \, d\alpha, & {}_{\nu}\hat{u}_{(\alpha)}^{2n+1} &= \int_0^{2\pi} {}_{\nu}\hat{u}_{(\alpha)}^D \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \, d\alpha. \end{aligned}$$

Współczynniki szeregów Fouriera wyrażamy za pomocą potencjałów

$$\begin{aligned} {}_{\nu}\hat{u}_{|r|}^{2n} &= \frac{d}{dr} {}_{\nu}\hat{\Phi}_1^{2n} + \frac{n}{r} {}_{\nu}\hat{\Phi}_2^{2n}, & {}_{\nu}\hat{u}_{(\alpha)}^{2n} &= \frac{n}{r} {}_{\nu}\hat{\Phi}_1^{2n} + \frac{d}{dr} {}_{\nu}\hat{\Phi}_2^{2n}, \\ {}_{\nu}\hat{u}_{|r|}^{2n+1} &= \frac{d}{dr} {}_{\nu}\hat{\Phi}_1^{2n+1} + \frac{2n+1}{2r} {}_{\nu}\hat{\Phi}_2^{2n+1}, \\ {}_{\nu}\hat{u}_{(\alpha)}^{2n+1} &= -\frac{2n+1}{2r} {}_{\nu}\hat{\Phi}_1^{2n+1} - \frac{d}{dr} {}_{\nu}\hat{\Phi}_2^{2n+1}. \end{aligned} \quad (9.75)$$

Równania Lamégo w obszarze Ω_1 możemy zastąpić nieskończonym układem równań różniczkowych zwyczajnych postaci

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} {}_1\hat{f}_1^{2n} + \mu \frac{n}{r} {}_1\hat{f}_2^{2n} &= - {}_1\hat{F}_{[r]}^{2n} + \mu \frac{2n}{r^2} {}_1\hat{X}_{[r]}, \\(\lambda + 2\mu) \frac{n}{r} {}_1\hat{f}_1^{2n} + \mu \frac{d}{dr} {}_1\hat{f}_2^{2n} &= - {}_1\hat{F}_{(\alpha)}^{2n} - \frac{2}{r} \left({}_1\hat{\tau}_{[\alpha\alpha]}|_{\alpha=0} + {}_1\hat{Q}_{[\alpha\alpha]} \right) \\ &\quad - \mu \frac{2}{r} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) {}_1\hat{X}_{[r]},\end{aligned}\quad (9.76)$$

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} {}_1\hat{f}_1^{2n+1} + \mu \frac{2n+1}{2r} {}_1\hat{f}_2^{2n+1} &= - \frac{2}{r} \left[{}_1\hat{Q}_{(r\alpha)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\lambda \frac{d}{dr} - \frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) {}_1\hat{X}_{(\alpha)} \right],\end{aligned}\quad (9.77)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{2n+1}{2r} {}_1\hat{f}_1^{2n+1} + \mu \frac{d}{dr} {}_1\hat{f}_2^{2n+1} = - (\lambda + 2\mu) \frac{2n+1}{r^2} {}_1\hat{X}_{(\alpha)},$$

gdzie

$$\begin{aligned}{}_1\hat{f}_\rho^m &= \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{4r^2} - c_\rho^2 \xi^2 \right) {}_1\hat{\Phi}_\rho^m, \quad \rho = 1, 2, \\ {}_1\hat{F}_{[r]}^{2n} &= \int_0^{2\pi} {}_1\hat{F}_{[r]} \sin n\alpha \, d\alpha, \quad {}_1\hat{F}_{(\alpha)}^{2n} = \int_0^{2\pi} {}_1\hat{F}_{(\alpha)} \cos n\alpha \, d\alpha.\end{aligned}$$

W obszarze Ω_2 zastępujemy równania Lamégo równoważnym im następującym nieskończonym układem równań różniczkowych zwyczajnych na potencjały

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} {}_2\hat{f}_1^{2n} + \mu \frac{n}{r} {}_2\hat{f}_2^{2n} = \mu \frac{2n}{r^2} {}_2\hat{X}_{[r]},\quad (9.78)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{n}{r} {}_2\hat{f}_1^{2n} + \mu \frac{d}{dr} {}_2\hat{f}_2^{2n} = - \frac{2}{r} {}_2\hat{Q}_{[\alpha\alpha]} - \mu \frac{2}{r} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) {}_2\hat{X}_{[r]},$$

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} {}_2\hat{f}_1^{2n+1} + \mu \frac{2n+1}{2r} {}_2\hat{f}_2^{2n+1} &= - {}_2\hat{F}_{[r]}^{2n+1} - \frac{2}{r} \left[{}_2\hat{\tau}_{(r\alpha)}|_{\alpha=0} \right. \\ &\quad \left. + {}_2\hat{Q}_{(r\alpha)} + \left(\lambda \frac{d}{dr} - \frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) {}_2\hat{X}_{(\alpha)} \right],\end{aligned}\quad (9.79)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{2n+1}{2r} {}_2\hat{f}_1^{2n+1} + \mu \frac{d}{dr} {}_2\hat{f}_2^{2n+1} = - {}_2\hat{F}_{(\alpha)}^{2n+1} - (\lambda + 2\mu) \frac{2n+1}{r^2} {}_2\hat{X}_{(\alpha)},$$

gdzie

$$\begin{aligned}{}_2\hat{f}_\rho^m &= \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{4r^2} - c_\rho^2 \xi^2 \right) {}_2\hat{\Phi}_\rho^m, \quad \rho = 1, 2, \\ {}_2\hat{F}_{[r]}^{2n+1} &= \int_0^{2\pi} {}_2\hat{F}_{[r]} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \, d\alpha, \quad {}_2\hat{F}_{(\alpha)}^{2n+1} = \int_0^{2\pi} {}_2\hat{F}_{(\alpha)} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \, d\alpha.\end{aligned}$$

Zgodnie z założeniem (9.70) potencjały ${}_{\nu}\hat{\Phi}_{\rho}^m$ będą sumą

$${}_{\nu}\hat{\Phi}_{\rho}^{2n+1} = {}_{\nu}\hat{\Phi}_{\rho}^{\circ 2n+1} + {}_{\nu}\hat{\Phi}_{\rho}^{s 2n+1}, \quad {}_{\nu}\hat{\Phi}_{\rho}^{2n} = {}_{\nu}\hat{\Phi}_{\rho}^{\circ 2n} + {}_{\nu}\hat{\Phi}_{\rho}^{s 2n}. \quad (9.80)$$

Funkcje ${}_{\nu}\hat{\Phi}_{\rho}^{\circ 2n+1}$, ${}_{\nu}\hat{\Phi}_{\rho}^{\circ 2n}$ spełniają jednorodne równania (9.76) – (9.79) i są związane z funkcjami ${}_{\nu}\hat{\mathbf{u}}^{\circ C}$, ${}_{\nu}\hat{\mathbf{u}}^{\circ D}$. Funkcje te spełniają na powierzchni szczeliny warunki brzegowe

$${}_{\nu}\hat{\mathbf{u}}_{[r]}^{\circ C} = 0, \quad {}_{\nu}\hat{\sigma}_{[\alpha\alpha]}^{\circ C} = 0, \quad {}_{\nu}\hat{\mathbf{u}}_{(\alpha)}^{\circ D} = 0, \quad {}_{\nu}\hat{\sigma}_{(r\alpha)}^{\circ D} = 0,$$

co wynika z konstrukcji rozwiązania. Pozostałe dwa warunki spośród (9.71), (9.72) są równaniami na nieznanne funkcje pomocnicze ${}_{\nu}\hat{Q}_{[\alpha\alpha]}$, ${}_{\nu}\hat{Q}_{(r\alpha)}$. Wykorzystując założoną postać tych funkcji (9.73) równania te można zastąpić trójkątnymi układami równań funkcyjnych na nieznanne współczynniki ${}_{\nu}\hat{Q}_{[\alpha\alpha]}^m$, ${}_{\nu}\hat{Q}_{(r\alpha)}^m$. Funkcje ${}_{\nu}\hat{\Phi}_{\rho}^{s 2n+1}$, ${}_{\nu}\hat{\Phi}_{\rho}^{s 2n}$ spełniają niejednorodne równania (9.76) – (9.79) i są związane z funkcjami ${}_{\nu}\hat{\mathbf{u}}^{s C}$, ${}_{\nu}\hat{\mathbf{u}}^{s D}$. Funkcje ${}_{\nu}\hat{\mathbf{u}}^{s C}$, ${}_{\nu}\hat{\mathbf{u}}^{s D}$ spełniają zatem niejednorodne równania Lamégo i warunki brzegowe (9.71), (9.72)

$$\begin{aligned} {}_{\nu}\hat{\mathbf{u}}_{[r]}^{s C} &= -{}_{\nu}\hat{X}_{[r]}, \quad {}_{\nu}\hat{\mathbf{u}}_{(\alpha)}^{s D} = -{}_{\nu}\hat{X}_{(\alpha)}, \quad {}_{\nu}\hat{\sigma}_{(r\alpha)}^{s D} = -{}_{\nu}\hat{Q}_{(r\alpha)} \\ {}_1\hat{\sigma}_{[\alpha\alpha]}^{s C} &= -{}_1\hat{\tau}_{[\alpha\alpha]} - {}_1\hat{Q}_{[\alpha\alpha]}. \end{aligned}$$

Pozostałe warunki brzegowe na powierzchni szczeliny

$${}_{\nu}\hat{\sigma}_{(r\alpha)}^{s C} = 0, \quad {}_1\hat{\sigma}_{[\alpha\alpha]}^{s D} = 0, \quad {}_2\hat{\sigma}_{[\alpha\alpha]}^{s D} - 2\hat{\tau}_{[\alpha\alpha]}$$

są warunkami, z których wyznacza się funkcje pomocnicze ${}_{\nu}\hat{X}_{[r]}$, ${}_{\nu}\hat{X}_{(\alpha)}$. Postać tych funkcji została przyjęta tak, że warunki te można zastąpić trójkątnymi układami równań funkcyjnych na współczynniki ${}_1\hat{X}_{[r]}^m$, ${}_2\hat{X}_{(\alpha)}^m$ (9.73). Współczynniki \hat{G}_1 , \hat{G}_2 , \hat{H}_1 , \hat{H}_2 wyznacza się z warunków zgodności przemieszczeń (9.36) na powierzchni szczeliny

$$\begin{aligned} \left({}_1\hat{X}_{[r]} - 2\hat{X}_{[r]} \right)_{|r=a} &= 0, \quad \left[\frac{d}{dr} \left({}_1\hat{X}_{[r]} - 2\hat{X}_{[r]} \right) \right]_{|r=a} = 0, \quad (9.81) \\ \left({}_1\hat{X}_{(\alpha)} - 2\hat{X}_{(\alpha)} \right)_{|r=a} &= 0, \quad \left[\frac{d}{dr} \left({}_1\hat{X}_{(\alpha)} - 2\hat{X}_{(\alpha)} \right) \right]_{|r=a} = 0. \end{aligned}$$

Warunki zszycia (9.36) na $S : r = a$, $0 < \alpha < 2\pi$, $|z| < \infty$ można zastąpić nieskończonym układem równań funkcyjnych na dowolne współczynniki związane z rozwiązaniem

równań jednorodnych (9.76) – (9.79)

