

7.72 — sprężystość,
plastyczność

7.75 — pękanie

Ewa Turska-Kłębek

**O LOKALNYM UPLASTYCZNIENIU
OTOCZENIA WIERZCHOŁKA SZCZELINY
W ANTYPLASKIM
STANIE ODKSZTAŁCENIA**

33/90

Praca doktorska



P. 269

Składam serdeczne podziękowanie
Panu prof. dr Markowi Sokołowskiemu
za przedyskutowanie wielu zagadnień
oraz za cenne uwagi,
które wykorzystałam
przy opracowywaniu pracy.

WARSZAWA 1990

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji 30 maja 1990

P r a c a d o k t o r s k a

recenzent - Doc.dr hab. Andrzej Neimitz

promotor - Prof.dr inż. Marek Sokołowski



56799



Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark.wyd.4,5 Ark.druk.5,6

Oddano do drukarni w sierpniu 1990 r.

Nr zamówienia 294/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa
ul.Śniadeckich 8

O LOKALNYM UPŁASTYCZNIENIU OTOCZENIA WIERZCHOŁKA SZCELINY W ANTYPŁASKIM STANIE ODKSZTAŁCENIA

Streszczenie

Praca dotyczy problemów wyznaczania stref plastycznych w ciałach sprężysto i idealnie plastycznych ze szczelinami. Analizowano nieograniczone ciało i półnieskończoną szczelinę. Rozważania przeprowadzono dla antypłaskiego stanu odkształcenia. Stosowano metodę funkcji zmiennej zespolonej oraz teorię równań całkowych z osobliwym jądrem.

W rozdziale drugim podano podstawy matematyczne niezbędne dla rozwiązania zagadnień brzegowych występujących w pracy.

Rozdział trzeci rozpoczyna przegląd przybliżonych metod wyznaczania strefy plastycznej w wierzchołku szczeliny. Następnie sformułowano równania problemu nie przyjmując stosowanych przez innych autorów założeń upraszczających. Wyznaczono postać szeregu, trygonometrycznego opisującego kształt granicy strefy plastycznej. Udowodniono, że zadanie ze strefą plastyczną w wierzchołku szczeliny można sprowadzić do sprężystego zadania szczeliny na obciążonym otworze. Zauważono, że nieskończona długość szczeliny prowadzi do niejednoznacznych rozwiązań. Niejednoznaczność ta opisana jest za pomocą stałej, którą należy dobierać dla każdego problemu oddzielnie.

W rozdziale czwartym podano trzy nowe rozwiązania zagadnień z niesymetrycznymi obciążeniami dla ciała sprężysto - plastycznego. Zaadaptowano metodę używaną w problemach ze swobodną powierzchnią. Wyznaczono rozwiązania tych samych zadań dla ciała sprężystego i dokonano porównań.

Rozdział piąty poświęcony jest konstruowaniu modeli do wyznaczania stanu naprężeń w obszarach poza strefą plastyczną przy wierzchołku szczeliny. Zaproponowano dwa modele: ciała ze szczeliną na obciążonym otworze i ciała ze szczeliną obciążoną momentami skupionymi w jej wierzchołku. Modele te mogą być wykorzystane w zagadnieniach wzajemnego oddziaływania wielu szczelin.

1. WSTĘP

Niezbędnym warunkiem formułowania kryteriów dla zapobieżenia uszkodzeń konstrukcji jak i rozwijania technik laboratoryjnych do modelowania rzeczywistych warunków pracy elementów jest zrozumienie mechanizmów uplastycznienia i zniszczenia w wierzchołku szczeliny. Złożoność zjawisk fizycznych towarzyszących pękaniu i zależność od parametrów geometrycznych sprawia, że efektywna analiza musi się skupiać na wybranych szczególnych aspektach problematyki. Natomiast skomplikowany i nietypowy charakter opisu matematycznego powoduje, że istnieje bardzo niewiele ścisłych rozwiązań, które mogłyby służyć do weryfikacji rozwiązań numerycznych czy przybliżonych.

Dyskusja w niniejszej pracy opiera się na modelu lokalnego uplastycznienia w wierzchołku szczeliny (tzn. pewnym rozszerzeniu podejścia "small-scale yielding"). Zakłada się, że obciążenia zewnętrzne są na tyle małe iż strefa plastyczna powstaje jedynie przy wierzchołku szczeliny, a jej rozmiary są niewielkie w porównaniu z długością szczeliny czy innymi parametrami ciała. Można zatem przyjąć, że szczelina jest półnieskończona, a ciało - nieograniczone. Jednak, jak wykazano w pracy, to założenie mimo, że umożliwia otrzymywanie analitycznych rozwiązań pociąga za sobą ich niejednoznaczność. Aby temu zapobiec zaproponowano by do warunków brzegowych dołączyć dodatkową stałą. Rozważania przeprowadzono dla antypłaskiego stanu odkształcenia, ponieważ w tym przypadku można uzyskać ściśle wyniki, które w sposób jakościowy przenoszą się na pozostałe typy odkształceń.

W rozdziale drugim przedstawiono podstawowe stosowane definicje i twierdzenia teorii funkcji analitycznych oraz wyprowadzono rozwiązania zagadnień brzegowych występujących w pracy.

Rozdział trzeci zawiera przegląd przybliżonych metod wznacznania strefy plastycznej w wierzchołku szczeliny

(rozdz.3.1) i sformułowanie równań problemu w antypłaskim stanie odkształcenia ośrodka sprężysto-idealnie plastycznego (rozdz.3.2). Otrzymano w postaci szeregu zależność opisującą kształt krzywej, która może być granicą strefy plastycznej (rozdz.3.3). Przedyskutowano prawidłowe postawienie zadania brzegowego w przypadku półnieskończonej szczeliny (rozdz.3.5). W tym celu udowodniono, że zadanie ze strefą plastyczną w wierzchołku szczeliny można sprowadzić do sprężystego zadania szczeliny na obciążonym otworze (rozdz.3.4).

W rozdziale czwartym podano trzy nowe rozwiązania zagadnień z niesymetrycznymi obciążeniami. Zaadaptowano metodę używaną w problemach ze swobodną powierzchnią. Dla pełniejszej analizy wyznaczono również rozwiązania odpowiednich przykładów sprężystych.

Rozdział piąty poświęcony jest pewnemu modelowi szczeliny ze strefą plastyczną w wierzchołku. Otrzymano związek na naprężenia w ciele osłabionym szczeliną na obciążonym otworze. Następnie zależność tę przedstawiono w postaci szeregu, interpretując go jako sumę naprężeń, które powstają w ośrodku ze szczeliną i momentami skupionymi w jej wierzchołku. Dzięki temu można stosować do zadań oddziaływania szczelin ciele sprężysto-plastycznym metodę zaproponowaną w pracach [22,39,40].

Aby zachować ciągłość wywodów, w pracy nie podawano każdorazowo konstrukcji wykorzystywanych odwzorowań konforemnych. Konstrukcje te opierają się na znanych metodach całki Christoffela-Schwarza i składania przekształceń.

2 PODSTAWY MATEMATYCZNE

2.1 WŁASNOŚCI FUNKCJI ANALITYCZNEJ.

Jednoznaczna funkcję zespoloną $f(z)$ ($z=x+iy$) $z \in \mathbb{C}$, nazywamy analityczną (holomorficzną, regularną) w punkcie $z=a$, jeśli jest różniczkowalna w otoczeniu punktu a - tzn. ma skończoną pochodną

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Funkcja analityczna $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ w obszarze D (tzn. w każdym jego punkcie) ma następujące własności:

- (1) jest w nim ciągła i posiada pochodne wszystkich rzędów,
- (2) funkcje rzeczywiste $u(x, y)$ i $v(x, y)$ są różniczkowalne w D i spełnione są związki Cauchy'ego - Riemanna:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

wtedy

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

- (3) funkcje $u(x, y)$ i $v(x, y)$ są harmoniczne w obszarze D ,
- (4) wartości funkcji $f(z)$ określone na krzywej lub podobszarze, całkowicie zawartych w obszarze D jednoznacznie określają funkcję $f(z)$ w całym obszarze D ,
- (5) niech dwa obszary D_1 i D_2 przylegają do siebie wzdłuż krzywej C , stanowiącej wspólną część ich brzegów; niech funkcje $f_1(z)$ i $f_2(z)$ będą analityczne odpowiednio w obszarach D_1 i D_2 . Jeśli wartości $f_1(z)$ i $f_2(z)$ pokrywają

się na krzywej C , to każda z funkcji $f_1(z)$ i $f_2(z)$ stanowi przedłużenie analityczne pozostałej (zasada przedłużenia ciągłego)

Każda funkcja analityczna wewnątrz pewnego koła K o środku a i promieniu R , może być w każdym punkcie tego koła jednoznacznie przedstawiona w postaci szeregu potęgowego:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (2.1)$$

gdzie

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad c_n \in \mathbb{C}$$

Jest to szereg Taylora tej funkcji, zbieżny bezwzględnie i jednostajnie. Można go różniczkować i całkować wyraz po wyrazie w każdym wewnętrznym punkcie koła K .

Jeśli funkcja $f(z)$ nie jest analityczna w punkcie a , ale jest analityczna wewnątrz pierścienia $r < |z-a| < R$, to może być jednoznacznie przedstawiona w postaci szeregu Laurenta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

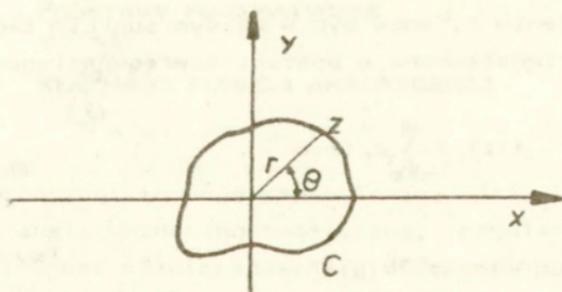
gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C (t-a)^{-n-1} f(t) dt, \quad c_n \in \mathbb{C}$$

C jest pewnym konturem leżącym wewnątrz pierścienia otaczającym punkt a i obiegany w kierunku dodatnim. Również szereg Laurenta można różniczkować i całkować wyraz po wyrazie w każdym punkcie tego pierścienia.

Rozważmy, jako przykład, funkcję $f(z) = z^{1/2}$ (odwrotną do funkcji $g(\omega) = \omega^2$). Funkcja ta nie jest jednoznaczna, gdyż każdej wartości $z \neq 0$ odpowiadają dwie wartości z_1 i z_2 takie, że $z_1^2 = z_2^2$. Punkt 0 jest punktem rozgałęzienia funkcji. Oznacza to, że jeśli jakiś punkt opisze linię zamkniętą C

obejmującą punkt \emptyset , to wartość funkcji nie wróci do wartości pierwotnej z_1 , lecz osiągnie (w tym przypadku) wartość przeciwną $-z_1$. (Rys.1)



Rys.1. Kontur C , otaczający punkt rozgałęzienia funkcji $f(z)=z^{1/2}$.

Istotnie, ponieważ

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} (\cos\theta/2 + i\sin\theta/2)$$

dla $z = r (\cos\theta + i\sin\theta)$, $\theta = \arg z$

to gdy $\arg(z)$ zmieni się o 2π wtedy $\arg(z^{1/2})$ zmienia się o π . Dopiero po dwukrotnym obejściu drogi C wartość funkcji $f(z)=z^{1/2}$ wróci do tej samej wartości. Również punkt ∞ jest punktem rozgałęzienia tej funkcji. Aby uzyskać jednoznaczną gałąź tej funkcji należy z jej dziedziny C wyciąć dowolną nieprzecinającą się krzywą łączącą punkty rozgałęzienia \emptyset i ∞ .

W dalszej części pracy za dziedzinę $f(z)=z^{1/2}$ będziemy uważać całą płaszczyznę zespoloną C po odrzuceniu ujemnej części osi rzeczywistej $\emptyset x$.

Otrzymujemy dwie gałęzie

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} (\cos\theta/2 + i\sin\theta/2)$$

$$\sqrt{z} = -\sqrt{r} (\cos\theta/2 + i\sin\theta/2)$$

$$-\pi < \theta < \pi$$

jednoznaczne i różniczkowalne w $\mathbb{C} - \{z: \operatorname{Re} z \leq 0\}$.

Odwzorowanie obszaru D na obszar D' nazywamy konforemnym, jeżeli funkcja $\omega=f(z)$, $z \in D$ wyznaczająca to odwzorowanie, jest analityczna w obszarze D i pochodna $f'(z) \neq 0$ dla każdego $z \in D$. Dla dwu dowolnych promieni L' i L'' wychodzących z punktu $a \in D$, kąt, który tworzą w punkcie $f(z_0)$ obrazy $f(L')$ i $f(L'')$ jest taki sam, jak kąt między L' i L'' , zarówno pod względem miary jak i orientacji. Dla $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, Jakobian transformacji $[u(x,y), v(x,y)]$ wynosi $|f'(z)|^2$.

Dwa jednospójne obszary D i D' , których brzegi mają więcej niż jeden punkt, można zawsze konforemnie odwzorować na siebie. (Tw. Riemanna)

Niech dwa obszary jednospójne D i D' będą ograniczone odpowiednio krzywymi C i C' . Jeśli funkcja $\omega=f(z)$ analityczna w obszarze D i ciągła w obszarze \bar{D} ustala odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między brzegami C i C' , to $\omega=f(z)$ wyznacza odwzorowanie konforemne obszaru D na D' .

Odwzorowanie konforemne f transformuje funkcję harmoniczną $\phi(x,y)$ w obszarze D w funkcję harmoniczną $\phi(x(u,v), y(u,v))$ w $f(D)$. Zatem problem brzegowy w pewnym obszarze D dla równania Laplace'a można rozwiązać przekształcając konforemnie dany obszar D na koło jednostkowe lub górną półpłaszczyznę i tam wyznaczać nieznaną funkcję.

2.2 FUNKCJE ODCINKAMI HOLOMORFICZNE, ICH WYZNACZANIE Z WARUNKÓW BRZEGOWYCH.

Funkcja $f(z)$ spełnia na danym zbiorze Z warunek Höldera, jeśli dla dowolnych z' i $z'' \in Z$ zachodzi nierówność:

$$H: |f(z'') - f(z')| \leq A|z'' - z'|^\mu$$

gdzie $0 < \mu \leq 1$, $A > 0$

Przykładem jest funkcja $f(z) = z^\mu$, $\mu < 1$, która spełnia warunek H na każdym zbiorze $Z \in \mathbb{C}$.

Oczywiście, jeśli dla funkcji $f(z)$ zachodzi warunek H to jest on ciągła.

Niech L oznacza linię odcinkami gładką (tzn. skończony układ gładkich linii nie mających wspólnych punktów poza końcami c). Załóżmy, że funkcja $f(z)$ jest holomorficzną na każdym obszarze nie zawierającym punktów z linii L i ciągła z prawej i lewej strony linii L , być może poza punktami końcowymi c . W tych punktach niech będzie spełniona nierówność

$$|f(z)| \leq \frac{\text{const}}{|z-c|^\alpha}$$

gdzie c - wyżej wymieniony punkt końcowy, $\text{const} \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$. Funkcję $f(z)$ nazwiemy funkcją odcinkami holomorficzną o linii nieciągłości L .

Zajmiemy się teraz pewnym zagadnieniem brzegowym [27] dla płaszczyzny S rozciętej wzdłuż rozłącznych odcinków $L_j = a_j b_j$ ($j=1, 2, \dots, p$) na osi rzeczywistej \mathbb{R}_1 ($a_1 < b_1 < a_2 < \dots$) i $L = L_1 + L_2 + \dots + L_p$. Poszukujemy funkcji $\phi(z) = u + iv$ odcinkami holomorficzną w S o linii nieciągłości L , znikającej w nieskończoności i spełniającej warunki brzegowe

$$u^+ = f^+(t), \quad u^- = f^-(t) \quad \text{na } L,$$

gdzie $f^+(t)$ i $f^-(t)$ - dane funkcje rzeczywiste na L ,
spełniające warunek H,

$$u^\pm(t, 0) = \lim_{x_2 \rightarrow 0^\pm} u(t, x_2)$$

Jeśli oznaczymy przez c_1, c_2, \dots, c_{2p} punkty a_j, b_j wzięte
w dowolnej kolejności, to rozwiązanie ograniczone w punktach
 c_1, c_2, \dots, c_q , dla $q \leq p$ ma postać:

$$\begin{aligned} \phi(z) = & \frac{1}{\pi i} \frac{\sqrt{r_1(z)}}{\sqrt{r_2(z)}} \int_L \frac{\sqrt{r_2(t)} f(t)}{\sqrt{r_1(t)} t-z} dt + \quad (2.3) \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{g(t)}{t-z} dt + \\ & + \frac{\sqrt{r_1(z)}}{\sqrt{r_2(z)}} P_{p-q-1}(z), \end{aligned}$$

gdzie

$$r_1(z) = \prod_{j=1}^q (z-c_j), \quad r_2(z) = \prod_{j=q+1}^{2p} (z-c_j)$$

$$2f(t) = f^+(t) + f^-(t),$$

$$2g(t) = f^+(t) - f^-(t),$$

$P_{p-q-1}(z)$ - dowolny wielomian o współczynnikach
rzeczywistych, stopnia nie większego niż $p-q-1$
($P_{p-q-1}(z) \equiv 0$ dla $p=q$).

Gdy $p < q$ rozwiązanie (jednoznaczne) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_L \frac{\sqrt{r_2(t)}}{\sqrt{r_1(t)}} t^k f(t) dt = 0 \quad (2.4)$$

$$k = 0, 1, \dots, q-p-1$$

i dane jest wzorem (2.3) przy $P_{p-q-1} \equiv 0$.

Z przedstawionego problemu brzegowego można wyprowadzić rozwiązanie mieszanego zagadnienia Kiełdysza-Sedova dla półpłaszczyzny.

Niech na osi rzeczywistej dane będą rozłączne odcinki a_j, b_j ($-\infty < a_1 < b_1 < \dots < b_p < +\infty$, $j=1, 2, \dots, p$). Oznaczmy przez L' sumę tych odcinków, natomiast przez L'' pozostałą część osi rzeczywistej. Funkcja $\phi(z) = u + iv$, holomorphyzna w górnej półpłaszczyźnie $x_2 > 0$, ograniczona w nieskończoności i spełniająca warunek brzegowy

$$u^+ = f(t) \quad \text{na } L', \quad v^+ = g(t) \quad \text{na } L'', \quad t \in \mathbb{R}$$

dla $f(t)$ i $g(t)$ spełniających warunek H i

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t)$$

$$|g(t) - g(\infty)| < \frac{\text{const}}{|t|^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

ma postać:

$$\phi(z) = \frac{\sqrt{r_1(z)}}{\sqrt{r_2(z)}} \left[\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\sqrt{r_2(t)} h(t)}{\sqrt{r_1(t)} t-z} dt + P_{p-q-1}(z) \right] \quad (2.5)$$

$L=L'+L''$

gdzie $r_1(z)$ i $r_2(z)$ są takie same jak dla (2.3) oraz

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & t \in L' \\ ig(t) & t \in L'' \end{cases}$$

$$P_{p-q-1}(z) = \text{const} = g(\infty) \quad \text{dla } p=q$$

Jeśli $f(t)=g(t)=0$, to

$$\phi(z) = \frac{\sqrt{r_1(z)}}{\sqrt{r_2(z)}} P_{p-q-1}(z) \quad (2.6)$$

W dalszej części pracy potrzebne będą pewne dodatkowe problemy brzegowe, których rozwiązania wyznaczone zostaną poniżej:

(1) Szukamy funkcji holomorficznej $\phi(z)=u+iv$ w górnej półpłaszczyźnie i spełniającej na osi rzeczywistej warunki

$$u^+ = f(t) \quad \text{dla } t < a$$

$$v^+ = 0 \quad \text{dla } t > a$$

$\phi(\infty) = 0$ i nieograniczonej w punkcie a .

