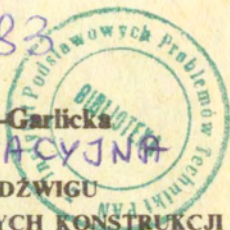


4.42 — stany graniczne, nośność,  
przystosowanie

33/83

Wanda Paprocka-Garlicka  
PRACA KABILITACYJNA  
ZAGADNIENIA UDZWIGU  
ŻELBETOWYCH I STAŁOWYCH KONSTRUKCJI  
ZE WSTĘPNYMI NAPRĘŻENIAMI



P 269

33/1983

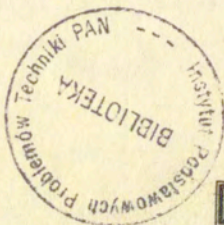
WARSZAWA 1983

<http://rcin.org.pl>

Praca habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 23 czerwca 1983 r.

57004



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki

Nakład 180 egz. Ark.wyd. 8,5. Ark.druk 12 .

Oddano do drukarni w sierpniu 1983 r.

Br zamówienia 576/83 M-13 .

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Sniadeckich 8

Wanda Paprocka-Garlicka  
Zakład Teorii Konstrukcji

## ZAGADNIENIA UDŹWIGU ŻELBETOWYCH I STALOWYCH KONSTRUKCJI ZE WSTĘPNYMI NAPRĘŻENIAMI

### Wprowadzenie

Rozprawa stanowi syntezę moich opublikowanych prac zawierających oryginalne rozwiązania problemów nośności i projektowania konstrukcji kablobetonowych [73,74,75,78,79] oraz problemów nośności i projektowania konstrukcji stalowych poddanych działaniu obciążeń zmiennych [81 do 87].

Cechą wspólną rozpatrywanych konstrukcji jest występowanie w nich naprężeń wstępnych. W przypadku konstrukcji kablobetonowych są one wprowadzane celowo, przez sprężenie. W przypadku rozpatrywanych niesprężonych konstrukcji stalowych obciążanych w sposób zmienny naprężenia wstępne pojawić się mogą w wyniku przekroczenia w początkowych cyklach obciążeń zakresu sprężystej pracy konstrukcji i powstania trwałych odkształceń. Naprężenia te stanowią dla następnych cykli obciążeń stan wstępnego sprężenia. Określa się je mianem naprężeń resztkowych.

Stosowane powszechnie do wyznaczania obciążenia niszczącego metody teorii nośności granicznej, bazujące na idealnie sztywno-plastycznym modelu ciała z nieograniczoną odkształcalnością plastyczną i założeniu o małości przemieszczeń, są wystarczająco dokładne dla ustrojów wykonanych z takich materiałów jak np. metale i dla obciążeń jednokrotnych, wzrastających monotonicznie od zera do wartości końcowej.

Zastosowanie tych metod do wyznaczania udźwigu konstrukcji betonowych, żelbetowych i sprężonych, jak również konstrukcji obciążanych w sposób zmienny w czasie, może prowadzić do istotnych błędów. Wymienione konstrukcje w większości przypadków ulegają

zniszczeniu przy niższych od obliczonych metodami teorii nośności granicznej wartościach obciążeń.

O wyczerpaniu nośności konstrukcji betonowych, żelbetowych i sprężonych decyduje bowiem nie osiągnięcie granicznych naprężeń, a granicznych odkształceń. W przypadku natomiast występowania obciążeń zmiennych na udźwig konstrukcji może mieć wpływ pojawienie się naprężeń resztkowych.

Tematem rozprawy jest próba oceny rzeczywistego udźwigu mimośrodowo obciążonych kablobetonowych przekrojów i kablobetonowych ram oraz stalowych konstrukcji prętowych poddanych działaniu obciążeń zmiennych. W rozprawie przedstawiono również rozwiązanie problemu optymalnego projektowania ze względu na minimum zbrojenia mimośrodowo obciążonego przekroju kablobetonowego oraz rozwiązanie problemu optymalizacji sprężystego podparcia belki na podporze sprężystej ze względu na maximum jej nośności.

Część pierwsza rozprawy zawiera wprowadzenie w tematykę przedstawionych rozwiązań, określa ich cele oraz w świetle wyników badań doświadczalnych i związanych z nimi zaleceń międzynarodowych uzasadnia przyjęte założenia i stosowane metody obliczeń. W części tej sformułowano podstawy analizy wytrzymałościowej konstrukcji prętowej, w tym zasady wyznaczania nośności przekrojów oraz rozkładu sił wewnętrznych w fazie sprężystej i w stadium zniszczenia konstrukcji. Sformułowanie tych zasad stanowi uzupełnienie podstaw teoretycznych oraz rozwiązań rozpatrywanych problemów.

W części tej przeprowadzono również analizę porównawczą oddziaływania naprężeń wstępnych będących wynikiem sprężenia i naprężeń resztkowych na wielkość udźwigu oraz przesunięcie zakresu sprężystej pracy konstrukcji.

W części drugiej rozprawy przedstawiono rozwiązania problemów nośności mimośrodowo obciążonych betonowych i żelbetowych przekrojów sprężonych kablami iniektowanymi / [73] i [79] /, w których w miejsce stosowanego w teorii nośności granicznej modelu ciała sztywno-plastycznego z nieograniczoną odkształcalnością plastyczną przyjęto model idealnie sprężysto-plastyczny z ograniczoną odkształcalnością plastyczną. W efekcie otrzymano zależności graniczne między niszczącymi wartościami sił podłużnych i momentów zginających, stanowiące równania brzegów obszarów zawierających nieniszczące wartości tych sił wewnętrznych.

Na podstawie otrzymanych rozwiązań przeprowadzono wnikliwą analizę wpływu uwzględnienia ograniczonej odkształcalności plastycznej materiałów na spadek nośności kablobetonowych przekrojów oraz określono przypadki, w których zastąpienie modelu ciała idealnie sprężysto-plastycznego z ograniczoną odkształcalnością plastyczną modelem ciała idealnie sztywno-plastycznym z nieograniczoną odkształcalnością plastyczną jest dopuszczalne.

Wcześniej niż od przedstawionych w pracach [73] i [79] rozwiązania problemów nośności mimośrodowo obciążonych przekrojów, bazujące na idealnie sztywno-plastycznych modelach ciał z nieograniczoną odkształcalnością plastyczną, dotyczyły przekrojów stalowych i żelbetonowych. Dla przekrojów sprężonych rozwiązania te przeprowadzono wyłącznie dla przypadków sprężenia bez pomocy zbrojenia oraz zniszczenia przed zarysowaniem. Obowiązujące wówczas w Polsce przepisy normowe ograniczały rozwiązania problemu nośności przekrojów do podania wzorów na moment niszczący dla przekrojów zginanych oraz siłę niszczącą dla przekrojów osiowo-rozciąganych. Przedstawione w pracach [73] i [79] rozwiązania uzupełniły braki istniejące w zakresie wyznaczania nośności mimośrodowo obciążonych przekrojów kablobetonowych oraz umożliwiły sformułowanie nowych, obecnie obowiązujących w Polsce przepisów normowych [90]. Postać tych przepisów stanowi dość dobrą aproksymację przedstawionych w pracach [73] i [79] rozwiązań.

W dalszym ciągu tej części podano, opartą na wynikach uzyskanych w pracy [78], analizę wpływu wielkości wstępnej siły sprężającej na nośność mimośrodowo obciążonego przekroju kablobetonowego. Okazało się, że w odróżnieniu od rozwiązań teorii nośności granicznej, bazującej na idealnie sztywno-plastycznym modelu ciała z nieograniczoną odkształcalnością plastyczną, w których nośność była niezależna od wielkości siły sprężającej, stosując model ciała idealnie sprężysto-plastyczny z ograniczoną odkształcalnością plastyczną można przez odpowiedni dobór wielkości siły sprężającej podwyższyć określoną przy przyjęciu tego modelu nośność przekrojów, a tym samym nośność całej konstrukcji.

Przeprowadzone w pracy [74] i przedstawione w rozprawie oryginalne rozwiązanie problemu optymalnego projektowania betonowego przekroju prostokątnego sprężonego kablem wykracza poza

zakres rozwiązań wcześniejszych, bowiem dotyczy przypadku, w którym obciążenie jest zadane w postaci obszaru zmienności momentów zginających i sił podłużnych. Wielkościami poszukiwanymi są tu minimum zbrojenia sprężającego, naprężenie wstępne w tym zbrojeniu oraz mimośród zbrojenia.

W części drugiej przedstawiono ponadto metody rozwiązywania problemu nośności kablobetonowych ram, pozwalające na uwzględnienie poza momentem zginającym wpływu sił podłużnych na nośność przekrojów [75]. Metody te umożliwiają uzyskanie wyników bardziej dokładnych od otrzymywanych metodami dotychczas stosowanymi.

Część trzecią rozprawy poświęcono określeniu wpływu działania obciążeń zmiennych /wystąpienia naprężeń resztkowych/ na spadek nośności i przesunięcie zakresu sprężystej pracy stalowych konstrukcji prętowych. W celu uzyskania właściwej oceny tego wpływu przeprowadzono, bazującą na metodach teorii przystosowania, sprężysto-plastyczną analizę pracy belek ciągłych [81,82,84,85,86] rusztów [87] i ram [83] poddanych działaniu obciążeń ciągłych i skupionych o zmiennej intensywności oraz quasi-statycznych obciążeń ruchomych w postaci siły, bądź układu sił. Otrzymane wyniki porównano z wynikami rozwiązań przeprowadzonych metodami teorii nośności granicznej, odpowiadającymi obciążeniom wzrastającym monotonicznie /jednokrotnym/ oraz z nośnością sprężystą, tj. obciążeniem odpowiadającym granicy stosowalności związków sprężystych, wyznaczonym z zależności obowiązujących w teorii liniowo-sprężystej.

W części tej przedstawiono ponadto otrzymane w pracy [85] rozwiązanie problemu optymalizacji nośności sprężystości podpartej dwuprzęsłowej belki obciążonej siłą ruchomą. Optymalizacja dotyczyła wartości współczynnika sprężystości podpory. W pracy tej wykazano, że w odróżnieniu od przypadku działania obciążenia jednokrotnego /monotonicznego/, w którym zastosowanie podpory sprężystej nie wpływa na udźwig belek, w przypadku belek poddanych działaniu obciążeń wielokrotnych, można przez odpowiedni dobór współczynnika sprężystości podpory podwyższyć ich nośność.

W przeprowadzonym w pracy [87] rozwiązaniu, dotyczącym rusztu obciążonego między węzłami siłą przesuwaną się w sposób

quasi-statyczny, wyznaczono zależności pomiędzy sztywnościami belki podłużnej i belki poprzecznej rusztu, dla których nośność rusztu jest ze względu na minimum materiału optymalna.

Przeprowadzone w pracach [81]do[87] i przedstawione w rozprawie rozwiązania wykazały, że wnośności konstrukcji poddanych obciążeniom niezmiennąjącym się i zmiennym w czasie mogą wystąpić istotne różnice. Wyznaczone metodami teorii przystosowania udźwigi konstrukcji mogą być bliskie, a nawet równe nośnościom otrzymanym metodami teorii nośności granicznej, lub z zależności obowiązujących w teorii liniowo-sprężystej, bądź też mogą przyjmować wartości pośrednie. Zależy to od parametrów geometrycznych konstrukcji, jej własności mechanicznych oraz programu występujących obciążeń.

Stwierdzono brak jakiegokolwiek korelacji między udźwigami wyznaczonymi w oparciu o te trzy teorie, a zatem i brak możliwości uwzględnienia wpływu działania obciążeń zmiennych na nośność konstrukcji poprzez zastosowanie pewnych współczynników odniesienia do rozwiązań teorii nośności granicznej lub teorii liniowo-sprężystej. Wykazano /co znajduje odbicie w nowej polskiej normie [89]/, że właściwą ocenę tej nośności otrzymać można na podstawie wyników rozwiązań zupełnych teorii przystosowania, analitycznych - dla konstrukcji o niskim stopniu statycznej niewyznaczalności oraz numerycznych - dla konstrukcji wielokrotnie statycznie niewyznaczalnych. Dla wielu konstrukcji o praktycznym znaczeniu takich wyników dostarczyły rozwiązania przeprowadzone w pracach [81]do[87] i przedstawione w rozprawie.

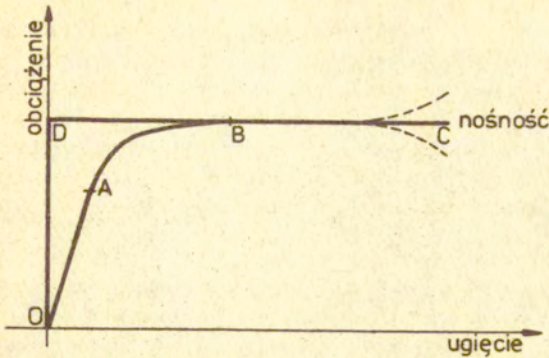
## 1. Podstawy analizy plastycznej konstrukcji prętowych. Tematyka i cel przedstawionych rozwiązań.

### 1.1. Uwagi wstępne

Beton i stal należą do materiałów konstrukcyjnych wykazujących własności plastyczne, które można wykorzystać przy projektowaniu wykonanych z tych materiałów konstrukcji. Nałożenie na konstrukcję o własnościach sprężysto - plastycznych warunku sprężystego zachowania się w trakcie normalnej jej eksploatacji nie pozwala na ogół na właściwą ocenę rzeczywistego współczynnika bezpieczeństwa. Z obserwacji bowiem wynika, że lokalne przekroczenie sprężystego zakresu pracy konstrukcji nie oznacza zazwyczaj całkowitego jej zniszczenia, ani też zniszczenia żadnego z jej elementów. Nie powoduje ono również znaczącego przyrostu ugięć. Wynika to z faktu, że w konstrukcji, w której naprężenia w niektórych przekrojach osiągnęły wartości graniczne, przy dalszym wzroście obciążeń występuje zwiększenie naprężeń w obszarach pierwotnie mniej naprężonych. Zjawisko to nosi nazwę plastycznego przegrupowania /redystrybucji/ naprężeń. Zniszczenie konstrukcji następuje dopiero wówczas, gdy wskutek powstałych deformacji plastycznych zmienia się ona w układ geometrycznie zmienny, zwany mechanizmem plastycznego płynięcia. Obciążenie osiąga wtedy maksymalną wartość zwaną udźwigniem, nośnością, obciążeniem niszczącym, bądź granicznym, a deformacje narastają bez dalszego wzrostu obciążenia.

Idealizację zachowania się omawianej konstrukcji, pomijając efekty wzmocnienia, bądź osłabienia /linie przerywane/ przedstawia wykres OABC na rys.1.





Rys. 1

Mechanizm zniszczenia konstrukcji prętowej powstaje wtedy, gdy w odpowiedniej liczbie przekrojów krytycznych utworzą się przeguby plastyczne.

W przegubie plastycznym moment zginający  $M$  osiąga wartość ekstremalną  $\pm M_0$ , równą momentowi granicznemu przekroju, a obrót przekroju, tak jak i krzywizna  $\kappa$ , narastają bez dalszego wzrostu momentu /por. rys.3 a/.

Przekrój osiągnął stan graniczny nośności.