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\hat{u}_{(r)}^{2n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{2n+1}^{2k} \hat{u}_{(r)}^{2k} - \left(2\hat{u}_{(r)}^{2n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{2n+1}^{2k} 2\hat{u}_{(r)}^{2k} \right) \right]_{|r=a} = 0, \\ & \left\{ \frac{d}{dr} \left[\hat{u}_{(r)}^{2n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{2n+1}^{2k} \hat{u}_{(r)}^{2k} - \left(2\hat{u}_{(r)}^{2n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{2n+1}^{2k} 2\hat{u}_{(r)}^{2k} \right) \right] \right\}_{|r=a} = 0, \end{aligned} \right. \quad (9.82)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\hat{u}_{[\alpha]}^{2n+1} + \frac{1}{2} c_{2n+1}^0 \hat{u}_{[\alpha]}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2n+1}^{2k} \hat{u}_{[\alpha]}^{2k} - \left(2\hat{u}_{[\alpha]}^{2n+1} + \frac{1}{2} c_{2n+1}^0 2\hat{u}_{[\alpha]}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2n+1}^{2k} 2\hat{u}_{[\alpha]}^{2k} \right) \right]_{|r=a} = 0, \\ & \left\{ \frac{d}{dr} \left[\hat{u}_{[\alpha]}^{2n+1} + \frac{1}{2} c_{2n+1}^0 \hat{u}_{[\alpha]}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2n+1}^{2k} \hat{u}_{[\alpha]}^{2k} - \left(2\hat{u}_{[\alpha]}^{2n+1} + \frac{1}{2} c_{2n+1}^0 2\hat{u}_{[\alpha]}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2n+1}^{2k} 2\hat{u}_{[\alpha]}^{2k} \right) \right] \right\}_{|r=a} = 0, \end{aligned} \right. \quad (9.83)$$

gdzie

$$c_{2n+1}^{2k} = \frac{4(2n+1)}{(2n+1)^2 - 4k^2}, \quad s_{2n+1}^{2k} = \frac{-8k}{(2n+1)^2 - 4k^2}.$$

Z nieskończonego układu równań (9.82), (9.83) wystarczy wyznaczyć jeden nieznan współczynnik K_{II}^{MC} . Podobnie jak w przypadku poprzednim, również dla modu II problem wyznaczenia współczynnika intensywności naprężeń mechanicznych sprowadzono do procedury rozwiązywania nieskończonego układu równań funkcyjnych.

9.5 Wyznaczanie współczynnika K_{III}^{MC}

Jest to zadanie stosunkowo proste i nie wymaga wprowadzania funkcji pomocniczych. Stosujemy transformację Laplace'a i cosinusową transformację Fouriera w przedziale $(0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \nu u_z(r, \alpha, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \nu \hat{u}_z(r, \alpha, \xi) e^{\xi t} d\xi, & \nu \hat{u}_z &= \int_0^{\infty} \nu u_z e^{-\xi t} d\xi, \\ \nu \hat{u}_z &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \nu \hat{u}_z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \nu \hat{u}_z^n \cos \frac{n}{2} \alpha \right), & \nu \hat{u}_z^n &= \int_0^{2\pi} \nu \hat{u}_z \cos \frac{n}{2} \alpha d\alpha. \end{aligned} \quad (9.84)$$

Dokonyjemy transformacji Laplace'a a następnie cosinusowej transformacji Fouriera na równaniu (9.37) dla u_z . Biorąc pod uwagę warunek brzegowy na powierzchni szczeliny (9.38) $\nu \hat{\sigma}_{z\alpha}|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = 0$ i postać sił elektromagnetycznych (9.18), (9.20), otrzymujemy

nieskończony układ równań w postaci

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{4r^2} - c_2^2 \xi^2 \right) {}_1\hat{u}_z^n &= -\frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} r^{m-\frac{1}{2}} {}_1\hat{F}_{zm}^n, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{4r^2} - c_2^2 \xi^2 \right) {}_2\hat{u}_z^n &= -\frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} r^m {}_2\hat{F}_{zm}^n, \end{aligned} \quad (9.85)$$

gdzie ${}_\nu\hat{F}_{zm}^n = \int_0^{2\pi} {}_\nu\hat{F}_z^m \cos \frac{n}{2} \alpha d\alpha$.

Warunki zszycia (9.42) można zastąpić równoważnym układem równań funkcyjnych

$$\begin{aligned} ({}_1\hat{u}_z^1 - {}_2\hat{u}_z^1)|_{r=a} &= 0, \quad \left[\frac{d}{dr} ({}_1\hat{u}_z^1 - {}_2\hat{u}_z^1) \right]_{r=a} = 0, \\ ({}_1\hat{u}_z^2 - {}_2\hat{u}_z^2)|_{r=a} &= 0, \quad \left[\frac{d}{dr} ({}_1\hat{u}_z^2 - {}_2\hat{u}_z^2) \right]_{r=a} = 0, \\ \dots, & \quad \dots, \\ ({}_1\hat{u}_z^n - {}_2\hat{u}_z^n)|_{r=a} &= 0, \quad \left[\frac{d}{dr} ({}_1\hat{u}_z^n - {}_2\hat{u}_z^n) \right]_{r=a} = 0, \\ \dots, & \quad \dots, \end{aligned} \quad (9.86)$$

Współczynnik K_{III}^{MC} występuje tylko w ${}_1\hat{u}_z^1$. Dlatego, biorąc pod uwagę postać równań równoważnych warunkom zszycia (9.86), z punktu widzenia wyznaczenia współczynnika intensywności naprężeń mechanicznych wystarczy skonstruowanie rozwiązania równań (9.85) dla $n = 1$.

Rozwiązanie w obszarze Ω_1 spełniające warunek energetyczny (9.40) otrzymujemy w postaci

$$\begin{aligned} {}_1\hat{u}_z^1 &= \hat{C}_1(\xi) I_{\frac{1}{2}}(c_2 \xi r) + \\ &\quad \frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} {}_1\hat{F}_{zm}^1 \sum_{s=0}^{\infty} r^{m+2s+\frac{3}{2}} (ic_2 \xi)^{2s} \Psi_{(m+\frac{7}{2})(2s-2)}^1. \end{aligned}$$

Tutaj \hat{C}_1 jest dowolnym współczynnikiem, który należy wyznaczyć z równań (9.86),

$$\Psi_{(\frac{1}{2})(2s)}^n = \frac{(-1)^s}{a_{\frac{1}{2}-2}^n a_{\frac{1}{2}}^n a_{\frac{1}{2}+2}^n \dots a_{\frac{1}{2}+2s}^n}, \quad a_{\frac{n}{2}}^n = \frac{m^2 - n^2}{4}.$$

Rozwiązanie w obszarze Ω_2 spełniające warunek (9.41) ma postać

$$\begin{aligned} {}_2\hat{u}_z^1 &= \hat{D}_1(\xi) K_{\frac{1}{2}}(c_2 \xi r) + \frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^N {}_2\hat{F}_{zm}^1 \left[K_{\frac{1}{2}}(c_2 \xi r) \int_a^r I_{\frac{1}{2}}(c_2 \xi s) s^{m+1} ds \right. \\ &\quad \left. + I_{\frac{1}{2}}(c_2 \xi r) \int_r^{\infty} K_{\frac{1}{2}}(c_2 \xi s) s^{m+1} ds \right]. \end{aligned}$$

Równania z których wyznaczamy współczynnik \hat{C}_1 mają formę

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 I_{\frac{1}{2}}(c_2 \xi a) - \hat{D}_1 K_{\frac{1}{2}}(c_2 \xi a) &= \hat{V}_1, \\ \hat{C}_1 \left[I_{-\frac{1}{2}}(c_2 \xi a) + I_{\frac{3}{2}}(c_2 \xi a) \right] - \hat{D}_1 \left[K_{-\frac{1}{2}}(c_2 \xi a) + K_{\frac{3}{2}}(c_2 \xi a) \right] &= \hat{V}_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{V}_1 &= \frac{1}{\mu} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} {}_1\hat{F}_{zm}^1 \sum_{s=0}^{\infty} a^{m+2s+\frac{3}{2}} (ic_2\xi)^{2s} \Psi_{\left(m+\frac{7}{2}\right)(2s-2)}^1 \right. \\ &\quad \left. - I_{\frac{1}{2}}(c_2\xi a) \sum_{m=0}^N {}_2\hat{F}_{zm}^1 \int_a^{\infty} K_{\frac{1}{2}}(c_2\xi s) s^{m+1} ds \right\}, \\ \hat{V}_2 &= \frac{1}{\mu} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} {}_1\hat{F}_{zm}^1 \sum_{s=0}^{\infty} \left(m + 2s + \frac{3}{2} \right) a^{m+2s+\frac{1}{2}} (ic_2\xi)^{2s} \Psi_{\left(m+\frac{7}{2}\right)(2s-2)}^1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{c_2\xi}{2} \left[I_{-\frac{1}{2}}(c_2\xi a) + I_{\frac{3}{2}}(c_2\xi a) \right] \sum_{m=0}^N {}_2\hat{F}_{zm}^1 \int_a^{\infty} K_{\frac{1}{2}}(c_2\xi s) s^{m+1} ds \right\}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy ostatecznie

$$K_{III}^{MC} = -\frac{\mu\sqrt{c_2}}{2i\pi^2} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \hat{C}_1(\xi) \xi^{\frac{1}{2}} e^{\xi t} d\xi$$

gdzie

$$\hat{C}_1 = a \left\{ \frac{c_2\xi}{2} \left[K_{-\frac{1}{2}}(c_2\xi a) + K_{\frac{3}{2}}(c_2\xi a) \right] \hat{V}_1 + K_{\frac{1}{2}}(c_2\xi a) \hat{V}_2 \right\}.$$

9.6 Współczynnik K_I^M w walcu dielektrycznym z radialną szczeliną przewodzącą w polu elektrostatycznym

Podany zostanie przykład zastosowania przedstawionej w paragrafie 9.3 niniejszego rozdziału metody do wyznaczenia numerycznego wyznaczania współczynnika K_I^M w dielektrycznym walcu z radialną szczeliną przewodzącą, poddanego działaniu pola elektrostatycznego. Przykład ten jest znacznie prostszy od analogicznego zagadnienia dynamicznego dla szczeliny półnieskończonej, nie wymaga bowiem stosowania transformacji Laplace'a ani konstrukcji rozwiązania w obszarze zewnętrznym. Ponadto w przypadku statycznym w miejsce nieskończonego układu równań funkcyjnych na nieznanne współczynniki, mamy do czynienia z nieskończonym układem równań algebraicznych na nieznanne współczynniki liczbowe, co również upraszcza procedurę wyznaczenia współczynnika intensywności

naprężeń. Taki stosunkowo prosty przykład wybrany został celowo aby lepiej zilustrować funkcjonowanie metody.