Funkcja $\phi_B(z)=u+iv$, holomorficzna w górnej półpłaszczyźnie i spełniająca na osi rzeczywistej warunki

$$u^+ = f(t) \quad \text{dla } t < a$$

$$v^+ = 0 \quad \text{dla } a < t < A$$

$$u^+ = 0 \quad \text{dla } A < t$$

nieograniczoną w punkcie a i ograniczoną w punkcie A i ∞ , ma

postać (wg (2.5)):

$$\phi_B(z) = \frac{1}{\pi i} \frac{\sqrt{z-A}}{\sqrt{z-a}} \int_{-\infty}^a \frac{\sqrt{t-a} f(t)}{\sqrt{t-A} t-z} dt$$

Ponieważ funkcja podcałkowa

$$\frac{\sqrt{t-a} f(t)}{\sqrt{t-A} t-z}$$

jest ciągła w górnej półpłaszczyźnie względem zmiennej t i parametru A to dla ciągłej $f(t)$ istnieje granica

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi i} \frac{\sqrt{z-A}}{\sqrt{z-a}} \int_{-\infty}^a \frac{\sqrt{t-a} f(t)}{\sqrt{t-A} t-z} dt$$

Zatem funkcją spełniającą warunki (1) jest

$$\phi(z) = \lim \phi_B(z) = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{\sqrt{z-a}} \int_{-\infty}^a \frac{\sqrt{t-a} f(t)}{t-z} dt$$

Aby otrzymać rozwiązanie ogólne zagadnienia (1) (patrz [27]), należy do funkcji $\phi(z)$ dodać rozwiązanie kanoniczne

$$\phi_1(z) = \frac{C}{\sqrt{z-a}}$$

(tzn. holomorficzne w górnej półpłaszczyźnie poza punktem a , znikające w nieskończoności i takie, że $\operatorname{Re}\{\phi_1(t)\} = 0$ dla $t < a$ oraz $\operatorname{Im}\{\phi_1(t)\} = 0$ dla $t > a$); wtedy

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{\sqrt{z-a}} \int_{-\infty}^a \frac{\sqrt{t-a} f(t)}{t-z} dt + \frac{C}{\sqrt{z-a}} \quad (2.7)$$

gdzie C - dowolna stała rzeczywista.

(2) Poszukujemy funkcji $\phi = u + iv$, która jest holomorphyzna w płaszczyźnie S poza punktami $a_1 < a_2$, leżącymi na osi rzeczywistej, znika w nieskończoności i spełnia warunek brzegowy:

$$\begin{aligned} u^+ &= 0, & u^- &= 0 & \text{dla } & -\infty < t < a_1 \\ u^+ &= f^+(t), & u^- &= f^-(t) & \text{dla } & a_1 < t < a_2 \end{aligned}$$

gdzie $f^+(t)$, $f^-(t)$ - zadane funkcje rzeczywiste na (a_1, a_2) , spełniające warunek H i takie, że istnieje stała $C_0 \in \mathbb{R}$ różna od zera, że

$$\lim_{t \rightarrow a_1} f^\pm(t) - \frac{C_0}{\sqrt{t-a_1}} = 0 \quad (2.8)$$

Funkcję $\phi(z)$ przedstawimy jako sumę dwóch funkcji $\phi_1(z) + \phi_2(z)$, takich że $\operatorname{Re}\{\phi_1(t)\} = 0$ dla $t < a_1$ i $\operatorname{Im}\{\phi_1(t)\} = 0$ dla $t > a_1$ oraz $\operatorname{Re}\{\phi_2(t)\} = 0$ dla $t < a_1$, $\operatorname{Re}^\pm\{\phi_2(t)\} = f^\pm(t) - \operatorname{Re}\{\phi_1(t)\}$ dla $a_1 < t < a_2$. Funkcja $\phi_1(z)$ ma postać

$$\phi_1(z) = \frac{A}{\sqrt{z-a_1}}, \quad A \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

wtedy dla $a_1 < t < a_2$ część rzeczywista ϕ_1

$$\operatorname{Re}\{\phi_1(t)\} = \frac{A}{\sqrt{t-a_1}}$$

oraz

$$\operatorname{Re}^\pm\{\phi_2(t)\} = f^\pm(t) - \frac{A}{\sqrt{t-a_1}}$$

Jeśli przyjmiemy $A = C_0$ to na podstawie (2.8), do wyznaczania funkcji $\phi_2(z)$, nieograniczonej w punkcie a_2 , możemy zastosować wzór (2.7) (gdy $\phi_2(z)$ jest ograniczona w punkcie

a_2 postępujemy analogicznie):

$$\begin{aligned} \phi_2(z) &= \frac{1}{\pi i} \frac{1}{\sqrt{z-a_2}} \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{t-a_2} \left(f(t) - \frac{C_0}{\sqrt{t-a_1}} \right) \frac{dt}{t-z} \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_{a_1}^{a_2} \frac{g(t)}{t-z} dt + \frac{B}{\sqrt{z-a_2}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

gdzie B - dowolna stała, $B \in \mathbb{R}$.

Funkcja

$$u_3 + iv_3 = \phi_3(z) = \frac{B}{\sqrt{z-a_2}}, \quad B \in \mathbb{R}$$

jest rozwiązaniem kanonicznym danego zadania.

Aby przekształcić wzór (2.10) wyznaczmy wartość całki

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\sqrt{t-a_2}}{\sqrt{t-a_1}} \frac{dt}{t-z} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{t-a_2}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)}} \frac{dt}{t-z} = \int_{a_1}^{a_2} \left(1 + \frac{z-a_2}{t-z} \right) \frac{dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)}} \quad (2.11)$$

Pierwszy składnik sumy (2.11) ma wartość

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)}} = 2 \ln \left[\sqrt{t-a_1} + \sqrt{t-a_2} \right] \Big|_{a_1}^{a_2} = -\pi i$$

Przy podstawieniu

$$t = (a_2 - a_1) \cos^2 \theta + a_1, \quad dt = -2\sqrt{(t-a_1)(a_2-t)} d\theta$$

otrzymujemy, że drugi składnik sumy (2.11) wyrażony jest przez

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)}} = 2i \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(a_2-a_1)\cos^2\theta + a_1 - z} =$$

$$= \frac{2i}{2\sqrt{(a_1-z)(z-a_2)}} \ln \left[\frac{\sqrt{a_1-z} \operatorname{tg}\theta - \sqrt{z-a_2}}{\sqrt{a_1-z} \operatorname{tg}\theta + \sqrt{z-a_2}} \right] \Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi i}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}}$$

gdzie

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z < \pi, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{tg} z = (e^{iz} - e^{-iz}) / i(e^{iz} + e^{-iz})$$

Wtedy

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\sqrt{t-a_2}}{\sqrt{t-a_1}} \frac{dt}{t-z} = -\pi i + \pi i \frac{z-a_2}{\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}} = \pi i \left(\frac{\sqrt{z-a_2}}{\sqrt{z-a_1}} - 1 \right)$$

oraz

$$\phi_z(z) = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{\sqrt{z-a_2}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{f(t)\sqrt{t-a_2}}{t-z} dt + \frac{1}{\pi i} \int_{a_1}^{a_2} \frac{g(t)}{t-z} dt -$$

$$- C_0 \left[\frac{1}{\sqrt{z-a_1}} - \frac{1}{\sqrt{z-a_2}} \right] + \frac{B}{\sqrt{z-a_2}} \quad (2.12)$$

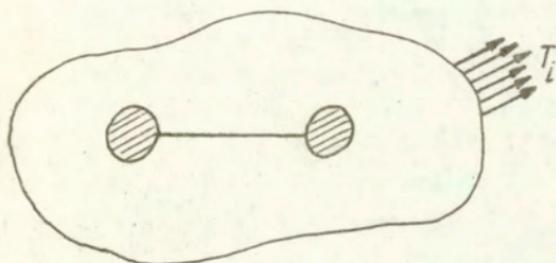
Zatem ze wzorów (2.9) i (2.12), rozwiązaniem zagadnienia (2) jest

$$\begin{aligned} \phi(z) = \phi_1(z) + \phi_2(z) &= \frac{1}{\pi i} \frac{1}{\sqrt{z-a_2}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{f(t) \sqrt{t-a_2}}{t-z} dt + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_{a_1}^{a_2} \frac{g(t)}{t-z} dt + \frac{C}{\sqrt{z-a_2}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

gdzie $C=C_0+B$, $C_0=\text{const} \neq 0$ wyznaczona jest przez (2.8)

3 SZCZELINA W OŚRODKU SPRĘŻYSTO - IDEALNIE PLASTYCZNYM W III TYPIE DEFORMACJI

Niech ciało sprężyste zawiera szczelinę Griffitha. W ciele takim naprężenia w wierzchołku nieobciążonej szczeliny są na ogół nieskończenie duże, nawet gdy obciążenia T_i , którym poddane jest ciało, są dowolnie małe. W przypadku gdy rozważany materiał jest sprężysto - plastyczny, naprężenia o wartościach większy niż krytyczne prowadzą do procesu plastycznego płynięcia materiału i stąd naprężenia w wierzchołku szczeliny nie mogą być nieskończone. Kształt strefy plastycznej ma wpływ na rozkład naprężeń w całym ośrodku i na kryteria rozwoju szczeliny.

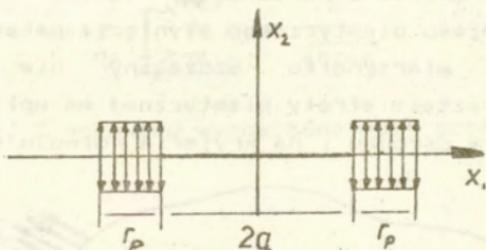


Rys.2. Schematyczny obraz ciała ze szczeliną w wierzchołku której nastąpiło uplastycznienie (obszar zakreskowany).

Zagadnienia związane z powstaniem strefy plastycznej stwarzają nawet dla ciał sprężysto - idealnie plastycznych z ustalonym warunkiem plastyczności Hubera - Misesa lub Treski - St.Venanta, duże trudności matematyczne. W związku z tym rozwinięto wiele przybliżonych metod odnoszących do różnych typów obciążenia.

3.1 PRZEGLĄD RÓŻNYCH SPOSOBÓW APROKSYMACJI STREFY PLASTYCZNEJ

Najprostszy i najczęściej stosowany (dla zagadnień I i II typu odkształcenia w płaskim stanie naprężenia [4] i dla III typu odkształcenia, przy założeniu prawa plastyczności Treski - St.Venanta) jest model Dugdale'a [17]. Zakłada się w nim, że strefa plastyczności jest jednowymiarowa i stanowi przedłużenie szczeliny (Rys.3).



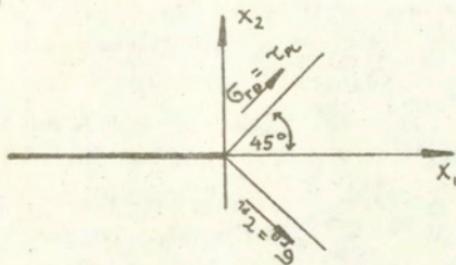
Rys.3 Model Dugdale'a, $2a$ - długość szczeliny, r_p - długość strefy plastycznej.

W strefie plastycznej przyjmuje się jednorodny stan naprężeń rozciągających σ_{22} równych granicy plastyczności σ_{pl} . Długość strefy plastycznej dobiera się tak, by zniknęła osłobliwość naprężeń w wierzchołku zastępczej szczeliny o długości $2(a+r_p)$. Na podstawie otrzymanego rozwiązania można wyznaczyć rozwarście w wierzchołku szczeliny COD. Model ten powstał na podstawie obserwacji kształtu strefy plastycznej przy wierzchołku szczeliny w cienkiej próbce wykonanej ze stali niskowęglowej i był wielokrotnie weryfikowany doświadczalnie [29].

Podobną koncepcję dla takiego samego zagadnienia zaproponowano w pracach Barenblatta, Panasiuka oraz Vitviskiego i Leonowa (patrz [29]). Natomiast w modelu Bilby'ego, Cottrella i Swindena [5] osłobliwość usuwana jest za pomocą odpowiedniego rozkładu dyslokacji w strefie

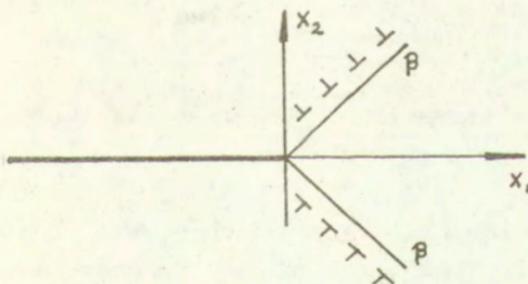
plastycznej.

Dane doświadczalne wskazują na to, że dla zagadnień płaskiego stanu odkształcenia i I typu deformacji, deformacje plastyczne lokalizują się wzdłuż wąskich pasm nachylonych pod pewnym kątem do krawędzi szczeliny. Dlatego Czerpanow [8] za Mirsalinowem [25] zakłada, że uplastycznieniu ulegają jedynie linie poślizgu β (Rys.4), wychodzące z wierzchołka szczeliny pod kątem 45 stopni. Są one obciążone naprężeniem $\sigma_{r\theta} = \tau_{pl}$. Także w tym przypadku długość odcinków β wyznacza się tak by zniknęła osobliwość naprężeń na ich końcach.



Rys.4. Strefa plastyczna wg [8] - modelowana liniami poślizgu (τ_{pl} -granica plastyczności na ścianie)

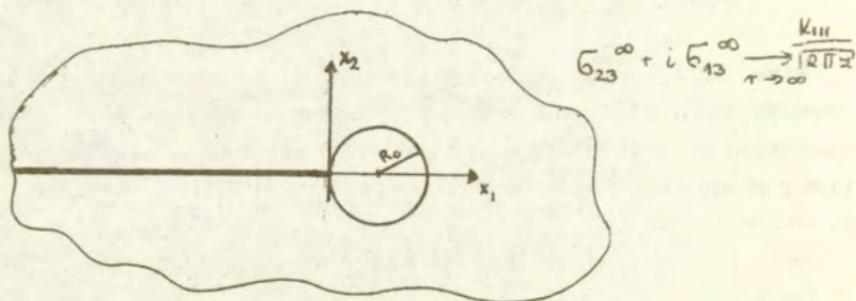
Rice [33] natomiast przyjmuje, iż na liniach poślizgu (Rys.5) istnieje odpowiedni rozkład dyslokacji relaksujących naprężenia. Stosując ten model wylicza się kąt nachylenia linii β do kierunku ułożenia szczeliny i długości odcinków β .



Rys.5. Strefa plastyczna modelowana rozkładem dyslokacji.

Niektórzy autorzy np. Yu Dal' [10], Grekow [13], Banks i Garlick [3], wyznaczają granicę obszaru plastycznego korzystając z rozwiązań czysto sprężystych. Proponowana przez nich metoda polega na wyliczeniu naprężeń dla danego zagadnienia w ciele sprężystym, a następnie podstawieniu otrzymanych wyników do jednego z warunków plastyczności i wyznaczeniu punktów, dla których ten warunek jest spełniony. Yu Dal' [10] i Grekow [13] stosują dodatkowo mnożnik λ przy stałej σ_{pl} po prawej stronie równania, opisującego warunek plastyczności. Uzyskują oni dość dobrą zgodność ze znanymi wynikami numerycznymi.

Powyższe modele nie mogą być stosowane do zagadnień niesymetrycznych tj. takich, dla których strefa plastyczna rozłożona jest niesymetrycznie względem krawędzi szczeliny. Próby takie znajdujemy w pracy Ueda et al [47], w której szuka się stref plastycznych korzystając zarazem z wyników numerycznych jak i doświadczalnych. Znajomość tych stref pomaga przy formułowaniu odpowiednich kryteriów kierunku propagacji szczeliny [1] i dlatego potrzebne są analityczne związki opisujące kształt granicy sprężysto - plastycznej.



Rys.6. Rozwiązanie Hulta i McClintocka [15], strefą plastyczną jest koło o promieniu $R_0 = K_{III}^2 / 2\pi k^2$.

Jedyne ścisłe rozwiązania zadań sprężysto - plastycznych ze szczelinami, bez zakładania uproszczonych stref plastycznych otrzymano w przypadku III typu obciążenia. Najbardziej znana jest praca Hulta i McClintocka [15], gdzie

rozpatruje się półnieskończoną szczelinę w nieskończonym ciele przy założeniu uplastycznienia bliskiego zasięgu (Rys.6).

Koskinen [20] i Rice [31], rozważają skończoną szczelinę w paśmie sprężystym obciążonym stałym naprężeniem w nieskończoności. Anin i Czerpanow [2] wyznaczyli granicę strefy plastycznej dla zagadnienia jednej i szeregu równoległych szczelin brzegowych w półprzestrzeni obciążonej skończonymi siłami w nieskończoności. Podobny problem - szereg równoległych szczelin w nieskończonej przestrzeni rozwiązał także Tian-Hu [45]. Tian-Hu i Yong-Chang [46] również zajmowali się szeregiem sztywnych inkluzji, uzyskując ciekawe rezultaty. Jednak i dla antypłaskiego stanu odkształcenia nie ma rozwiązań niesymetrycznych.

Poprzecznie ścinane szczeliny odgrywają dużą rolę przy ruchach tektonicznych skorupy ziemskiej, trzęsieniach ziemi i przy obsuwaniu się skarp. Dlatego badania antypłaskiego stanu odkształcenia ważne są w geologii i geomechanice. Mimo, iż w mechanice pękania za najważniejsze uważa się zagadnienia związane z I typem deformacji szczeliny, to analiza III typu deformacji jest również istotna. Można to uzasadnić w następujący sposób [23]:

1. Zadania rozwiązuje się łatwiej w sposób ścisły matematycznie - nie tracąc ciągłości między rozwiązaniem z małą strefą plastyczną a rozwiązaniem dla pełnego uplastycznienia.

2. Analiza jest weryfikowalna doświadczalnie.

3. Korzystając z wyników uzyskanych dla III typu można wyznaczyć odpowiedni współczynnik korekcyjny dla typu I w płaskim stanie naprężenia. Dtrzymujemy dobrą zgodność z danymi doświadczalnymi.

4. Podobną metodę można zastosować w przypadku płaskiego stanu naprężenia dla ciała z otworem, który jest całkowicie otoczony strefą plastyczną.

W dalszych częściach pracy będzie rozważany jedynie antypłaski stan odkształcenia.

3.2 RÓWNIANIA PROBLEMU I ZAŁOŻENIA MATEMATYCZNE

Założmy, że ośrodek jest sprężysto - idealnie plastyczny i znajduje się w antyplaskim stanie deformacji. Wektor przemieszczenia \underline{u} ma postać:

$$\underline{u} = [0, 0, w(x_1, x_2)] \quad (3.1)$$

Przemieszczenie $w(x_1, x_2)$ jest równoległe do osi θx_3 prostokątnego układu kartezjańskiego (x_1, x_2, x_3) . Jedyne niezerowe składowe tensora odkształceń ϵ , to $\epsilon_{13}(x_1, x_2)$ i $\epsilon_{23}(x_1, x_2)$.

Z prawa Hooke'a wynika, iż w obszarze sprężystym jedynymi niezerowymi składowymi tensora naprężenia są:

$$\sigma_{31}(x_1, x_2) = \sigma_{13}(x_1, x_2) = \mu \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2) \quad (3.2)$$

$$\sigma_{32}(x_1, x_2) = \sigma_{23}(x_1, x_2) = \mu \frac{\partial w}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

gdzie μ jest modułem ścinania.