Z osiągnięciem momentu  $M_0$  w przekroju elementu stalowego poddanego czystemu zginaniu wiąże się pojęcie całkowitego uplastycznienia przekroju, tj. osiągnięcia przez naprężenia  $\sigma$  w całym przekroju ich wartości ekstremalnej, równej granicy plastyczności  $\pm \sigma_0$  /por.rys.9 e/. Tak sformułowane kryterium zniszczenia przekroju nosi nazwę naprężeniowej hipotezy zniszczenia. W hipotezie tej przyjęto, że w przekroju, w którym wystąpił moment zginający równy momentowi granicznemu, odkształcenia narastają bez dalszego wzrostu naprężeń /rys.5/ w sposób

ograniczony jedynie więzami zewnętrznymi. W poddanych zginaniu przekrojach stalowych nie zaobserwowano bowiem takich zjawisk jak zgniot, czy też zerwanie materiału, które mogłyby zdecydować o wcześniejszym, niż wynikającym z całkowitego uplastycznienia przekroju, jego zniszczeniu.

Występowanie zmiążdżenia betonu oraz zerwania się stali przed całkowitym uplastycznieniem przekroju zaobserwowano natomiast w zginanych przekrojach żelbetowych i sprężonych. Dlatego też ostatnie zalecenia międzynarodowe [95] , [12] polecają stosowanie dla tych przekrojów odmiennego kryterium zniszczenia, opartego na osiągnięciu granicznych wartości odkształceń /rys. 6/. Kryterium to nosi nazwę odkształceniowej hipotezy zniszczenia przekroju.

Wyznaczaniem udźwigu zarówno konstrukcji stalowych, jak i żelbetowych i sprężonych, poddanych działaniu obciążeń jednokrotnych, wzrastających proporcjonalnie do jednego parametru, zwanego intensywnością obciążenia, zajmuje się, najbardziej rozpowszechniona z metod plastycznej analizy konstrukcji teoria nośności granicznej.

Wpływ własności materiałów na nośność przekrojów należy przy tym uwzględnić wprowadzając odpowiednie modele ciał.

Gdy działające w sposób quasi - statyczny obciążenia są wielokrotne, cykliczne, bądź o zmiennej intensywności, stosowanie założeń i metod teorii nośności granicznej do wyznaczania udźwigu tak obciążonych konstrukcji nie jest dostatecznie bezpieczne. Jeśli efekt wzmocnienia materiału z jakiego wykonano te konstrukcje nie jest zbyt wyraźny, ulegają one naogół zniszczeniu przed osiągnięciem wartości granicznego obciążenia wyznaczonego metodami teorii nośności granicznej. Świadczą o tym przeprowadzone, głównie na belkach ciągłych i ramach, badania eksperymentalne, których przegląd podają prace [52] i [17] .

Dopuszczenie bowiem w konstrukcji obciążonej wielokrotnie odkształceń plastycznych w stadium jej eksploatacji może powodować sumowanie się tych odkształceń w poszczególnych cyklach, występowanie nadmiernych ugięć i uniemożliwienie dalszej eksploatacji ustroju, bądź spowodować wystąpienie przyrostów odkształceń przeciwnych znaków i zniszczeniu wskutek zmęczenia

plastycznego. Należy tu podkreślić, że to ostatnie zjawisko jest odmienne od zmęczenia sprężystego. Wyznaczaniem odpowiadających opisanym stanom granicznych obciążeń zajmuje się teoria przystosowania.

Stosowana przez teorie: nośności granicznej i przystosowania metody wyznaczania granicznych obciążeń konstrukcji zostały w przedstawionych rozwiązaniach wykorzystane do określenia nośności kablobetonowych przekrojów i ram oraz stalowych ustrojów prętowych.

Przyjęto przy tym następującą terminologię:

- granicznym obciążeniem nośności, bądź nośnością "idealną" nazwano udźwig przekroju, bądź konstrukcji poddanej działaniu obciążeń jednokrotnych, wyznaczony metodami teorii nośności granicznej przy przyjęciu idealnie sztywno-plastycznego modelu ciała z nieograniczoną odkształcalnością plastyczną.
- granicznym obciążeniem przystosowania udźwig konstrukcji poddanej działaniu obciążeń wielokrotnie zmiennych, wyznaczony metodami teorii przystosowania,
- mianem nośności sprężystej określono obciążenie odpowiadające granicy stosowalności związków sprężystych, wyznaczone z zależności obowiązujących w teorii liniowo-sprężystej.

## 1.2. Metoda stanów granicznych obliczania konstrukcji.

Przepisy norm polskich.

Zalecenia międzynarodowe obliczania i wykonywania konstrukcji, normy RWPG oraz najnowsze normy polskie przyjęły do obliczania konstrukcji, poza nielicznymi wyjątkami, jako jedyną, metodę stanów granicznych. Metodę tę wprowadzono zarówno do projektowania konstrukcji betonowych, żelbetowych i sprężonych [12,40,67,90,97,98] jak i konstrukcji stalowych [12,40,89,93] .

Przyjęta metoda określa pewne ogólne zasady postępowania, których spełnienie ma zapewnić bezpieczeństwo każdej konstrukcji budowlanej, niezależnie od materiału z jakiego została wykonana.

Istota metody polega na zabezpieczeniu konstrukcji przed wy-

stąpieniem stanu jej zniszczenia, bądź stanu, który by uniemożliwił jej dalszą, zgodną z przeznaczeniem, eksploatację. Określenie wielkości obciążeń wywołujących wystąpienie tych stanów należy przeprowadzać przy zastosowaniu metod analizy konstrukcji, dających możliwie wierny opis jej zachowania się w każdym z rozpatrywanych stanów.

Metoda stanów granicznych zastąpiła stosowaną do niedawna prawie powszechnie metodę naprężeń dopuszczalnych.

W przyjętej metodzie do oceny bezpieczeństwa konstrukcji wykorzystano w szerokim zakresie elementy probabilistyki. Nie jest to jednak w pełni naukowa ocena bezpieczeństwa. Wprowadzona metoda nosi w związku z tym nazwę półprobabilistycznej metody oceny bezpieczeństwa konstrukcji.

Definicję stanów granicznych oraz ich podział sformułowano w zaleceniach międzynarodowych CEB-FIP [95]. Przyjęły ją normy CECM [13], ISO [40], najnowsze polskie [90] i [89] oraz w zbliżonej formie normy RWPG [97] i [98]. Szersze omówienie stanów granicznych zawierają prace [54] i [10].

W myśl przyjętej definicji, przez stan graniczny rozumieć należy każdy taki stan, po osiągnięciu którego konstrukcja lub jej część przestaje spełniać swoje funkcje lub przestaje odpowiadać założonym wymaganiom użytkowym. Stany graniczne podzielono na dwie grupy. Pierwsza obejmuje stany graniczne nośności odpowiadające maksymalnej nośności konstrukcji /wg RWPG odpowiadające pełnej nieprzydatności konstrukcji do eksploatacji/, druga stany graniczne użytkowania ustalone w oparciu o kryteria normalnego użytkowania lub trwałości konstrukcji /wg RWPG odpowiadające nieprzydatności konstrukcji do normalnej eksploatacji/.

Cytowane wyżej normy, jak również prace [54] i [10] podają kryteria osiągnięcia poszczególnych stanów granicznych nośności oraz stanów granicznych użytkowania.

Do podstawowych kryteriów osiągnięcia stanów granicznych nośności należą:

- utrata stateczności przez część lub całość konstrukcji traktowanych jako ciała sztywne,

- zniszczenie przekrojów konstrukcji i / albo przekształcenie się konstrukcji w mechanizm,
- miejscowa utrata stateczności w wyniku wyboczenia,
- obniżenie wytrzymałości wynikające ze zmęczenia materiału,
- wystąpienie nadmiernych odkształceń plastycznych, zarysowania, bądź pęczania, powodujących konieczność przerwania eksploatacji konstrukcji,
- występowanie obciążeń wielokrotnie zmiennych powodujących zniszczenie przyrostowe, bądź zmęczenie niskocyklowe,
- wystąpienie przypadków losowych, takich jak np. pożar,
- wystąpienie obciążeń awaryjnych, takich jak np. ciśnienie spowodowane wybuchem.

Z kryteriów osiągania stanów granicznych użytkowania należy przede wszystkim wymienić:

- nadmierne w stosunku do dopuszczalnych ugięcia,
- przedwczesne lub nadmierne zarysowanie,
- niepożądane uszkodzenia /np. nadmierna korozja/,
- nadmierne przemieszczenia bez utraty stateczności,
- nadmierne drgania, itp.

W odróżnieniu od większości norm zagranicznych, od ponad dwudziestu lat normy polskie dotyczące projektowania konstrukcji betonowych, żelbetowych i sprężonych stosowały metodę odkształceń plastycznych, a norma dotycząca projektowania konstrukcji stalowych dawała projektantom do wyboru metodę naprężeń dopuszczalnych i metodę naprężeń granicznych. W związku z tym wprowadzenie przez nowe normy PN-76/B-03264 i PN-80/B-03200 metody stanów granicznych nie pociąga za sobą potrzeby odstępowania od obowiązujących dotychczas zasad obliczania nośności elementów. Zmiany dotyczące wyznaczania nośności sprowadzają się do zastąpienia przyjmowanych dotąd w obliczeniach średnich wytrzymałości materiałów przez niższe od nich wytrzymałości charakterystyczne oraz zastąpienia jednego globalnego współczynnika bezpieczeństwa przez częściowe współczynniki bezpieczeństwa, stosowane zarówno do obciążeń jak i do wytrzymałości materiałów w celu uzyskania ich wartości obliczeniowych. Współczynniki te wynikają z probabilistycznego podejścia do problemu osiągania poszczególnych stanów granicznych.

W normach tych brak jest natomiast sformułowania podstaw teoretycznych rozwiązania problemu nośności przekrojów betonowych, żelbetowych i sprężonych.

Siły wewnętrzne, odpowiadające schematom statycznym pracy konstrukcji w stanach granicznych nośności i stanach granicznych użytkowania, należy wg omawianych norm obliczać przy założeniu sprężystej pracy konstrukcji. W konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych przy obliczaniu sił wewnętrznych w stanie granicznym nośności można również posługiwać się metodami uwzględniającymi uplastycznienie materiałów. Norma PN-76/B-03264 nie zezwala jednak na stosowanie tych metod, gdy ustroje poddane są działaniu obciążeń wielokrotnie zmiennych.

Wpływ zmienności obciążeń na nośność przekrojów został przez omawiane normy uwzględniony przez wprowadzenie współczynników korekcyjnych do obliczeniowych wytrzymałości betonu i stali, na osiągnięcie zaś poszczególnych stanów granicznych nośności i użytkowania poprzez spełnienie określonych przez te normy warunków.

### 1.3. Rozpatrywane ustroje. Przyjęte założenia. Mechanizmy zniszczenia.

#### 1.3.1. Rozpatrywane ustroje. Obciążenia. Siły wewnętrzne.

W pracach [73,74,75,77,78,79] przeprowadzono analizy wytrzymałości obciążonych w sposób stały /jednokrotny/ kablo-betonowych przekrojów i ram a w pracach [81 do 87] analizy wytrzymałościowe poddanych działaniu obciążeń wielokrotnie zmiennych stalowych ustrojów prętowych. W rozpatrywanych konstrukcjach wpływ sił poprzecznych na wielkości granicznych obciążeń został jako mały pominięty /por.np. [42] /.

Przy określaniu nośności kablobetonowych przekrojów i ram uwzględniono działania sił podłużnych i momentów zginających. Przy określaniu nośności stalowych ram ograniczono się do rozpatrzenia przypadków, w których jedynie moment zginający miał istotny wpływ na zachowanie się tych konstrukcji.

Wyznaczenie nośności stalowych rusztów przeprowadzono pomijając jako bardzo mały wpływ momentów skręcających /por. np. [35] i [1] /.

#### 1.3.2. Przyjęte założenia.

W przeprowadzonych w pracach [75] oraz [81 do 87] rozwiązaniach problemów nośności kablobetonowych ram i stalowych

ustrojów prętowych przyjęto, poza wymienionymi w p. 1.3.1 i 1.3.3, następujące założenia:

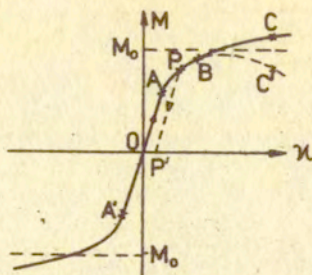
- a/ uznano deformacje za dostatecznie małe, aby wpływ ich na równania równowagi układu mógł być pominięty /założenie geometrycznej liniowości konstrukcji/,
- b/ przyjęto założenie płaskich przekrojów, którego słuszność, również i w zakresie plastycznej pracy konstrukcji potwierdziły wyniki badań doświadczalnych /założenie to przyjęto również w pracach [73,74,77,78 i 79] zawierających analizy wytrzymałościowe przekrojów kablobetonowych/,
- c/ założono, że przekroje poprzeczne prętów mają przynajmniej jedną oś symetrii, leżącą w płaszczyźnie zginania,
- d/ pominięto problemy utraty stateczności, tj. wyboczenia się prętów pod wpływem działania sił osiowych,
- e/ założono, że występujące obciążenia działają w sposób statyczny, bądź quasi-statyczny,
- f/ przyjęto hipotezę idealnych przegubów plastycznych /ściśłą jedynie w odniesieniu do przekroju idealnie sandwiczowego/, zakładającą, że wszystkie odkształcenia plastyczne koncentrują się w przekrojach, w których został osiągnięty stan graniczny,
- g/ pominięto efekty wzmocnienia materiałów,
- h/ pominięto efekty wynikające z pełzania i relaksacji.

### 1.3.3. Związek między momentem zginającym a krzywizną. Przyjęte modele ciał.

Przyjęcie powszechnie stosowanego założenia płaskich przekrojów prowadzi w zakresie sprężystej pracy konstrukcji do znanej liniowej zależności między krzywizną  $\alpha$  a momentem zginającym  $M$  :

$$(1) \quad \alpha = \frac{M}{EI}$$

gdzie  $E$  jest modułem sprężystości Younga, a  $I$  momentem bezwładności przekroju. Poza tym zakresem zależność  $M - \alpha$  jest nieliniowa. Sporządzone dla różnych materiałów na podstawie przeprowadzonych badań doświadczalnych wykresy zależności między momentem zginającym a krzywizną przedstawia rys.2 [36].



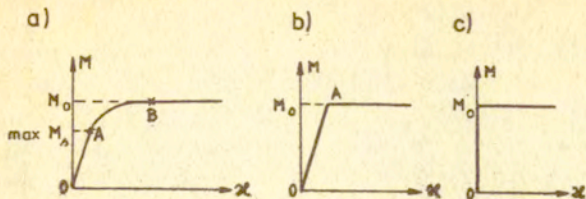
Rys.2

Linia ciągła odpowiada wynikom otrzymanym dla belki wykonanej ze stali miękkiej. Zachowanie się tej belki jest dla momentów dodatnich i ujemnych o tej samej wartości bezwzględnej jednakowe. Od punktu O do A materiał zachowuje się sprężyste; zależność między momentem a krzywizną jest liniowa i po odciążeniu belka powraca do swej pierwotnej postaci. Punktwi A odpowiada największa wartość  $\max M_s$  momentu sprężystego. Po przekroczeniu punktu A belka zachowuje się niesprężyste, a zależność  $M - \chi$  przestaje być liniowa; odciążenie od punktu P przebiega wzdłuż linii przerywanej P - P' i po odciążeniu pozostaje w belce krzywizna resztkowa. Jeżeli po przekroczeniu punktu B zwiększamy dalej obciążenie następuje naogół wzmocnienie materiału; małym przyrostom momentu odpowiadają duże przyrosty krzywizny /odcinek B - C krzywej/.