Podstawą dla sformułowania problemu brzegowego jest tu quasiliniowe przybliżenie modelu Eringena oddziaływań pola elektrostatycznego z dielektrykiem sprężystym [11]. W modelu tym równania pola elektrostatycznego i równania równowagi jak również odpowiadające im warunki brzegowe oraz równania konstytutywne mają taką samą postać jak dla modelu Toupina omawianego w rozdziale 1 niniejszej pracy. Oba modele różnią się natomiast definicją tensora naprężeń Maxwella. W modelu Eringena tensor ten jest zdefiniowany następująco

$${}^M t_{kl} = - \left[e_0 \varphi_{;k} \varphi_{;l} - \varphi_{;k} P_l - \frac{1}{2} (e_0 \varphi_{;m} \varphi_{;m} - \varphi_{;m} P^m) \delta_{kl} \right] \quad (9.87)$$

gdzie \mathbf{P} jest wektorem polaryzacji. Dla ośrodka izotropowego $\mathbf{P} = (\varepsilon - e_0) \mathbf{E}$ i tensor Maxwella różni się znakiem od tensora Maxwella w modelu Toupina (1.25).

Rozpatrujemy przypadek płaski dla nieskończonego walca o przekroju kołowym o promieniu d poddanego działaniu zewnętrznego pola elektrostatycznego, które nie zmienia się wzdłuż osi walca. Walec zawiera radialną szczelinę o długości d . Walec ten jest wykonany z izotropowego i jednorodnego sprężystego dielektryka o przenikalności dielektrycznej ε . Zakładamy, że zewnętrzne pole elektrostatyczne ma natężenie dostatecznie duże aby powodować jonizację gazu wewnątrz szczeliny, która staje się idealnie przewodząca.

Problem brzegowy na podstawie którego wyznacza się współczynnik intensywności naprężeń mechanicznych K_I^M , formułujemy w układzie współrzędnych biegunowych r, α o początku w środku koła będącym przekrojem poprzecznym walca. Oznaczmy przez Ω_d przekrój poprzeczny walca, przez Ω odpowiadający mu przekrój otaczającej walec próżni, przez Γ_c przekrój powierzchni szczeliny a przez Γ_d przekrój poprzeczny powierzchni cylindra:

$$\begin{aligned} \Omega_d : & 0 < r < d, & 0 < \alpha < 2\pi, \\ \Omega : & d < r < \infty, & 0 \leq \alpha < 2\pi, \\ \Gamma_c : & 0 < r < d, & \alpha = \left\{ \begin{array}{l} 2\pi \\ 0 \end{array} \right., \\ \Gamma_d : & r = d, & 0 < \alpha < 2\pi, \end{aligned}$$

Należy najpierw wyznaczyć pole elektrostatyczne w walcu i w otaczającej go próżni, następnie wyznaczyć siły elektrostatyczne działające w walcu, na powierzchni walca i na powierzchni szczeliny. Na podstawie otrzymanych wyników należy wyznaczyć tę część sił elektrostatycznych, która występuje w modzie I dla równań równowagi i odpowiadającym im warunkom brzegowym, na podstawie których wyznacza się współczynnik intensywności naprężeń mechanicznych K_I^M .

9.6.1 Pole i siły elektrostatyczne

Równania i warunki brzegowe na potencjał elektrostatyczny pola w walcu i próżni mają postać następującą

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \varphi &= 0 \quad \text{w } \Omega_d, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \varphi^v &= 0 \quad \text{w } \Omega, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} &= \mathcal{E}_\alpha - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^v}{\partial \alpha}, \quad -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r} = e_0 \left(\mathcal{E}_r - \frac{\partial \varphi^v}{\partial r} \right) \quad \text{na } \Gamma_d, \\ \varphi &= 0 \quad \text{na } \Gamma_c, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \varphi = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi^v = 0. \end{aligned}$$

Tutaj $\mathcal{E}_r(r, \alpha)$, $\mathcal{E}_\alpha(r, \alpha)$ są składowymi zadanego zewnętrznego pola elektrostatycznego, φ potencjał pola elektrostatycznego w dielektryku, φ^v potencjał pola elektrostatycznego w próżni. Pole elektrostatyczne w otaczającej walec próżni jest równe $\mathbf{E}^v = -\text{grad}\varphi^v + \underline{\mathcal{E}}$.

Rozwiązanie otrzymujemy stosując transformację Fouriera w przedziale $(0, 2\pi)$ w postaci

$$\varphi = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n}{2} \alpha, \quad \varphi^v = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-\frac{n}{2}} \sin \frac{n}{2} \alpha. \quad (9.88)$$

Dowolne stałe A_n , B_n wyznacza się z warunków na powierzchni walca, które można zastąpić nieskończonym układem równań algebraicznych postaci

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} (A_n d^{\frac{n}{2}-1} - B_n d^{-\frac{n}{2}-1}) &= \mathcal{E}_\alpha^n|_{r=d}, \\ \frac{n}{2} (\varepsilon A_n d^{\frac{n}{2}-1} + e_0 B_n d^{-\frac{n}{2}-1}) &= e_0 \mathcal{E}_r^n|_{r=d}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\mathcal{E}_\alpha^n = \int_0^{2\pi} \mathcal{E}_\alpha \cos \frac{n}{2} \alpha \, d\alpha, \quad \mathcal{E}_r^n = \int_0^{2\pi} \mathcal{E}_r \sin \frac{n}{2} \alpha \, d\alpha.$$

Z powyższych równań otrzymujemy stałe A_n , B_n w zależności od zewnętrznego pola elektrostatycznego

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2e_0}{n(e_0 + \varepsilon)} d^{-\frac{n}{2}+1} [\mathcal{E}_\alpha^n(d) + \mathcal{E}_r^n(d)], \\ B_n &= \frac{2}{n(e_0 + \varepsilon)} d^{-\frac{n}{2}+1} [e_0 \mathcal{E}_\alpha^n(d) - \varepsilon \mathcal{E}_r^n(d)]. \end{aligned} \quad (9.89)$$

Podstawiając powyższe wyniki do wzorów na naprężenia sprzężenia (1.24) i naprężenia Maxwella (9.87) otrzymuje się funkcje opisujące siły elektrostatyczne występujące

w równaniach równowagi (1.30) i naprężeniowych warunkach brzegowych (1.31). W układzie współrzędnych biegunowych wyrazy o charakterze sił objętościowych równe $F_k = t_{k,i}^i = (s t_k^i + M t_k^i)$ dane są za pomocą wzorów

$$F_r = \frac{\partial}{\partial r} t_{rr} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} t_{r\alpha} + \frac{1}{r} (t_{rr} - t_{\alpha\alpha}),$$

$$F_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} t_{\alpha\alpha} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) t_{r\alpha}.$$

Dla naprężeń elektrostacyjnych w dielektryku w zależności od potencjału otrzymuje się wzory

$$t_{\alpha\alpha} = (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 \left\{ \alpha_2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 \right] + \alpha_5 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 \right\}$$

$$- \varepsilon \left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \right\},$$

$$t_{r\alpha} = [(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 \alpha_5 - \varepsilon] \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha},$$

$$t_{rr} = (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 \left[(\alpha_2 + \alpha_5) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 \right]$$

$$- \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 \right],$$

gdzie α_2, α_5 stałe materiałowe związane ze stałymi materiałowymi w modelu Toupina relacjami $a_{2=} (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 \alpha_2, a_{5=} (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 \alpha_5$.

Składowe naprężeń Maxwella w próżni działających na powierzchni walca dane są za pomocą wzorów

$$M t_{rr}^v = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left[\left(\mathcal{E}_r - \frac{\partial \varphi^v}{\partial r} \right)^2 - \left(\mathcal{E}_\alpha - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^v}{\partial \alpha} \right)^2 \right],$$

$$M t_{r\alpha}^v = -\varepsilon_0 \left(\mathcal{E}_r - \frac{\partial \varphi^v}{\partial r} \right) \left(\mathcal{E}_\alpha - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^v}{\partial \alpha} \right).$$

Dla modu I fizyczne siły elektrostacyjne występujące w równaniach równowagi i warunkach na powierzchni szczeliny, otrzymane po zastosowaniu procedury regularyzacji i przy założeniu, że szeregi reprezentujące potencjały są bezwzględnie zbieżne, dane są w postaci następujących szeregów potęgowych

$$F_{(r)} = - \sum_{m=1}^{\infty} r^{m-2} F_r^{2m}(\alpha), \quad F_{|\alpha|} = - \sum_{m=1}^{\infty} r^{m-2} F_\alpha^{2m}(\alpha), \quad (9.90)$$

$$t_{|\alpha|} \Big|_{\alpha=\{0^*\}} = 0, \quad t_{(\alpha\alpha)} \Big|_{\alpha=\{0^*\}} = - \sum_{m=1}^{\infty} r^{m-1} T_{\alpha\alpha}^{2m},$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 F_r^{2m} &= \frac{(\varepsilon - e_0)^2}{\pi^2} \sum_{s=0}^{2m} (s+1)(2m-s+1) A_{s+1} A_{2m-s+1} [(m-1)a_2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(s-1)a_5] \cos(s-m)\alpha, \\
 F_\alpha^{2m} &= \frac{(\varepsilon - e_0)^2}{\pi^2} \sum_{s=0}^{2m} (s+1)(2m-s+1) A_{s+1} A_{2m-s+1} [(m-s)a_2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(2m-s+1)a_5] \sin(s-m)\alpha, \\
 T_{\alpha\alpha}^{2m} &= \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{\varepsilon}{2} - (a_2 + a_5)(\varepsilon - e_0)^2 \right] \sum_{s=0}^{2m} (s+1)(2m-s+1) A_{s+1} A_{2m-s+1}.
 \end{aligned}$$

Wyrażenia te są podstawą dla wyznaczenia współczynnika K_j^M za pomocą procedury opisanej w paragrafie 9.3.

9.6.2 Przemieszczenia dla modu I

Należy skonstruować rozwiązanie problemu brzegowego

$$\left. \begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \partial_r \left\{ \frac{1}{r} [\partial_r (ru_r) + \partial_\alpha u_\alpha] \right\} - \frac{\mu}{r^2} \partial_\alpha [\partial_r (ru_\alpha) - \partial_\alpha u_r] &= \sum_{m=1}^{\infty} r^{m-2} F_r^{2m}, \\
 \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \partial_\alpha [\partial_r (ru_r) + \partial_\alpha u_\alpha] + \mu \partial_r \left\{ \frac{1}{r} [\partial_r (ru_\alpha) - \partial_\alpha u_r] \right\} &= \sum_{m=1}^{\infty} r^{m-2} F_\alpha^{2m},
 \end{aligned} \right\} \quad \text{w } \Omega_d, \quad (9.91)$$

$$\begin{aligned}
 \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) u_\alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} \right]_{|\alpha=\{\frac{\pi}{2}\}^*} &= 0, \quad (9.92) \\
 \left[\frac{\lambda + 2\mu}{r} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + u_r \right) + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} \right]_{|\alpha=\{\frac{\pi}{2}\}^*} &= \sum_{m=1}^{\infty} r^{m-1} T_{\alpha\alpha}^{2m}, \\
 \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) u_\alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} \right]_{|r=d} &= -(t_{r\alpha} + M t_{r\alpha}^v)_{|r=d}, \\
 \left\{ \lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} \right] + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\}_{|r=d} &= -(t_{rr} + M t_{rr}^v)_{|r=d}, \\
 \lim_{r \rightarrow 0} u_r = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} u_\alpha = 0, \quad u_\alpha|_{r=d, \alpha=\pi} &= 0. \quad (9.93)
 \end{aligned}$$

Ostatni z warunków (9.93) zapewnia brak sztywnych obrotów walca.