Układ równań równowagi Lamé'go sprowadza się, przy braku sił masowych, do równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0 \quad (3.3)$$

Przyjmując, że $w(x_1, x_2) = (1/\mu) \text{Im}[f(z)]$, gdzie $f(z)$ jest funkcją analityczną zmiennej zespolonej $z = x_1 + ix_2$, uzyskujemy w części sprężystej ciała związek

$$\sigma_{23}(x_1, x_2) + i\sigma_{13}(x_1, x_2) = f'(z), \quad z = x_1 + ix_2 \quad (3.4)$$

W obszarze, w którym materiał ulega uplastycznieniu, spełniona jest równość:

$$\sigma_{23}^2(x_1, x_2) + \sigma_{13}^2(x_1, x_2) = k^2 \quad (3.5)$$

Według hipotezy Hubera - Misesa $k = \sigma_{pl}/2$, a według hipotezy Treski - St. Venanta $k = \sigma_{pl}/\sqrt{3}$, gdzie σ_{pl} - granica plastyczności. Przez szczelinę w ciele rozumiemy powierzchnię S , na której mogą pojawiać się nieciągłości wektora przemieszczenia i tensora naprężenia [21]. W pracy rozważać będziemy jedynie szczeliny pasmowe tzn.

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : b < x_1 < a, x_2 = 0, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

znajdujące się w ośrodku sprężystym lub sprężysto - idealnie plastycznym, izotropowym i jednorodnym, w którym spełnione są warunki antypłaskiego stanu odkształcenia. Oznacza to, że pole przemieszczeń i naprężeń na powierzchni szczeliny jak i w jej otoczeniu są jednakowe w dowolnej płaszczyźnie prostopadłej do osi x_3 . Ograniczymy się zatem do badania rozkładu tych wielkości w jednej płaszczyźnie przekroju $x_3 = 0$. W tej płaszczyźnie punkty $(a, 0)$ i $(b, 0)$ nazywać będziemy wierzchołkami szczeliny. Górną powierzchnią szczeliny nazwiemy odcinek

$$D_G = \left\{ (x_1, 0) : b < x_1 < a \right\}$$

który jest granicą punktów

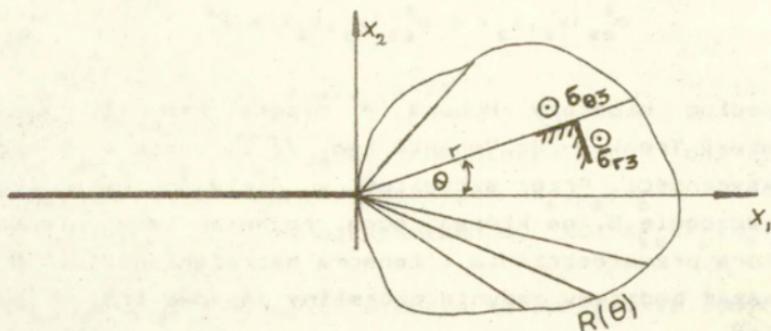
$$\left\{ (x_1, x_2) : b < x_1 < a, x_2 \rightarrow 0^+ \right\}.$$

Dolną powierzchnią szczeliny nazwiemy odcinek

$$D_D = \{(x_1, \theta) : b < x_1 < a\},$$

który jest granicą punktów

$$\{(x_1, x_2) : b < x_1 < a, x_2 \rightarrow \theta^-\}.$$



Rys.7. Rozkład naprężeń w obszarze plastycznym.

O - oznacza wektor o kierunku i zwrocie zgodnym z osią Ox_3 .

Rozpatrując uplastycznienie tylko przy wierzchołku szczeliny otrzymujemy wniosek [8, 32], że naprężenia są stałe wzdłuż promieni wychodzących z wierzchołka szczeliny (rys.7)

$$\sigma_{\theta 3}(x_1, x_2) = k, \quad \sigma_{r 3}(x_1, x_2) = 0 \quad (3.6)$$

czyli

$$\sigma_{23}(r, \theta) = k \cos \theta, \quad \sigma_{13}(r, \theta) = -k \sin \theta$$

lub

$$\sigma_{23}(r, \theta) + i\sigma_{13}(r, \theta) = k e^{-i\theta} \quad (3.7)$$

$$x_1 + ix_2 = r e^{i\theta}, \quad r \leq R(\theta)$$

gdzie $R(\theta)$ - granica strefy plastycznej.

Rozważamy jedynie problemy "stacycznie wyznaczalne" [14] (warunki brzegowe dane są tylko w naprężeniach, nie odciażamy ciała i żadna linia poślizgu nie przecina granicy między częścią sprężystą a plastyczną więcej niż raz), czyli takie, które można rozwiązać w samych naprężeniach.

Ponieważ wszystkie składowe tensora naprężenia σ muszą być ciągłe w całym ciele [16] (oprócz wierzchołka szczeliny), rozwiązanie zagadnienia sprężysto - idealnie plastycznego sprowadza się do znalezienia analitycznej funkcji $f'(z)$ spełniającej odpowiednie warunki brzegowe i wyznaczenia krzywej $R=R(\theta)$, na której funkcja $f'(z)$ spełnia warunek

$$f'(z) \Big|_{z=R(\theta) \exp(i\theta)} = k e^{-i\theta} \quad (3.8)$$

W części sprężystej składowe tensora naprężenia w biegunowym układzie współrzędnych wyrażają się wzorem

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta 3}(r, \theta) + i\sigma_{r 3}(r, \theta) &= (\sigma_{23}(r, \theta) + i\sigma_{13}(r, \theta)) e^{i\theta} = \\ &= f'(z) e^{i\theta}, \quad z = r e^{i\theta} \end{aligned} \quad (3.9)$$

wtedy:

$$\varepsilon_{\theta 3}(r, \theta) + i \varepsilon_{r 3}(r, \theta) = \frac{1}{\mu} f'(z) e^{i\theta} \quad (3.10)$$

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\partial}{\partial r} \right] w(r, \theta) = \frac{1}{\mu} f'(z) e^{i\theta}$$

Na granicy sprężysto - plastycznej tzn. dla $r=R(\theta)$ z warunków (3.8) i (3.10)

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + i \frac{\partial w}{\partial r} \right] \Bigg|_{r=R(\theta)} = k/\mu \quad (3.11a)$$

$$\sigma_{\theta 3}(r, \theta) = k, \quad \sigma_{r 3}(r, \theta) = 0 \quad (3.11b)$$

zatem

$$\frac{\partial w}{\partial r} \Bigg|_{r=R(\theta)} = 0 \quad i \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} \Bigg|_{r=R(\theta)} = \frac{k}{\mu} R(\theta) \quad (3.12)$$

W części plastycznej prędkości odkształceń spełniają związki

$$\dot{\varepsilon}_{r 3} = \dot{\varepsilon}_{r 3}^p + \dot{\varepsilon}_{r 3}^{sp}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta 3} = \dot{\varepsilon}_{\theta 3}^p + \dot{\varepsilon}_{\theta 3}^{sp} \quad (3.13)$$

czyli

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \dot{\varepsilon}_{r 3}^p + \frac{\sigma}{\mu}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \dot{\varepsilon}_{\theta 3}^p + \frac{\sigma}{\mu} \quad (3.14)$$

(kropki oznaczają pochodną po zmiennej czasowej).

Ponieważ naprężenia nie zmieniają się w czasie to część plastyczna prędkości odkształceń wyraża się wzorami:

$$\dot{\varepsilon}_{rs}^p = \frac{\partial w}{\partial r} \quad \text{i} \quad \dot{\varepsilon}_{\theta s}^p = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (3.15)$$

Rozkład naprężeń w części plastycznej jest niezależny od promienia r , zatem na podstawie prawa płynięcia Levy - Misesa

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij}$$

(gdzie $s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3) \delta_{ij} \sigma_{kk}$

λ - nieznaną parametr zależny od deformacji ciała)

i wzorów (3.6) wynika, że $\dot{\varepsilon}_{rs}^p = 0$, czyli

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

Z ciągłości odkształceń [16] na granicy sprężysto - plastycznej otrzymujemy wniosek, że w strefie plastycznej na podstawie (3.12) i (3.15):

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{k}{\mu} R(\theta) \quad (3.16)$$

to

$$\dot{\varepsilon}_{\theta s}^p = \frac{k}{\mu} \frac{R(\theta)}{r}$$

i przemieszczenia w części plastycznej wyrazić można wzorem

$$w(\theta) = \frac{k}{\mu} \int_0^\theta R(\beta) d\beta \quad (3.17)$$

Wprowadźmy dla ułatwienia dalszych obliczeń, nowe unormowane zmienne

$$\xi = \frac{\sigma_{23}}{k}, \quad \eta = -\frac{\sigma_{13}}{k} \quad (3.18)$$

Dzięki tym oznaczeniom zbiór punktów opisywanych przez równanie $\sigma_{23} + i\sigma_{13} = ke^{-i\theta}$ w przestrzeni naprężeń leży na okręgu jednostkowym. Stan naprężenia w strefie sprężystej $\omega = \xi + i\eta$ jest opisany funkcją analityczną zmiennej $x_1 - ix_2$.

W dalszej części pracy poszukiwać będziemy funkcji analitycznej $F(\omega)$, takiej że:

$$F(\omega) = x_1 - ix_2 \quad (3.19)$$

ponieważ pozwala to na stosowanie metod używanych w zagadnieniach ze awobodną powierzchnią.

Na podstawie (3.8) i (3.19) kształt granicy sprężysto - plastycznej opisany jest wzorem

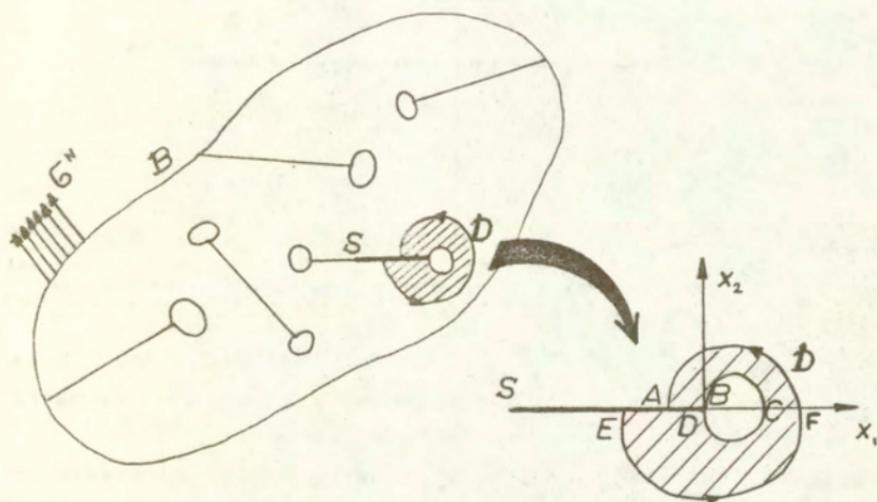
$$R(\theta) = e^{i\theta} F(e^{i\theta}) \quad (3.20)$$

natomiast rozkład naprężeń w części sprężystej wyznacza funkcja odwrotna do $F(\omega)$

$$\frac{\sigma_{23}}{k} - i \frac{\sigma_{13}}{k} = F^{-1}(x_1 - ix_2) \quad (3.21)$$

3.3 OGÓLNA POSTAĆ ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA KSZTAŁTU GRANICY SPRĘŻYSTO - PLASTYCZNEJ W WIERZCHOŁKU SZCELINY.

Rozpatrzmy dowolne ograniczone lub nieskończone ciało sprężysto - idealnie plastyczne B, zawierające jedną lub kilka prostoliniowych szczelin. Zakładamy, że naprężenia, których wartości narzucone są przez warunki brzegowe są na tyle małe by materiał uplastyczniał się jedynie wokół wierzchołków szczelin i by strefy plastyczności nie łączyły się ze sobą.



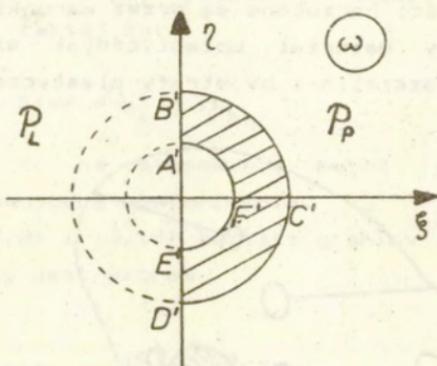
Rys.8 Schemat redukcji zadania. Zakreskowano obszar wewnątrz krzywej D, zamknięte krzywe wokół wierzchołków szczelin wyznaczają strefy plastyczne.

Ustalmy pewną szczelinę S. Istnieje taka stała $r < 1$, że możemy wyznaczyć krzywą D wokół jej wierzchołka spełniającą warunek

$$D = \{(x_1, x_2) : \sigma_{23}^2(x_1, x_2) + \sigma_{13}^2(x_1, x_2) = r^2 k^2, \}$$

(rys.8). Bez utraty ogólności możemy ograniczyć się do rozważania części ciała ograniczonej krzywą D.

Nieznana funkcja $F^{-1}(\bar{z})$ (3.21) przekształca przestrzeń fizyczną \bar{z} danego zadania w przestrzeń naprężeń (patrz rozdz.3.2). Obrazem obszaru zawartego między krzywą D, a strefą plastyczną w przestrzeni naprężeń $\omega = \xi + i\eta$ (3.18) jest półpłaszczyzna P_P (rys.9).



Rys.9 Obraz obszaru sprężystego w przestrzeni naprężeń ω .

Poszukiwać będziemy funkcji $F(\omega)$ (3.19). Aby była odpowiedniość obszarów półpłaszczyzny P_P i obszaru wewnątrz krzywej D, funkcja $F(\omega)$ musi spełniać warunki

1. Ciągłość naprężeń σ_{23} i σ_{13} na granicy sprężysto - plastycznej;

$$\text{Im}[\omega F(\omega)] = 0 \text{ dla } \omega = \exp(i\theta); \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (3.22)$$

2. Ułożenie szczeliny na ujemnej części osi Ox_1 ;

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im}[F(\omega)] = 0 \\ \text{Re}[F(\omega)] \leq 0 \end{array} \right\} \text{ dla } \begin{array}{l} \eta \in (r, 1) \cup (-1, -r) \\ \xi = 0 \end{array} \quad (3.23)$$

3. Funkcja $F(\omega)$ jest analityczna wewnątrz półpłaszczyzny

dla

$$P_P = \left\{ \omega: r < |\omega| < 1; -\frac{\pi}{2} \leq \arg \omega \leq \frac{\pi}{2} \right\} \quad (3.24)$$

Funkcję $F(\omega)$ można przedłużyć analitycznie na drugą połowę półpłaszczyzny

$$P_L = \left\{ \omega: r < |\omega| < 1; \arg \omega \in (-\pi/2, -\pi) \cup (\pi, \pi/2) \right\}$$

Otrzymujemy

$$F_1(\xi+i\eta) = \begin{cases} F(\xi+i\eta) & \text{dla } \omega \in P_P \\ F(-\xi+i\eta) & \text{dla } \omega \in P_L \end{cases}$$

Na granicy sklejanego $\xi=0$ ciągłość funkcji $F_1(\omega)$ otrzymujemy z warunku (3.23), iż $F_1(i\eta) = F(i\eta)$. Funkcja $F_1(\omega)$ jest analityczna w półpłaszczyźnie P_L , z ciągłości na granicy sklejanego i twierdzenia o przedłużeniu analitycznym (rozd.2) [41], wynika analityczność w całym pierścieniu $P = P_P \cup P_L$. Można przedstawić ją w postaci szeregu Laurenta: (patrz rozdz.2)

$$F_1(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\omega^n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \omega^n, \quad a_n, b_n \in \mathbb{C} \quad (3.25)$$

Warunki (3.22) i (3.23) narzucają pewne relacje między współczynnikami a_n i b_n . Z zależności (3.23) otrzymujemy, że

$$\operatorname{Im} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1}{(i\eta)^n} + b_n (i\eta)^n \right) + b_0 \right] = 0, \quad \forall \eta \in (-1, -r) \cup (r, 1) \quad (3.26)$$

Równanie (3.26) jest spełnione dla każdego $\eta \in (-1, -r) \cup (r, 1)$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\operatorname{Im}[b_0] = 0$$

$$\operatorname{Re}[a_{2k-1}], \operatorname{Re}[b_{2k-1}] = 0, \quad k=1, 2, \dots \quad (3.27)$$

$$\operatorname{Im}[a_{2k}], \operatorname{Im}[b_{2k}] = 0$$

Warunek (3.22) wyraża się jako:

$$\operatorname{Im} \left[e^{i\theta} \left(b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-in\theta} + b_n e^{in\theta} \right) \right] = 0 \quad (3.28)$$

Przyjmując, że

$$b_0 = \beta_0$$

$$a_{2k-1} = i\alpha_{2k-1}, \quad b_{2k-1} = i\beta_{2k-1}$$

$$a_{2k} = \alpha_{2k}, \quad b_{2k} = \beta_{2k}$$

gdzie $\alpha_i, \beta_i, \beta_0 \in \mathbb{R}, \quad i=1, 2, \dots$

i rozdzielając część rzeczywistą i urojoną w prawej stronie związku (3.28), a następnie przyrównując część urojoną do zera otrzymujemy równania:

$$\alpha_1 = 0$$

$$\beta_0 - \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_{2k+1} + \beta_{2k-1} = 0$$

$$-\alpha_{2k+2} + \beta_{2k} = 0$$

(3.29)

Zatem funkcja $F_1(\omega)$ spełniająca (3.22), (3.23) i (3.24) ma postać:

$$F_1(\omega) = \frac{1}{\omega} \left\{ \alpha_2 \left(\omega + \frac{1}{\omega} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[i\alpha_{2m+1} \left(\frac{1}{\omega^{2m}} - \omega^{2m} \right) + \right. \right.$$

$$+ \alpha_{2m+2} \left[\frac{1}{\omega^{2m+1}} + \omega^{2m+1} \right] \Bigg\}$$

Dla uproszczenia zapisu ponownie zmienimy oznaczenia współczynników α_i i β_i , wtedy

$$F_1(\omega) = \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_{2k-1} \left(\frac{1}{\omega^{2k-1}} + \omega^{2k-1} \right) + i A_{2k} \left(\frac{1}{\omega^{2k}} - \omega^{2k} \right) \right] \quad (3.30)$$

gdzie $A_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,\dots$

Każda funkcja postaci (3.30) spełnia warunki (3.22), (3.23), (3.24) i aby były spełnione powyższe warunki muszą zachodzić związki (3.27) i (3.29). Oznacza to, że wzór (3.30) opisuje wszystkie funkcje, które mogłyby być rozwiązaniem wyżej postawionego zagadnienia.

Na podstawie (3.20) krzywa $R(\theta)$ - granicę sprężysto - plastyczną przedstawić można wzorem

$$R(\theta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_{2k-1} \cos(2k-1)\theta + A_{2k} \sin 2k\theta \right] \quad (3.31)$$

$$\text{gdzie } A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{F_1(\xi)}{\xi^{n+2}} d\xi, \quad A_n \in \mathbb{R}$$

$$\gamma_0 = r_0 e^{i\theta}, \quad r < r_0 < 1$$

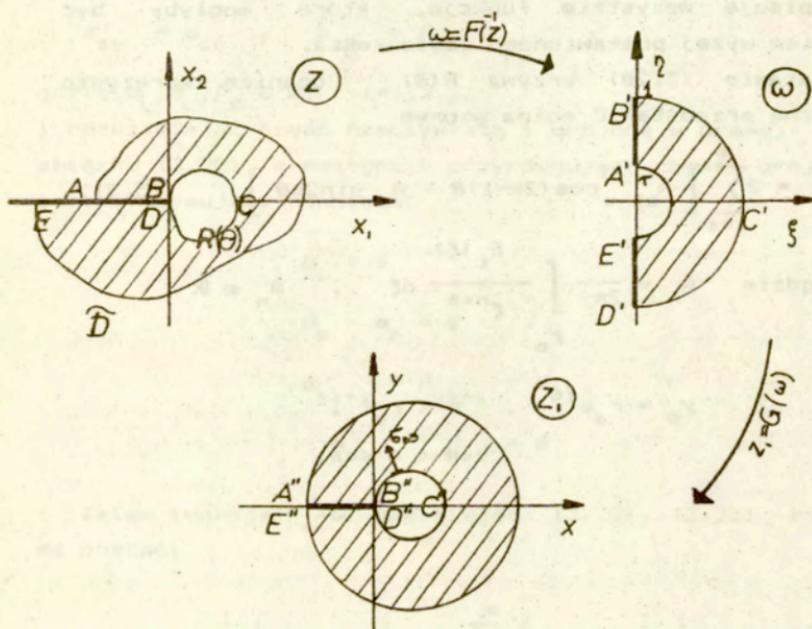
$$-\pi < \theta < \pi.$$

3.4 SPROWADZENIE PROBLEMU STREFY PLASTYCZNEJ W WIERZCHOŁKU SZCELINY DO ZADANIA SZCELINY, KTÓREJ WIERZCHOŁEK LEŻY NA OBCIĄŻONYM OTWORZE.