Jeśli materiałem jest żelbet moment wykazuje tendencję do osiągnięcia maximum, a następnie, przy dalszym wzroście krzywizny, do spadku /odcinek B - C'/.

W analizie plastycznej stalowych konstrukcji prętowych, nie uwzględniającej wzmocnienia materiału, przyjmuje się idealizację krzywej OABC w postaci przedstawionej na rys. 3a.

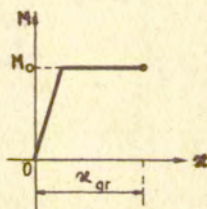




Rys. 3

Do wyznaczania obciążenia granicznego stosuje się dalszą idealizację tej krzywej, wynikającą z hipotezy idealnych przegubów plastycznych, przyjmując zależność między krzywizną a momentem przedstawioną na rys. 3b, bądź przyjmuje się nawet, w celu uproszczenia obliczeń, zależność między tymi wielkościami przedstawioną na rys. 3c.

Dla konstrukcji betonowych, żelbetonowych i sprężonych, ze względu na osiągnięcie maksymalnego momentu /obciążenia/ przy pewnej skończonej wartości krzywizny /odkształcenia/, a następnie jego spadku, stosuje się aproksymację przedstawioną na rys. 2 krzywej OABC' wykresamz ograniczoną krzywizną /rys.4/. Zniszczenie jest tu określone osiągnięciem granicznej wartości krzywizny /odkształcenia/.



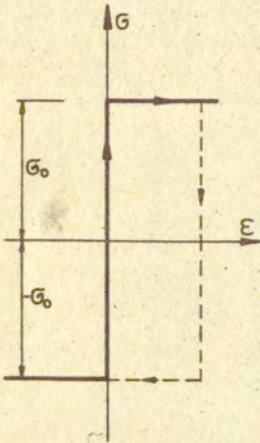
Rys. 4

Z przyjętych aproksymowanych zależności między momentem zginającym  $M$  a krzywizną  $\alpha$  wynika, że z chwilą osiągnięcia przez moment wartości  $M_0$  krzywizna wzrasta bez dalszego wzrostu momentu. Moment  $M_0$  jest największym /granicznym/ momentem jaki przekrój może przenieść. Przekrój, w którym moment ten działa, określa się mianem przegubu plastycznego.

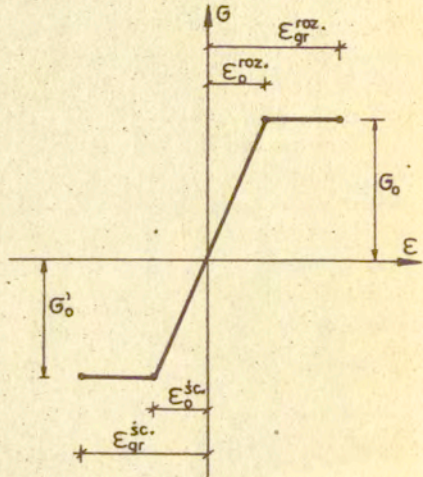
Zależnościom między momentem a krzywizną,

określonym dla konstrukcji, odpowiadają w odniesieniu do punktu zależności między naprężeniem  $\sigma$  a odkształceniem  $\epsilon$ , stanowiące modele ciał.

W rozwiązaniach problemu nośności konstrukcji operuje się zazwyczaj modelem ciała idealnie sztywno - plastycznym /rys.5/, dość dobrze oddającym zachowanie się wielu materiałów konstrukcyjnych, takich jak np. metale. Przyjęcie tego modelu upraszcza również znacznie analizę. Są to powody, dla których model ten stosowany jest chętnie i do materiałów, których zachowanie może dość znacznie odbiegać od określonego przyjętym modelem.



Rys. 5



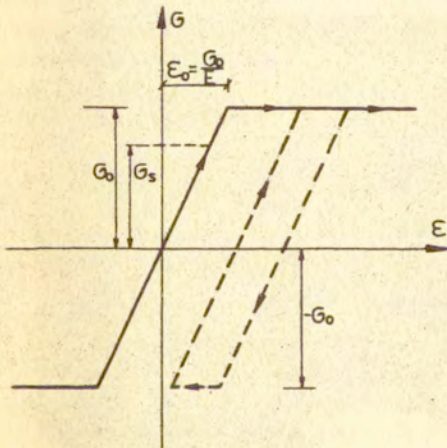
Rys. 6

Ostatnie przepisy międzynarodowe [95] i [12] polecają przyjęcie dla przekrojów betonowych, żelbetowych i sprężonych modelu ciała idealnie sprężysto-plastycznego z ograniczoną odkształcalnością plastyczną /rys.6/. Zaobserwowano bowiem, że o zniszczeniu tych przekrojów decyduje osiągnięcie przez jedno włókno przekroju /przez skrajne włókno betonu, przez rozciągające zbrojenie miękkie, bądź przez stal sprężającą/ granicznych

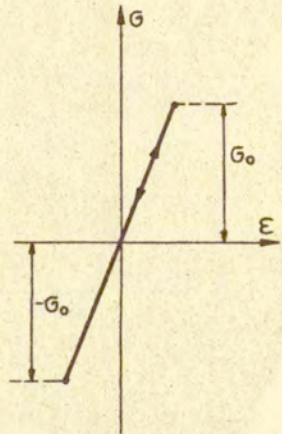
odkształceń, a nie osiągnięcie przez wszystkie włókna granicznych naprężeń.

Omawiany model ciała został przyjęty w moich pracach [73] i [79] do wyznaczenia niszczących wartości sił podłużnych i momentów zginających mimośrodowo obciążonych prostokątnych przekrojów kablobetonowych. Celem porównania przeprowadzono rozwiązanie również i dla modelu ciała idealnie sztywno-plastycznego z nieograniczoną odkształcalnością plastyczną.

Gdy występujące obciążenia są wielokrotnie zmienne w czasie przyjęcie modelu idealnie sztywno-plastycznego nie jest właściwe. W tak obciążonej konstrukcji powstaje bowiem, wskutek wystąpienia w początkowych cyklach obciążeń trwałych odkształceń plastycznych, stan samonapężenia, który może spowodować przesunięcie zakresu, bądź translację obszaru, zawierającego obciążenia gwarantujące czysto sprężyste zachowanie się ustroju. Analizę takiej konstrukcji, jak i konstrukcji świadomie wstępnie sprężonych, należy w związku z tym przeprowadzać uwzględniając sprężysto-plastyczną fazę ich pracy. Odpowiednim modelem jest tu idealnie sprężysto-plastyczny model ciała/rys.7/.



Rys. 7



Rys. 8

Model idealnie sztywno-plastyczny został przyjęty przy wyznaczaniu granicznych obciążeń nośności stalowych ustrojów prętowych [81 do 87]. Model idealnie sprężysto-plastyczny zastosowano w sprężysto-plastycznej analizie stalowych przekrojów: obciążonych wielokrotnie momentem /p.1.6 rozprawy / oraz sprężonych przez wygięcie i obciążonych momentem jednokrotnie /p.1.5 rozprawy /, jak również przy wyznaczaniu granicznych obciążeń przystosowania stalowych ustrojów prętowych [81 do 87].

Nośność sprężystą [81 do 87] wyznaczono stosując model ciała liniowo - sprężysty /rys.8/.

Występująca w przyjętych modelach /rys.5 do 8/ wartość  $\sigma_0$  naprężenia odpowiada umownej granicy plastyczności materiału.

#### 1.3.4. Mechanizmy zniszczenia ustrojów prętowych.

W poddanych zginaniu statycznie niewyznaczalnych ustrojach prętowych przekroczenie sprężystego zakresu pracy ustroju powoduje powstanie w nim pewnych obszarów uplastycznionych /rys.9 a /, w których przekroje znajdują się w stanie sprężysto-plastycznym /rys. 9 d/ oraz przegubów plastycznych /rys.9b/, w których przekroje są całkowicie uplastycznione /rys.9 e/.

Jeśli pominąć działanie innych-pozą momentem zginającym - sił wewnętrznych, to powstanie przegubu plastycznego jest spowodowane wystąpieniem momentu zginającego równego momentowi granicznemu  $M_0$ . Jest to największy moment, jaki przekrój może przenieść. Moment ten dla jednorodnego przekroju prostokątnego  $b \times 2 H$  wynosi:

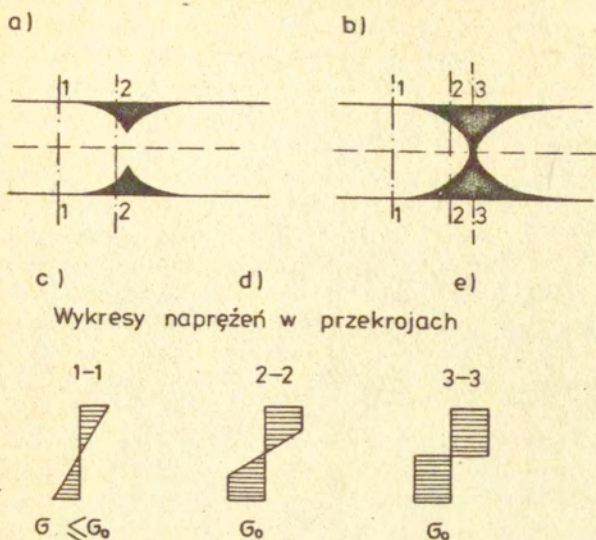
$$(2) M_0 = \int_A \sigma z dA = \sigma_0 b H^2 = 2 \sigma_0 S = \sigma_0 W_{pl}$$

gdzie  $\sigma_0$  jest granicą plastyczności materiału,  $S$  jest momentem statycznym połowy pola  $A$  przekroju względem poziomej osi symetrii,  $z$  jest odległością włókna od osi obojętnej, a

$$(3) W_{pl} = b H^2$$

jest wskaźnikiem oporu plastycznego.

Rozkład naprężeń w przekroju znajdującym się na granicy strefy uplastycznionej przy założeniu  $\sigma = \sigma_0$  przedstawia rys. 9c. Występujący w tym przekroju moment zginający równy



Rys. 9

jest największemu sprężystemu momentowi  $\max M_s$ , jaki przekrój może przenieść /por. rys. 3a/ i wynosi:

$$(4) \quad \max M_s = \frac{2}{3} \sigma_c \cdot I H^2 = \sigma_c W \quad ,$$

gdzie:

$$(5) \quad W = \frac{2}{3} I H^2$$

jest wskaźnikiem wytrzymałości przekroju.

Zniszczenie konstrukcji nastąpi dopiero wówczas, gdy powstanie w niej wystarczająca liczba przegubów plastycznych i zmieni się ona w mechanizm.

Powstanie mechanizmu zniszczenia konstrukcji przebiega następująco. Po pojawieniu się w konstrukcji odkształceń plas-

tycznych następuje, przy dalszym jej obciążaniu, przegrupowanie /redystrybucja/ momentów zginających. Po powstaniu przegubów w najbardziej wyciężonych przekrojach następuje w tych przekrojach pod wpływem wzrastającego dalej obciążenia dalszy wzrost krzywizny. Powoduje to dociążenie pierwotnie mniej obciążonych przekrojów do wartości  $M_0$ , powstanie w tych przekrojach dalszych przegubów i ostatecznie zmianę konstrukcji w mechanizm.

W rozwiązaniach problemów nośności konstrukcji prętowych przyjmuje się hipotezę idealnych przegubów plastycznych zakładającą, że wszystkie odkształcenia plastyczne koncentrują się w przekrojach, w których wystąpił moment równy momentowi granicznemu. Wielkość tych odkształceń mierzy się kątem  $\theta$  obrotu plastycznego. Jest to kąt między stycznymi do osi pręta po obu stronach przegubu /por.rys.11/.

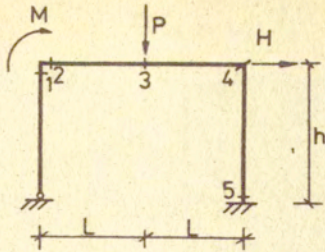
Liczne badania doświadczalne, przeprowadzone na konstrukcjach stalowych /por.np.[3], [64] i [101]/oraz żelbetowych i sprężonych /por. [2], [69] i [110]/potwierdziły występowanie w tych konstrukcjach zjawiska redystrybucji momentów zginających oraz poprawność wyników teoretycznych określających mechanizm zniszczenia i wielkość obciążenia granicznego.

Aby konstrukcja  $n$ -krotnie statycznie niewyznaczalna uległa całkowitemu zniszczeniu, wystarczy zmiana jej w mechanizmie o jednym stopniu swobody /powstanie w niej  $n + 1$  przegubów plastycznych/. Częściowe zniszczenie konstrukcji może nastąpić przy mniejszej liczbie przegubów plastycznych wskutek przekształcenia się w mechanizm pewnego jej fragmentu/np. jednego przęsła belki ciągłej, rygla ramy/.

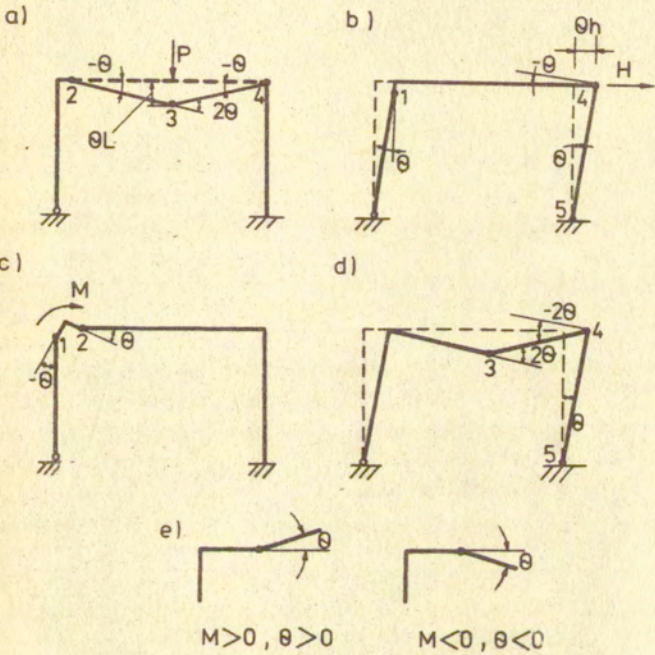
Powstanie określonego mechanizmu zniszczenia zależy od geometrii konstrukcji, stosunku momentów granicznych jej elementów, sposobu przyłożenia obciążeń i ich wzajemnego stosunku.

Wyznaczenie właściwego dla danej konstrukcji i obciążenia mechanizmu, polegające na rozpatrzeniu wszystkich możliwych mechanizmów jej zniszczenia, nie nastrocza w przypadku prostych konstrukcji prętowych - specjalnych trudności. Gdy geometria konstrukcji jest skomplikowana liczba możliwych mechanizmów zniszczenia może być bardzo duża. Zastosowanie metody łączenia mechanizmów podstawowych <sup>\*</sup> pozwala na rozpatrzenie

\* Metodę tę przedstawiają między innymi prace [65] i [37] .