Rozwiązanie przyjmujemy w postaci

$$u_{(r)} = u_{(r)}^A + u_{(r)}^B, \quad u_{[\alpha]} = u_{[\alpha]}^A + u_{[\alpha]}^B,$$

Zakładamy, że funkcje $u_{(r)}^A$, $u_{(r)}^B$, $u_{[\alpha]}^A$, $u_{[\alpha]}^B$ spełniają na powierzchni szczeliny warunki brzegowe (9.47), (9.48)

$$\begin{aligned} \sigma_{(\alpha\alpha)}^A(r, 0) - \sigma_{(\alpha\alpha)}^A(r, 2\pi) &= 0, \\ \sigma_{(\alpha\alpha)}^A(r, 0) + \sigma_{(\alpha\alpha)}^A(r, 2\pi) &= -2 [\tau_{(\alpha\alpha)}(r, 0) + Q_{(\alpha\alpha)}(r)], \\ u_{(r)}^A(r, 0) + u_{(r)}^A(r, 2\pi) &= -2X_{(r)}(r), \\ u_{(r)}^A(r, 0) - u_{(r)}^A(r, 2\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (9.94)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{[r\alpha]}^B(r, 0) - \sigma_{[r\alpha]}^B(r, 2\pi) &= -2Q_{[r\alpha]}(r), \\ \sigma_{[r\alpha]}^B(r, 0) + \sigma_{[r\alpha]}^B(r, 2\pi) &= 0, \\ u_{[\alpha]}^B(r, 0) - u_{[\alpha]}^B(r, 2\pi) &= -2X_{[\alpha]}(r), \\ u_{[\alpha]}^B(r, 0) + u_{[\alpha]}^B(r, 2\pi) &= 0. \end{aligned} \quad (9.95)$$

Funkcje pomocnicze występujące w powyższych warunkach brzegowych przyjmujemy w postaci

$$\begin{aligned} Q_{(\alpha\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} r^{m-1} Q_{(\alpha\alpha)}^m, & Q_{[r\alpha]} &= - \sum_{m=0}^{\infty} r^{m-\frac{1}{2}} Q_{[r\alpha]}^m, \\ X_{(r)} &= 0, & X_{[\alpha]} &= 0. \end{aligned} \quad (9.96)$$

Funkcje $u_{(r)}^A$, $u_{(r)}^B$, $u_{[\alpha]}^A$, $u_{[\alpha]}^B$ zakładamy w postaci szeregów Fouriera (9.45)

$$\begin{aligned} u_{(r)}^A &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} u_{(r)}^{2n+1} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha, \\ u_{[\alpha]}^A &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} u_{[\alpha]}^{2n+1} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha, \\ u_{(r)}^B &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} u_{(r)}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{(r)}^{2n} \cos n\alpha \right], \\ u_{[\alpha]}^B &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} u_{[\alpha]}^{2n} \sin n\alpha. \end{aligned} \quad (9.97)$$

Współczynniki tych szeregów wyrażamy za pomocą potencjałów (9.51)

$$u_{(r)}^{2n+1} = \frac{d}{dr} \Phi_1^{2n+1} - \frac{2n+1}{2r} \Phi_2^{2n+1}, \quad (9.98)$$

$$\begin{aligned}
u_{[\alpha]}^{2n+1} &= \frac{2n+1}{2r} \Phi_1^{2n+1} - \frac{d}{dr} \Phi_2^{2n+1}, \\
u_{(r)}^{2n} &= \frac{d}{dr} \Phi_1^{2n} + \frac{n}{r} \Phi_2^{2n}, \\
u_{[\alpha]}^{2n} &= -\frac{n}{r} \Phi_1^{2n} - \frac{d}{dr} \Phi_2^{2n}.
\end{aligned}$$

Potencjały te spełniają w obszarze dielektryka równania (9.52) – (9.54)

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} F_1^m - \mu \frac{m}{2r} F_2^m &= G_1^m, \\
(\lambda + 2\mu) \frac{m}{2r} F_1^m - \mu \frac{d}{dr} F_2^m &= G_2^m, \\
m &= 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{9.99}$$

gdzie

$${}_\nu F_\rho^m = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{4r^2} \right) {}_\nu \Phi_\rho^m, \quad (\nu, \rho = 1, 2). \tag{9.100}$$

Z postaci sił elektrostatycznych (9.90) i przyjętej postaci funkcji pomocniczych (9.96) wynika, że prawe strony tych równań są

$$\begin{aligned}
G_1^{2n+1} &= - \sum_{l=1}^{\infty} r^{l-2} F_{r 2l}^{2n+1}, & G_1^{2n} &= \sum_{l=0}^{\infty} r^{l-\frac{3}{2}} Q_{[\alpha]}^l, \\
G_2^{2n+1} &= \sum_{l=1}^{\infty} r^{l-2} (-F_{\alpha 2l}^{2n+1} + 2T_{\alpha\alpha}^{2l} - Q_{(\alpha\alpha)}^l), & G_2^{2n} &= 0,
\end{aligned} \tag{9.101}$$

gdzie

$$F_{r 2l}^{2n+1} = \int_0^{2\pi} F_r^{2l} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha d\alpha, \quad F_{\alpha 2l}^{2n+1} = \int_0^{2\pi} F_\alpha^{2l} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha d\alpha.$$

Rozwiązanie równań (9.99) – (9.101) jest sumą rozwiązania równań jednorodnych $\overset{\circ}{\Phi}_\nu^m$ ($\nu = 1, 2$) oraz funkcji spełniających równania niejednorodne. Współczynniki szeregów Fouriera (9.97) pochodzące od rozwiązania równań jednorodnych i spełniające warunek $\lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{u} = \mathbf{0}$ otrzymujemy w postaci

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{u}_{(r)}^1 &= \beta_1^1 r^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{\lambda + 2\mu} + \frac{1}{\mu} \right) + \beta_2^1 r^{\frac{3}{2}} \left(\frac{5}{\lambda + 2\mu} - \frac{1}{\mu} \right), \\
\overset{\circ}{u}_{[\alpha]}^1 &= \beta_1^1 r^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} + \frac{3}{\mu} \right) + \beta_2^1 r^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} - \frac{5}{\mu} \right), \\
\overset{\circ}{u}_{(r)}^{2n+1} &= \beta_1^{2n+1} r^{n-\frac{1}{2}} + \beta_2^{2n+1} r^{n+\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{2n+5}{\lambda + 2\mu} - \frac{2n+1}{\mu} \right), \\
\overset{\circ}{u}_{[\alpha]}^{2n+1} &= \beta_1^{2n+1} r^{n-\frac{1}{2}} + \beta_2^{2n+1} r^{n+\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{2n+1}{\lambda + 2\mu} - \frac{2n+5}{\mu} \right), \\
n &= 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \tag{9.102}$$

$$\begin{aligned}
u_{(r)}^{\circ 0} &= \beta^0 r, \\
u_{(r)}^{\circ 2n} &= \beta_1^{2n} r^{n-1} + \beta_2^{2n} r^{n+1} \left(\frac{n+2}{\lambda+2\mu} - \frac{n}{\mu} \right), \\
u_{[\alpha]}^{\circ 2n} &= -\beta_1^{2n} r^{n-1} - \beta_2^{2n} r^{n+1} \left(\frac{n}{\lambda+2\mu} - \frac{n+2}{\mu} \right), \\
n &= 1, 2, 3, \dots, \quad \beta_1^2 = 0.
\end{aligned} \tag{9.103}$$

Ta część rozwiązania zawiera dowolne współczynniki liczbowe $\beta^0, \beta_1^1, \beta_2^1, \beta_1^2, \beta_2^2, \dots$, które zostaną wyznaczone z warunków brzegowych na powierzchni walca dielektrycznego.

Współczynniki szeregów Fouriera (9.97) pochodzące od rozwiązania niejednorodnych równań (9.99) – (9.101) otrzymujemy w postaci

$$\begin{aligned}
u_{(r)}^{s 2n+1} &= \sum_{m=1}^{\infty} r^m \frac{1}{\left[(m+1)^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \left[(m-1)^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right]} \\
&\times \left\{ \left[\frac{m^2-1}{\lambda+2\mu} - \frac{1}{\mu} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] F_{r 2m}^{2n+1} \right. \\
&\left. + \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{m-1}{\mu} - \frac{m+1}{\lambda+2\mu} \right) \left(F_{\alpha 2m}^{2n+1} + 2T_{\alpha\alpha}^{2m} - Q_{(\alpha\alpha)}^m \right) \right\},
\end{aligned} \tag{9.104}$$

$$\begin{aligned}
u_{[\alpha]}^{s 2n+1} &= \sum_{m=1}^{\infty} r^m \frac{1}{\left[(m+1)^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \left[(m-1)^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right]} \\
&\times \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{m-1}{\mu} - \frac{m+1}{\lambda+2\mu} \right) F_{r 2m}^{2n+1} \right. \\
&\left. + \left[\frac{m^2-1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+2\mu} \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \left(F_{\alpha 2m}^{2n+1} + 2T_{\alpha\alpha}^{2m} - Q_{(\alpha\alpha)}^m \right) \right\},
\end{aligned} \tag{9.105}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$u_{(r)}^{s 0} = \frac{1}{\lambda+2\mu} \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\frac{1}{2}} \frac{Q_{[r\alpha]}^m}{\left(m + \frac{3}{2} \right) \left(m - \frac{1}{2} \right)}, \tag{9.106}$$

$$\begin{aligned}
u_{(r)}^{s 2n} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^{m+\frac{1}{2}}}{\left[\left(m + \frac{3}{2} \right)^2 - n^2 \right] \left[\left(m - \frac{1}{2} \right)^2 - n^2 \right]} \\
&\times \left[\frac{\left(m + \frac{3}{2} \right) \left(m - \frac{1}{2} \right) - n^2}{\lambda+2\mu} - \frac{n^2}{\mu} \right] Q_{[r\alpha]}^m,
\end{aligned} \tag{9.107}$$

$$u_{[\alpha]}^{s 2n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^{m+\frac{1}{2}}}{\left[\left(m + \frac{3}{2} \right)^2 - n^2 \right] \left[\left(m - \frac{1}{2} \right)^2 - n^2 \right]} \tag{9.108}$$

$$\times \left[\frac{m + \frac{3}{2}}{\mu} - \frac{m - \frac{1}{2}}{\lambda + 2\mu} \right] Q_{[r\alpha]}^m,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Podstawiając szeregi Fouriera reprezentujące $\hat{\mathbf{u}}^A$, o współczynnikach danych wzorami (9.102), do związków konstytutywnych na składową naprężenia mechanicznego $\sigma_{r\alpha}$ a następnie przechodząc z szeregami na brzeg szczeliny $\alpha = \{0^{2\pi}$ otrzymujemy równanie (9.59), które przez przyrównanie wyrazów stojących po obu stronach przy jednakowych potęgach r , możemy zastąpić równoważnym mu trójkątnym układem równań algebraicznych na współczynniki $Q_{[r\alpha]}^m$. Z równań tych wyznaczamy współczynniki $Q_{[r\alpha]}^m$ w zależności od dowolnych współczynników β_ν^{2n+1} , ($\nu = 1, 2$)

$$\begin{aligned} Q_{[r\alpha]}^0 &= \frac{2\mu}{\pi} \left[\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \beta_1^1 - \beta_1^3 \right], \\ Q_{[r\alpha]}^1 &= \frac{6\mu}{\pi} \left[\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \beta_2^1 - \beta_1^5 \right], \\ Q_{[r\alpha]}^m &= \frac{2\mu(2m+1)}{\pi} \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \beta_2^{2m-1} - \beta_1^{2m+3} \right]. \end{aligned} \quad (9.109)$$