Niech \tilde{D} oznacza część ciała ograniczoną krzywą

$$D = \{ (x_1, x_2) : \sigma_{23}^2(x_1, x_2) + \sigma_{13}^2(x_1, x_2) = r^2 k^2 \}$$

(patrz rozdz.3.3). Funkcja $F^{-1}(z)$ przekształca obszar \tilde{D} na półpłaszczyznę P_p , zaś funkcja $G(\omega) = a(1+1/\omega^2)$ przekształca półpłaszczyznę P_p na wnętrze zawarte między dwoma



Rys.10. Odwzorowanie części sprężystej ciała \tilde{D} , ograniczonej krzywą stałej intensywności D na obszar zawarty między dwoma współśrodkowymi okręgami.

współśrodkowymi okręgami o środkach w punkcie (a, θ) i promieniach odpowiednio a i a/r^2 (rys.10). Złożenie tych funkcji przekształca szczylinę leżącą na ujemnej części osi rzeczywistej przestrzeni Z na przecięcie $A''B''D''E''$ wzdłuż ujemnej części osi rzeczywistej przestrzeni Z_1 .

Jeśli jakaś nieznaną funkcja dH/dz przyjmuje wartości $dH/dz = k \exp(-i\theta)$ na krzywej $R=R(\theta)$, to w przestrzeni Z_1 należy szukać funkcji dH/dz_1 przyjmującej na okręgu $R(\theta) = 2a \cos \theta$ wartości

$$\left. \frac{dH}{dz} \right|_{z=2a \cos \theta e^{i\theta}} = \left. \frac{dH}{dz} \right|_{z=R(\theta) e^{i\theta}} \left. \frac{dz}{d\omega} \right|_{\omega=e^{-i\theta}} \left. \frac{d\omega}{dz_1} \right|_{z_1=2a \cos \theta e^{i\theta}}$$

Ponieważ

$$R(\theta) = e^{-i\theta} F(e^{-i\theta})$$

$$\frac{dR}{d\theta} = -ie^{-i\theta} F(e^{-i\theta}) - ie^{-i\theta} e^{-i\theta} \left. \frac{dF}{d\omega} \right|_{\omega=e^{-i\theta}}$$

wtedy

$$R'(\theta) = -iR(\theta) - ie^{-2i\theta} \left. \frac{dF}{d\omega} \right|_{\omega=e^{-i\theta}}$$

$$\left. \frac{dz}{d\omega} \right|_{\omega=e^{-i\theta}} = \left. \frac{dF}{d\omega} \right|_{\omega=e^{-i\theta}} = e^{2i\theta} (-R(\theta) + iR'(\theta))$$

Natomiast

$$\left. \frac{d\omega}{dz} \right|_1 = -\frac{\omega^3}{2a} = -\frac{e^{-3i\theta}}{2a}$$

stąd otrzymujemy

$$\frac{dH}{dz_1} = -ke^{-i\theta} e^{2i\theta} \left[-R(\theta) + iR'(\theta) \right] \frac{e^{-3i\theta}}{2a} = -\frac{k}{2a} e^{-2i\theta} \left[-R(\theta) + iR'(\theta) \right]$$

Składowa normalna w punkcie $z=2a \cos\theta e^{i\theta}$ wyraża się wzorem

$$\frac{dH}{dn} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{dH}{dz_1} (n_1 + i n_2) \right\}$$

gdzie

$$[n_1, n_2] = [\cos 2\theta, \sin 2\theta]$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dn} &= \operatorname{Im} \left\{ -\frac{k}{2a} e^{-2i\theta} \left[-R(\theta) + iR'(\theta) \right] e^{2i\theta} \right\} = \\ &= \operatorname{Im} \left\{ -\frac{k}{2a} \left[-R(\theta) + iR'(\theta) \right] \right\} \end{aligned}$$

czyli

$$\frac{dH}{dn} = -\frac{k}{2a} R'(\theta)$$

Uzyskaliśmy wartość naprężenia normalnego działającego na otwór, $\sigma_{ns} = -(k/2a)R'(\theta)$.

Możemy zamiast szczeliny ze strefą plastyczną $R(\theta)$ przy wierzchołku, rozważać także szczelinę, której wierzchołek leży na okrągłym otworze obciążonym normalnym naprężeniem

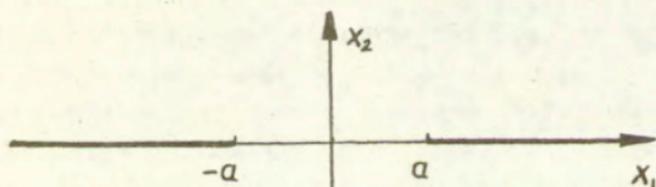
$$\sigma_{ns} = -(k/2a)R'(\theta). \quad (3.32)$$

3.5 PRAWIDŁOWE POSTAWIENIE ZADANIA BRZEGOWEGO DLA ZAGADNIEŃ Z PÓLNIESKOŃCZONĄ SZCZELINĄ

Przez zadanie brzegowe rozumiemy zadanie, które polega na wyznaczeniu rozkładu naprężeń i (lub) przemieszczeń w ciele, na brzegu którego dane są: albo a) naprężenia, albo b) przemieszczenia, albo c) na części naprężenia, a na pozostałej przemieszczenia, albo d) warunki kontaktowe.

Jeżeli ciało sprężyste, w którym znajduje się szczelina jest ograniczone, to do udowodnienia jednoznaczności zadania brzegowego wystarczy założyć, oprócz standardowych warunków stawianych dla ośrodków bez szczelin, ograniczoną przemieszczenia wierzchołka szczeliny (Knowles, Pucik [18], Russo [34]). W przypadku gdy ciało jest nieograniczone, a szczelina skończona należy dodatkowo założyć rząd wielkości przemieszczenia u w nieskończoności (Russo [34,35]).

By analizować obszar wokół wierzchołka szczeliny, rozważa się także zagadnienia nieskończonego ciała z nieskończoną szczeliną. W tym przypadku, nadal istnieją pewne trudności w prawidłowym postawieniu zadania. Przykładem może być problem rozważany przez Stallybrass'a [42]: dwie współliniowe, półnieskończone szczeliny obciążone ciśnieniem wewnętrznym w ośrodku nieskończonym liniowo sprężystym, jednorodnym i izotropowym (rys.11).



Rys.11 Dwie współliniowe półnieskończone szczeliny.

Aby jednoznacznie wyznaczyć rozkład naprężeń nie wystarczy założenie rzędu znikania naprężeń w nieskończoności. Należy postawić jakiś dodatkowy warunek, za który w danym przypadku Stallybrass przyjął zachowanie równowagi sił i momentów na płaszczyźnie, na której położone są obie szczeliny. Jednym z wniosków z pracy [42] jest to, iż rozkład naprężeń w ciele zawierającym szczeliny zewnętrzne (tzn. półnieskończone) nie zawsze jest stanem granicznym dla rozkładu naprężeń w ciele ze szczelinami skończonymi. Zgodność taka występuje w pewnych przypadkach obciążeń symetrycznych.

Polemizując z pracą [42], Cominou i Barber [49] wykazali, że w niektórych przypadkach warunek przyjęty przez Stallybrassa, prowadzi do zachodzenia brzegów szczeliny na siebie. Dalsza dyskusja (Stallybrass [43], Fabrikant, Sankar, Xistris [11]), doprowadziła do sformułowania następującego wniosku:

Rozważanie zagadnień z półnieskończonymi szczelinami ma sens fizyczny jedynie wtedy, gdy stanowią one model konkretnych rozwiązań dla ciał skończonych. Ciała ograniczone występują rzadko jako obiekty izolowane i zwykle oddziałują z otoczeniem lub ze sobą. Warunki w nieskończoności należy zatem dobierać tak, by spełniały odpowiednie własności brzegowe przypisane danemu modelowi.

Niejednoznaczność powstaje ponieważ nieskończone ciało ze szczeliną nie spełnia zasady St. Venanta (Cherepanov [8]). Aby poprawnie postawić problem (tzn. by miał jednoznaczne rozwiązanie i by było ono stabilne ze względu na małe zmiany warunków brzegowych lub kształtu ciała) należy do warunków brzegowych dołączyć wartości trzech parametrów K_I , K_{II} , K_{III} . Parametry te mogą się zerować. Wyznaczają one wartości:

Dla $z \rightarrow \infty$

$$2\Phi(z) + \Omega(z) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi z}} \quad (3.33)_1$$

$$\Omega(z) = \frac{iK_{III}}{\sqrt{2\pi z}} \quad (3.33)_2$$

$$f'(z) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi z}}$$

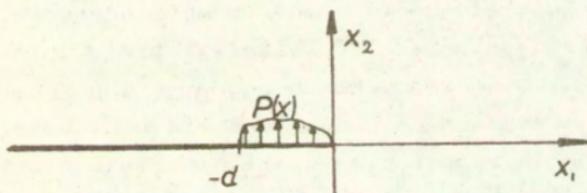
gdzie $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ są potencjałami Kołosowa - Muskhelishvili:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\tau_{12} = 2[z\Phi'(z) + \Psi(z)]$$

$$\sigma_{23} + i\sigma_{13} = \mu f'(z)$$

$$\Omega(z) = z\Phi'(z) + \Psi(z), \quad z = x_1 + ix_2$$



Rys.12. Półnieskończona szczelina obciążona tylko na części swej powierzchni.

Przykładowo rozwiązaniem zadania półnieskończonej szczeliny $x_1 \leq 0$ w przestrzeni sprężystej, w antypłaskim stanie naprężeń, obciążonej na części swej powierzchni $\sigma_{22} = p(x)$ dla $x_1 \leq -d$ (rys.12), jest

$$\sigma_{23}(z) + i\sigma_{13}(z) = \frac{1}{\pi i \sqrt{z}} \int_{-d}^{\theta} \frac{\sqrt{x} p(x)}{x-z} dx + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi z}}$$

Także przypadek półnieskończonej szczeliny zaczynającej się na brzegu kołowego otworu, obciążonego dowolnym ciśnieniem wewnętrznym $\sigma_{n3}=p(\theta)$ prowadzi do jednoparametrowej rodziny rozwiązań (rys.27, przykład w rozdziale 5). Wynika to z istnienia rozwiązania analogicznego do (3.33). Jest to w antypłaskim stanie odkształcenia dla nieobciążonej szczeliny $\sigma_{23}=\theta$, nieobciążonego otworu $\sigma_{n3}=\theta$ o promieniu R i naprężeniu znikającym w nieskończoności jak $K_{III}/(2\pi z)^{1/2}$ [26]:

$$\sigma_{23} + i\sigma_{13} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi z}} \left[\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{R}{z^{3/2}} \right] \quad (3.34)$$

Wspomnianą rodzinę rozwiązań otrzymuje się mnożąc rozwiązanie (3.34) przez dowolną stałą i dodając do rozwiązania spełniającego niezerowe warunki brzegowe. Zatem i w tego typu zagadnieniach ustalenie rozwiązania wymaga postawienia dodatkowych warunków brzegowych (np. parametrów K_I, K_{II}, K_{III}) sugerowanych przez sens fizyczny modelu.

Problem jednoznaczności dla ciał sprężysto-plastycznych jest od wielu lat przedmiotem badań (Melan [24], Hill [14], Koiter [19]). Większość klasycznych rezultatów odnosi się do ciał z odpowiednio gładkim brzegiem. W nowszych monografiach np. Nečas, Hlaváček [28] wyniki te uogólniono są na ciała z brzegiem Lipschitzowskim. Jednak i to rozszerzenie nie wystarcza by rozwiązywać zagadnienie jednoznaczności dla ciał ze szczelinami Griffitha traktowanymi jako część brzegu ciała.

Dla ciał ze szczeliną mamy dwa różne typy rozwiązań - rozwiązanie ciągle odpowiadające strefie plastycznej o niezerowej objętości oraz rozwiązanie nieciągłe

odpowiadające strefie plastycznej o zerowej objętości (np. zadanie Dugdale'a). Zwykle uważa się rozszerzając znane twierdzenie (Cherepanov [8]), że jednoznaczność rozwiązań ciągłych jest zapewniona tzn. nie istnieją dwie różne strefy plastyczne o różnych kształtach dla jednego zadania z danymi warunkami brzegowymi.

Do wyboru między rozwiązaniem ciągłym i nieciągłym można stosować kryterium maksymalnej szybkości dyssypacji energii \dot{D} (Cherepanov [8]).

$$D = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \int_V \sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{ik} dV dt \right] \quad (3.35)$$

gdzie:

t - parametr czasu,

t_0 - punkt bifurkacji, w którym zmienia się topologiczna struktura rozwiązania (tzn. pojawia się strefa plastyczna);

V - objętość ciała;

$\dot{\epsilon}_{ik}$ - część plastyczna tensora prędkości odkształceń.

W przypadku zadania Hulta i McClintocka [15] (rozdz. 3.1, rys.6) tzn. w antypłaskim stanie odkształcenia gdy półnieskończona szczelina jest nieobciążona $\sigma_{23} = 0$ dla $x < 0$ i naprężenia znikają w nieskończoności

$$\sigma_{23} + i\sigma_{13} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi z}}$$

rozwiązanie ciągle daje rozkład naprężeń w części sprężystej równy

$$\left[\sigma_{23} + i\sigma_{13} \right] (z) = K_{III} \left[2\pi \left[z - K_{III}^2 / 2\pi k^2 \right] \right]^{-1/2}, \quad (3.36)$$

a granicą między strefą plastyczną a sprężystą jest okrąg o promieniu $R_0 = K_{III} / \sqrt{2\pi k^2}$ i środkiem $(x_1, x_2) = (K_{III} / \sqrt{2\pi k^2}, 0)$.

W rozwiązaniu nieciągłym deformacje plastyczne zachodzą

na odcinku linii poślizgu na przedłużeniu szczeliny (rys.3). Długość tego odcinka wynosi $a=2K_{III}/\pi k^2$ i rozkład naprężeń jest opisany przez funkcję odwrotną do

$$z = \frac{k_{III}^2}{2\pi k^2} \left[2 - \frac{k^2}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{k^2} \right]; \quad \omega = \sigma_{23} + i\sigma_{13} \quad (3.37)$$

Wyznaczając wartości (3.35) dla obu przypadków [8] okazuje się, że szybkość dyssypacji energii jest większa dla rozwiązania ciągłego.

Zadanie z narzuconą topologią rozwiązania nieciągłego można sprowadzić do odpowiedniego zadania czysto sprężystego z częściowo obciążoną szczeliną. Szczelina ta może być rozgałęziona lub zakrzywiona (patrz rozdz.3.1). Również zadanie z ciągłą strefą plastyczną można potraktować jako zadanie sprężyste. Rozważa się wtedy szczelinę o wierzchołku na odpowiednio obciążonym otworze o nieznanym kształcie. A taki problem sprowadza się z kolei do problemu radialnej szczeliny o wierzchołku na otworze kołowym obciążonym ciśnieniem wewnętrznym $p(x)$ (rozd. 3.4).

W obu tych zagadnieniach sprężystych, gdy rozważamy szczelinę półnieskończoną, dla ustalenia rozwiązania należy do warunków brzegowych dołączyć wartości parametrów K_I , K_{II} , K_{III} określonych wzorami (3.33). Zatem i w zagadnieniach sprężysto - plastycznych, w antypłaskim stanie odkształceni z półnieskończoną szczeliną, oprócz warunków brzegowych, zakłada się rząd naprężeń w nieskończoności i wartość K_{III} taką, że

$$\left[\sigma_{23} + i\sigma_{13} \right] (z) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi z}} \quad (3.38)$$

Stosowana w pracy metoda rozwiązywania problemów sprężysto - plastycznych wymaga założenia wartości K_{III} jednocześnie z innymi warunkami brzegowymi. Ponieważ są to problemy nieliniowe, nie można, jak w przypadku sprężystym, dodać do wcześniej otrzymanego rozwiązania związek (3.38).

4 PRZYKŁADY WYZNACZANIA GRANICY STREFY PLASTYCZNEJ - ROZWIĄZANIA ŚCISŁE

Jak zaznaczono w części wstępnej spotyka się nadal prace, w których granicę sprężysto - plastyczną wyznacza się z rozwiązań czysto sprężystego. Również przy formułowaniu warunków kierunku wzrostu szczeliny [1] wykorzystuje się przybliżony kształt granicy sprężysto - plastycznej, otrzymany z analizy zagadnienia sprężystego. Ponieważ brak jest ścisłych rozwiązań problemów z niesymetrycznym obciążeniem ciała lub z danym obciążeniem na powierzchni szczeliny, weryfikacja uzyskanych w ten sposób powierzchni plastycznych jest niepełna. Symetria fizyczna i geometryczna rozwiązań narzuca pewne własności na typy krzywych, które mogłyby stanowić granicę sprężysto - plastyczną i dlatego potrzebne są porównania wyników dla analogicznych zadań w przypadku gdy ciało jest sprężyste i gdy jest sprężysto - plastyczne. Przedstawiono trzy takie przykłady, wskazując na podobieństwa i różnice między rozwiązaniami sprężystymi i sprężysto - plastycznymi.

4.1 SZCELINA OBCIĄŻONA NA SWOICH POWIERZCHNIACH

a/ Przypadek sprężysto - plastyczny

Rozważmy nieograniczony ośrodek przecięty półnieskończoną szczeliną wzdłuż ujemnej części osi Ox_1 (rys.7). Niech wszystkie składowe naprężeń znikają w nieskończoności, a brzegi szczeliny będą obciążone naprężeniem $\sigma_{23}(x_1, 0) = k\alpha / (x_1 - \alpha)$ dla $x_1 < 0$, $\alpha > 0$.