Rys. 10



Rys. 11

tylko tych właśnie mechanizmów oraz mechanizmów będących ich kombinacją liniową.

Mechanizmem podstawowym jest każdy mechanizm, który nie da się przedstawić jako liniowa kombinacja innych mechanizmów. Liczba mechanizmów podstawowych równa jest liczbie niezależnych równań równowagi wiążących momenty zginające.

Dla konstrukcji  $n$ -krotnie statycznie niewyznaczalnej liczba ta wynosi:  $r - n$ , gdzie  $r$  jest liczbą przekrojów niebezpiecznych.

Na rys. 11 a,b,c przedstawiono dla przykładu podstawowe mechanizmy zniszczenia ramy portalowej, obciążonej dwiema siłami i momentem zginającym /rys.10/: mechanizm belkowy, mechanizm słupowy i mechanizm obrotu węzła. Rys. 11 d przedstawia mechanizm łączony z "usztynionym" węzłem 1 - 2. Na rys. 11 c przedstawiono oznakowanie momentów zginających  $M$  i kątów obrotu  $\theta$ .

#### 1.3.5. Nośność "idealna".

Z osiągnięciem przez konstrukcję pewnego stanu granicznego nośności lub użytkowania związana jest maksymalna dla wystąpienia tego stanu wartość obciążenia, zwana intensywnością obciążenia granicznego, bądź wprost obciążeniem granicznym. Gdy konstrukcja osiąga któryś ze stanów granicznych nośności możemy mówić o obciążeniu niszczącym, o udźwigu bądź o nośności konstrukcji.

Nośność konstrukcji zależy od materiału, z jakiego została wykonana od nośności przekrojów oraz od rozkładu obciążeń i sposobu ich oddziaływania. Gdy konstrukcja wykonana jest z materiałów, dla których idealnie sztywno-plastyczny model ciała jest przy rozwiązaniu problemu nośności dostatecznie ścisły, /pominięto efekt wzmocnienia/, a jej sztywność pozwala na przyjęcie założenia o małości przemieszczeń oraz gdy obciążenia narastają od zera do wartości końcowej proporcjonalnie do jednego parametru wyznaczamy jej udźwig korzystając z metod teorii nośności granicznej.

Tak wyznaczona nośność jest największym możliwym obciążeniem, jakie konstrukcja ta może przenieść i do tak pojętej nośności "idealnej" odnosić będziemy otrzymane w toku



dalszych rozważań, a różne od niej obciążenia graniczne.

#### 1.4. Tematyka i cel przedstawionych rozwiązań.

##### Osiągnięte wyniki.

Do podstawowych przyczyn, które mogą uniemożliwić konstrukcji osiągnięcie nośności "idealnej" zaliczyć należy utratę stateczności przez część lub całość konstrukcji traktowanych jako ciała sztywne, ograniczoną odkształcalność plastyczną materiałów oraz spowodowane występowaniem obciążeń wielokrotnie zmiennych zmęczenie niskocyklowe, bądź nieograniczony wzrost odkształceń.

Uwzględnienie tych przyczyn jest niezbędne dla prawidłowej oceny rzeczywistego udźwigu konstrukcji, dlatego też analiza ich wpływu na obliczeniową nośność konstrukcji stała się /poza utratą stateczności/ tematem niniejszej rozprawy.

Stosowane przez teorię nośności granicznej metody wyznaczania obciążenia niszczącego, bazujące na idealnie sztywno-plastycznym modelu ciała /rys.5/ i założeniu o małości przemieszczeń /założenie geometrycznej liniowości układu/ są wystarczająco dokładne dla ustrojów wykonanych z takich materiałów jak np. metale oraz gdy działające obciążenia są jednokrotne, wzrastające monotonicznie od zera do wartości końcowej.

W przypadku konstrukcji betonowych żelbetowych i sprężonych, jak również dla obciążeń wielokrotnych, cyklicznych, bądź o zmiennej intensywności, stosowanie metod i założeń teorii nośności granicznej do oceny udźwigu tych ustrojów może prowadzić do znacznych błędów.

O wyczerpaniu nośności konstrukcji betonowych, żelbetowych i sprężonych decyduje bowiem, jak już uprzednio wspomniano, nie osiągnięcie granicznych naprężeń a granicznych odkształceń. Modelem ciała dość dobrze oddającym zachowanie się tych konstrukcji jest model idealnie sprężysto-plastyczny z ograniczoną odkształcalnością plastyczną /rys.6/.

Zastosowanie tego modelu znacznie przybliży obliczeniowe wartości obciążeń niszczących do ich wartości rzeczywistych.

W przypadku występowania obciążeń wielokrotnie zmiennych powstanie w konstrukcji w początkowych cyklach obciążania

trwałych odkształceń oraz związanego z nimi samozrównoważonego stanu naprężeń może doprowadzić, przy dalszym obciążaniu konstrukcji, do jej zniszczenia przy niższych od obliczonych metodami teorii nośności granicznej wartościach obciążeń. Potwierdziły to wyniki licznych badań doświadczalnych. Wyznaczeniem udźwigu tak obciążonych konstrukcji zajmuje się teoria przystosowania, bazująca na idealnie sprężysto - plastycznym modelu ciała /rys.7/.

W pracach [73] i [79] wyznaczamy dla mimośrodowo obciążonych betonowych i żelbetowych przekrojów sprężonych, przy założeniu idealnie sprężysto-plastycznego modelu ciała z ograniczoną odkształcalnością plastyczną /rys.6/ obszary zawierające nieniszczące wartości momentów zginających i sił podłużnych. Wcześniejsze od przedstawionych w [73] i [79] rozwiązania [37, 42, 61, 70, 100, 102, 103, 110], bazujące na idealnie sztywno-plastycznych modelach ciał /rys.5/, dotyczą jedynie przekrojów stalowych i żelbetowych. Dla przekrojów sprężonych rozwiązania te zostały przeprowadzone wyłącznie dla przypadków sprężenia bez pomocy zbrojenia [68] oraz zniszczenia przed zarysowaniem [88].

Nie zostały opracowane wcześniejsze od zawartych w pracy [74] rozwiązania ważnego problemu optymalnego projektowania przekroju sprężonego kablem /znalezienia minimum przekroju zbrojenia sprężającego, naprężenia wstępnego w tym zbrojeniu oraz mimośrodu zbrojenia/ przy zadanym w postaci obszaru zmienności momentów zginających i sił podłużnych obciążeniu.

Rozwiązania dotyczące wyznaczenia nośności kablobetonowych ram przy uwzględnieniu udziału sił podłużnych [75] stanowią rozszerzenie na te konstrukcje metod stosowanych przy obliczaniu nośności konstrukcji stalowych /por. np. [37] /.

W pracy [78] przedstawiono analizę wpływu wielkości siły sprężającej na nośność mimośrodowo obciążonego przekroju kablobetonowego. W odróżnieniu od rozwiązań klasycznej teorii nośności granicznej, bazującej na idealnie sztywno-plastycznym modelu ciała, w których nośność była niezależna od wielkości siły sprężającej, wykazano, że przy zastosowaniu przyjętego w pracach [73, 74, 78 i 79] modelu ciała idealnie sprężysto-plastycznego z ograniczoną odkształcalnością plastyczną, znacznie lepiej oddającego rzeczywiste zachowanie się

betonowych i żelbetowych konstrukcji sprężonych, można przez odpowiedni dobór wielkości siły sprężającej podwyższyć określoną przy przyjęciu tego modelu nośność przekrojów, a tym samym nośność całej konstrukcji.

W punkcie 2.3 niniejszego opracowania przeprowadzono szczegółową analizę wpływu uwzględnienia ograniczonej odkształcalności plastycznej materiałów na spadek nośności mimośrodowo obciążonych przekrojów kablobetonowych, w stosunku do nośności "idealnej", tj. wyznaczonej przy przyjęciu modelu ciała idealnie sztywno-plastycznego oraz określono przypadki, w których zastąpienie modelu ciała idealnie sprężysto-plastycznego z ograniczoną odkształcalnością modelem ciała idealnie sztywno-plastycznym jest dopuszczalne.

Uwzględnienie wpływu działania obciążeń wielokrotnie zmiennych na spadek nośności konstrukcji wymagało przeprowadzenia rozwiązań szczegółowych.

Prace [81 do 87] zawierają rozwiązania dotyczące określenia udźwigu szeregu konstrukcji prętowych, takich jak belki ciągłe, ruszty i ramy portalowe.

Prace [84] , [85] i [87] dotyczą belek ciągłych /w tym belki ciągłej na podporze sprężystej/ oraz rusztów poddanych działaniu quasi-statycznych obciążeń ruchomych w postaci siły, bądź pary sił skupionych.

Prace [81] i [82] zawierają rozwiązania problemu nośności belek ciągłych poddanych działaniu ciężaru własnego oraz wielokrotnie występującego obciążenia użytkowego, a praca [86] zawiera wyznaczenie nośności tych belek poddanych działaniu sił skupionych o zmiennej intensywności.

W pracy [83] , dla ram portalowych poddanych działaniu skupionych sił poziomych i pionowych o zmiennej intensywności, wyznaczono obszary zawierające nieniszczące wartości tych sił.

Wyznaczenie nośności omówionych konstrukcji przeprowadzono korzystając z twierdzeń teorii przystosowania. Wyniki porównano z rozwiązaniami przeprowadzonymi metodami teorii nośności granicznej, odpowiadającymi obciążeniom działającym w sposób stały oraz z nośnością sprężystą, tj. obciążeniem odpowiadającym granicy stosowalności związków sprężystych. Wykazano brak jakiegokolwiek korelacji między otrzymanymi rozwiązaniami. Analizując poszczególne wyniki określono wpływ

działania obciążeń wielokrotnie zmiennych na przesunięcie obszaru czysto sprężystego zachowania się konstrukcji, jak również wpływ tego oddziaływania na spadek nośności konstrukcji w stosunku do nośności "idealnej" określonej dla obciążeń stałych.

W pracy [85] przeprowadzono optymalizację nośności obciążonej siłą ruchomą dwuprzęsłowej belki na podporze sprężystej. Poszukiwaną optymalną wartością była wartość współczynnika sprężystości podpory. W pracy tej wykazano, że w odróżnieniu od przypadku działania obciążenia jednokrotnego, w którym zastosowanie podpory sprężystej nie wpływa na udźwig belek - w przypadku belek poddanych działaniu obciążeń zmiennych można przez odpowiedni dobór wielkości współczynnika sprężystości podpory podwyższyć wyznaczoną metodami teorii przystosowania nośność tych belek.

Dla rusztu obciążonego między węzłami siłą przesuwaną się w sposób quasi-statyczny [87] wskazano dla jakich stosunków sztywności belki podłużnej do poprzecznej rusztu jego nośność jest ze względu na minimum materiału optymalna.

Szczegółowe omówienie przedstawionych w załączonych publikacjach rozwiązań przeprowadzono stosując podział tematyczny na prace dotyczące konstrukcji obciążonych w sposób stały /część druga rozprawy/, w których naprężenia wstępne zostały wprowadzone celowo /sprężenie kablem/ oraz na prace dotyczące konstrukcji poddanych działaniu obciążeń wielokrotnie zmiennych /część trzecia rozprawy/, w których to ustrojach w wyniku obciążania ich poza zakres sprężysty, a następnie odciążania, powstały w początkowych cyklach obciążenia trwałe odkształcenia plastyczne oraz towarzyszący im stan naprężeń resztkowych, będący dla następnych cykli stanem wstępnych naprężeń.

Omówienie pierwszej grupy prac poprzedzono przedstawieniem założeń i twierdzeń teorii nośności granicznej. Wyznaczone metodami tej teorii rozwiązania stanowią poziom odniesienia otrzymanych w obu grupach wyników. Omówienie rozwiązań drugiej grupy poprzedza przedstawienie podstaw i twierdzeń teorii przystosowania oraz stosowanych przez tę teorię metod wyznaczania obciążenia granicznego, które zostały wykorzystane do określenia nośności konstrukcji poddanych działaniu

obciążeń wielokrotnie zmiennych.

#### 1.5. Konstrukcje z naprężeniami wstępnymi wywołanymi sprężeniem.

Istota wstępnego sprężenia polega na wprowadzeniu do konstrukcji naprężeń wstępnych o ściśle określonej wielkości, dobranych tak, aby w superpozycji z naprężeniami od obciążeń można było uzyskać żądane rozkłady naprężeń oraz żądany sposób pracy konstrukcji. Dzięki zastosowaniu sprężenia uzyskujemy dla zadanych obciążeń rozwiązania bardziej ekonomiczne, zaś dla zadanych parametrów geometrycznych konstrukcji /kształtu, wymiarów/ wzrost wartości momentów niszczących poszczególne przekroje, a tym samym wzrost nośności całej konstrukcji.

Zasadniczym celem sprężenia jest dostosowanie konstrukcji do przenoszenia obciążeń, zmieniających się dowolnie ale w przepisanych granicach, z gwarancją reagowania na te obciążenia w sposób sprężysty.

W przypadku materiałów kruchych celem sprężenia jest również zapewnienie we wszystkich fazach pracy ustroju ciągłości jego działania poprzez zapobieżenie powstawaniu rys. Dlatego też sprężenie konstrukcji wykonanych z betonu polega na wprowadzeniu wstępnych naprężeń ściskających wszędzie tam, gdzie spodziewamy się rozciągania w fazie użytkowej pracy elementu. Wprowadzone naprężenia winny skompensować naprężenia rozciągające lub ograniczyć je do wielkości nieszkodliwych. W konstrukcjach tych sprężenie uzyskuje się poprzez zastosowanie specjalnych ciągów sprężających ze stali o wysokiej wytrzymałości na rozciąganie.

W ustrojach wykonanych z materiałów o podobnej wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie, takich jak np. konstrukcje stalowe likwidacja naprężeń rozciągających nie jest naogół potrzebna.

Celem sprężenia jest tu wprowadzenie naprężeń o przeciwnych znakach do naprężeń wywołanych obciążeniami działającymi w fazie użytkowej i tym samym zwiększenie rezerw naprężeń i odkształceń, którymi dysponujemy. Dlatego też w konstrukcjach tych, poza stosowanym powszechnie sprężaniem za pomocą ciągów,

stosuje się również metody umożliwiające wprowadzenie jedynie naprężeń wstępnych od zginania poprzez np. wstępne wygięcie elementów, zmianę położenia wybranych podpór belek ciągłych itp.

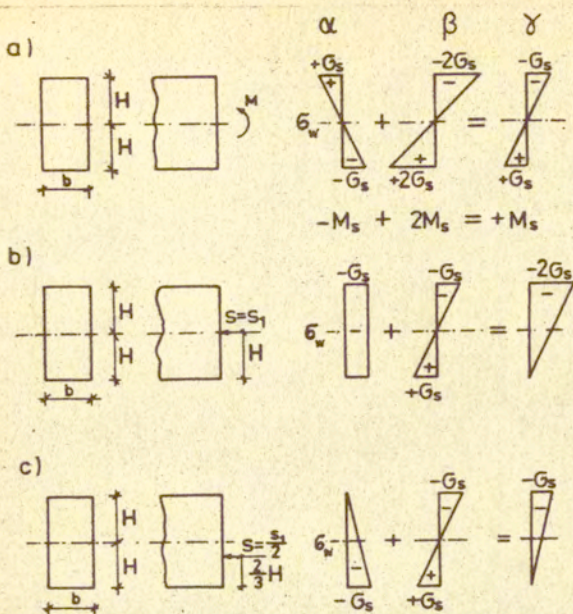
Do nowych, ekonomicznych rozwiązań należy metoda polegająca na przyspawaniu do elementu wykonanego ze zwykłej stali niskowęglowej elementu wstępnie rozciąganego ze stali o podwyższonej wytrzymałości. W ten sposób jeden z zasadniczych elementów konstrukcji stanowi jednocześnie element sprężający /por. np [94]/.