Podstawiając z kolei szereg Fouriera reprezentujący funkcję $\hat{\mathbf{u}}^B$, o współczynnikach danych wzorami (9.103), do związków konstytutywnych na składową naprężenia mechanicznego $\sigma_{\alpha\alpha}$ i przechodząc z szeregiem na brzeg szczeliny $\alpha = \{0^{2\pi}$ otrzymujemy równanie (9.58), które przez przyrównanie wyrazów stojących po obu stronach równania przy jednakowych potęgach r , możemy zastąpić równoważnym mu trójkątnym układem równań algebraicznych na współczynniki $Q_{(\alpha\alpha)}^m$. Z równań tych wyznaczamy współczynniki $Q_{(\alpha\alpha)}^m$ w zależności od dowolnych współczynników β_ν^{2n} , ($\nu = 1, 2$)

$$\begin{aligned} Q_{(\alpha\alpha)}^1 &= \frac{2}{\pi} [(\lambda + 2\mu) \beta_1^0 - 2\mu \beta_1^4], \\ Q_{(\alpha\alpha)}^m &= \frac{4m}{\pi} \left[(m+1) \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \beta_2^{2m-2} - \mu \beta_1^{2m+2} \right], \quad m = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (9.110)$$

Następnym krokiem jaki należy wykonać aby wyznaczyć przemieszczenia dla rozpatrywanego tu problemu, jest wyznaczenie *wszystkich dowolnych współczynników* obecnych w powyżej skonstruowanym rozwiązaniu z warunków brzegowych na powierzchni walca uwzględniając warunki na szytwnie przemieszczenia i obroty walca. Nas interesuje tylko wartość współczynnika intensywności naprężeń mechanicznych K_I^M . Jak się okaże, dla znalezienia wartości tego współczynnika w zależności od zewnętrznego pola elektrostatycznego działającego na walec konieczne będzie wyznaczenie tylko *jednej niewiadomej* z nieskończonego układu równań algebraicznych, równoważnego warunkom brzegowym na powierzchni walca.

Podstawiamy otrzymane rozwiązanie do związku konstytutywnego dla składowej naprężenia mechanicznego $\sigma_{\alpha\alpha}$. Z definicji współczynnika K_I^M (8.26), która w rozważanej konfiguracji ma postać

$$K_I^M = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{\alpha\alpha}(r, \pi, t),$$

otrzymujemy zależność

$$K_I^M = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + 2\mu} \beta_1^3 + \mu \beta_1^3 \right). \quad (9.111)$$

Wyznaczenie współczynnika K_I^M wymaga zatem wyznaczenia dwóch współczynników β_1^1 , β_1^3 lub jednej niewiadomej będącej odpowiednią kombinacją tych współczynników.

9.6.3 Nieskończony układ równań algebraicznych związany z warunkami na powierzchni walca

Dowolne współczynniki występujące w rozwiązaniu problemu dla równań Lamégo wyznaczyć można z warunków brzegowych (9.92)_{3,4}. Warunki te można zastąpić równoważnym im nieskończonym układem równań algebraicznych rozwijając obie strony w szereg Fouriera w przedziale $(0, 2\pi)$ a następnie przyrównując wyrazy stojące przy funkcjach trygonometrycznych jednakowych kątów. Rozwijając warunek brzegowy dla składowej σ_{rr} w sinusowy szereg Fouriera a warunek dla składowej $\sigma_{r\alpha}$ w szereg cosinusowy, otrzymujemy układ równań, który zapisać można symbolicznie w postaci

$$\begin{aligned} s_{rr}^{2n+1} &= -\mathcal{J}_{rr}^{2n+1}, \\ s_{r\alpha}^{2n+1} &= -\mathcal{J}_{r\alpha}^{2n+1}, \end{aligned} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.112)$$

gdzie

$$\begin{aligned} s_{rr}^{2n+1} &= \sigma_{rr}^{2n+1} + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\sigma_{rr}^0}{2n+1} + 2(2n+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_{rr}^{2k}}{(2n+1)^2 - 4k^2} \right\}, \\ s_{r\alpha}^{2n+1} &= \sigma_{r\alpha}^{2n+1} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{r\alpha}^{2k} \frac{8k}{(2n+1)^2 - 4k^2}, \\ \sigma_{rr}^{2n+1} &= \left\{ \lambda \left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) u_r^{2n+1} - \frac{2n+1}{2r} u_\alpha^{2n+1} \right] + 2\mu \frac{du_r^{2n+1}}{dr} \right\}_{|r=d}, \\ \sigma_{rr}^{2n} &= \left\{ \lambda \left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) u_r^{2n} + \frac{n}{r} u_\alpha^{2n} \right] + 2\mu \frac{du_r^{2n}}{dr} \right\}_{|r=d}, \\ \sigma_{r\alpha}^{2n+1} &= \left[\left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) u_\alpha^{2n+1} + \frac{2n+1}{2r} u_r^{2n+1} \right]_{|r=d}, \\ \sigma_{r\alpha}^{2n} &= \left[\left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) u_\alpha^{2n} - \frac{n}{r} u_r^{2n} \right]_{|r=d}, \end{aligned}$$

$$T_{rr}^{2n+1} = \int_0^{2\pi} (t_{rr} + M t_{rr}^v)|_{r=d} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha d\alpha,$$

$$T_{r\alpha}^{2n+1} = \int_0^{2\pi} (t_{r\alpha} + M t_{r\alpha}^v)|_{r=d} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha d\alpha.$$

Szeregi Fouriera zawierają tylko ułamkowe wielokrotności kąta α co wynika z symetrii funkcji opisującej składową σ_{rr} i antysymetrii funkcji dla składowej $\sigma_{r\alpha}$ względem α .

Układ równań (9.112) po uporządkowaniu można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} D_1^1 X_1 + D_1^2 X_2 + D_1^3 X_3 + \dots + D_1^n X_n + \dots &= \mathcal{F}_1, \\ D_2^1 X_1 + D_2^2 X_2 + D_2^3 X_3 + \dots + D_2^n X_n + \dots &= \mathcal{F}_2, \\ D_3^1 X_1 + D_3^2 X_2 + D_3^3 X_3 + \dots + D_3^n X_n + \dots &= \mathcal{F}_3, \\ \dots &\dots, \\ D_n^1 X_1 + D_n^2 X_2 + D_n^3 X_3 + \dots + D_n^n X_n + \dots &= \mathcal{F}_n, \\ \dots &\dots, \end{aligned} \quad (9.113)$$

gdzie

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{4\sqrt{d}} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{3\lambda + 7\mu}{\lambda + 2\mu} \beta_1^1 + \mu \beta_1^3 \right), \\ X_2 &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\pi \lambda + 2\mu} (\beta^0 + 2\beta_1^4), \\ X_3 &= \frac{\sqrt{d}}{4} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{5\lambda + 9\mu}{\lambda + 2\mu} \beta_2^1 - \mu \beta_1^5 \right), \\ X_{2k-1} &= d^{k-\frac{3}{2}} \frac{\lambda + \mu}{4(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{(2k+1)\lambda + (2k+5)\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \beta_2^{2k-3} - \mu \beta_1^{2k+1} \right], \quad k = 3, 4, 5, \dots, \\ X_{2k} &= \frac{8kd^{k-1}}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{(k-1)\lambda + (k-3)\mu}{\lambda + 2\mu} \beta_2^{2k-2} - \mu \beta_1^{2k+2} \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1^1 &= 5, \quad D_1^3 = 9, \\ D_3^1 &= 1, \quad D_3^3 = 0, \quad D_3^5 = 5, \\ D_{2k-1}^{2m-1} &= 0 \text{ dla } m \neq k-1 \text{ i } m \neq k+1, \quad (k = 3, 4, 5, \dots), \\ D_{2k-1}^{2k-3} &= (2k-3)(2k-5), \quad D_{2k-1}^{2k+1} = -(2k+1)(2k-5), \quad (k = 3, 4, 5, \dots), \\ D_2^1 &= -1, \quad D_2^3 = -3, \\ D_{2k}^{2m-1} &= 0 \text{ dla } m \neq k-1 \text{ i } m \neq k+1, \quad (k = 3, 4, 5, \dots), \\ D_{2k}^{2k-3} &= (2k-3)(2k-5), \quad D_{2k}^{2k+1} = -(2k-1)(2k+1), \quad (k = 3, 4, 5, \dots), \\ D_{2k-1}^2 &= \frac{2 - (k - \frac{1}{2})^2}{(k - \frac{1}{2}) \left[4 - (k - \frac{1}{2})^2 \right]}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

$$D_{2k-1}^{2m} = \frac{(k - \frac{1}{2}) \left[(m+1) - (k - \frac{1}{2})^2 \right]}{\left[(m-1)^2 - (k - \frac{1}{2})^2 \right] \left[(m+1)^2 - (k - \frac{1}{2})^2 \right]}, \quad \begin{matrix} (k = 1, 2, 3, \dots), \\ (m = 2, 3, 4, \dots), \end{matrix}$$

$$D_{2k}^2 = \frac{-1}{4 - (k - \frac{1}{2})^2}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

$$D_{2k}^{2m} = \frac{-m (k - \frac{1}{2})^2}{\left[(m-1)^2 - (k - \frac{1}{2})^2 \right] \left[(m+1)^2 - (k - \frac{1}{2})^2 \right]}, \quad \begin{matrix} (k = 1, 2, 3, \dots), \\ (m = 2, 3, 4, \dots). \end{matrix}$$

Prawe strony równań (9.113) są dane wzorami

$$\mathcal{F}_n = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} r^{m-1} \sum_{s=1}^{2m+1} s(2m-s+2) A_s A_{2m-s+2} \left[\frac{1}{2} f_n^{(\varepsilon)sm} + (\varepsilon - e_0)^2 (\alpha_2 f_n^{(2)sm} + \alpha_5 f_n^{(5)sm}) \right], \quad (9.114)$$

gdzie

$$f_{2k}^{(\varepsilon)sm} = \frac{-2\varepsilon}{a_{m-1}^{2k-1} a_{m+1}^{2k-1}} q_{(2)2k}^m,$$

$$f_{2k}^{(2)sm} = \frac{2}{a_{m-1}^{2k-1} a_{m+1}^{2k-1}} \left[\frac{m-1}{a_{m-s+1}^{2k-1}} q_{(1)2k}^m + \left(1 - \frac{(m-s+1)^2}{a_{m-s+1}^{2k-1}} \right) q_{(2)2k}^m \right],$$

$$f_{2k}^{(5)sm} = \frac{1}{a_{m+1}^{2k-1}} \left\{ m+1 + \frac{1}{a_{m-1}^{2k-1}} \left[\frac{s-2}{a_{m-s+1}^{2k-1}} q_{(1)2k}^m - \left(\frac{(m-s+1)(2m-s+2)}{a_{m-s+1}^{2k-1}} - 2 \right) q_{(2)2k}^m \right] \right\} - \frac{m-s+1}{a_{m-s+1}^{2k-1}},$$

$$f_{2k-1}^{(\varepsilon)sm} = (2k-1) \left\{ \left[\frac{-\varepsilon}{a_{m-1}^{2k-1}} q_{(2)2k-1}^m + \frac{\varepsilon^2 - e_0^2}{2e_0} \right] \frac{1}{a_{m+1}^{2k-1}} - \frac{(\varepsilon - e_0)^2}{2e_0 a_{m-s+1}^{2k-1}} \right\},$$

$$f_{2k-1}^{(2)sm} = (2k-1) \left\{ \frac{1}{a_{m-1}^{2k-1}} + \frac{1}{a_{m-1}^{2k-1} a_{m+1}^{2k-1}} \left[\frac{m-1}{a_{m-s+1}^{2k-1}} q_{(1)2k-1}^m + \left(\frac{(m-s+1)^2}{a_{m-s+1}^{2k-1}} - 1 \right) q_{(2)2k-1}^m \right] \right\},$$

$$f_{2k-1}^{(5)sm} = (2k-1) \left\{ \frac{1}{a_{m+1}^{2k-1}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{a_{m-1}^{2k-1}} \left[\frac{s-2}{2a_{m-s+1}^{2k-1}} q_{(1)2k-1}^m - \left(\frac{(m-s+1)(2m-s+2)}{2a_{m-s+1}^{2k-1}} - 1 \right) q_{(2)2k-1}^m \right] \right] - \frac{1}{2a_{m-s+1}^{2k-1}} \right\},$$