Zastosujemy metodę podobną do używanej w klasycznej pracy Hultha i McClintocka [15]. Łatwo sprawdzić, że funkcją $F(\omega)$

(3.19) o odpowiednich własnościach w przestrzeni naprężeń $\omega = \sigma_{23}/k - i\sigma_{13}/k$ jest

$$F(\omega) = \alpha \left[\frac{1}{\omega} + 1 \right]^2, \quad \omega = \xi + i\eta \quad (4.1)$$

$$f^*(z) = \frac{k\sqrt{\alpha}}{\sqrt{z} + \sqrt{\alpha}} \quad (\text{patrz (3.4)})$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}(\cos\theta/2 + i\sin\theta/2)$$

Krzywą $R=R(\theta)$ (3.20), rozgraniczającą obszar sprężysty od plastycznego jest kardioida o równaniu

$$R(\theta) = 2\alpha(\cos\theta + 1) \quad \text{dla } z=re^{i\theta} \quad (4.2)$$

Po odwróceniu funkcji $F(\omega)$ i rozdzieleniu na część rzeczywistą i urojoną wyznaczamy rozkład naprężeń w obszarze sprężystym

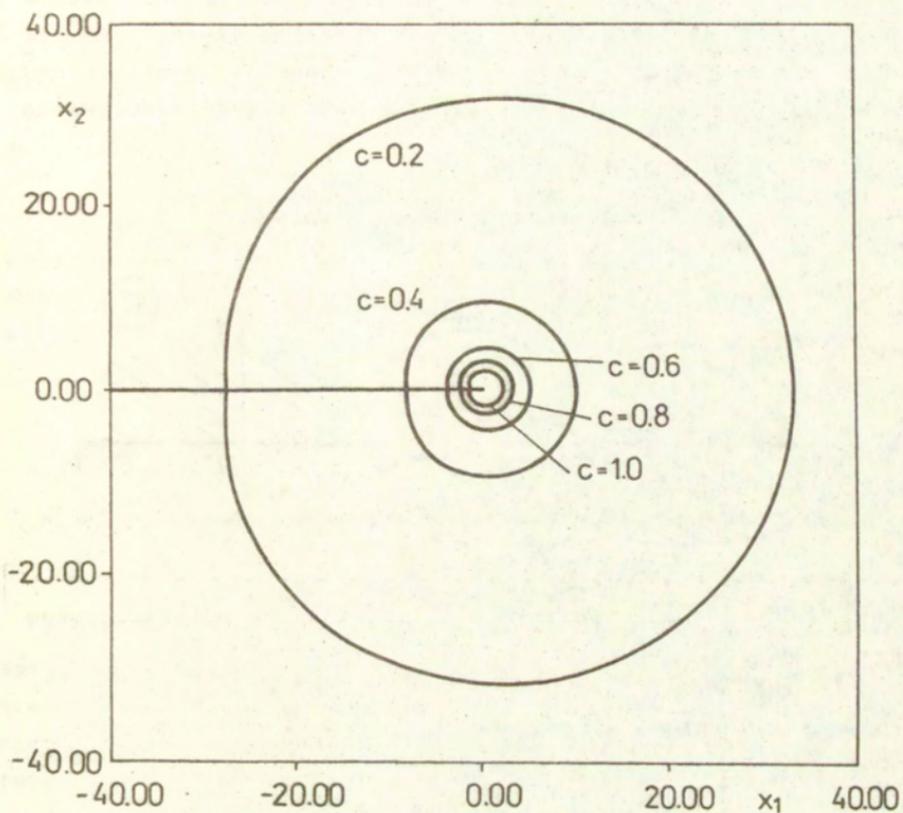
$$\sigma_{23}(r, \theta) = \frac{k \left[\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\alpha}} \cos(\theta/2) - 1 \right]}{r/\alpha + 1 + 2(\sqrt{r}/\sqrt{\alpha}) \cos(\theta/2)} \quad (4.3)$$

$$\sigma_{13}(r, \theta) = - \frac{k \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\alpha}} \sin(\theta/2)}{r/\alpha + 1 + 2(\sqrt{r}/\sqrt{\alpha}) \cos(\theta/2)}$$

gdzie r, θ są współrzędnymi biegunowymi przedstawionymi na rys.7 i $-\pi < \theta < \pi$. W obszarze plastycznym naprężenia wyrażone są wzorem (3.6)

$$\sigma_{23} + i\sigma_{13} = ke^{-i\alpha}$$

Linie stałej intensywności naprężeń $\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = c^2 k^2$ (4.3) przedstawiono na rys.13 dla $c=1, 0, 0,8, 0,6, 0,4, 0,2$ i $\alpha=1$. Dla $c=1$ linią tą jest krzywa $R=R(\theta)$.

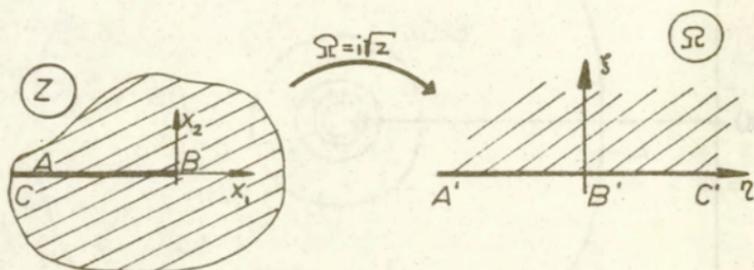


Rys.13. Granica strefy plastycznej $R(\theta)=2(\cos\theta+1)$ i linie stałej intensywności naprężeń dla szczeliny obciążonej na brzegach $\sigma_{23}=k/(x_1-1)$.

b/ Przypadek sprężysty

Rozwiążemy takie samo zagadnienie brzegowe (szczelina obciążona na brzegu naprężeniem $\sigma_{23}(x, 0) = k\alpha / (x_1 - \alpha)$, $x_1 < 0$ i w nieskończoności ośrodek wolny od obciążeń $\sigma_{23} + i\sigma_{13} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$) w przypadku zagadnienia czysto sprężystego. Przekształcamy płaszczyznę $z = x_1 + ix_2$ na górną półpłaszczyznę $\Omega = \eta + i\xi$ odwzorowaniem $\Omega = i\sqrt{z}$ i szukamy takiej funkcji analitycznej $g(\Omega)$, że na brzegu półpłaszczyzny Ω jej część rzeczywista wynosi

$$\operatorname{Re}[g(\eta, 0)] = -k\alpha / (\eta^2 + \alpha)$$



Rys.14. Odwzorowanie przestrzeni fizycznej na półpłaszczyznę η i ξ .

Z całki Poissona wyznaczamy

$$\operatorname{Re}[g(\eta, \xi)] = \phi(\eta, \xi) = \frac{-k\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha + \tau^2} \frac{\xi}{\xi^2 + (\eta - \tau)^2} d\tau \quad (4.4)$$

Należy wyznaczyć $g(\Omega)$ znając część rzeczywistą (4.4). Niech

$$\phi_1(\eta, \xi) = \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\eta, \xi)$$

oraz

$$\phi_z(\eta, \xi) = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\eta, \xi)$$

wtedy

$$g'(\Omega) = \phi_1(\Omega, \emptyset) - i\phi_2(\Omega, \emptyset)$$

czyli

$$g(\Omega) = \int g'(\Omega) d\Omega$$

Podstawiając wynik całkowania do powyższych wzorów i zmieniając współrzędne otrzymujemy postać funkcji analitycznej $f_1^*(z)$ o danej części rzeczywistej na ujemnej półosi Ox_1 :

$$f_1^*(z) = \frac{k\alpha}{\sqrt{z}(\sqrt{z} + \sqrt{\alpha})} \quad (4.5)$$

gdzie $\sqrt{z} = \sqrt{r}(\cos\theta/2 + i\sin\theta/2)$, $-\pi < \theta < \pi$.

Funkcja $f_1^*(z)$ ma modelować rozwiązanie zagadnienia sprężysto - plastycznego $f'(z)$ (4.1). Ponieważ $f_1^*(z)$ w nieskończoności jest rzędu $1/z$, a funkcja $f'(z)$ (4.1) jest rzędu $1/\sqrt{z}$, to do $f_1^*(z)$ należy dodać $k\sqrt{\alpha}/\sqrt{z}$ (patrz rozdz.3.5). Wtedy

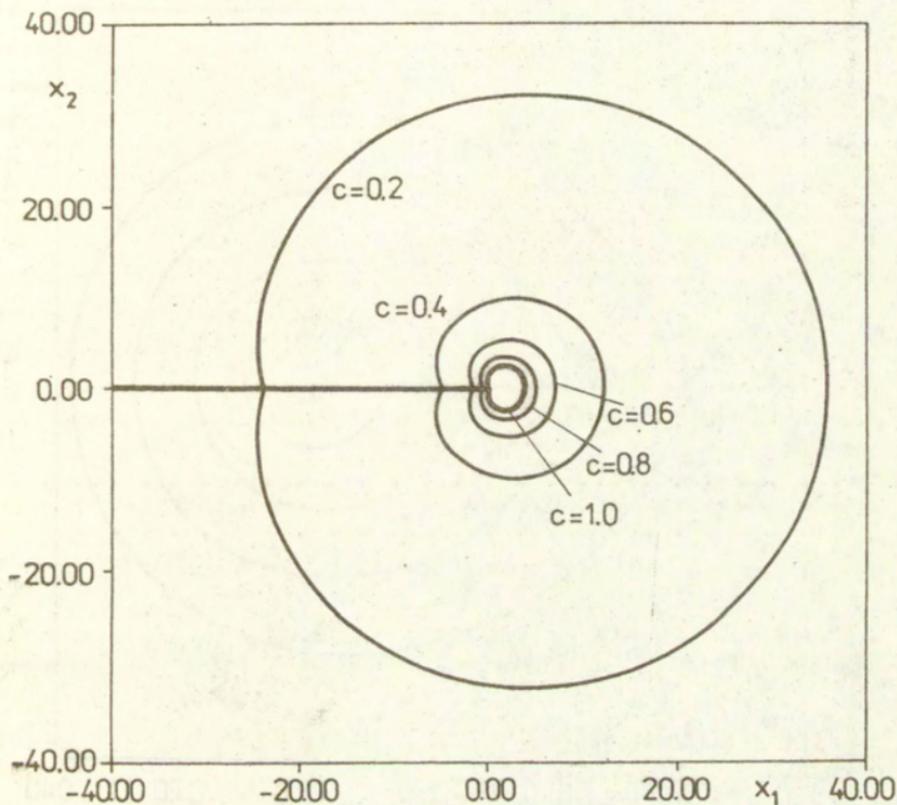
$$f_2^*(z) = \frac{k\sqrt{\alpha}}{\sqrt{z}} \left[\frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{\alpha}} + 1 \right]$$

$$\sigma_{2a}(r, \theta) = k \left\{ \frac{(r/\alpha) \cos\theta + \sqrt{r/\alpha} \cos(\theta/2)}{(r/\alpha) [(r/\alpha) + 2\sqrt{r/\alpha} \cos(\theta/2) + 1]} + \frac{\sqrt{\alpha} \cos(\theta/2)}{\sqrt{r}} \right\} \quad (4.6)_1$$

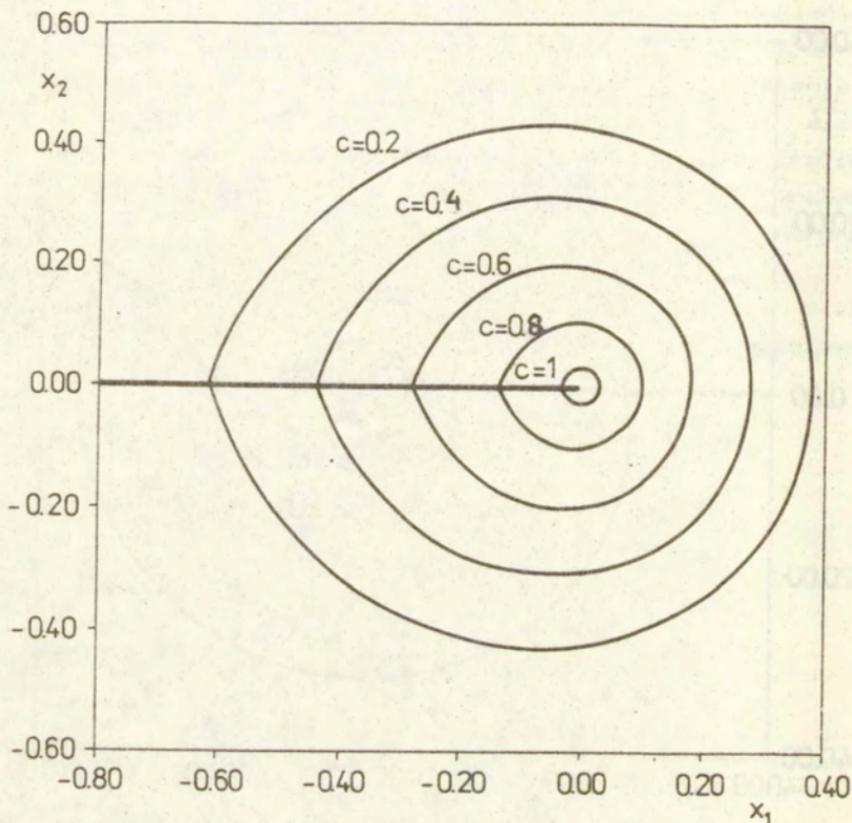
$$\sigma_{13}(r, \theta) = -k \left\{ \frac{(r/\alpha) \sin\theta + \sqrt{r/\alpha} \sin(\theta/2)}{(r/\alpha)[(r/\alpha) + 2\sqrt{r/\alpha} \cos(\theta/2) + 1]} + \frac{\sqrt{\alpha} \sin(\phi/2)}{\sqrt{r}} \right\} \quad (4.6)_2$$

Linie stałej intensywności naprężeń $\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 = c^2 k^2$ (4.6) dla $\alpha=1$ i $c=1,0, 0,8, 0,6, 0,4, 0,2$ przedstawione są na rys.15. Należy zwrócić uwagę na znaczne podobieństwo krzywych z rys.13 i rys.15. Przy $c=1$ mają te same średnice poziome i pionowe, lecz są przesunięte względem siebie o pewną odległość d . Wartość d jest równa odległości wzdłuż osi Ox , krzywej dla $c=1$ z rys.15 od wierzchołka szczeliny. Krzywa uzyskana z rozwiązania sprężystego dla $c=1$ mogłaby, po przesunięciu do wierzchołka szczeliny, modelować granicę sprężysto - plastyczną $R(\theta)$ (4.2).

Dla porównania na rys.16, przedstawiono linie stałej intensywności naprężeń, gdyby rozkład naprężeń modelowany był przez $\sigma_{32} + i\sigma_{31} = f'_1(z)$, przy $\alpha=1$.



Rys.15. Linie stałej intensywności naprężeń dla szczeliny w ośrodku sprężystym, obciążonej na brzegach naprężeniem $\sigma_{23} = k/(x_1 - 1)$.



Rys.16 Linie stałej intensywności naprężeń dla rozkładu naprężeń modelowanego funkcją $f_1(z) = k / [\sqrt{z}(\sqrt{z}-1)]$

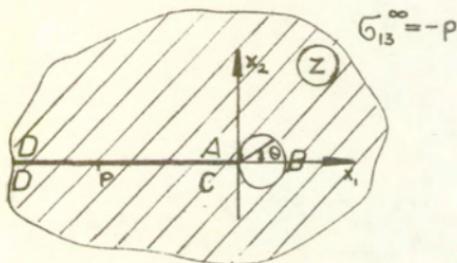
4.2 SZCZELINA W NIESKOŃCZONYM OŚRODKU OBCIĄŻONYM NAPRĘŻENIEM STYCZNYM W NIESKOŃCZONOŚCI

a/ Zadanie sprężysto - plastyczne

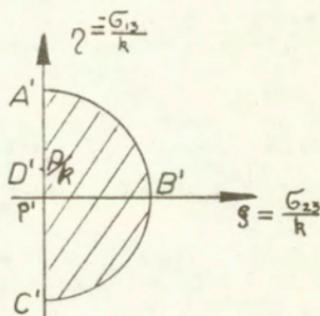
Jako następny przykład rozważmy zadanie sprężysto - plastyczne dla półnieskończonej, swobodnej od naprężeń szczeliny w nieograniczonym ośrodku obciążonym w nieskończoności naprężeniem $\sigma_{13}^{\infty} = -p$ ($p/k < 1$) takim, że przy $p=0$

$$(\sigma_{23} + i\sigma_{13})(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi z}}$$

Poszukiwaną funkcją będzie funkcja $F(\omega)$ (3.19) odwzorowująca półkole w płaszczyźnie naprężeń ω na płaszczyznę fizyczną z (rys.17).



Rys.17 Półnieskończona szczelina w nieskończonym ośrodku obciążonym naprężeniem $\sigma_{13}^{\infty} = -p$ w nieskończoności.



Rys.18 Obraz części sprężystej z w przestrzeni naprężeń ω .

Odzworowanie $F(\omega)$ musi spełniać następujące warunki:

- 1^o $\text{Im}[F(\omega)] = 0 \quad \omega \in \overline{A^*D^*C^*}$
- brzości szczeliny są wolne od naprężeń σ_{23} ;
- 2^o a/ $F(ip/k) = \infty$
oraz

$$p=0 \rightarrow F(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{K_{III}^2}{2\pi k^2} \frac{1}{\omega^2} \quad (4.7)$$

- naprężenia w nieskończoności są równe $\sigma_{13}^{\infty} = -p$, gdy $p=0$, to $f(z) \rightarrow K_{III} / \sqrt{2\pi z}$ - uplastycznienie bliskiego zasięgu;

b/ $F(i) = F(-i) = 0$

- wierzchołek szczeliny leży w punkcie $(0,0)$;

- 3^o $\text{Im}[\omega F(\omega)] = 0 \quad \omega \in \overline{A^*B^*C^*}$
- granica strefy plastycznej jest zamkniętą krzywą o równaniu $R(\theta) = \exp(i\theta)F(\exp(i\theta))$.

Wprowadzając funkcję analityczną $G(\omega) = \omega F(\omega)$ otrzymujemy dla niej odpowiednio:

- 1^o $\text{Re}[G(\omega)] = 0 \quad \omega \in \overline{A^*D^*C^*}$;
- 2^o a/ $G(ip/k) = \infty$

$$p=0 \rightarrow G(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{K_{III}^2}{2\pi k^2} \frac{1}{\omega} \quad (4.8)$$

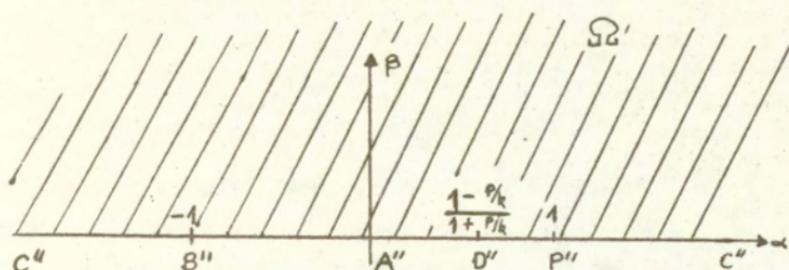
b/ $G(i) = G(-i) = 0$

- 3^o $\text{Im}[G(\omega)] = 0 \quad \omega \in \overline{A^*B^*C^*}$

Za pomocą odzworowania

$$\Omega = \left(\frac{1+i\omega}{1-i\omega} \right)^2$$

przekształcamy półkole z płaszczyzny ω (rys.18) na półpłaszczyznę $\Omega = \alpha + i\beta$ (rys.19).



Rys.19 Obraz półkola odwzorowanego z przestrzeni naprężeń (rys.18) na półpłaszczyznę Ω .