Na rys. 12 przedstawiono wykresy naprężeń w przekroju znajdującym się w sprężystej fazie pracy, tj. gdy występujące w nim naprężenia zawarte są w przedziale -  $\sigma_0 < \sigma_s < \sigma_0^*$  /por. rys.7/. Na rys. 12a przedstawiono wykresy naprężeń w przekroju elementu konstrukcji sprężonego przez wygięcie momentem, na rys. 12 b i c - w przekrojach elementów poddanych osiowemu i mimośrodowemu sprężeniu ciągnem. Wykresy  $\alpha$  przedstawiają stan naprężeń wstępnych, wykresy  $\beta$  - naprężenia od zginających obciążeń zewnętrznych, wykresy  $\gamma$  - naprężenia rzeczywiste otrzymane przez superpozycję wykresów  $\alpha$  i  $\beta$ . Analiza tych wykresów uwidacznia w pełni korzyści płynące z zastosowania wstępnego sprężenia. W przypadku sprężenia ustrojów stalowych możemy zwiększyć/teoretycznie dwukrotnie/ istniejące na przeniesienie obciążeń zewnętrznych rezerwy naprężeń i odkształceń /rys.12 a/, a sprężenie ustrojów wykonanych z materiałów nie posiadających żadnej /np.ustroj złożony z oddzielnych elementów/, bądź nieznacznej /np.beton/ wytrzymałości na rozciąganie, umożliwia przenoszenie momentów zginających od obciążeń zewnętrznych /rys.12 b i c/. Należy przy tym zaznaczyć, że, jak to wynika z porównania rys. 12 b i 12 c, sprężenie mimośrodowe jest bardziej ekonomiczne, bowiem stosując je zamiast osiowego możemy otrzymać ten sam efekt przyjmując dwa razy mniejszą siłę sprężającą oraz materiał o dwa razy mniejszej wytrzymałości na ściskanie.

Zastosowanie sprężenia jest jednak naogół korzystne tylko dla obciążeń, do których zostało ono dostosowane. W wyniku sprężenia zdolność przenoszenia momentów ujemnych przez przekrój zaprojektowany na przenoszenie momentów dodatnich może

---

\* Objasnienia występujących w tym punkcie oznaczeń zawiera p.1.3.4. rozprawy.



$\alpha$  - stan naprężeń wstępnych  $G_w$

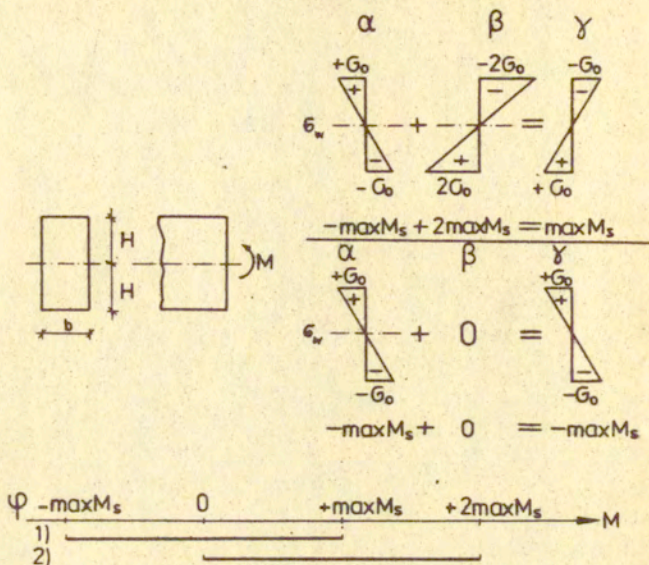
$\beta$  - naprężenia od zginających obciążeń zewnętrznych

$\delta$  - naprężenia rzeczywiste otrzymane przez superpozycję wykresów  $\alpha$  i  $\beta$

Rys. 12

ulec zmniejszeniu. I tak dla przypadku sprężenia przedstawionego na rys. 12a przedział  $-\max M_s \leq M_s \leq \max M_s$  / rys. 13  $\psi_1$  /, zawierający przed sprężeniem momenty od obciążeń zewnętrznych gwarantujące sprężyste zachowanie się przekroju, po sprężeniu przekroju momentem:  $-\max M_s = -G_w W$  / rys. 13  $\alpha$  / przesuwa się nie zmieniając długości i zawierając momenty  $0 \leq M_s \leq 2 \max M_s$  / rys. 13  $\psi_2$  /.

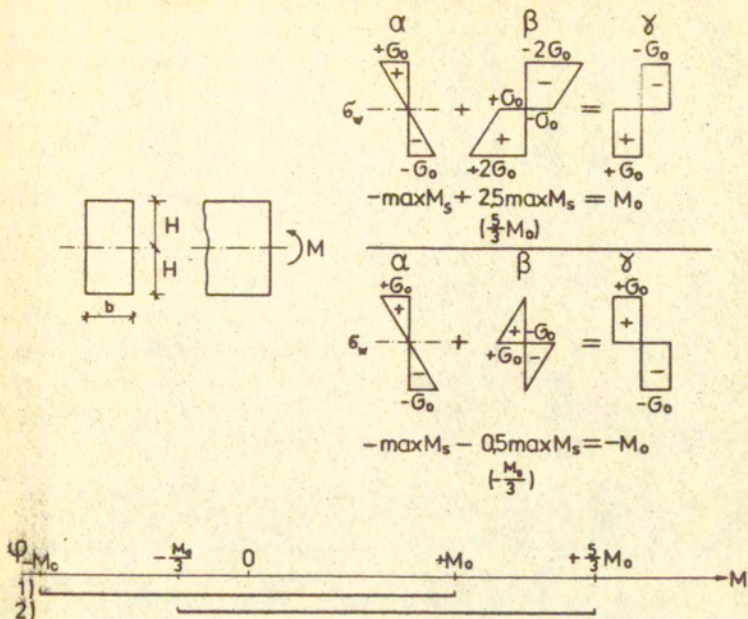
Dalsze zwiększenie obciążeń poza zakres sprężystej pracy przekroju, tj. powyżej wartości  $M = 2 \max M_s$ , bądź poniżej  $M = 0$  prowadzi do zniszczenia przekroju wskutek jego uplastycznienia /rys.14/.



- $\alpha$  - stan naprężeń wstępnych wywołany sprężeniem momentem zginającym  $M = -\max M_s$
- $\beta$  - naprężenia od ekstremalnych sprężystych obciążeń zewnętrznych
- $\gamma$  - naprężenia rzeczywiste otrzymane przez superpozycję wykresów  $\alpha$  i  $\beta$
- $\varphi$  - granice obciążeń zewnętrznych gwarantujących sprężyste zachowanie się konstrukcji :  
1/ przed sprężeniem , 2/ po sprężeniu

Rys. 13





- $\alpha$  - stan naprężeń wstępnych wywołany sprężeniem momentem zginającym  $M = -\max M_s$
- $\beta$  - naprężenia od ekstremalnych obciążeń zewnętrznych
- $\gamma$  - naprężenia rzeczywiste otrzymane przez superpozycję wykresów  $\alpha$  i  $\beta$
- granice ekstremalnych obciążeń zewnętrznych :  
1/ przed sprężeniem , 2/ po sprężeniu

Rys. 14

Następuje to gdy moment od obciążeń zewnętrznych osiąga wartość  $M = 2,5 \max M_g$ , bądź  $M = -0,5 \max M_g$ . Momenty  $M$  od obciążeń zewnętrznych nie wywołujące zniszczenia przekroju zawarte przed sprężeniem w przedziale  $-M_0 \leq M \leq M_0$  /rys.14  $\psi_1$ /, po sprężeniu momentem  $M = -\max M_g$  /rys.14  $\alpha$ / zawarte są w przedziale  $-\frac{1}{3} M_0 \leq M \leq +\frac{5}{3} M_0$  /rys.14  $\psi_2$ /.

Przeprowadzone wyżej rozważania dotyczące samego przekroju <sup>mczna</sup> rozszerzyć na konstrukcje statycznie wyznaczalne, w których tak o zakresie pracy sprężystej, jak i o nośności decyduje zazwyczaj jeden najbardziej wyciężony przekrój.

W przypadku konstrukcji statycznie niewyznaczalnych zagadnienie jest bardziej skomplikowane. Wprowadzenie do tych konstrukcji sprężenia powoduje bowiem z reguły powstanie reakcji podporowych od sprężenia oraz wywołanych tymi reakcjami momentów wzbudzonych  $M_{wz}$  /por. np [30]./.

Gdy sprężenie konstrukcji odbywa się równolegle z jej wznoszeniem /jest to z reguły stosowane w praktyce/ należy w obliczeniach statycznych uwzględnić również fakt działania sił sprężających / i innych obciążeń/ na statyczne schematy pośrednie przez jakie przechodzi konstrukcja. Opracowana przeze mnie dla jednonawowych ram wielopiętrowych metoda, pozwalająca na uwzględnienie obciążeń przykładanych do różnych schematów statycznych przez rozwiązanie jednego schematu statycznego i jej zastosowanie do ram sprężonych [72] i [76] była tematem mojej pracy doktorskiej.

W przypadku belki dwuprzęsłowej /rys.15/ sprężenie kablem o stałym mimośrodku -e powoduje powstanie reakcji podporowych, jak na rys. 15a [44] i rozkład momentów wzbudzonych, jak na rys. 15b, o wartościach w prześle 1-2:

$$(6) \quad M_{wz}(x) = \frac{A}{2} x$$



W analizie sprężystej konstrukcji momenty wzbudzone uwzględnia się dodając je do momentów od sprężenia wyznaczonych jak dla belki izostatycznej. Jeżeli przez  $y$  oznaczymy rzędne trasy kabla to w ogólnym przypadku moment  $M(x)$  od sprężenia siłą  $S$  w odległości  $x$  od podpory 1 będzie wynosił:

$$(7) \quad M(x) = S y + M_{wz}(x)$$

Przy projektowaniu wygodniej jest posługiwać się linią ciśnienia od sprężenia o rzędnych  $Y$ . Otrzymujemy ją poprzez zastąpienie działania momentu od sprężenia określonego wzorem (7) przez działanie siły  $S$  na ramieniu  $Y$ , czyli z równania:

$$(8) \quad S Y = S y + M_{wz}(x)$$

w postaci:

$$(9) \quad Y = y + \frac{M_{wz}(x)}{S}$$

Z wzorów (6) i (9) wynika, że linia ciśnienia jest przesunięta w stosunku do trasy kabla o wielkość będącą funkcją liniową  $x$ .

Posługiwanie się linią ciśnienia od sprężenia jest w niektórych przypadkach bardzo dogodnie. Ma to miejsce między innymi w belkach ciągłych, w których linia ciśnienia posiada tę samą krzywiznę i te same mimośrodki na podporach skrajnych co trasa kabla, a jej mimośrodki na podporach pośrednich zależą jedynie od mimośrodków trasy kabla na podporach skrajnych.

Pozwala to, przy zachowaniu ustalonej potrzebami projektowymi linii ciśnienia od sprężenia, na dowolną transformację liniową trasy kabla bez zmiany położenia punktów jego zakotwień końcowych [29].

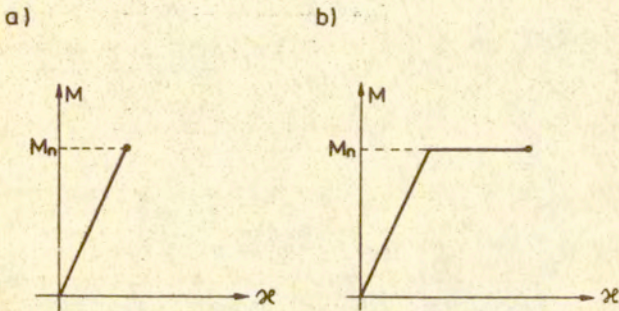
Na rys. 15c przedstawiono trasy kabli o różnych mimośrodkach na podporze środkowej i jednakowych  $y = -e$  na podporach skrajnych. Trasom tym odpowiada ta sama linia ciśnienia o mimośrodkach  $Y = -e$  na podporach skrajnych i  $Y = +\frac{e}{2}$  na podporze środkowej. Trasę pokrywającą się z linią ciśnienia nazywamy trasą współbieżną kabla /por. np. [72] /.

Przy ocenie nośności sprężonych betonowych i żelbetonowych belek statycznie niewyznaczalnych dogodnie jest sprowadzić

obliczenia do dwóch przypadków "skrajnych" : belek słabo odkształcalnych /przebrojonych/, których przekroje niszcą się wskutek zmiążdżenia strefy ściskanej betonu oraz belek silnie odkształcalnych /o umiarkowanym lub słabym uzbrojeniu/, których przekroje ulegają zniszczeniu wskutek osiągnięcia przez stal granicznych odkształceń [44]. W obu przypadkach nośność samych przekrojów /momenty niszczące  $M_n$  / wyznacza się jak dla ustroju izostatycznego przyjmując, że siła  $S$  działa w miejscu jej przyłożenia, tj. na ramieniu równym rzędnej  $y$  trasy kabla. Dla każdego przekroju można przy tym wyznaczyć dwa momenty niszczące - dodatni i ujemny i wykreślić obwiednie tych momentów.

Belki słabo odkształcalne niszcą się, gdy niszczy się przekrój w którym moment zginający najwcześniej osiąga wartość momentu granicznego  $M_n$ .

Zależność między momentem zginającym  $M$  a krzywizną  $\alpha$  belki w tym przekroju jest aż do osiągnięcia wartości  $M_n$  niemal liniowa. Idealizację tej zależności przedstawia rys. 16a.



Rys. 16

W belkach tych rozkład momentów zginających w fazie zniszczenia oblicza się /traktując ustrój jako hiperstatyczny/ na podstawie teorii liniowo-sprężystej [44]. Momenty wzbudzone muszą być zatem w rozkładzie tym uwzględnione. Wielkość obciążenia niszczącego wyznacza się z przyrównania występującego

w najbardziej wyteżonym przekroju ekstremalnego momentu zginającego do odpowiedniego momentu niszczącego.

Dla belki obciążonej ciężarem własnym  $g$  i użytkowym  $p$  wyznacza się  $jQ$  z równania:

$$(10) \quad M = M_g + M_p + M_{wz} \leq M_n$$

gdzie  $M_g$  i  $M_{wz}$ , jako momenty  $M_g$  - od ciężaru własnego i  $M_{wz}$  - wzbudzony od sprężenia są znane, a  $M_p$  jest funkcją poszukiwanej wartości granicznej  $p=p_n$  ciężaru użytkowego.

W sprężonych betonowych i żelbetowych belkach silnie odkształconych występuje, podobnie jak w ustrojach stalowych, redystrybucja momentów zginających w miarę pojawiania się wąskich stref bardzo odkształconych, dających się porównać do przegubów plastycznych. Idealizację zależności między momentem zginającym a krzywizną przedstawia dla omawianych belek rys.16b. Przy obliczaniu nośności tych belek wskazane jest stosowanie hipotezy przegubów plastycznych, prowadzi ono bowiem do bardziej ekonomicznych rozwiązań.