($k = 1, 2, 3, \dots$),

$$\begin{aligned}
q_{(1)2k}^m &= -\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \left[m^2 - 1 + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - 2m(m-1) \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right], \\
q_{(2)2k}^m &= -(m-1) \left[m^2 - 1 + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \right] + 2m \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \\
q_{(1)2k-1}^m &= m \left[2 \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - m^2 + 1 \right] + (m-1) \left[\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - m - 1 \right] \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \\
q_{(2)2k-1}^m &= m(3-m) - \left[\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - m - 1 \right] \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \\
a_m^n &= m^2 - \frac{n^2}{4}.
\end{aligned}$$

Ze wzoru (9.111) wynika, że

$$K_I^M = 4\sqrt{\frac{2d}{\pi}} X_1.$$

Należy zatem wyznaczyć niewiadomą X_1 z nieskończonego układu równań algebraicznych (9.113).

Zdefiniujemy teraz n -te przybliżenie współczynnika K_I^M jako

$$K_I^{M(n)} = 4\sqrt{\frac{2d}{\pi}} X_1^{(n)},$$

gdzie $X_1^{(n)}$ spełnia układ n równań algebraicznych dla n niewiadomych (X_1, X_2, \dots, X_n) otrzymanych z układu (9.113) przez przyjęcie $X_{n+k} = 0$, $\mathcal{F}_{n+k} = 0$, ($k = 1, 2, 3, \dots$).

9.6.4 Wyniki numeryczne

Obliczenia przeprowadzono dla jednorodnego zewnętrznego pola elektrostatycznego. Zbadano trzy przypadki

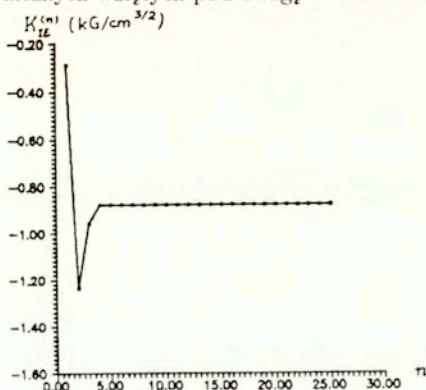
1. pole zewnętrzne jest prostopadłe do powierzchni szczeliny: $\mathcal{E} = (0, E_y)$,
2. pole zewnętrzne jest równoległe do powierzchni szczeliny: $\mathcal{E} = (E_x, 0)$,
3. pole zewnętrzne jest skierowane pod kątem 45° do powierzchni szczeliny: $\mathcal{E} = (E_x, E_y)$, $E_x = E_y$.

Przyjęto zakres zmienności natężenia pola $10 \div 100$ kV/cm a promienia walca $0.5 \div 50$ cm. Na podstawie wstępnych obliczeń ustalono, że wpływ stałych Lamégo oraz stałej dielektrycznej ośrodka na współczynnik K_I^M jest znacznie mniejszy niż wpływ natężenia

poła zewnętrznego, stałych materiałowych α_2 , α_3 i promienia walca. Wyniki podane niżej otrzymane zostały dla

$$\lambda = \mu = 0.22 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2, \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 6.3.$$

Wyniki numeryczne wskazują na szybką zbieżność metody. Pokazuje to *wykres 1*, na którym pokazano zależność między wartością współczynnika $K_{I\varepsilon} = K_I^M|_{\alpha_2=\alpha_3=0}$ od liczby równań algebraicznych wziętych pod uwagę w obliczeniach.



Wykres 1

W praktyce wartość współczynnika intensywności naprężeń ustalała się przy 10-tym przybliżeniu. Następne przybliżenia nie powodowały zmiany jego wartości. Obliczenia te wykonano dla cylindra o promieniu $d = 30\text{cm}$ i pola o natężeniu $E_x = E_y = 50\text{kV/cm}$.

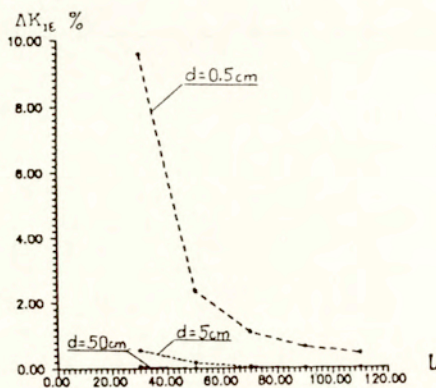
Poza zbieżnością ze względu na rząd przybliżenia należy ocenić jaki wpływ na błąd obliczeń ma liczba wyrazów szeregu po prawej stronie równań (9.113) uwzględniona w obliczeniach. Zdefiniowano względny procentowy błąd następująco

$$\Delta K_{I\varepsilon} = \frac{K_{I\varepsilon|l_{n+1}} - K_{I\varepsilon|l_n}}{K_{I\varepsilon|l_n}} * 100\%,$$

gdzie l_n jest współczynnikiem związanym z liczbą wyrazów szeregu (9.114) uwzględnionych w obliczeniach. Na przykład $l_1 = 10$ oznacza, że przyjęto wartość współczynnika $K_{I\varepsilon}$ obliczoną na podstawie rozwiązania 10-ciu równań.

W przykładzie tym przyjęto $l_1 = 10$, $l_2 = 30$, ..., $l_7 = 110$. Obliczenia przeprowadzono dla pola skierowanego pod kątem 45° do powierzchni szczeliny o natężeniu $E_x = E_y = 100\text{kV/cm}$ i walca o promieniu $d = 0.5, 5, 50\text{cm}$. *Wykres 2* pokazuje dobrą zbieżność wyników dla $d < 1$ i nawet jeszcze lepszą dla $d > 1$. Najwyższy względny

procentowy błąd był niższy niż 1% i szybko malał dla rosnącego l_n .



Wykres 2

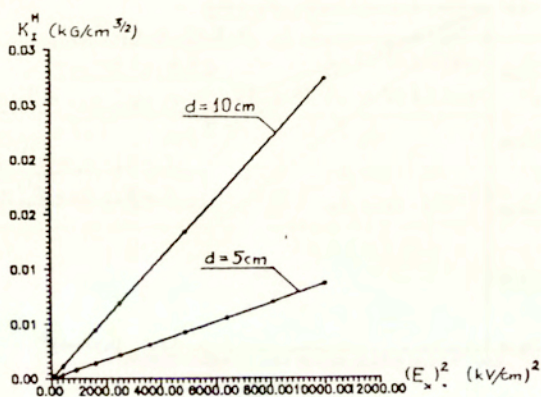
Następne wykresy ilustrują zależność współczynnika K_I^M od kierunku i natężenia pola elektrostatycznego działającego na wałek, stałych materiałowych α_2 , α_5 oraz promienia walca.

Dla przypadku, gdy pole jest prostopadłe do powierzchni szczeliny, niezależnie od wartości stałych materiałowych α_2 , α_5 , wyniki wskazują na ścislenie szczeliny. Wartość bezwzględna współczynnika intensywności naprężeń wzrasta liniowo z kwadratem natężenia pola $(E_y)^2$ i promieniem walca.

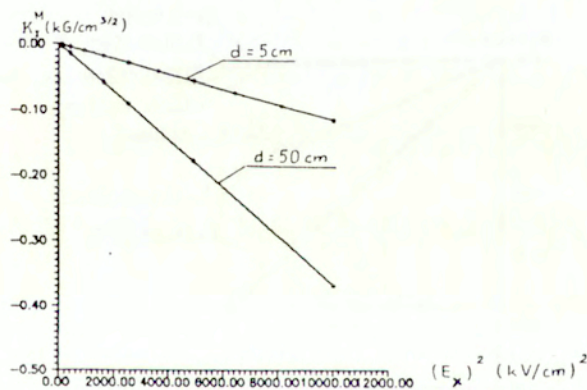
Fakt hamującego działania pola elektrycznego skierowanego prostopadłe do powierzchni szczeliny na jej propagację został stwierdzony eksperymentalnie [14], tak więc istnieje jakościowa zgodność otrzymanych wyników teoretycznych z doświadczeniem.

W przypadku pola równoległego do powierzchni szczeliny znak współczynnika K_I^M zależy od wartości stałych materiałowych. Dla $\alpha_2 = \alpha_5 = 1\text{m/F}$ współczynnik K_I^M jest dodatni co wskazuje na rozciąganie. Wyniki ilustruje wykres 3. Natomiast dla $\alpha_2 = 10^{12}\text{m/F}$, $\alpha_5 = 10^9\text{m/F}$ otrzymano ujemne wartości współczynnika intensywności naprężeń, czyli ścislenie szczeliny. Wynikałoby stąd, że hamujące lub przyspieszające działanie pola elektrostatycznego na propagację szczeliny zależy od własności elek-

trostrykcyjnych materiału. Wyniki przedstawiono na wykresie 4.



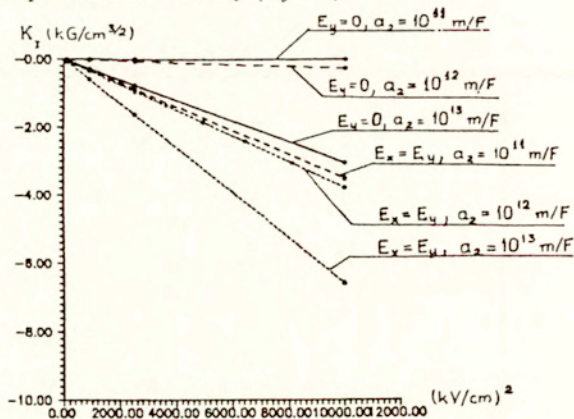
Wykres 3



Wykres 4

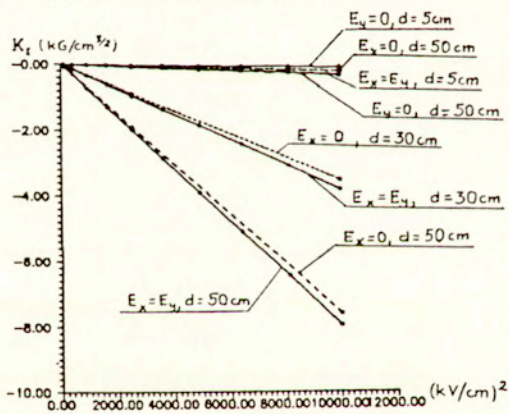
Dla pola skierowanego pod kątem 45° do powierzchni szczeliny wartość współczynnika intensywności naprężeń była ujemna dla wszystkich dodatnich wartości stałych materiałowych α_2 , α_5 , co wskazuje na hamujące działanie takiego pola na propagację szczeliny. Obliczenia przeprowadzono tu dla różnych wartości stałej α_2 przy ustalonej wartości $\alpha_5 = 10^9 \text{ m}/\text{F}$. Na wykresie 5 pokazano również dla porównania wyniki otrzymane dla

pola równoległego do powierzchni szczeliny ($E_y = 0$).