Warunki (4.8) dla $G^*(\Omega) = G(\omega(\Omega))$ transformują się na:

$$1^{\circ} \quad \operatorname{Re}[G^*(\Omega)] = 0 \quad \Omega \in \overline{A''D''C''}$$

$$2^{\circ} \quad a / G^* \left(\frac{1-p/k}{1+p/k} \right) = \infty \quad \Omega = D''$$

$$p=0 \rightarrow G^*(\Omega) \xrightarrow{\Omega \rightarrow i} \frac{K_{III}^2}{\pi k^2} \frac{2i}{\Omega-1} \quad (4.9)$$

$$b / G^*(0) = G^*(\infty) = 0 \quad \Omega=0, \quad \Omega=\infty$$

$$3^{\circ} \quad \operatorname{Im}[G^*(\Omega)] = 0 \quad \Omega \in \overline{A''B''C''}$$

Funkcja $G^*(\Omega)$ spełniająca warunki (4.9) jest równa ([27])

$$G^*(\Omega) = \frac{2K_{III}^2}{\pi k^2} \frac{i\sqrt{\Omega}}{\Omega \frac{1-p/k}{1+p/k}} \quad (4.10)$$

Zatem podstawiając

$$\Omega = (1+i\omega)^2 / (1-i\omega)^2$$

do (4.10) otrzymujemy

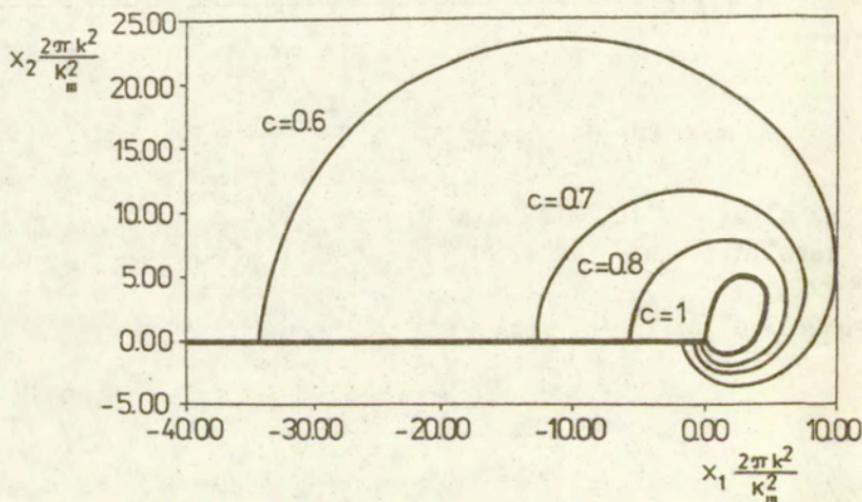
$$F(\omega) = \frac{k_{III}^2}{2\pi k^2} \left[1 + \frac{1}{\omega^2} \right] \frac{(1 + p/k)^2}{1 + p^2/k^2 + i(p/k)(\omega - 1/\omega)} \quad (4.11)$$

Przy $p=\sigma$ rozwiązanie (4.11) pokrywa się z rozwiązaniem Hulta i McClintocka [15]. Krzywa, stanowiąca granicę sprężysto - plastyczną, ma postać:

$$R(\theta) = \frac{k_{III}^2}{\pi k^2} \cos\theta \frac{(1 + p/k)^2}{1 + p^2/k^2 - 2(p/k)\sin\theta} \quad (4.12)$$

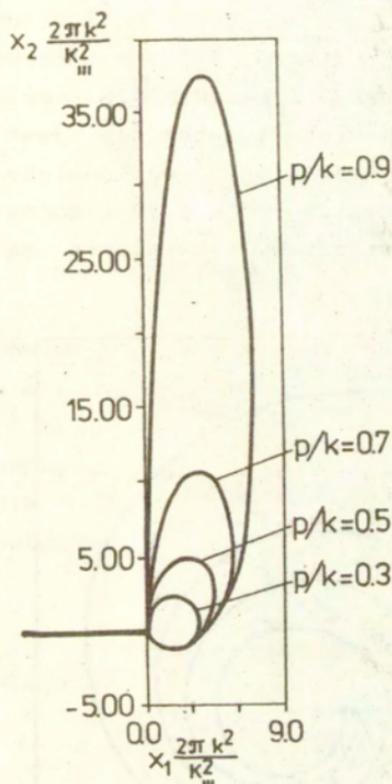
$-\pi/2 < \theta < \pi/2$

Na rys.20 przedstawiono krzywą (4.12) i linie stałej intensywności naprężeń $\sigma_{22}^2 + \sigma_{11}^2 = c^2 k^2$ dla $p/k=0,5$ i $c=1,0, 0,8, 0,7, 0,6$, gdy $c=1$ to jest to granica strefy plastycznej $R(\theta)$.



Rys.20. Granica strefy plastycznej i linie stałej intensywności naprężeń dla ośrodka obciążonego w nieskończoności $\sigma_{11}^{\infty} = -0,5k$.

Na rys.21 przedstawiono granice sprężysto plastyczne $R(\theta)$ (4.12) dla $p/k=0,9, 0,7, 0,5, 0,3$. Brak symetrii krzywej $R(\theta)$ względem osi Ox_1 przy $p \neq 0$ spowodowany jest zadaniem typu obciążenia w nieskończoności $\sigma_{13}^{\infty} = -p$. Z rys.21 można wnioskować, że krzywa ta przy zwiększającym się obciążeniu dążyć będzie, w kształcie, do wąskiego pasma prostopadłego do brzegów szczeliny.



Rys.21. Granice stref plastycznych przy różnych obciążeniach $\sigma_{13}^{\infty} = -p$ w nieskończoności.

b/ Zadanie sprężyste

Rozwiązaniem analogicznego zadania sprężystego jest

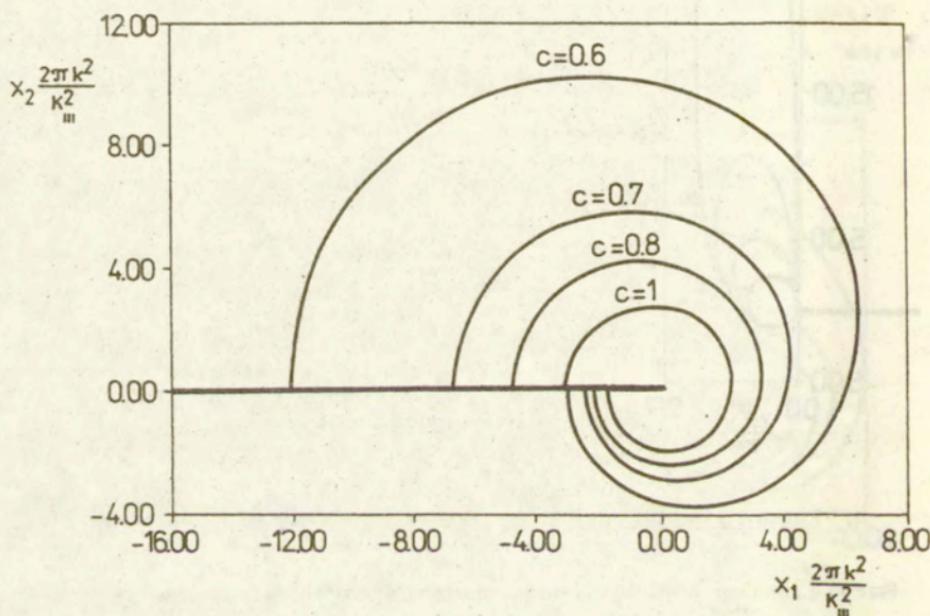
$$\sigma_{23}(x_1, x_2) + i\sigma_{13}(x_1, x_2) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi z}} - ip$$

lub

$$\sigma_{23}(r, \theta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\phi/2) \quad (4.13)$$

$$\sigma_{13}(r, \theta) = - \left[\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin(\phi/2) + p \right]$$

Na rys.22 przedstawiono linie stałej intensywności naprężeń $\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = c^2 k^2$ (4.13) dla $p/k=0,5$ i $c=1,0, 0,8, 0,7, 0,6$. Żadna z krzywych nie jest zamknięta i zatem nie jest możliwy wybór wśród nich takiej krzywej, która modelowałaby krzywą $R(\theta)$ (4.12). Porównując rys.20 z rys.22 można zauważyć, iż daleko od wierzchołka szczeliny rozwiązania są podobne do siebie.



Rys.22 Linie stałej intensywności naprężeń dla szczeliny w ośrodku sprężystym obciążonym w nieskończoności. $\sigma_{13}^{\infty} = -0,5k$.

4.3 DWIE RÓWNOLEGŁE SZCZELINY

a) przypadek sprężysto-plastyczny

Rozpatrzmy zagadnienie dwóch równoległych, półnieskończonych, swobodnych od obciążeń szczelin, w nieograniczonym ośrodku sprężysto - plastycznym. Szczeliny są w odległości $2h$ od siebie, a naprężenia znikają w nieskończoności jak

$$\sigma_{23}^{\infty} + i\sigma_{13}^{\infty} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{A_c}{\sqrt{2\pi z}}, \quad A_c = \text{const} \in \mathbb{R}$$

$$z = r \exp(i\theta)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

Górną szczelinę leży na ujemnej części osi Ox_1 , a jej wierzchołek w początku układu współrzędnych (rys.23a).

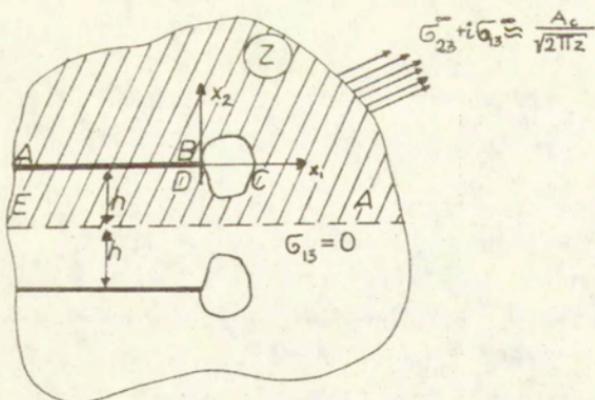
Niech funkcja $f_{\sigma}^*(z) = \sigma_{23}^* + i\sigma_{13}^*$ (3.4) spełnia wszystkie warunki zadania dla z takich, że $\text{Im } z > -h$ i niech $\text{Im } f_{\sigma}^*(z) = 0$ dla $\text{Im } z = -h$. Przedłużenie funkcji $f_{\sigma}^*(z)$ na dolną półpłaszczyznę $\text{Im } z < -h$ ma postać

$$f_{\sigma}^*(z) = \overline{f_{\sigma}^*(\bar{z} - 2ih)}.$$

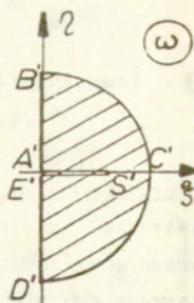
Wtedy funkcja

$$f^*(z) = \begin{cases} f_{\sigma}^*(z) & \text{Im } z \geq -h \\ f_{\sigma}^*(z) & \text{Im } z < -h, \end{cases}$$

opisuje rozkład naprężeń w całym ciele. Zatem aby wyznaczyć rozkład naprężeń $f^*(z)$ w zadaniu dla dwóch szczelin wystarczy znaleźć funkcję $f_{\sigma}^*(z)$.



Rys.23. Płaszczyzna z dwiema półnieskończonymi szczelinami.



Rys.23b. Obraz części sprężystej półpłaszczyzny w przestrzeni naprężeń ω .

Poszukujemy funkcji $F(\omega)$ (3.19)

$$\overline{F^{-1}(z)} = f_{\sigma}^*(z)$$

spełniającej na półkolu z wycięciem (rys.23b) warunki:

1. $\text{Im}[F(\omega)] = 0, \quad \omega \in \overline{B'A'}, \overline{E'D'}$

2. $\text{Im}[F(\omega)] = h \quad \omega \in \overline{A'S'E'}$

(4.14)

3. $\text{Im}[\omega F(\omega)] = 0 \quad \omega \in \overline{B'C'D'}$

4. $F(A) = F(E') = \infty$ oraz $F(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{A_c^2}{2\pi\omega^2 k^2}$

Wartość stałej S' (rys.23b) jest nieznaną; jest to maksimum składowej tensora naprężenia $\sigma_{23}(x_1, -h)$ na brzegu

półpłaszczyzny.

Przyjmijmy tak, jak w poprzednim przykładzie funkcję $G(\omega) = \omega F(\omega)$, dla której warunki brzegowe mają postać:

$$1. \quad \operatorname{Re}[G(\omega)] = 0 \quad \omega \in \overline{B'A'}, \overline{E'D'}$$

$$2. \quad \operatorname{Im}[G(\omega)] = \omega h \quad \omega \in \overline{A'S'E'}$$

(4.15)

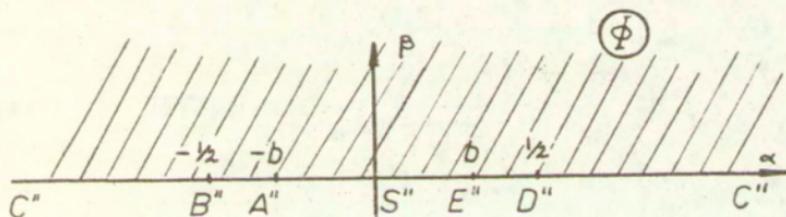
$$3. \quad \operatorname{Im}[G(\omega)] = 0 \quad \omega \in \overline{B'C'D'}$$

$$4. \quad G(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{A_c^2}{2\pi\omega}$$

Odwzorowanie

$$\phi(\omega) = \frac{\sqrt{(1-S'^2-\omega^2)(S'^2-\omega^2)}}{(1-S'^2-\omega^2)+(S'^2-\omega^2)} \quad (4.16)$$

przekształca półkole z wycięciem (rys.23b) na półpłaszczyznę $\phi = \alpha + i\beta$ (rys.24),



Rys.24 Odwzorowanie półkola z wycięciem (Rys.23b.) na półpłaszczyznę Φ .

z odpowiednimi warunkami brzegowymi dla $G^*(\phi) = G(\omega(\phi))$

$$1. \quad \text{Im}[G^*(\phi)] = 0 \quad \phi \in (-\infty, -1/2)$$

$$2. \quad \text{Re}[G^*(\phi)] = 0 \quad \phi \in (-1/2, -b)$$

$$3. \quad \text{Im}[G^*(\phi)] = h(\phi) \quad \phi \in (-b, b) \quad (4.17)$$

$$\text{gdzie } h^2(\phi) = \frac{h^2(\sqrt{1/4-\phi^2} - \sqrt{1/4-b^2})}{\sqrt{1/4-\phi^2} + \sqrt{1/4-b^2}}$$

$$4. \quad \text{Re}[G^*(\phi)] = 0 \quad \phi \in (b, 1/2)$$

$$5. \quad \text{Im}[G^*(\phi)] = 0 \quad \phi \in (1/2, \infty)$$

$$6. \quad a/G^*(-b) \longrightarrow \frac{A_c^2 \sqrt{1-4b^2}}{2\pi k^2 \sqrt{2b(b+\phi)}} \quad S'$$

$$b = \frac{S'}{1+S'^2}$$

$b/G(\infty) = \text{const}$ (odp. warunkowi 4 z (4.15)).

Jest to zagadnienie Keldysha - Sedova (Signoriniego) dla półpłaszczyzny (patrz rozdz.2.2), którego rozwiązaniem jest funkcja

$$G^*(\phi) = \frac{\sqrt{R(\phi)}}{\pi i} \int_{-b}^b \frac{ih(\tau)}{\sqrt{R(\tau)}} \frac{1}{\tau-\phi} d\tau + C\sqrt{R(\phi)} \quad (4.18)$$

gdzie

$$R(\phi) = \frac{\phi^2 - 1/4}{\phi^2 - b^2}, \quad h^2(\tau) = \frac{h^2(\sqrt{1/4-\tau^2} - \sqrt{1/4-b^2})}{\sqrt{1/4-\tau^2} + \sqrt{1/4-b^2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Wykonując całkę (4.18) [30] otrzymujemy:

$$G^*(\phi) = -\frac{h}{\pi} \sqrt{R(\phi)} \left[\frac{\sqrt{1/4-b^2}}{\sqrt{1/4-\phi^2}} \ln \frac{4(\phi\sqrt{1/4-b^2}-b\sqrt{1/4-\phi^2})^2}{\phi^2-b^2} - \ln \frac{\phi-b}{\phi+b} \right] + C\sqrt{R(\phi)} \quad (4.19)$$

gdzie

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z < \pi$$

Gdy stała S' dąży do zera, to nasze zagadnienie powinno sprowadzić się do zadania płaszczyzny z jedną półnieskończoną szczeliną w ośrodku poddanym w nieskończoności obciążeniem typu

$$\sigma_{23} + i\sigma_{13} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} K_{III} / \sqrt{2\pi z}$$

(porównaj rys.23b i rys.18 dla $p=0$).

Jest to równoważne warunkowi, iż dla $S'=0$

$$F(\omega) \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} K_{III}^2 / 2\pi\omega^2 k^2$$

Podstawiając związek (4.16) do (4.19) i przyjmując $b=0$, otrzymujemy

$$F(\omega) = \frac{C}{2} \left[1 + \frac{1}{\omega^2} \right]$$

zatem

$$C = \frac{K_{III}^2}{k^2 \pi}$$

Jest to znane rozwiązanie (3.4) rozdz.3.5.

Aby wyznaczyć wartość stałej S' skorzystamy z warunku 6-tego związków (4.17). Dla $\phi \rightarrow -b$ funkcja $G^*(\phi)$ (4.19)

przyjmuje wartość:

$$G^*(-b) = -\frac{h}{2\pi} \frac{\sqrt{1-4b^2}}{\sqrt{2b} \sqrt{b+\phi}} \ln(1-4b^2) + \frac{C}{2} \frac{\sqrt{1-4b^2}}{\sqrt{2b} \sqrt{b+\phi}} \quad (4.20)$$

Przyrównując (4.20) do wartości

$$\frac{A_c^2 \sqrt{1-4b^2}}{2\pi k^2 \sqrt{2b} \sqrt{b+\phi}}$$

i podstawiając $b=S'^2/(1+S'^2)$ otrzymujemy:

$$S'^2 = \frac{e^\Gamma - 1}{e^\Gamma + 1} \quad (4.21)$$

gdzie

$$\Gamma = \frac{A_c^2 - K_{III}^2}{2hk^2}$$

Granica strefy plastycznej

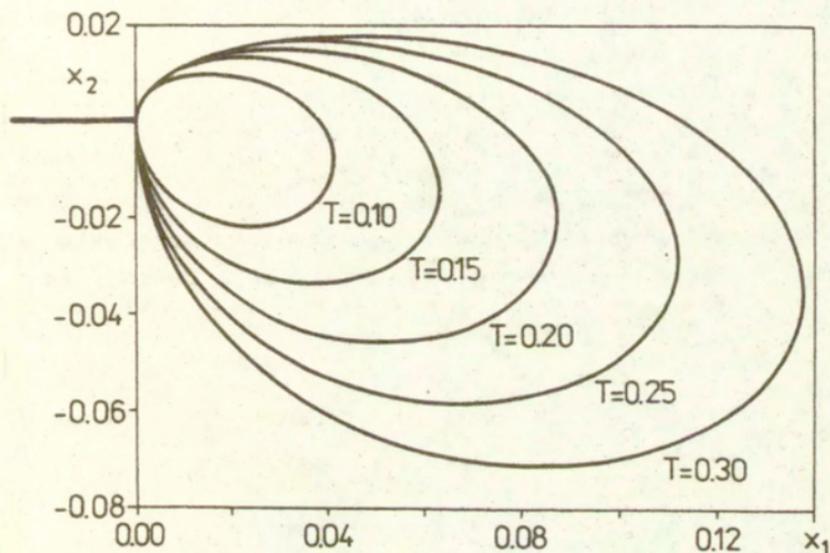
$$R(\theta) = \exp(i\theta) F\{\exp(i\theta)\}$$

opisana jest wzorem

$$R(\theta) = \frac{h}{\pi} \frac{\sqrt{\phi^2-1/4}}{\sqrt{\phi^2-b^2}} \left[\frac{\sqrt{1/4-b^2}}{\sqrt{\phi^2-1/4}} \arctg \frac{2b\phi \sqrt{(1/4-b^2)(\phi^2-1/4)}}{b^2(\phi^2-1/4)-\phi^2(1/4-b^2)} + \ln \frac{\phi+b}{\phi-b} + \frac{K_{III}^2}{k^2 h} \right]$$

przy

$$\phi = -\sqrt{1+S'^4-2S'^2 \cos(2\theta)} / 2(1+S'^2) \sin\theta \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$



Rys.25. Granice strefy plastycznej przy stałej odległości $h=1$ między szczelinami dla różnych wartości parametru obciążenia T .

Na rys.25 przedstawiono wykresy krzywych, będących granicami strefy plastycznej przy $A_C = \sqrt{2} K_{III}$ (patrz (b) przypadek sprężysty), dla różnych wartości parametru obciążenia $T^2 = K_{III}^2 / k^2$, gdy $T = (2\pi - 1)T^* / 2\pi = 0,10, 0,15, 0,20, 0,25, 0,30$ przy $h=1$.