Według tej hipotezy zniszczenie belki nastąpi, gdy powstanie w niej wystarczająca liczba przegubów plastycznych, wskutek czego zmieni się ona lub jej część w mechanizm /por. p. 1.3.4 rozprawy /. W tak pojętym procesie zniszczenia momenty wzbudzone od sprężenia nie mają swego udziału, bowiem rozkład momentów w stadium zniszczenia /wystąpienie w przegubach momentów zginających o wartościach równych  $M_n$  / jest niezależny od rozkładu momentów w fazie sprężystej pracy konstrukcji.

Szczegółowe omówienie przedstawionych metod wyznaczania obciążenia niszczącego i zasad projektowania sprężonych betonowych i żelbetowych belek ciągłych można znaleźć np. w [44].

Ogólnie rzecz biorąc możemy powiedzieć, że zastosowanie sprężenia nie tylko wpływa na przesunięcie zakresu sprężystej pracy konstrukcji i przez zwiększenie nośności przekrojów na zwiększenie jej udźwigu, ale przeciwdziałając powstaniu rys /poprzez likwidację, bądź zmniejszenie naprężeń rozciągających/ i ograniczając wielkości ugięć wpływa również na podniesienie jej wartości użytkowych.

1.6. Konstrukcje z naprężeniami wstępnymi wywołanymi działaniem obciążeń wielokrotnie zmiennych.

Metody teorii plastyczności wyznaczania obciążeń granicznych dopuszczają powstanie w konstrukcji pod wpływem działania obciążeń bezpiecznych /dopuszczalnych/ pewnych stref uplastycznienia /rys.9a/, a nawet możliwość utworzenia się przegubów plastycznych /rys.9b/ w niektórych przekrojach krytycznych. Dla konstrukcji prętowych poddanych jednokrotnemu działaniu narastających proporcjonalnie obciążeń, ulegających zniszczeniu dopiero po wytworzeniu się dostatecznej liczby przegubów plastycznych, wystąpienie takich stref nie jest niebezpieczne. Ich powstanie może natomiast zagrażać bezpieczeństwu konstrukcji, gdy działają na nią obciążenia wielokrotnie zmiennie. Wynika to z faktu, że konstrukcja, w której wystąpiły odkształcenia plastyczne, nie powraca naogół po jej odciążeniu do stanu pierwotnego. Nawet dla zerowych obciążeń pozostają w niej: pewien stan odkształceń i związany z nim stan naprężeń resztkowych.

W zależności od programu działających obciążeń konstrukcja może pod ich wpływem ulec zniszczeniu wskutek narastania odkształceń plastycznych /zniszczenie przyrostowe/, bądź wskutek występowania cykli odkształceń plastycznych przeciwnych znaków /zmęczenie niskocyklowe/.

Konstrukcja nie ulegnie zniszczeniu, a przystosuje się do zadanego programu obciążenia, gdy odkształcenia trwale ustabilizują się, a powstałe w początkowych cyklach naprężenia resztkowe superponowane z naprężeniami od obciążeń zewnętrznych zredukują naprężenia całkowite do wielkości mniejszych od granicy plastyczności  $\sigma_0$ , prowadząc w dalszych cyklach do czysto sprężystej pracy konstrukcji.

Dla rozpatrywanego cyklu pewnego programu obciążeń stan naprężeń resztkowych powstały w trakcie poprzedzających go cykli stanowi stan naprężeń wstępnych. W przypadku przystosowania się konstrukcji do zadanego programu obciążeń stan ten odgrywa podobną rolę do roli jaką odgrywają wstępne naprężenia od sprężenia. Przekonamy się o tym w toku dalszych rozważań.

Rozpatrzmy pracę przekroju  $b \times 2H$  idealnie sprężysto -

Plastycznej belki poddanej czystemu zginaniu.

Wykres zależności między naprężeniami a odkształceniami dla materiału idealnie sprężysto - plastycznego w jednoosiowym stanie naprężenia przedstawia rys.7.

Przekrój zachowuje się sprężysto gdy naprężenia  $\sigma$  w każdym jego włóknie spełniają nierówność:

$$(11) \quad -\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$$

W tym zakresie rozkład naprężeń /rys.9c/ w zależności od momentu zginającego  $M$  i odległości  $z$  włókna od osi obojętnej belki wyraża się znanym wzorem:

$$(12) \quad \sigma = \frac{Mz}{I}$$

a zależność między naprężeniami a odkształceniami, zgodnie z prawem Hooke'a, ma postać:

$$(13) \quad \sigma = \epsilon E$$

Przy wzroście momentu powyżej wartości  $\max M_g$  pojawią się w częściach skrajnych przekroju /rys.9 d/ naprężenia równe granicy plastyczności:

$$(14) \quad |\sigma| = \sigma_0$$

Gdy moment osiągnie wartość  $M_0$  cały przekrój ulegnie uplastycznieniu /rys.9e/.

Jeśli środkowa część przekroju pozostaje sprężysta odkształcenia w pozostałych zewnętrznych częściach są skończone i wyznaczyć je można z obowiązującego tu założenia płaskich przekrojów. Gdy cały przekrój ulega uplastycznieniu odkształcenia stają się nieograniczone.

We włóknach przekroju, w których powstały trwałe odkształcenia plastyczne zależność  $\sigma - \epsilon$  dla obciążania i odciążania przestaje być wzajemnie jednoznaczna /rys.7/. Temu samemu naprężeniu mogą odpowiadać różne odkształcenia i odwrotnie.

---

\* Omówienie występujących w tym punkcie oznaczeń zawierają p.1.3.3 i 1.3.4 rozprawy.

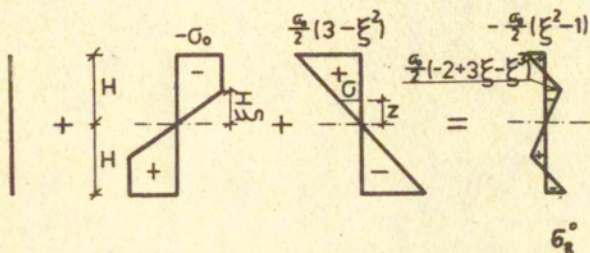


Pola naprężeń i odkształceń w I cyklu obciążenia i odciążenia  
 przekroju momentem zginającym  $M_{sp} = \sigma_0 b h^2 / 1 - \frac{\xi^2}{3} / > \max M_s$

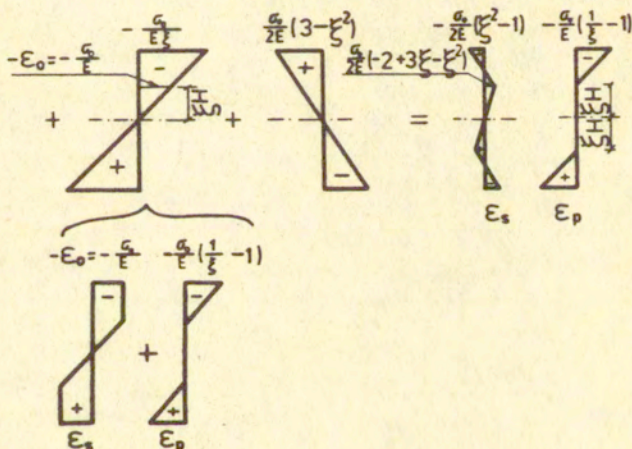
I cykl obciążenia

Stan	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
Obciążenie	0	+	$M_{sp}$	-
Odciążenie	0	+	$M_{sp}$	= 0

Wykresy naprężeń



Wykresy odkształceń



Rys. 17

Na rys 17 przedstawiono wykresy naprężeń i odkształceń w pierwszym cyklu obciążenia i odciążenia belki momentem sprężysto-plastycznym  $M_{sp}$ , większym od maksymalnego momentu sprężystego  $\max M_s = \sigma_o W$  i mniejszym od momentu granicznego  $M_o = \sigma_o W_{pl}$ . Moment ten, zgodnie z rozkładem naprężeń i oznaczeniami z rys. 17 $\beta$ , jest równy:

$$(15) \quad M_{sp} = \sigma_o b H^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{3}\right)$$

Rys. 17  $\alpha$  przedstawia wstępny stan naprężeń i odkształceń  $\sigma = 0$  i  $\epsilon = 0$  przekroju nieobciążonego. Rys. 17 $\beta$  i 17 $\gamma$  rozkłady naprężeń i odkształceń od obciążenia i odciążenia momentem  $M_{sp}$ . Rys. 17  $\delta$  przedstawia pozostałe w przekroju po jego odciążeniu, otrzymane z superpozycji stanów 17  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  naprężenia reszkowe  $\sigma_r^o$ , odkształcenia sprężyste  $\epsilon_s$  i trwałe odkształcenia plastyczne  $\epsilon_p$ . Naprężenia reszkowe są samorzównoważone bowiem:

$$(16) \quad \int_A \sigma_r^o dA = 0 \text{ oraz } \int_A \sigma_r^o z dA = 0$$

gdzie  $A$  jest polem przekroju.

Zgodnie z wykresem z rys. 7 odciążenie przekroju momentem  $M_{sp}$  przebiegło czysto sprężysto. Odpowiedni rozkład naprężeń /rys. 17  $\gamma$  / otrzymano z zależności (12).

Przedstawione na rys. 17  $\delta$  wykresy odkształceń i naprężeń reszkowych stanowią wstępne stany odkształceń i naprężeń dla drugiego cyklu obciążenia /rys. 18  $\alpha$ /. Dzięki ich istnieniu powtórne obciążenie przekroju momentem  $M_{sp}$  /rys. 18  $\beta$  / przebiega już czysto sprężysto. W przekroju nie pojawiają się nowe odkształcenia trwałe.

W rozpatrywanym przypadku, w wyniku powstania w pierwszym cyklu obciążenia naprężeń reszkowych, wywołanych obecnością odkształceń plastycznych, belka przystosowała się do obciążenia zewnętrznego w postaci momentu zginającego zmieniającego się w przedziale  $0 \leq M \leq \sigma_o b H^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{3}\right)$ .

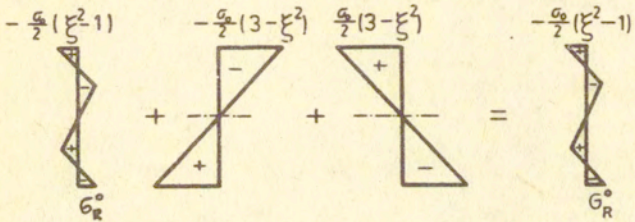
Rys. 19 ilustruje zmiany naprężeń i odkształceń w dolnym skrajnym włóknie przekroju powstałe w pierwszym i drugim cyklu obciążenia i odciążenia momentem  $M_{sp}$ .

Pola naprężeń i odkształceń w II cyklu obciążenia i odciążenia przekroju momentem zginającym  $M_{sp} = \sigma_0 b h^2 / 1 - \frac{\sigma_0}{3} / > \max M_s$

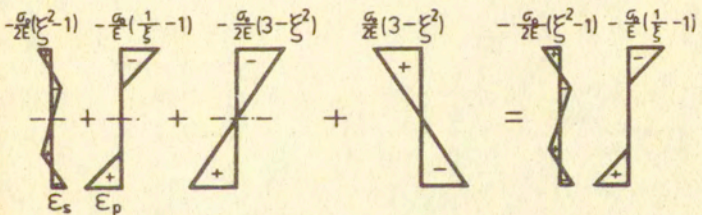
## II cykl obciążenia

Stan	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
Obciążenie	0	+ $M_{sp}$	- $M_{sp}$	= 0

Wykresy naprężeń



Wykresy odkształceń



Rys. 18

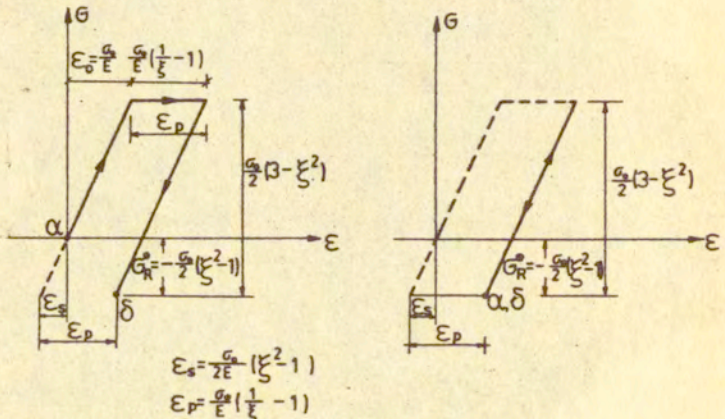
Na rys 20 przedstawiono przypadek dwukrotnego obciążenia i odciążenia przekroju momentem granicznym  $M_0 = \sigma_0 W_{pl}$ . Tak jak i poprzednio odciążenie w pierwszym cyklu oraz powtórne obciążenie i odciążenie w drugim przebiegły czysto sprężysto. Przekrój przystosował się do obciążenia zewnętrznego momentem zmieniającym się w przedziale  $0 \leq M \leq M_0$ .

Podobnie jak w przekrojach sprężonych obecność wstępnych naprężeń, korzystna w rozpatrywanym przypadku dla momentów dodatnich, okazała się niekorzystna dla momentów ujemnych. Obszar  $-\max M_S \leq M \leq \max M_S$  /rys.20  $\varphi_1$  /, zawierający przy braku naprężeń resztkowych  $\sigma_r^0$  obciążenia gwarantujące sprężyste zachowanie się przekroju, po wprowadzeniu tych naprężeń przesunął się zawierając momenty  $-0,5 \max M_S \leq M \leq 1,5 \max M_S$  /rys. 20  $\varphi_2$  /.