Wykres 5

Wykres 6 przedstawia wyniki otrzymane dla wszystkich trzech kierunków pola przy wartościach stałych materiałowych $\alpha_2 = 10^{12} \text{ m/F}$, $\alpha_5 = 10^9 \text{ m/F}$. Widać, że bezwzględne wartości współczynnika K_I^M dla przypadku pola równoległego do powierzchni szczeliny są niższe niż dla dwóch pozostałych kierunków.



Wykres 6

Na koniec przedstawiamy tabelkę w której podano wyniki otrzymane dla wszystkich trzech kierunków pola zewnętrznego. Promień walca przyjęto tu $d = 50 \text{ cm}$, stałe materiałowe $\alpha_2 = \alpha_5 = 1$. Wprowadzono trzy wielkości zdefiniowane jak następuje

$$K_I^M = K_{Ie} + K_{I2} + K_{I5},$$

$$K_{Ie} = K_I^M |_{\alpha_2 = \alpha_5 = 0},$$

$$K_{I2} = K_I^M \Big|_{K_{I\epsilon}=0, \alpha_5=0},$$

$$K_{I5} = K_I^M \Big|_{K_{I\epsilon}=0, \alpha_2=0}.$$

	$E_x = 0$ $E_y = 50 \text{ kV/cm}$	$E_x = 50 \text{ kV/cm}$ $E_y = 50 \text{ kV/cm}$	$E_x = 50 \text{ kV/cm}$ $E_y = 0$
$K_{I\epsilon} [\text{kG/cm}^{3/2}]$	-1.898	-1.891	$+0.7011 \cdot 10^{-2}$
$K_{I2} [\text{kG/cm}^{3/2}]$	$-0.4183 \cdot 10^{-17}$	$-0.9907 \cdot 10^{-13}$	$-0.9906 \cdot 10^{-13}$
$K_{I5} [\text{kG/cm}^{3/2}]$	$+0.1345 \cdot 10^{-17}$	$+0.5549 \cdot 10^{-12}$	$+0.5549 \cdot 10^{-12}$

Zakończenie

Teoria elektromagnetycznego pękania materiałów jest dziedziną nową. Przedstawione tu wyniki stanowią próbę sformułowania teorii umożliwiającej ocenę wpływu pola elektromagnetycznego na proces propagacji szczeliny. Opracowanie to stanowi pewną całość, jednak nie jest to pełna zamknięta teoria i wymaga dalszego rozszerzania i pogłębiania.

Proces pękania materiałów w polach elektromagnetycznych jest bardzo skomplikowany. W przedstawionej tu teorii uwzględniono wpływ sił elektromagnetycznych generowanych w dielektryku przez zewnętrzne pole elektromagnetyczne na przemieszczenia i naprężenia w dielektrykach zawierających szczeliny oraz na proces propagacji szczelin, nie uwzględniono natomiast wielu czynników, które w tych procesach również odgrywają rolę jak na przykład zjawiska termiczne czy chemiczne.

Przyjęty tu podział na szczeliny próżniowe i przewodzące pozwala uwzględnić tylko dwa skrajne stany. W rzeczywistości proces jonizacji gazu w szczelinie jest zjawiskiem bardzo skomplikowanym i nieciągłym. Uwzględnienie realnej sytuacji fizycznej w opisie tych procesów jest bardzo trudne, lecz wydaje się, że dalsze badania powinny dążyć do uzyskania coraz większej zgodności opisu z fizyką zjawiska.

Pozostaje również otwarta kwestia pełnej weryfikacji eksperymentalnej. Wprawdzie część spośród wyników uzyskanych tu na drodze rozważań teoretycznych znalazło potwierdzenie doświadczalne, jednak jest to potwierdzenie jakościowe. Idealem byłoby przeprowadzenie weryfikacji eksperymentalnej, która potwierdziłaby wyniki teoretyczne również pod względem ilościowym.

Literatura

- [1] J. B. Alblas, *General theory of electro- and magnetoelasticity*, w "Electromagnetic Interactions in Elastic Solids", ed. H. Parkus, Springer, Wien 1978.
- [2] L. V. Belokopytova, L. A. Filštinskij, *Dvumernaja krajeva zadača elektrouprugosti dla piezoelektričeskoj srede s razrezami*, PMM, **43**, (1979), No 1, 138-143.
- [3] L. E. Bragg, *Relativistically elastic dielectrics*, J.Math.Phys., **11** (1970), Nr 1, 318-338.
- [4] P. Chadwick, *Elastic Waves Propagation in Magnetic Field*, Int. Congress of Appl. Mech., Brussels 1956.
- [5] A. Chełkowski, *Fizyka dielektryków*, PWN, Warszawa 1979.
- [6] G. P. Čerepanov, *Mechanika chrupkogo razrušenija*, Nauka, Moskwa 1974.
- [7] G. P. Čerepanov, *Invariantnyje Γ - integraly i niekatoryje ich priloženija v mehanike*, PMM, **41**, (1977), No 3, 399-412.
- [8] R. C. Dixon, A.C. Eringen, *A dynamical theory of polar elastic dielectric*, Int.J.Engng.Sci., **3** (1965), 359-398.
- [9] J.W. Dunkin, A.C. Eringen, *On the propagation of waves in an electromagnetic elastic solid*, Int.J.Engng.Sci., **1** (1963), 461-495.
- [10] A.C. Eringen, *On the Foundations of electrostatics*, Int. J.Engng.Sci., **1** (1963), 127-15.
- [11] A.C. Eringen, *Nonlinear theory of continuous media*, Mc Graw Hill, New York
- [12] R.M. Fano, L.J. Chu, R.B. Adler, *Electromagnetic fields, energy and forces*, J. Wiley, New York 1960.
- [13] L. A. Filštinskij, M. L. Filštinskij, *Vzaimodejstvie voln smeščenij s krivolinejnymi treščinami prodolnogo sdviga v piezoelektričeskoj srede*, PMM, **49**, (1985), No 5, 822-826.

- [14] V. M. Finkel, *Fizičeskiye osnovy tormoženija razrušenija*, Metallurgia, Moskwa 1977.
- [15] N. I. Geršenson, D. O. Žilpimiani, P. V. Mandžaladze, O. A. Pochomelov, *Vlijanje magnitnogo pola na processy razrušenija monokristallov LiF*, Fiz. Tv. Tela, **28**, (1986), No 3, 708–712.
- [16] J. Grindlay, *An Introduction to the Phenomenological Theory of Ferroelasticity*, Pergamon Press, 1970.
- [17] R. A. Grot, *Relativistic continuum theory for the interactions of electromagnetic fields with deformable bodies*, J. Math. Phys., **11**, (1970), 109–113.
- [18] K. Hutter, A.A.F. van de Ven, *Field interactions in thermoclastic solids*, Lecture Notes in Physics, 88, Springer 1978.
- [19] Janke, Emde, Lösch, *Tafeln höherer Funktionen*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960.
- [20] S. Kaliski, W. Nowacki, *Thermal Excitations in Coupled Fields*, Progress in Thermoelasticity, VIIIth European Mechanics Colloquium, Warszawa 1967.
- [21] B. V. Kostrov, L. V. Nikitin, *Some general problems of mechanics of brittle fracture*, Arch. Mech., **22** (1970), Nr 6, 749–776.
- [22] B. A. Kudriavcev, V. Z. Parton, V. I. Rakitin, *Mechanika rozrušenija piezoelektričeskich materialov. Priamolinijnaja tunchujaja treščina na granice s provodnikom*, PMM, **39**, (1975), No 1, 149–159.
- [23] B. A. Kudriavcev, V. Z. Parton, V. I. Rakitin, *Mechanika rozrušenija piezoelektričeskich materialov. Osesimetričnaja treščina na granice s provodnikom*, PMM, **39**, (1975), No 2, 352–362.
- [24] B. A. Kudriavcev, V. Z. Parton, B. D. Rubinskij, *Magnitotermouprugoe pole v tele s potubeskonečnym razrezom*, PMM, **44**, (1980), No 5, 916–922.
- [25] Z.T. Kurlandzka, *Griffith criterion for the elastic dielectric*, Bull.Pol.Ac.:Tech., **23** (1975), Nr 4, 287–295.
- [26] Z.T. Kurlandzka, *Stress boundary value problem for the Griffith crack in the infinite elastic dielectric I, II*, Bull.Pol.Ac.:Tech., **23** (1975), Nr 5,6, 385–392,465–470.
- [27] Z.T. Kurlandzka, *Influence of electrostatic field on crack propagation in elastic dielectric*, Bull.Pol.Ac.:Tech., **23** (1975), Nr 7, 571–577.
- [28] Z.T. Kurlandzka, *Barenblatt's criterion for the elastic dielectric*, Bull.Pol.Ac.:Tech., **23** (1975), Nr 8, 633–640.

- [29] Z.T. Kurlandzka, *A crack problem in elastic dielectric I, II*, Bull.Pol.Ac.: Tech.,**25** (1977), Nr 4, 7, 255–263, 525–531.
- [30] Z.T. Kurlandzka, *The power of fracture for the deformable dielectric*, Bull.Pol.Ac.: Tech.,**25** (1977), Nr 6, 439–445.
- [31] Z. T. Kurlandzka, J. Kurlandzki, *Stresses at tip of a crack in elastic dielectric in presence of electromagnetic field. I Generalization of Williams method on dynamical case. II Behaviour of electromagnetic field. III Stresses generated by electromagnetic field*, Bull. Pol. Ac.: Tech., **26** (1978), Nr 10, 863–872, 873–878, 879–886.
- [32] Z.T. Kurlandzka, *Influence of electromagnetic field on crack propagation in elastic dielectric*, Bull.Pol.Ac.:Tech.,**26** (1978), Nr 11, 971–975.
- [33] Z. T. Kurlandzka, *Electromagnetic field and stresses at the tip of a crack propagating in an elastic dielectric. I Distribution of mechanical stresses. II Behaviour of electromagnetic field. III Stresses generated by electromagnetic field*, Bull. Pol. Ac.: Tech., **28** (1980), Nr 11–12, 565–575, 577–585, 587–594.
- [34] Z. T. Kurlandzka, *Stress intensity coefficients in elastic dielectric, I–VIII*, Bull. Pol. Ac.: Tech., **30** (1982), I–II – Nr 7–8, 339–365, III–V – Nr 9–10, 407–448.
- [35] Z. T. Kurlandzka, *Remarks to the paper "Stress intensity coefficients in elastic dielectric"*, Bull. Pol. Ac.: Tech., **33** (1982), Nr 1–2, 35–42.
- [36] Z. T. Kurlandzka, *Stress intensity coefficients in elastic dielectric influenced by strong electromagnetic field, I–VIII*, Bull. Pol. Ac.: Tech., I–V –**36** (1988), 609–682, VI–VIII – **39** (1991), 239–286.
- [37] Z. T. Kurlandzka, *Electromagnetic fracture of elastic dielectric in non-stationary field, I–III*, Bull. Pol. Ac.: Tech., **39** (1991), Nr 3, 389–444.
- [38] Z. T. Kurlandzka, *Criteria of electromagnetic fracture for elastic dielectric*, Bull. Pol. Ac.: Tech., **39** (1991), Nr 1, 445–461.
- [39] Z. T. Kurlandzka, *Radial crack in elastic cylinder, I–II*, Bull. Pol. Ac.: Tech., **43**, (1995), No 2, I–151–163, II–165–178.
- [40] Z. T. Kurlandzka, *Electromagneto-elastic field in vicinity of tip of conducting crack propagating in dielectric, I–II*, Bull. Pol. Ac.: Tech., **46** (1998), Nr 3, 23–60.
- [41] Z.T. Kurlandzka, *Energy release rate due to propagation of conducting crack in elastic dielectric*, Bull.Pol.Ac.: Tech., w druku.
- [42] M. Lax, D.F. Nelson, *Linear and nonlinear electrodynamics in elastic anisotropic dielectrics*, Phys.Rev. B, **4** (1971), Nr 10, 3694–3731.