Z rys.25 można wnioskować, że przy zwiększającym się parametrze obciążenia strefy plastyczne dążą do połączenia się pod pewnym kątem, doprowadzając do uplastycznienia w paśmie między nimi. Nie zbiegają do siebie po najkrótszej drodze, gdyż (tak jak w przypadku sprężystym) wartość naprężenia w obszarze między nimi jest mniejsza niż w przypadku jednej szczeliny.

b) przypadek sprężysty

Poszukiwać będziemy podobnie jak w przypadku sprężysto - plastycznym funkcji analitycznej $f'_\sigma(z) = \sigma_{23} + i\sigma_{13}$ takiej, że

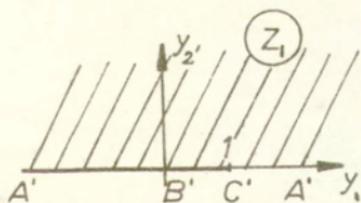
$$1) \operatorname{Re} f'_\sigma = \sigma_{23} = 0 \quad \text{dla} \quad z = x_1, \quad x_1 < 0,$$

$$2) \operatorname{Im} f'_\sigma = \sigma_{13} = 0 \quad \text{dla} \quad z = x_1 - ih', \quad x_1 \in \mathbb{R},$$

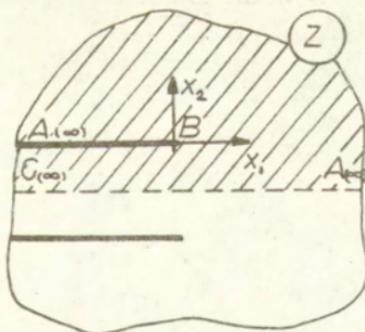
$$3) \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{2\pi z} f'_\sigma(z) = K_{III}.$$

Spełnienie punktu 3) gwarantuje ograniczoność przemieszczeń w wierzchołku szczeliny $x_1 < 0$.

Rozważmy górną półpłaszczyznę przestrzeni z_1 (rys.27a). Odwzorowanie $z = G(z_1) = h(z_1 + \ln(1-z_1))/\pi$ przekształca tę górną półpłaszczyznę w przestrzeń fizyczną z (rys.27b).



Rys.27a. Odzworowanie przestrzeni fizycznej zadania sprężystego na górną półpłaszczyznę z_1 .



Rys.27b. Przestrzeń fizyczna z zadania sprężystego.

Ponieważ odwrócenie funkcji $G(z_1)$ wymagałoby numerycznego rozwiązania równania przestępnego, to funkcję $f'_G(z)$ przedstawimy za pomocą zmiennej z_1 (zmienna z_1 jest oczywiście funkcją zmiennej z). Rozwiązaniem zadania jest funkcja

$$f'_G(z) = \frac{K_{III} \sqrt{z_1 - 1}}{\sqrt{h} z_1} \quad (4.22)$$

Gdy $z = x_1$ i $x_1 < 0$, to $z_1 = y_1$ i $y_1 < 1$; natomiast gdy $z = x_1 - ih$, to $z_1 = y_1$ i $y_1 > 1$. Wynika stąd, iż (4.22) spełnia warunki 1) i 2). Aby sprawdzić warunek 3) należy zauważyć, że

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{hz^2}{-2\pi z} \rightarrow 1$$

wtedy

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z_1 \rightarrow 0}} \sqrt{2\pi z} f'_G(z) = \lim_{z_1 \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h} z_1}{\sqrt{-1}} \frac{K_{III} \sqrt{z_1 - 1}}{\sqrt{h} z_1} = K_{III}$$

Funkcja $f'_G(z) = \sigma_{23} + i\sigma_{13}$ opisuje rozkład naprężeń w nieobciążonym osrodku z dwiema półnieskończonymi

szczelinami. Jest to funkcja analogiczna do funkcji naprężeń (3.1) (rozd.3.5) dla jednej półnieskończonej szczeliny. Wyznamy rząd naprężeń w nieskończoności na zewnątrz szczelin (tzn. w punkcie A_{∞} (rys.27b). Granica

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z_1 \rightarrow \infty}} \frac{h z_1}{\pi z} = 1$$

i dlatego

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi z} f'_0(z) = \lim_{z_1 \rightarrow \infty} \sqrt{2h z_1} \frac{K_{III} \sqrt{z_1 - 1}}{\sqrt{h z_1}} = \sqrt{2} K_{III}.$$

Oznacza to, że

$$\sigma_{z\theta} + i\sigma_{t\theta} \longrightarrow \frac{\sqrt{2} K_{III}}{\sqrt{2\pi z}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \pi.$$

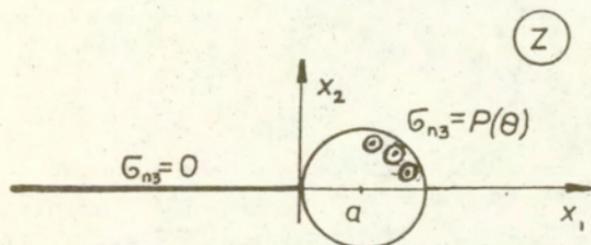
Na tej podstawie do sporządzenia wykresów w przypadku sprężysto - plastycznym przyjęliśmy $A_C = \sqrt{2} K_{III}$.

W przeciwieństwie do rozpatrywanych zadań z jedną szczeliną, zadanie lokalnego uplastycznienia dla dwóch równoległych szczelin wymaga założenia dwóch parametrów obciążenia K_{III} i A_C , a nie tylko jednego K_{III} . W przypadku sprężystym „zerowe” rozwiązanie zależne jest tylko od jednego parametru K_{III} , bez względu na to czy jest dla jednej czy dla dwóch szczelin.

5 MODELOWANIE STREFY PLASTYCZNEJ - SZCZELINA NA BRZEGU OBCIĄŻONEGO OTWORU W OŚRODKU SPRĘŻYSTYM

Rozpatrzmy półnieskończoną szczelinę w nieskończonej przestrzeni sprężystej. Niech wierzchołek szczeliny leży na obwodzie kołowego otworu $R(\theta) = 2a \cos \theta$, obciążonego naprężeniem normalnym $\sigma_{n3} = P(\theta)$ (rys.28), $|P(\theta)| < \infty$. Poszukujemy rozkładu naprężeń opisanego funkcją

$$\frac{dH}{dz} = (\sigma_{23} + i\sigma_{13})(x_1, x_2)$$



Rys.28. Kołowy otwór z półnieskończoną szczeliną na brzegu.

a) Obciążenie symetryczne

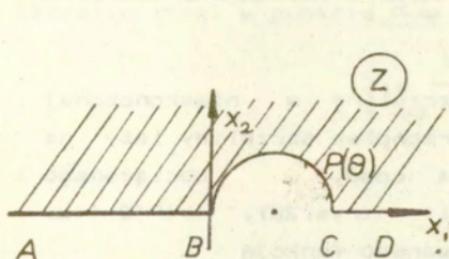
Dla ustalenia uwagi zajmować się będziemy górną półpłaszczyzną (rys.28). Odpowiada to przypadkowi gdy obciążenie $P(\theta)$ jest symetryczne względem osi Ox_1 ($P(\theta) = -P(-\theta)$).

Znajdujemy odwzorowanie, które

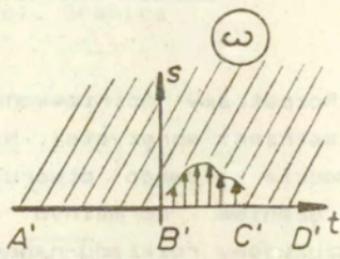
$$\omega = \frac{z-a}{a} + \frac{a}{z-a} + 2$$

przekształca zewnątrz półkola z na górną półpłaszczyznę ω (rys.30). Ponieważ jest to odwzorowanie konforemne, to

wektory prostopadłe do półkola przechodzą na wektory



Rys.29 Górna półpłaszczyzna z wyciętym półkolem.



Rys.30 Obraz górnej półpłaszczyzny z wyciętym półkolem na półpłaszczyźnie ω .

prostopadłe do odcinka $\overline{B'C'}$. W ten sposób rozważały problem sprowadziliśmy do zagadnienia półnieskończonej szczeliny $\overline{A'C'}$ obciążonej na odcinku $\overline{B'C'}$ przez funkcję naprężeń

$$\bar{\sigma}_{23} = \operatorname{Re} \left[\frac{dH}{d\omega} \right],$$

i poszukiwaną jest

$$\frac{dH}{d\omega} = \left[\bar{\sigma}_{23} + i\bar{\sigma}_{13} \right] (\omega)$$

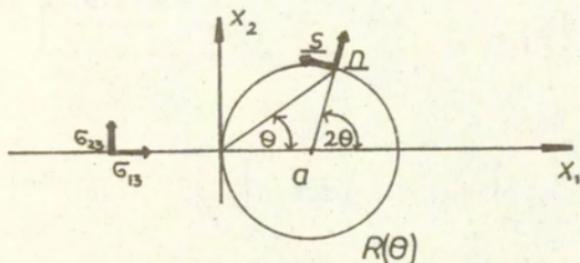
Wiadomo, że $w = (1/\mu) \operatorname{Im}[H]$; składowe tensora naprężenia wyrażają się wzorami:

$$\sigma_{n3} = \mu \frac{\partial w}{\partial n} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2 \right) = \mu \operatorname{Im} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + i \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) (n_1 + i n_2) \right] =$$

$$= \operatorname{Im} \left[(\sigma_{23} + i\sigma_{13}) n \right] = \operatorname{Im} \left[\frac{dH}{dz} n \right]$$

$$\sigma_{33} = \mu \frac{\partial w}{\partial s} = \mu \left[-\frac{\partial w}{\partial x_1} n_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} n_1 \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{dH}{dz} n \right]$$

gdzie $\underline{n} = [n_1, n_2]$ jest wektorem normalnym, natomiast $\underline{s} = [-n_2, n_1]$ jest wektorem stycznym (rys.31) i $n = n_1 + in_2$.



Rys.31 Oznaczenia kąta θ i wektorów normalnego \underline{n} oraz stycznego \underline{s} do okręgu $R=2a\cos\theta$.

Dla rozważanego przypadku, z twierdzenia o kącie środkowym wynika, że

$$n = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = \exp(2i\theta)$$

stąd

$$P(\theta) = \sigma_{n3} = \operatorname{Im} \left[\frac{dF}{dz} \exp(2i\theta) \right]$$

Gdy $z = 2a \cos\theta \exp(i\theta)$ czyli $z = a[\exp(2i\theta) + 1]$, to

$$\frac{d\omega}{dz} \Big|_{z=a[\exp(2i\theta)+1]} = \frac{1}{a} - \frac{a}{(z-a)^2} = \frac{\exp(4i\theta)-1}{a \exp(4i\theta)}$$

Wartość $\sigma_{23} \Big|_{B'C'}$ można wyznaczyć w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{dH}{d\omega} \Big|_{B'C'} \right] &= \operatorname{Re} \left[\frac{dH}{dz} \frac{dz}{d\omega} \Big|_{z=R(\theta) \exp(i\theta)} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{dH}{dz} \Big|_{z=R(\theta) \exp(i\theta)} \frac{a \exp(4i\theta)}{\exp(4i\theta)-1} \right] = \\ &= a \operatorname{Re} \left[\frac{dH}{dz} \frac{\exp(2i\theta)}{2i \sin(2\theta)} \right] = \frac{a}{2 \sin(2\theta)} \operatorname{Im} \left[\frac{dH}{dz} \exp(2i\theta) \right] = \\ &= \frac{a}{2 \sin(2\theta)} P(\theta) \end{aligned}$$

Zachodzi związek

$$\omega(z) = 4 \cos^2 \theta \stackrel{\text{def}}{=} t, \quad \text{dla } z=a[\exp(2i\theta)+1] \quad (5.1)$$

zatem obciążenie na odcinku $B'C'$ ma postać

$$\bar{\sigma}_{23}(t) = P(\theta(t)) \frac{a}{\sqrt{t(4-t)}} \quad (5.2)$$

Ze wzorów Keldysza - Sedova (2.5), dla

$$\operatorname{Re} \left[\frac{dH}{d\omega} \right]^+ = \operatorname{Re} \left[\frac{dH}{d\omega} \right]^-$$

(bo $P(\theta) = -P(-\theta)$) i dla $\bar{\sigma}_{z_3}(t)$ spełniającego warunek (2.8) wyznaczyć można na podstawie wzoru (2.13) funkcję

$$\frac{dH}{d\omega} = \frac{a}{i\pi} \frac{1}{\sqrt{\omega-4}} \int_0^4 \frac{P(t)}{\sqrt{t(4-t)}} \sqrt{t-4} \frac{dt}{t-\omega} + \frac{C}{\sqrt{\omega-4}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Po podstawieniu

$$\omega = \frac{z-a}{a} + \frac{a}{z-a} + 2$$

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{a} \frac{z(z-2a)}{(z-a)^2}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dz} &= \frac{dH}{d\omega} \frac{d\omega}{dz} = \frac{a}{\pi} \frac{\sqrt{a(z-a)}}{z-2a} \left[\int_0^4 \frac{P(t)}{\sqrt{t}} \frac{a(z-a)}{ta(z-a)-z^2} dt \right] \frac{1}{a} \frac{z(z-2a)}{(z-a)^2} + \\ &+ C \frac{z}{\sqrt{a} \sqrt{z-a} (z-a)} \end{aligned}$$

czyli

$$\frac{dH}{dz} = \frac{a}{\pi} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z-a}} \int_0^4 \frac{P(t)}{\sqrt{t}} \frac{z}{ta(z-a)-z^2} dt + \frac{C}{\sqrt{a(z-a)}} \left(1 + \frac{a}{z-a} \right)$$

$C \in \mathbb{R}$

(5.3)

Przykład

Rozpatrzmy problem obliczania naprężeń wywołanych półnieskończoną szczeliną, której wierzchołek leży na brzegu

kołowego otworu $R(\theta)=2a \cos \theta$ o promieniu a i obciążonego naprężeniem normalnym $P(\theta)=\sigma_{n3}=k \sin \theta$. Naprężenie $\sigma_{n3}=k \sin \theta$ jest naprężeniem normalnym działającym na brzeg obszaru $R(\theta)=2a \cos \theta$, gdy na otwór działają naprężenia (3.6)

$$\frac{dH}{dz} = (\sigma_{23} + i\sigma_{13})(z) = k \exp(-i\theta)$$

dlatego, że

$$\sigma_{n3} = \operatorname{Im} \left[\frac{dH}{dz} n \right] = \operatorname{Im} \left[k \exp(-i\theta) \exp(2i\theta) \right] = k \sin \theta.$$

Ponieważ $t=4\cos^2 \theta$, to

$$k \sin \theta = \frac{k}{2} \sqrt{4-t}, \quad P(t) = \frac{ak}{2} \sqrt{4-t}$$

oraz wg (5.2)

$$\bar{\sigma}_{23}(t) = \frac{ak}{2\sqrt{t}}$$

Funkcja $\bar{\sigma}_{23}(t)$ spełnia warunek (2.8) w punkcie $a_1=0$ dla $c_0=ak/2$. Według wzoru (2.13) i wygodniejszej w tym przypadku postaci funkcji $\phi_2(\omega)$ (2.10) otrzymujemy $g(t)=0$, bo jest to przypadek symetryczny)

$$\frac{dH}{d\omega} = \frac{B}{\sqrt{\omega-4}} + \frac{ak}{2\sqrt{\omega}} \quad (5.4)$$

gdzie B jest stałą rzeczywistą, którą należy wyznaczyć.

Podstawiając

$$\omega = \frac{z-a}{a} + \frac{a}{z-a} + 2, \quad \frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{a} \frac{z(z-2a)}{(z-a)^2}$$

do (5.4) otrzymujemy

$$-(\sigma_{23} + i\sigma_{13})(z) = \frac{B}{\sqrt{a(z-a)}} \left[1 + \frac{a}{z-a} \right] + \frac{ak}{2\sqrt{a(z-a)}} \left[1 - \frac{a}{z-a} \right] \quad (5.5)$$

Ponieważ chcemy by rozkład naprężeń (5.5) modelował rozkład naprężeń w ciele sprężysto - plastycznym, to stałą B postaramy się wyznaczyć z własności charakterystycznych tylko dla ciał sprężysto - plastycznych. Pierwszym narzucającym się takim warunkiem jest ciągłość wszystkich składowych tensora naprężenia na granicy sprężysto - plastycznej (w danym przypadku otworu). Jedynym punktem, w którym znamy wszystkie składowe jest punkt $(0,0)$.

Sprawdzamy czy $\sigma_{n3}(\pi/2) = -\sigma_{13}(0,0)$ oraz $\sigma_{s3}(\pi/2) = -\sigma_{23}(0,0) = 0$ (rys.31).

Na otworze

$$\sigma_{s3} + i\sigma_{n3} = \frac{dH}{dz} n = B \frac{2}{a} \cos\theta + ik \sin\theta \quad (5.6a)$$

na szczelinie

$$\sigma_{23} + i\sigma_{13} = \frac{dH}{dz} \Big|_{z=x} = -i \left[\frac{B}{\sqrt{a(a-x)}} \left(1 + \frac{a}{x-a} \right) + \frac{ak}{2\sqrt{a(a-x)}} \left(1 - \frac{a}{x-a} \right) \right] \quad (5.6b)$$

Ze związku (5.6) widać, że warunki ciągłości w punkcie

$(0,0)$ są spełnione dla każdego $B \in \mathbb{R}$.

Drugą taką własnością jest spełnienie warunku plastyczności. Na granicy otworu

$$\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 = k^2 \quad (5.7)$$

Związek (5.7) zachodzi wtedy, gdy

$$B = \frac{ak}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{dH}{dz} = \frac{ak}{\sqrt{a(z-a)}}$$

Ten sam wynik uzyskalibyśmy zakładając dodatkowy warunek w nieskończoności

$$\sigma_{23} + i\sigma_{13} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{ak}}{\sqrt{z}} \quad (\text{tzn. } K_{III} = \sqrt{2a\pi} k \text{ wzór (3.38)})$$

Jeśli przyjmiemy

$$a = \frac{K_{III}^2}{2\pi k^2}$$

to

$$\frac{dH}{dz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{z - \frac{K_{III}^2}{2\pi k^2}}}$$

Jest to znane rozwiązanie Hulta i McClintocka [13].

Rozkład naprężeń w danym ciele z defektem opisany jest wzorem (5.3). Jego dość skomplikowana postać stwarza istotne trudności obliczeniowe w analizie problemów, gdy stan obciążenia ma złożoną formę. Aby wzór (5.3) miał znaczenie

praktyczne należy go uprościć. W tym celu użyjemy metodę przedstawioną w pracy [40]. Zastosowane podejście pozwala również na badanie wzajemnego oddziaływania wielu obiektów typu szczelina + otwór.