Naprężenia i odkształcenia w dolnym skrajnym włóknie przekroju w I i II cyklu obciążenia :  $\alpha$  - w stanie początkowym , tj. gdy  $M = 0$  ;  $\delta$  - w stanie końcowym , tj. po obciążeniu i odciążeniu momentem  $M_{sp} = \sigma_0 b h^2 / 1 - \frac{\sigma_0^2}{3}$

a) I cykl obciążenia

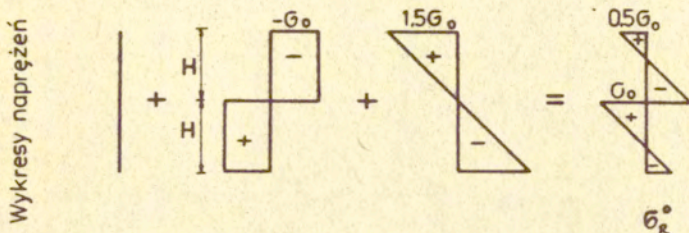
b) II cykl obciążenia



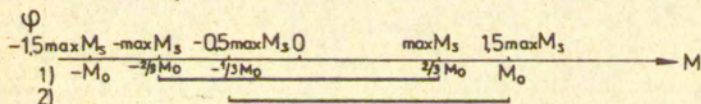
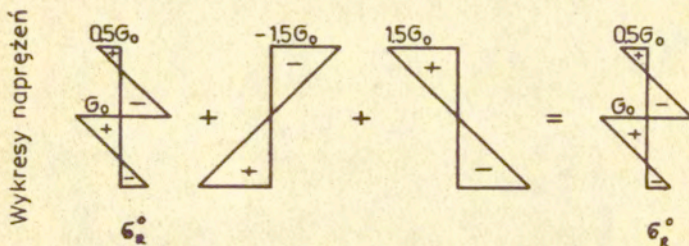
Rys. 19

Stan	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
Obciążenie w cyklach I i II	0	+ $M_0$	- $M_0$	= 0

### I cykl obciążenia



### II cykl obciążenia



$\alpha$  - wstępny stan naprężeń

$\beta$  - rozkład naprężeń od ekstremalnego momentu zginającego:  $M_0 = 1,5\max M_s$

$\gamma$  - rozkład naprężeń od ekstremalnego momentu zginającego:  $-M_0 = -1,5\max M_s$

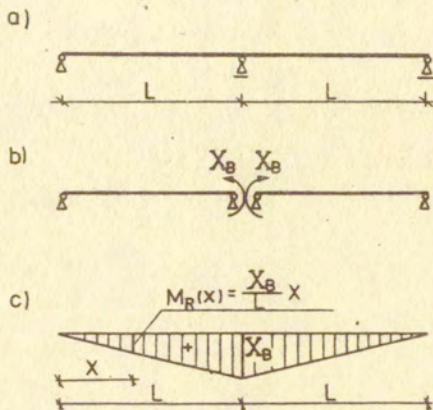
$\delta$  - rozkład naprężeń resztkowych otrzymany przez superpozycję wykresów  $\alpha, \beta, \gamma$

$\psi$  - granice obciążeń zewnętrznych gwarantujących sprężyste zachowanie się konstrukcji :

1/w przypadku braku naprężeń resztkowych, 2/w przypadku ich istnienia - równe granicom nieniszczących obciążeń zewnętrznych.

Rys. 20

W konstrukcji statycznie niewyznaczalnej, pod wpływem obciążenia jej poza zakres sprężysty, powstaje pole momentów zginających różniące się od pola w analogicznej konstrukcji znajdującej się w zakresie czysto-sprężystym. Różnicę tę stanowi pole samozrównoważonych, tj. będących w równowadze z zerowymi obciążeniami, momentów reszkowych  $M_R(x)$ .



Rys. 21

Dla belki dwuprzęsłowej /rys. 21 a/ jedyne statycznie dopuszczalne pole momentów reszkowych  $M_R(x)$  /rys.21 c/ ma postać analogiczną do rozkładu momentów wzbudzonych  $M_{wz}$  od sprężenia /rys. 15b/. Wykres momentów  $M_R(x)$  przedstawiono tu w funkcji momentu  $X_B$  wzajemnego oddziaływania na siebie przęseł A-B i B-C /rys.24b/. Moment  $M_R(x)$  w przęśle A-B zapisać można wzorem:

$$(17) \quad M_R(x) = \frac{X_B}{L} x$$

Gdy belka obciążona jest ciężarem stałym  $g$  i obciążeniem wielokrotnie zmiennym  $p$  wyznaczenie pola momentów reszkowych  $M_R(x)$  oraz obciążenia niszczonego  $p_n$  będzie polegało na spełnieniu w najbardziej niebezpiecznych przekrojach " i "

następujących nierówności:

$$(18) \quad \begin{aligned} \max M_i &= M_{gi} + \max M_{pi} + M_{Ri} \leq M_{oi} \\ \min M_i &= M_{gi} + \min M_{pi} + M_{Ri} \geq -M_{oi} \end{aligned}$$

gdzie  $M_{gi}$  są to sprężyste momenty w przekroju "i" od ciężaru stałego, przemnożonego przez współczynnik bezpieczeństwa, a  $\max M_{pi}$  i  $\min M_{pi}$  momenty sprężyste: maksymalny i minimalny w tym przekroju od poszukiwanej wartości granicznej  $p = p_n$  obciążenia zmiennego. Nierówności (18) stanowią podstawę sformułowanego przez Bleicha i podanego w p. 3.1. niniejszego opracowania twierdzenia statycznego teorii przystosowania.

Z analizy rysunków 13 i 20 wynika, że zarówno naprężenia wstępne  $\sigma_w$  wywołane sprężeniem, jak i powstałe w wyniku trwałych odkształceń naprężenia resztkowe  $\sigma_R^o$  mogą spowodować korzystne przesunięcie zakresu zawierającego obciążenia zewnętrzne gwarantujące sprężyste zachowanie się przekroju. Na przesunięcie zakresu zawierającego obciążenia zewnętrzne gwarantujące sprężyste zachowanie się statycznie niewyznaczalnych konstrukcji poddanych zginaniu mają również wpływ odpowiednio momenty wzbudzone od sprężenia  $M_{wz}$  i momenty resztkowe  $M_R$  oraz związane z nimi naprężenia  $\bar{\sigma}_w$  i  $\bar{\sigma}_R$  o rozkładzie liniowym zgodnym z (12). W niektórych przypadkach, poza przesunięciem, zakres ten może podlegać dodatkowym ograniczeniom powodującym jego zmniejszenie.

Korzystne przesunięcie zakresu zawierającego nieniszczące wartości obciążeń zewnętrznych jest możliwe jedynie przez zastosowanie sprężenia /por.rys.14/. Sprężenie to, odpowiednio wprowadzone, może spowodować żądany wzrost niszczących przekroje dodatnich, bądź ujemnych momentów  $M_n$ , a tym samym wzrost nośności całej konstrukcji. Natomiast naprężenia resztkowe  $\sigma_R$  nie mogą podwyższyć nośności przekroju, ani konstrukcji. Ich działanie /por.rys.20 i (18) / powoduje bowiem w większości przypadków zmniejszenie tych nośności zawężając zakres zawierający obciążenia nieniszczące do wielkości równej zakresowi obciążeń zewnętrznych gwarantujących sprężyste zachowanie się konstrukcji. Zwiększenie obciążeń poza granice tego zakresu powoduje przyrost odkształceń trwałych, bądź zmęczenie plastyczne i w konsekwencji zniszczenie konstrukcji.

2. Analiza nośności i rozwiązanie problemu optymalnego projektowania kablobetonowych przekrojów prostokątnych poddanych działaniu obciążeń stałych w postaci sił podłużnych i momentów zginających przy uwzględnieniu ograniczonej odkształcalności plastycznej materiału. Nośność kablobetonowych ram portalowych.

2.1. Założenia i twierdzenia teorii nośności granicznej.

Teoria nośności granicznej obejmująca przypadki proporcjonalnie narastających obciążeń jednokrotnych, zdobyła z metod plastycznej analizy i projektowania konstrukcji najszersze zastosowanie. Jej podstawy w usystematyzowanej formie zostały podane przez D.C.Druckera, W.Pragera i J.H.Greenberga w [19]. Jej założenia, twierdzenia i metody rozwiązań zawierają liczne monografie i opracowania [16, 31, 33, 37, 62, 64, 92, 106, 107, 109].

Pomijając efekt wzmocnienia i stosując model ciała idealnie plastycznego, dość dobrze oddający rzeczywiste zachowanie się wielu materiałów konstrukcyjnych /metale/, teoria ta przedstawia metody określania intensywności obciążenia, przy której rozpoczyna się plastyczne płynięcie konstrukcji i zmiana jej w mechanizm. Oznacza to osiągnięcie przez konstrukcję stanu granicznego nośności, w którym odkształcenia mogą narastać bez przyrostu obciążenia. Twierdzenia teorii nośności granicznej zostały wyprowadzone w oparciu o założenie geometrycznej linowości konstrukcji; deformacje zostały uznane za dostatecznie małe, aby wpływ ich na równania równowagi układu mógł być pominięty.

Odpowiadającą przyjętym założeniom idealizację rzeczywistego wykresu zależności między obciążeniem a ugięciem przedstawiono na rys.1 linią łamaną ODC. Linia ta dotyczy zachowania się konstrukcji wykonanych z materiałów o własnościach idealnie sztywno-plastycznych, jednakże położenie odcinka DC, określające obciążenie niszczące, nie ulegnie zmianie, jeśli uwzględnimy także i małe odkształcenia sprężyste.

Wyznaczenie ścisłego /zupełnego/ rozwiązania problemu nośności granicznej konstrukcji, tj. spełniającego wszystkie nałożone na konstrukcję naprężeniowe i kinematyczne warunki, jest praktycznie możliwe tylko dla niektórych typów konstrukcji. Dlatego też zostały opracowane metody przybliżone umożliwiające określenie



granic przedziału, w którym zawarte jest rzeczywiste obciążenie niszczące. Są to metody kinematyczna i statyczna wynikające odpowiednio z twierdzeń kinematycznego i statycznego teorii nośności granicznej.

Twierdzenie kinematyczne w zastosowaniu do płaskich konstrukcji prętowych /belki, ramy, ruszty/ można sformułować następująco:

"Jeżeli dla kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia wyznaczmy odpowiadające im wartości obciążeń niszczących, to najmniejsza z otrzymanych wartości będzie najlepszą górną oceną nośności granicznej konstrukcji".

Wartość ta odpowiada właściwemu dla danej konstrukcji i obciążenia mechanizmowi zniszczenia /por.p.1.3.4 rozprawy/. Aby mechanizm ten wyznaczyć wystarczy rozpatrzyć mechanizmy podstawowe i łączone o jednym stopniu swobody.

W przypadku pominięcia wpływu, jaki na stan graniczny przekroju mają inne - poza momentem zginającym  $M$  - siły wewnętrzne, wyznaczamy obciążenie niszczące, pod wpływem którego konstrukcja, bądź jej część zmieniła się w mechanizm o  $m$  przegubach plastycznych i o kątach  $\theta_i$  obrotu w tych przegubach korzystając z zasady prac przygotowanych zapisanej w postaci:

$$(19) \quad \sum_{i=1}^m M_{oi} |\theta_i| = \sum_{j=1}^k P_j \Delta_j$$

gdzie  $M_{oi}$  są momentami granicznymi przekrojów "i" na zginanie momentami zgodnymi z kierunkiem obrotów  $\theta_i$ ,  $P_j$  są siłami zewnętrznymi, a  $\Delta_j$  są przemieszczeniami punktów przyłożenia tych sił w kierunku ich działania.

Twierdzenie statyczne głosi :

"Jeżeli dla statycznie dopuszczalnych pól momentów zginających wyznaczmy odpowiadające im wartości obciążeń, to największa z otrzymanych wartości będzie najlepszą dolną oceną nośności granicznej konstrukcji".

Moment zginający w dowolnym przekroju "i" konstrukcji  $n$  - krotnie statycznie niewyznaczalnej można przedstawić w postaci sumy:

$$(20) \quad M_i = M_i^o + \left( \sum_{j=0}^n m_j^o X_j \right)_i$$

gdzie  $M_i^0$  oznacza moment od obciążeń zewnętrznych obliczony jak dla ustroju izostatycznego, a  $m_j^0$  są to momenty od wielkości nadliczbowych  $X_j = 1$ .

Warunek statycznej dopuszczalności pola momentów zginających jest zachowany, jeśli momenty  $M_i$  spełniają równania równowagi oraz gdy zarówno w założonych przegubach plastycznych, jak i pozostałych przekrojach krytycznych nie przekraczają momentów granicznych, tzn. gdy jest spełniona nierówność:

$$(21) \quad -M'_{oi} \leq M_i \leq M_{oi}$$

gdzie  $M_{oi}$  i  $M'_{oi}$  są momentami granicznymi przekroju "i" odpowiednio na zginanie momentami dodatnimi i ujemnymi.

Gdy konstrukcja ulega całkowitemu zniszczeniu momenty zginające osiągają warunek plastyczności  $M_i = -M'_{oi}$ , bądź  $M_i = M_{oi}$  w  $n + 1$  przegubach plastycznych. Dysponujemy wtedy układem  $n + 1$  równań algebraicznych do wyznaczenia  $n$  wielkości nadliczbowych oraz obciążenia niszczącego. Założone pole momentów zginających jest polem dopuszczalnym jeśli nierówność (21) jest spełniona w pozostałych przekrojach krytycznych.

Uzyskanie rozwiązania zupełnego problemu nośności konstrukcji prętowej polega na wyznaczeniu właściwego mechanizmu jej zniszczenia, wartości obciążenia niszczącego oraz stowarzyszonego z tym mechanizmem /tj. spełniającego w przegubach równanie (21) / statycznie dopuszczalnego pola momentów zginających.

Zastosowanie podejścia kinematycznego prowadzi w szybki sposób do oszacowania od góry wielkości obciążenia niszczącego i odpowiadającego mu właściwego dla danej konstrukcji i obciążenia mechanizmu zniszczenia ale nie daje bezpośredniej informacji o rozkładzie momentów zginających w konstrukcji. Zastosowanie podejścia statycznego umożliwia jednocześnie uzyskanie dolnej oceny wielkości obciążenia niszczącego i rozkładu sił wewnętrznych.

W teorii nośności granicznej konstrukcji prętowych możliwe jest uzyskanie rozwiązania zupełnego, istnieje bowiem wzajemne uzależnienie podejść statycznego i kinematycznego: z właściwym mechanizmem zniszczenia konstrukcji stowarzyszone jest statycznie dopuszczalne pole momentów zginających.

Metody wyznaczania obciążenia niszczącego, mechanizmów zniszczenia i rozkładu sił wewnętrznych w stadium zniszczenia konstrukcji, bazujące na twierdzeniach teorii nośności granicznej, zostały przedstawione między innymi w pracach [37,38,109]. Wyznaczone tymi metodami obciążenie niszczące, będące nośnością "idealną", tj. maksymalnym obciążeniem jakie konstrukcja może przenieść, odpowiada stanowi pełnego uplastycznienia określonej liczby najbardziej wyciężonych przekrojów. Sformułowane w ten sposób kryterium zniszczenia przekroju nosi nazwę naprężeniowej hipotezy zniszczenia.

Przedstawione w pracach [73,74,75,77,78,79] rozwiązania, dotyczące analiz wytrzymałościowych mimośrodowo obciążonych kablobetonowych przekrojów i kablobetonowych ram, przeprowadziłam przyjmując odkształceniową hipotezę zniszczenia przekroju, według której o nośności przekroju decyduje osiągnięcie granicznych odkształceń.

Przy określeniu nośności tych konstrukcji <sup>został</sup> uwzględniony wpływ sił podłużnych na nośność przekrojów.

2.2. Kryterium odkształceniowe zniszczenia przekroju oparte na modelu ciała idealnie sprężysto-plastycznym z ograniczoną odkształcalnością plastyczną.

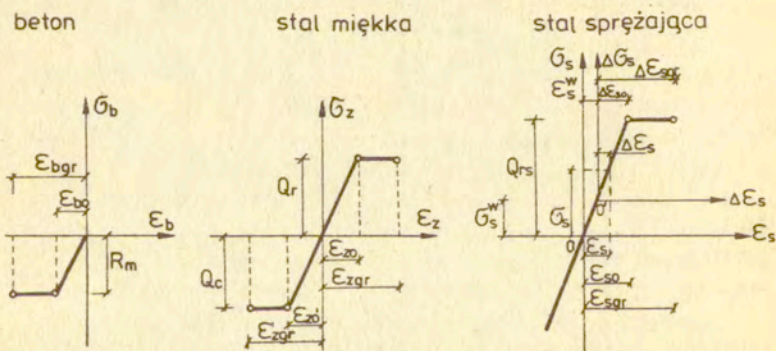
Obszary  $\Omega_c$  zawierające nieniszczące wartości sił podłużnych i momentów zginających wyznaczone dla kablobetonowych przekrojów prostokątnych.