- [43] H. Liebowitz Ed., *Fracture*, vol. 1-7, Academic Press, New York 1968.
- [44] R. D. Mindlin, *Lectures on polarization gradient in elastic dielectrics*, International Centre for Mechanical Sciences, Udine, W/lochy, lipiec 1970.
- [45] W. Nowacki, *Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych*, PWN, Warszawa, 1983.
- [46] Y. E. Pak, G. Hermann, *Conservation laws and the material momentum tensor for the elastic dielectric*, Int. J. Engng. Sci., **24**, (1986), No 8, 1365-1374.
- [47] Y. E. Pak, G. Hermann, *Crack extension force in a dielectric medium*, Int. J. Engng. Sci., **24**, (1986), No 8, 1375-1388.
- [48] V. Z. Parton, *Fracture mechanics of piezoelectric materials*, Acta Astronautica, **3**, (1976), 671-683.
- [49] V. Z. Parton, B. A. Kudriavcev, *Mechanika razrušenija pri naličii električeskich polej*, Fiz-Chem. Mech. Mat. **18**, (1982), No 5, 3-15.
- [50] V. Z. Parton, E. M. Morozov, *Mechanika uprugo-plastičeskogo razrušenija*, Nauka, Moskwa 1985.
- [51] P. Penfield, H.A. Haus, *Electrodynamics of moving media*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1967.
- [52] R. C. Pohanka, S. W. Freiman et al., *Fracture of piezoelectric materials*, Fract. Mech. Ceram., Eds. R. C. Bradt et al., New York, Plenum, 1983, **5**, 353-365.
- [53] J. Ranachowski, *Elektroceramika, własności i badania*, PWN, Warszawa, 1981.
- [54] J. Ranachowski, Z. Świąćki, T. Laś, *Ceramika w technice wysokich napięć*, PWN, Warszawa 1970.
- [55] Y. Shindo, *The linear magnetoelastic problem for a soft ferromagnetic elastic solid with a finite crack*, ASME J. of Appl. Mech., **44**, (1977), 47-50.
- [56] Y. Shindo, *Singular stresses in a soft ferromagnetic elastic solid with a flat annular crack*, Acta Mechanica, **48**, (1983), 147-155.
- [57] Y. Shindo, *Magnetoelastic interactions of a soft ferromagnetic elastic solid with a penny-shaped crack in a constant axial magnetic field*, ASME J. of Appl. Mech., **45**, (1978), 291.
- [58] Y. Shindo, *Impact response of a cracked soft ferromagnetic medium*, Acta Mechanica, **57**, (1985), 99-112.

- [59] Y. Shindo, *The linear magnetoelastic problem of two coplanar Griffith cracks in a soft ferromagnetic elastic strip*, ASME J. of Appl. Mech., **49**, (1982), 69.
- [60] G.I. Skanavi, *Fizika dielektrikov*, Nauka, Moskwa, 1974.
- [61] I. N. Sneddon, *Crack problems in the classical theory of elasticity*, J. Wiley, New York, 1969.
- [62] L. Solymar, D. Walsh, *Lectures on the electrical properties of materials*, Oxford University Press, 1975.
- [63] Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, *Fracture mechanics for piezoelectric ceramics*, J. Mech. Phys. Sol., **4**, (1992), No 4, 739-765.
- [64] R.A. Toupin, *The elastic dielectric*, J. of Rat.Mech. and Anal., **5** (1956), Nr 6, 849-915.
- [65] R.A. Toupin, *Stress tensors in elastic dielectrics*, Arch.Rat.Mech.Anal., **5** (1960) , Springer, Berlin, 440-452.
- [66] D. Y. Tzou, *Intensification of externally applied magnetic field around a crack in a layered composite*, Theor. Appl. Frac. Mech., **4**, (1985), 191-199.
- [67] L.M. Williams, *On the stress distribution at the base of a stationary crack*, J. Appl. Mech., **24**, (1957), No 1, 109-114.
- [68] G. Yagawa, S. Yoshimura, *Dynamic fracture mechanics with electromagnetic force and its application to fracture toughness testing*, Engng. Frac. Mech., **23**, (1986), No 1, 265-286.
- [69] W. Yang, Z. Suo, *Cracking in ceramic actuators caused by electrostriction*, J.Mech.Phys.Solids, **42** (1994), Nr 4, 649 - 663.

Spis treści

I	Zagadnienia statyczne	9
1	Elektroelastostatyka dielektryków	11
1.1	Elektroelastostatyka dielektryków nieliniowych	11
1.2	Model quasiliniowy dielektryka sprężystego	16
2	Dielektryk sprężysty ze szczeliną	19
2.1	Dielektryk ze szczeliną - definicje	19
2.2	Ogólne równania równowagi i warunki brzegowe dla dielektryka ze szczeliną	21
2.3	Model dielektryka ze szczeliną w przybliżeniu quasiliniowym	25
3	Rozkład pól elektrospężystych w otoczeniu naroża szczeliny	30
3.1	Warunki energetyczne dla dielektryka ze szczeliną.	30
3.2	Sformułowanie problemu brzegowego dla rozwiązania lokalnego	33
3.2.1	Pole elektrostatyczne	34
3.2.2	Siły elektrostatyczne	36
3.2.3	Przemieszczenia generowane polem elektrostatycznym	38
3.3	Rozkład pola elektrostatycznego	39
3.3.1	Dielektryk ze szczeliną próżniową	40
3.3.2	Dielektryk ze szczeliną przewodzącą	43
3.3.3	Uwagi dotyczące obydwu przypadków	45
3.4	Siły elektrostatyczne	45
3.4.1	Szczelina próżniowa	46
3.4.2	Szczelina przewodząca	47
3.5	Przemieszczenia w otoczeniu naroża szczeliny wywołane siłami elektrostatycznymi	48
3.5.1	Szczelina próżniowa	51
3.5.2	Szczelina przewodząca	58
3.6	Zachowanie się pól w bliskim otoczeniu naroża szczeliny	65
3.6.1	Pole elektrostatyczne	65
3.6.2	Przemieszczenia	66
3.6.3	Naprężenia	67

3.7	Różnice między rozwiązaniami dla obu przypadków i ich znaczenie fizyczne	71
3.8	Wpływ odkształceń na pole elektrostatyczne w dielektryku ze szczeliną	72
4	Kryteria pękania	76
4.1	Uogólnione kryterium Griffitha	76
4.2	Niezmiennicza całka Γ pierwszego rodzaju	82
4.3	Współczynniki intensywności natężenia elektrostatycznego, uogólnione współczynniki intensywności naprężeń	83
4.4	Uogólnione kryterium Irvina	85
4.4.1	Szczelina próżniowa	88
4.4.2	Szczelina przewodząca	88
4.5	Wpływ pola elektrostatycznego na propagację szczeliny	89
II	Zagadnienia dynamiczne	94
5	Elektromagnetosprężystość dielektryków	97
5.1	Model dielektryka Dixona-Eringena	97
5.2	Przybliżenie quasiliniowe modelu Dixona - Eringena	101
6	Rozkład pól elektromagneto - sprężystych w otoczeniu naroża szczeliny nieruchomej	104
6.1	Sformułowanie problemu początkowo - brzegowego	105
6.1.1	Pole elektromagnetyczne	105
6.1.2	Siły elektromagnetyczne	108
6.1.3	Przemieszczenia generowane przez pole elektromagnetyczne	109
6.2	Rozkład pól w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej	110
6.2.1	Pole elektromagnetyczne	110
6.2.2	Siły elektromagnetyczne	115
6.2.3	Przemieszczenia generowane przez pole elektromagnetyczne	118
6.3	Rozkład pól w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej	124
6.3.1	Pole elektromagnetyczne	124
6.3.2	Siły elektromagnetyczne	127
6.3.3	Przemieszczenia generowane przez pole elektromagnetyczne	129
6.4	Wnioski	133
7	Pole elektromagnetosprężyste w otoczeniu naroża szczeliny propagującej się ze stałą prędkością	136
7.1	Sformułowanie problemu	137
7.1.1	Pole elektromagnetyczne	141
7.1.2	Siły elektromagnetyczne	142
7.1.3	Przemieszczenia generowane przez pole elektromagnetyczne	143

7.2	Rozkład pól w otoczeniu naroża szczeliny próżniowej	144
7.2.1	Pole elektromagnetyczne	144
7.2.2	Siły elektromagnetyczne	148
7.2.3	Przemieszczenia generowane przez pole elektromagnetyczne	149
7.3	Rozkład pól w otoczeniu naroża szczeliny przewodzącej	157
7.3.1	Pole elektromagnetyczne	157
7.3.2	Siły elektromagnetyczne	160
7.3.3	Przemieszczenia generowane przez pole elektromagnetyczne	162
7.4	Wnioski	169
8	Parametry pękania elektromagnetycznego	170
8.1	Uogólnione kryterium Griffitha	171
8.2	Nieziemienna \mathcal{J} całka	175
8.3	Uogólnione współczynniki intensywności	177
8.4	Uogólnione kryterium Irvina	184
9	Wyznaczanie współczynników intensywności naprężeń	189
9.1	Pole elektromagnetyczne i siły elektromagnetyczne	191
9.2	Sformułowanie problemu dla równań Lamégo	197
9.3	Wyznaczanie współczynnika K_I^M	199
9.4	Wyznaczanie współczynnika K_{II}^{MC}	206
9.5	Wyznaczanie współczynnika K_{III}^{MC}	210
9.6	Współczynnik K_I^M w walcu dielektrycznym z radialną szczeliną przewodzącą w polu elektrostatycznym	212
9.6.1	Pole i siły elektrostatyczne	214
9.6.2	Przemieszczenia dla modu I	216
9.6.3	Nieskończony układ równań algebraicznych związany z warunkami na powierzchni walca	221
9.6.4	Wyniki numeryczne	224