Wyznamy zatem rozwinięcie w szereg potęgowy względem $x = a/(z-a)$ wyrażenie występujące pod znakiem całki we wzorze (5.3)

$$\begin{aligned} \frac{z}{ta(z-a)-z^2} &= \frac{1}{a} \left[\frac{1+(1-t)x}{x^2+(2-t)x+1} - 1 \right] = \frac{1}{a} \left[\frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{x-\bar{x}_0} - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{a} \left[- \sum_{k=0}^{\infty} \left(A x_0^{-k+1} + B \bar{x}_0^{k+1} \right) x^k - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_0^{k+1} - \bar{x}_0^{-k-1} + x_0^k - \bar{x}_0^{-k}}{\bar{x}_0 - x_0} x^k \end{aligned} \quad (5.8a)$$

lub

$$\frac{z}{ta(z-a)-z^2} = - \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)\theta]}{\sin\theta} x^k, \quad \text{dla } |z-a| > z$$

gdzie:

$$x_0 = \frac{1}{2} \left[t-2+i\sqrt{t(4-t)} \right] = \exp(2i\theta) \quad (\text{wg (5.1)})$$

$$x_0 \bar{x}_0 = 1$$

$$x_0 + \bar{x}_0 = t-2$$

$$A = \frac{1+(1-t)x_0}{x_0 - \bar{x}_0} \quad (5.8b)$$

$$B = \frac{(t-1)\bar{x}_0 - 1}{x_0 - \bar{x}_0}$$

Podstawiając wynik (5.8a) do (5.3) otrzymujemy

$$\frac{dH}{dz} = -\frac{a}{\pi} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z-a}} \int_0^{\pi} \frac{P(t)}{\sqrt{t}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)\theta]}{\sin\theta} \frac{a^k}{(z-a)^k} dt + \quad (5.9)$$

$$+ \frac{C}{\sqrt{a(z-a)}} \left(1 + \frac{a}{z-a} \right) = \frac{\sqrt{a}}{\pi\sqrt{z-a}} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{a^k}{(z-a)^k}$$

$$A_0 = \frac{\pi C}{a}$$

$$A_1 = -\int_0^{\pi} \frac{P(t)}{\sqrt{t}} dt + \frac{\pi C}{a} \quad (5.10)$$

$$A_k = \int_0^{\pi} \frac{P(t)}{\sqrt{t}} \frac{x_0^{k-1} - \bar{x}_0^{k-1} + x_0^k - \bar{x}_0^k}{\bar{x}_0 - x_0} dt, \quad k=2,3,\dots$$

Przy podstawieniu

$$t = 4\cos^2\theta, \quad dt = -8\cos\theta \sin\theta d\theta$$

wzór (5.10) przyjmuje postać

$$A_k = -4 \int_0^{\pi/2} \sin[(2k-1)\theta] P(\zeta) d\theta, \quad k=2,3,\dots$$

b) Obciążenie niesymetryczne

Podobną metodę rozwiązania zadania można stosować jeśli $P(\theta)$ nie jest symetryczne względem osi Ox_1 . To samo odzworowanie

$$\omega = \frac{z-a}{a} + \frac{a}{z-a} + 2$$

przekształca zewnętrzne półkole z dolnej półpłaszczyzny na dolną półpłaszczyznę w przestrzeni ω . W przestrzeni ω szukamy funkcji $\frac{dH}{d\omega}$, odcinkami holomorficznego w całej płaszczyźnie, spełniającej na osi rzeczywistej $0t$ warunki brzegowe:

$$\operatorname{Re}^+ \left[\frac{dH}{d\omega} \right] = P_{\mathbb{H}}^+(t), \quad \operatorname{Re}^- \left[\frac{dH}{d\omega} \right] = P_{\mathbb{H}}^-(t)$$

dla

$$P_{\mathbb{H}}^{\pm}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ P(\pm\theta(t)) \frac{a}{\sqrt{t(4-t)}} & 0 < t < 4 \end{cases}$$

Rozwiązaniem takiego zagadnienia dla $P_{\mathbb{H}}^{\pm}(t)$ spełniającego (2.8) jest funkcja (2.13)

$$\frac{dH}{d\omega} = \frac{1}{\pi i} \left[\frac{1}{\sqrt{\omega-4}} \int_0^4 \frac{f(t)}{t-\omega} \sqrt{t-4} dt + \int_0^4 \frac{g(t)}{t-\omega} dt \right] + \frac{C}{\sqrt{\omega-4}} \quad (5.11)$$

gdzie

$$f(t) = \frac{1}{2} \left[P_{\mathbb{H}}^+(t) + P_{\mathbb{H}}^-(t) \right]$$

$$g(t) = \frac{1}{2} \left[P_{\mathbb{H}}^+(t) - P_{\mathbb{H}}^-(t) \right]$$

$C \in \mathbb{R}$

Pierwszą całkę występującą we wzorze (5.11) rozwijamy w

szereg tak jak w poprzednim przypadku. Występującą w drugiej całce funkcję podcałkową przekształcamy w następujący sposób

$$\frac{1}{t - \frac{z^2}{a(z-a)}} = \frac{a(z-a)}{a(z-a)t - (z-a+a)^2} = - \frac{x}{x^2 - (t-2)x + 1}$$

(5.12)

gdzie $x = a/(z-a)$.

Rozkładamy (5.12) na ułamki proste, po uporządkowaniu i rozwinięciu w szereg

$$\frac{1}{t - \frac{z^2}{a(z-a)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0^{-k} - x_0^k}{x_0 - x_0^{-k}} \frac{a^k}{(z-a)^k}$$

(szereg ten jest zbieżny dla $|z-a| > a$), co prowadzi do wzoru

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^4 \frac{g(t)}{t-\omega} dt = \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^4 \left[a^k \frac{g(t) (x_0^k - x_0^{-k})}{x_0 - x_0^{-k}} dt \right] \frac{1}{(z-a)^k}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$B_0 = 0, \quad B_1 = - \int_0^4 g(t) dt$$

$$B_k = \int_0^4 \frac{g(t) (x_0^k - x_0^{-k})}{x_0 - x_0^{-k}} dt$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^4 \frac{g(t)}{t-\omega} dt \frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{B_1}{z-a} + \sum_{n=2}^{\infty} a^{n-1} \frac{B_n - B_{n-2}}{(z-a)^n} \right\}$$

Zatem

$$\frac{dH}{dz} = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z-a}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{a^n}{(z-a)^n} + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{a^n}{(z-a)^n} \quad (5.13)$$

gdzie A_n dane są przez wzory (5.10) [$P(\theta)$ zastępujemy przez $\theta, 5 [P(\theta) - P(-\theta)]$] oraz

$$C_1 = -\frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} g(t) dt = -2 \int_0^{\pi/2} g(\theta) d\theta$$

$$C_n = 2 \int_0^{\pi/2} g(\theta) \cos[2(n-1)\theta] d\theta \quad n=2,3,\dots$$

$$g(\theta) = \frac{1}{2} [P(\theta) + P(-\theta)]$$

$$g(t) = \frac{1}{2} [P_H^+(t) - P_H^-(t)] \quad \text{dla } |z-a| > a$$

Stała $A_0 = \pi C/a$ jest niezależna od obciążenia $\sigma_{n3} = P(\theta)$ i w związku z tym nieznaną dla zadania postawionego tak jak na początku rozdziału. Należy do danych warunków brzegowych dołączyć warunki dodatkowe, zależne od rozpatrywanego zagadnienia (rozd.3.5).

Jeżeli modelujemy nieznaną strefę plastyczną o promieniu $R=R(\theta)$ przez otwór kołowy obciążony naprężeniem normalnym

$$\sigma_{n3} = -\frac{k}{2a} R'(\theta)$$

(patrz rozdz.3.3), to możemy przyjąć, iż

$$(\sigma_{23} + i\sigma_{13})(z) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi z}}$$

Dzięki temu założeniu wyznaczmy wartość stałej C:

$$C = \frac{K_{III} \sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}$$

Wtedy dla rozwinięcia (5.13) otrzymujemy zależność między współczynnikami szeregu (5.13) a kształtem granicy obszaru plastycznego $R(\theta)$

$$A_0 = \frac{K_{III} \sqrt{\pi}}{\sqrt{2a}}$$

$$A_1 = -\frac{k}{a} \int_0^{\pi/2} [R(\theta) - R(-\theta)] \cos\theta \, d\theta + A_0$$

$$A_n = -\frac{k}{4a} (2n-1) \int_0^{\pi/2} [R(\theta) - R(-\theta)] \cos[(2n-1)\theta] \, d\theta, \quad n=2,3,\dots$$

(5.14)

$$C_n = -\frac{k}{a} (n-1) \int_0^{\pi/2} [R(\theta) + R(-\theta)] \sin[2(n-1)\theta] \, d\theta, \quad n=1,2,\dots$$

Aby wyznaczyć rozwarście w wierzchołku szczeliny

$$COD = w(\pi/2) - w(-\pi/2)$$

dla dowolnego obciążenia $P(\theta)$, należy korzystać ze wzoru (5.3), ponieważ szereg (5.13) jest zbieżny dla $|z-a| > a$. Na podstawie (5.3) widzimy, że COD zależy jedynie od symetrycznej części $P(\theta)$ (nie zależy od $g(t)$) i od stałej C

(czyli zależy w istotny sposób od dodatkowego, narzuconego warunku brzegowego np. w nieskończoności).

$$COD = \frac{2k}{\mu} \operatorname{Im} \left[\int_0^4 \frac{dH}{d\omega} d\omega \right] = \quad (5.15)$$

$$= \frac{2ka}{\mu\pi} \operatorname{Im} \left[\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{\omega-4}} \int_0^4 \frac{P(t)}{\sqrt{t}} \frac{1}{t-\omega} dt d\omega + 8C \right]$$

Ponieważ punkt $(0,0)$ (wierzchołek szczeliny) leży na granicy określoności funkcji dH/dz , całkę (5.15) należy rozumieć w sensie wartości głównej.

Wyrażenie

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z-a} (z-a)}$$

występujące w szeregu (5.13) opisuje stan naprężenia w ciele wywołany działaniem siły skupionej przyłożonej w wierzchołku szczeliny [37], natomiast

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z-a} (z-a)^n}$$

opisuje stan naprężenia wywołany działaniem momentu n -tego rzędu siły skupionej przyłożonej w wierzchołku szczeliny. Zatem postać szeregu (5.13) pozwala badany przykład modelować układem szczelina + momenty sił skupionych działających w jej wierzchołku. Postępując tak jak w pracach [22,39,40] można wyznaczyć przybliżony rozkład naprężeń powstających przy oddziaływaniu ze sobą szczelin o wierzchołkach na pustkach kołowych.

OZNACZENIA

a	- długość szczeliny
a_n, b_n	- współczynniki zespolone
$\arg z$	- argument zmiennej zespolonej
A_n, B_n	- współczynniki rzeczywiste
\mathbb{C}	- zbiór liczb zespolonych
COD	- rozwarcie w wierzchołku szczeliny
D	- powierzchnia
\tilde{D}	- obszar
E	- moduł Younga
f'	- funkcja opisująca rozkład naprężeń w antyplaskim stanie odkształcenia
f'_a	- funkcja analityczna określona na górnej półpłaszczyźnie
$f^{(n)}$	- n-ta pochodna funkcji f
F	- funkcja odwrotna do f'
$g(\infty)$	- wartość granicy w nieskończoności funkcji g
H	- funkcja opisująca rozkład naprężeń
Im	- część urojona liczby zespolonej
k	- stała plastyczności
$K_I, K_{II},$	
K_{III}	- współczynniki intensywności naprężeń, parametry obciążeń
$P_m(z)$	- wielomian rzędu co najwyżej m
$P(\theta)$	- obciążenie
r	- promień
r_i	- wielomian o pierwiastkach c_i ,
r_p	- długość strefy plastycznej
\mathbb{R}	- zbiór liczb rzeczywistych
Re	- część rzeczywista
$R(\theta)$	- granica strefy plastycznej
ε_{ij}	- dewiator tensora naprężenia

\underline{u}	- wektor przemieszczenia
u^+	- górna granica funkcji u
u^-	- dolna granica funkcji u
w	- trzecia składowa wektora przemieszczenia \underline{u}
V	- objętość
x_1, x_2	- współrzędne kartezjańskie
z	- zmienna zespolona
\bar{z}	- liczba sprzężona do z
α_n, β_n	- współczynniki rzeczywiste
ε_{ij}^{ep}	- składowe sprężyste tensora odkształcenia
ε_{ij}^{pl}	- składowe plastyczne tensora odkształcenia
ε_{ij}	- składowe prędkości tensora odkształcenia
θ	- kąt
λ	- współczynnik proporcjonalności
μ	- moduł Kirchhoffa
ν	- stała Poissona
σ_{ij}	- składowe tensora naprężenia
σ_{na}	- normalna składowa tensora naprężenia
σ_{sa}	- styczna składowa tensora naprężenia
σ_{pl}	- granica plastyczności na rozciąganie
τ_{pl}	- granica plastyczności na ścinanie
ϕ, ψ	- przetransformowane zmienne zespolone
ω	- współrzędne w przestrzeni naprężeń

LITERATURA

1. P.Adrianopoulos, P.S.Theocaris, The Griffith-Drowan fracture theory revised - the T-criterion, Int.J.Mech.Sci., 27, 11/12, 1985.
2. B.D.Anin, G.P.Cerepanov, Uprugo-plastičeskaja zadača, Izd."Nauka", Novosibirsk, 1983.
3. T.M.Banks, A.Garlick, The form of crack tip plastic zones, Engng.Fracture Mech., 19, 3, 1984.
4. W.Becker, D.Gross, About the mode II Dugdale solution Int.J.Fracture, 34, 1, 1987.
5. B.A.Bilby, A.H.Cotrell, K.H.Swinden, The spread of plastic yield from a notch, Proc.Roy.Soc. A 272, 1963.
6. J.Carlsson, The one parameter characterization viewpoint in fracture mechanics, [w:] Advances in elasto - plastic fracture mechanics (ed.L.H.Larsson), Appl. Sci.Publishers Ltd., London, 1970.
7. G.P.Cerepanov, Ob odnom metode rešenija uprugo - plastičeskoj zadaci, PMM, 27, 3, 1963.
8. G.P.Cherepanov, Mechanics of brittle fracture, McGraw-Hill Int. Book Company, 1978.
9. M.Cimminou, J.R.Barber, Letter to the editor on the plane external problem, J.Appl.Engng.Sci., 20, 5, 1982.
10. Yu.Dal, O razvitij ustalostnych treščin v plastinach, Deformacii splošnyh sred i upravlenije dvizenia, Izd.Leningr.Univ., 1984.
11. V.I.Fabrikant, T.S.Sankar, G.D.Xistris, on the conditions at infinity in external crack problems, Engng.Fracture Mech., 23, 5, 1986.
12. B.A.Fuks, B.W.Szabat, Funkcje zmiennej zespolonej i niektóre ich zastosowania, PWN, W-wa, 1954.

13. M.A.Grekov, O vlijanii dvuchosnij nagruzki na razmiery plastičeskoj zony okolo treščiny, Problemy mehaniki deformiruemogo tela, Izd. Leningr. Univ., 1982.
14. R.Hill, The mathematical theory of plasticity, Oxford Univ. Press, 1956.
15. J.A.Huit, F.A.McClintock, [w:] Proceedings of the 9-th Int. Congress of applied Mechanics, Brussels, 51-59, 1956.
16. L.M.Kacanov, Osnovy teorii plastičnosti, Gos. Izd. Tech-Teoretičeskoj Lit., Moskva, 1956.
17. J.F.Knott, Fundamentals of fracture mechanics, Butterworth London-Boston, 1976.
18. J.F.Knowles, T.A.Pucik, Uniqueness for plane crack problems in linear elastostatics, J.Elasticity, 3, 3, 1973.
19. W.F.Koiter, General theorems for elastic-plastic solids, [w:] Progress in solids mechanics, vol.1, Wyd. I.N.Sneddon, R.Hill, North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1960.
20. M.F.Koskinen, Elastic-plastic deformation of single grooved flat plate under longitudinal shear, Trans. ASME, J.Basic Engng., 85 D, 1963.
21. M.Matczynski, Stacjonarne zagadnienia szczelin w ośrodkach sprężystych. Zastosowanie metody Wienera - Hopfa, Prace IPPT nr.40, 1979.
22. M.Matczynski, M.Sokolowski, Interaction of cracks in elastic media, Arch. Mech., 34, 1, 1982.
23. F.A.McClintock, G.R.Irwin, Plasticity aspects of fracture mechanics, [w:] Fracture toughness testing and its testing applications, STP 381, ASTM, Philadelphia, 1965.
24. E.Melan, Sitz. Ber. Ak. Wiss. Wien, IIa, 147, 73, 1938.

25. W.M.Mirsalimov, O strukture plastičeskich deformacij v viersinie treščiny, Izd. AN Azerb. SSR, ser. FTMN, 6, 24-29, 1970.
26. W.M.Mirsalimov, Razrušenie uprugich i uprugoplastičeskich tel s treščinami, AN SSR, Izd. Ela. 1984.
27. N.I.Muskhelishvili, Singular internal equations, P.Noordhoff, Groningen-Holland, 1953.
28. J.Necas, I.Hlavacek, Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies: an introduction, Elsevier Scientific Publishing Company, 1983.
29. A.Neimitz, Ruch szczeliny w ośrodku sprężysto plastycznym, Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej, Mechanika, 30, 1983.
30. A.Prudnikov, Yu.A.Brycev, O.I.Maricev, Integraly i riady, Moskva, Izd. "Nauka", 1981.
31. J.Rice, Contained plastic deformation near cracks and notches under longitudinal shear, Int. J. Fract. Mech., 2, 426-447, 1966.
32. J.Rice, Mathematical analysis in the mechanics of fracture, [w:] Fracture, Wyd.H.Liebowitz, Academic Press, New York and London, 1968.
33. J.Rice, Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity, J. Mech.Phys. Solids, 22, 17-26, 1974.
34. R.Russo, Some classical theorems in fracture theory, Theor. Appl. Fracture Mech., 3, 179-184, 1985.
35. R.Russo, Uniqueness in classical elastostatics, Int. J. Engng. Sci., 25, 9, 1987.
36. R.Russo, An extention of the basic theorems of linear elastostatics to exterior domains, Pubblicazioni del Dipartimento di Matematica e Applicazioni del'Universita di Napoli, n 11, 1988.
37. G.C.Sih, H.Liebowitz, Mathematical theories of

- brittle fracture, [w:] Fracture, Wyd. H.Liebovitz, Academic Press, New York and London, 1968.
38. W.I.Smirnov, Matematyka wyższa, tom IV, część 2, PWN, Warszawa, 1962.
39. M.Sokołowski, On an effective method of evaluation of the effect of cavities, inclusions and cracks upon the stress fields in elastic media; Rozpr. Inż., 34, 1-2, 1986.
40. M.Sokolowski, E.Turska-Klebek, On the approximate evaluation of interaction of cracks in elastic media, Rozpr. Inż., 31, 1, 1983.
41. M.R.Spiegel, Theory and problems of complex variables, Schaums Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1974.
42. M.P.Stallybrass, Some comments on external crack problems in 2-dimensional elastostatics, Int. J. Engng. Sci., 19, 1, 1981.
43. M.P.Stallybrass, Addendum: Some comments on external crack problems in 2-dimensional elastostatics, Int. J. Engng.Sci., 20, 8, 1982.
44. B.W.Szabat, Wstęp do analizy zespolonej, PWN, Warszawa, 1974.
45. H.Tian-Hu, An exact elastic-perfect plastic solution of antiplane parallel periodical crack field, Engng.Fracture Mech., 26, 1, 1987.
46. H.Tian-Hu, W.Yong-Chang, Exact elasto-perfectly plastic solution for antiplane problem of collinear rigid lines in an infinite plane, Engng. Fracture Mech., 32, 6, 1989.
47. Y.Ueda, K.Ikeda, T.Yao, M.Aoki, S.Shibasaki, I.Shirakura, Brittle fracture initiation characteristics under bi-axial tensile load with large scale and general yielding, [w:] Advances in fracture research (Fracture 81), vol.5, Wyd. D. Francois, Pergamon Press, 1982.

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	4
2. Podstawy matematyczne	6
2.1 Własności funkcji analitycznych	6
2.2 Funkcje odcinkami holomorficzne, ich wyznaczenie z warunków brzegowych*	10
3. Szczeliny w ośrodku sprężysto-idealnie plastycznym w III typie deformacji	19
3.1 Przegląd różnych sposobów aproksymacji strefy plastycznej	20
3.2 Równania problemu i założenia matematyczne	24
3.3 Ogólna postać rozwiązania zagadnienia kształtu granicy sprężysto-plastycznej w wierzchołku szczeliny	31
3.4 Sprowadzenie zadania strefy plastycznej w wierzchołku szczeliny do zadania szczeliny, której wierzchołek leży na obciążonym otworze	36
3.5 Prawidłowe postawienie zadania brzegowego dla zagadnień z półnieskończoną szczeliną	39
4. Przykłady wyznaczania granicy strefy plastycznej - rozwiązania ścisłe	45
4.1 Szczelina obciążona na swoich powierzchniach	45
4.2 Szczelina w nieskończonym ośrodku obciążonym naprężeniem stycznym w nieskończoności	54
4.3 Dwie równoległe szczeliny	59
5. Modelowanie strefy plastycznej - szczelina na brzegu obciążonego otworu w ośrodku sprężystym	69
Oznaczenia	84
Spis literatury	86
Spis treści	90