W konstrukcjach betonowych, żelbetowych i sprężonych wystąpienie nadmiernych odkształceń może spowodować zniszczenie przekrojów krytycznych przed osiągnięciem ich całkowitego uplastycznienia, a tym samym zniszczenie konstrukcji przed osiągnięciem nośności "idealnej", tj. intensywności obciążenia granicznego odpowiadającej rozwiązaniom teorii nośności granicznej.

Zjawisko to ma istotne znaczenie w przypadkach konstrukcji poddanych działaniu momentów zginających i sił podłużnych. Potrzeba określenia rzeczywistego udźwigu takich konstrukcji stała się powodem przyjęcia przez przepisy międzynarodowe [95], [42] oraz w moich pracach [73] i [79] dla konstrukcji betonowych, żelbetowych i sprężonych modelu ciała idealnie sprężysto-

plastycznego z ograniczoną odkształcalnością plastyczną/rys.6/ oraz sformułowania odmiennego od stosowanego w teorii nośności granicznej kryterium zniszczenia przekroju. Kryterium to, nazwane w pracach [73] i [79] hipotezą odkształconą zniszczenia, przyjmuje za stan zniszczenia przekroju osiągnięcie przez co najmniej jedno włókno, przez skrajne włókno betonu, przez rozciągane zbrojenie miękkie, bądź przez stal sprężającą, granicznych odkształceń ekstremalnych, osiągnięcie bowiem tych odkształceń w wystarczającej liczbie przekrojów może sprawić, że konstrukcja staje się niezdatną do dalszej eksploatacji. Wielkości tych granicznych odkształceń, ustalane na drodze doświadczalnej i ulegające zmianom w miarę rozwoju badań podają prace [96, 39, 95, 12]. Obowiązujące w trakcie opracowywania prac [73] i [79] przepisy międzynarodowe CEB-FIP [95] ustaliły następujące wartości granicznych odkształceń sprężystych  $\epsilon_0$  i granicznych odkształceń ekstremalnych  $\epsilon_{gr}$ . Dla stali sprężającej i zbrojenia miękkiego przyjęto  $|\epsilon_0| = \frac{\sigma_{gr}}{E}$ ,  $|\epsilon_{gr}| = 0,01$ . Dla betonu w przypadku aproksymowania zależności  $\sigma-\epsilon$  wykresem bilinearnym przyjęto: przy zginaniu  $|\epsilon_{b0}| = 0,00135$ ,  $|\epsilon_{bgr}| = 0,003$ , przy ściskaniu osiowym  $|\epsilon_{bgr}| = |\epsilon_{b0}| = 0,00135$ .

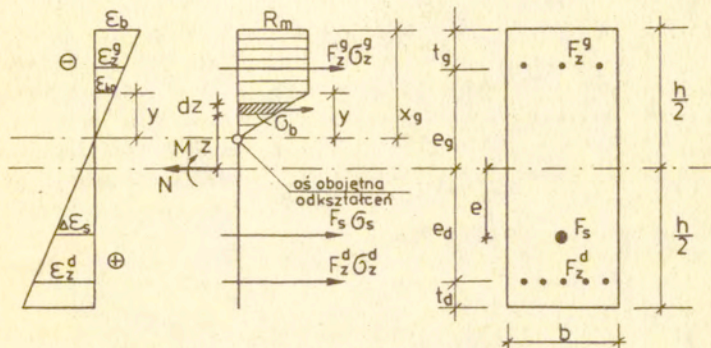
Poza przyjętymi w odkształceniowym kryterium zniszczenia, a przedstawionymi na rys.22 założeniami idealnie sprężysto-plas-



Rys.22

tycznego zachowania się betonu, stali miękkiej i stali sprężającej przyjęto założenie płaskich przekrojów oraz przyjęto, że odkształcenia w stali miękkiej i ich przyrost w stali sprężającej równe są odkształceniom przyległego do nich betonu. Ostatnie założenie ogranicza zakres zastosowań przyjętego kryterium do konstrukcji sprężonych kablami nieiniekowanymi<sup>x/</sup>.

Przyjęty w moich pracach [73] i [79] rozkład naprężeń ściskających w betonie przedstawia rys.23. Wytrzymałość betonu na rozciąganie została pominięta. Siły ściskające, skrócenia betonu oraz  $R_m$  przyjęto w pracy [73] za dodatnie, w pracy [79]<sup>xx/</sup> /rys.23/ za ujemne.



Rys. 23

<sup>x/</sup> Przepisy międzynarodowe CEB-FIP [95] dopuszczają zastosowanie dla przekroju sprężonego kablem nieiniekowanym wyników otrzymanych dla przekroju sprężonego kablem iniekowanym po odpowiednim procentowym ich zmniejszeniu.

<sup>xx/</sup> Praca ta, dotycząca wytrzymałości obudowy reaktora atomowego, stanowi część opracowania wykonanego przez IPPT na zlecenie Energoprojektu.

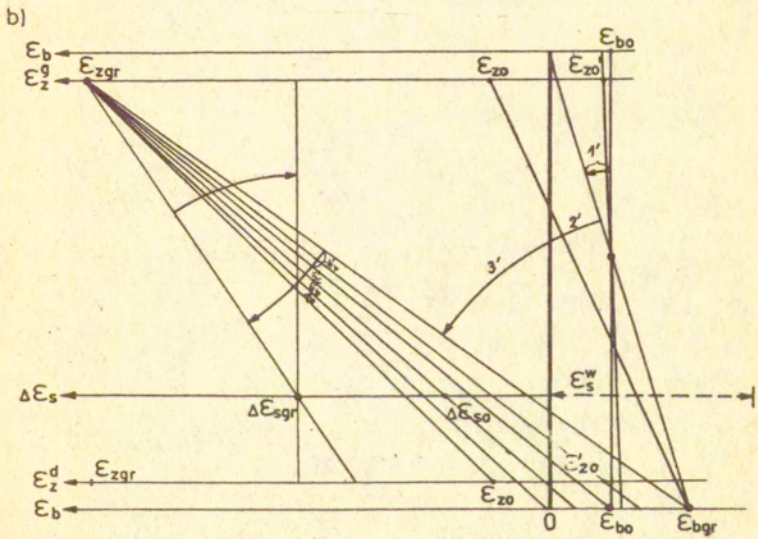
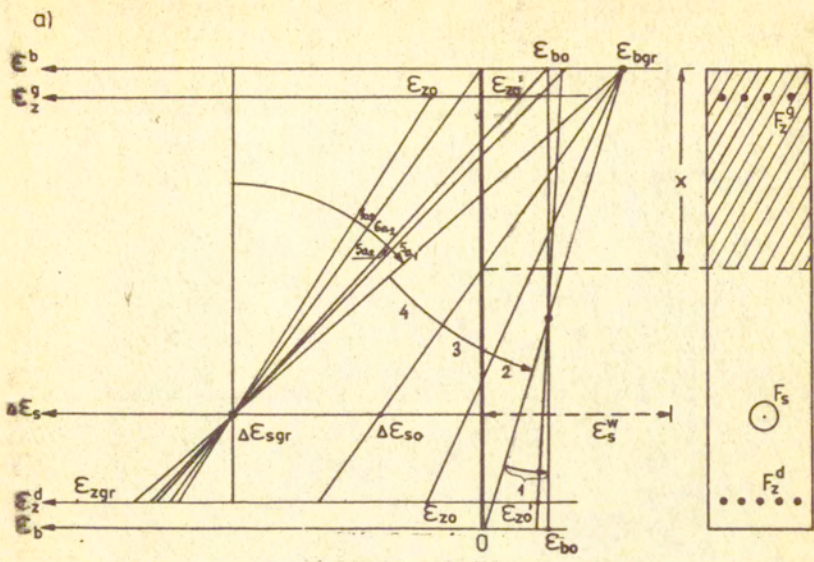
Ilustrację przyjętych założeń stanowią przedstawione na rys.24 wykresy odkształceń w stanach granicznych zniszczenia sprężonego przekroju żelbetowego podwójnie zbrojonego. W stanach tych o zniszczeniu decyduje osiągnięcie przez dolne lub górne włókno betonu, przez rozciągane zbrojenie miękkie, bądź przez stal sprężającą odkształceń granicznych. Poszczególne wykresy odkształceń rozgraniczają stany zniszczenia, w których wartości naprężeń w stali, bądź ich rozkład w betonie ulegają zmianie. Na rys.24a przedstawiono przypadki, w których różnice między odkształceniami skrajnych dolnych i skrajnych górnych włókien przekroju są dodatnie, na rys.24b, gdy różnice te są ujemne.

Podobne wykresy odkształceń posłużyły w pracach [73] i [79] do przeprowadzenia szczegółowej analizy stanów zniszczenia przekrojów: betonowego i żelbetowego podwójnie zbrojonego, sprężonych kablami iniektowanymi oraz do określenia naprężeń w betonie i stali. W pracach tych wyznaczono dla każdego stanu zniszczenia przekroju analityczne związki między niszczącymi wartościami sił podłużnych  $N$  i momentów zginających  $M$ , zwane zależnościami granicznymi. Zależności te otrzymano z warunków równowagi przekroju /por.rys.23/ o postaci ogólnej:

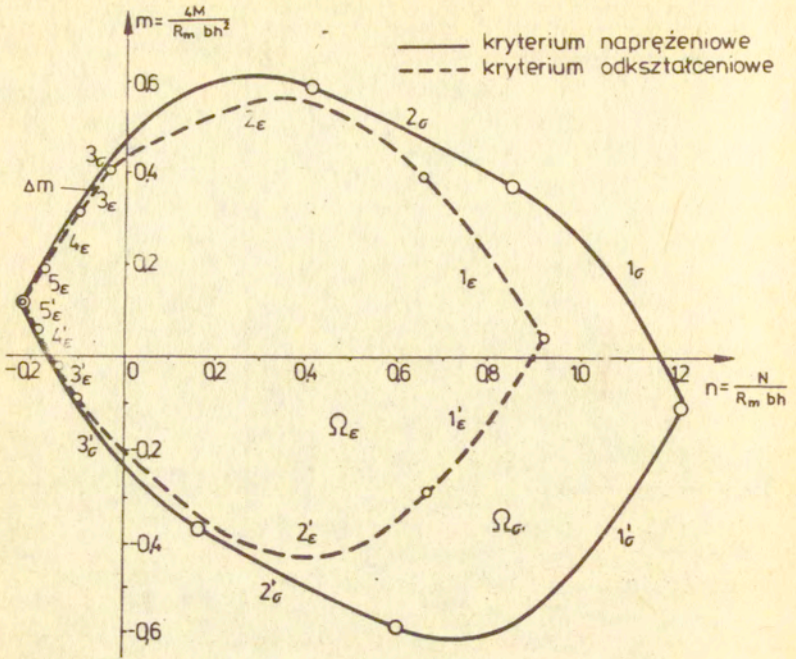
$$(22) \quad N = F_z^g \bar{\sigma}_z^g + F_z^d \bar{\sigma}_z^d + F_s \bar{\sigma}_s + \int_{\frac{h}{2}-x_i}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_b b dz$$

$$M = -F_z^g \bar{\sigma}_z^g e_g + F_z^d \bar{\sigma}_z^d e_d + F_s \bar{\sigma}_s e + \int_{\frac{h}{2}-x_i}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_b b z dz.$$

Znajdujące się na końcu rozprawy załączniki 1 i 2 zawierają wyprowadzone zależności graniczne oraz przyjęte oznaczenia. Na podstawie wyprowadzonych zależności wykreślono krzywe graniczne ograniczające obszary  $\Omega_E$  zmienności sił podłużnych i momentów zginających nie powodujących zniszczenia przekroju. Wyznaczona w [73] dla betonowego przekroju prostokątnego sprężonego kablem i przedstawiona na rys.25 krzywa graniczna opisana jest dziesięcioma różnymi funkcjami. Krzywa graniczna wyznaczona w [79] dla podwójnie zbrojonego betonowego przekroju prostokątnego sprężonego kablem /rys.26/ opisana jest szesnastoma funkcjami. Z pewnością wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością krzywe te można



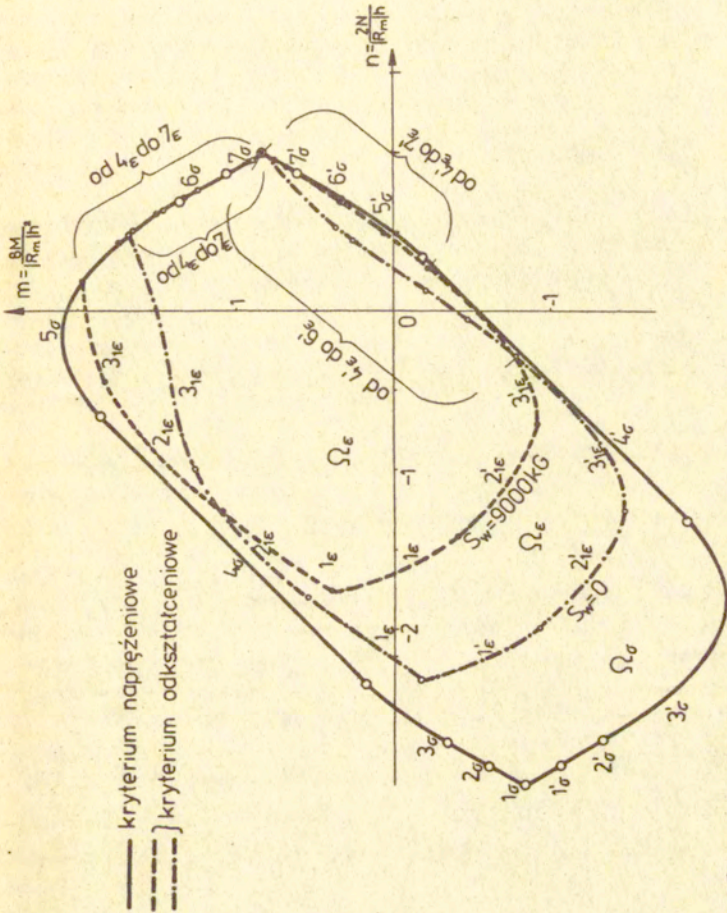
Rys. 24



Obszary  $\Omega_\sigma$  i  $\Omega_\epsilon$  wyznaczono dla następujących wartości:  $b = 15 \text{ cm}$ ,  $h = 25 \text{ cm}$ ,  $e = 3 \text{ cm}$ ,  $F_B = 2,36 \text{ cm}^2$ ,  $R_m = 366 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\sigma_{rs} = 12700 \text{ kg/cm}^2$  oraz obszar  $\Omega_\epsilon$  dla:  $\epsilon_{bo} = 0,01$ ,  $\epsilon_{bgr} = 0,002$ ,  $\epsilon_{so} = 0,007$ ,  $\epsilon_{sgr} = 0,01$ ,  $S_w = 47300 \text{ kg}$ .

Rys. 25





Obszary  $\Omega_\epsilon$  i  $\Omega_\sigma$  wyznaczono dla następujących wartości:  $b = 1\text{cm}$ ,  $h = 100\text{cm}$ ,  $e = 25\text{cm}$ ,  $e_d = e_g = 44\text{cm}$ ,  $F_s = 1\text{cm}^2$ ,  $F_{zd} = F_{zg} = 0,5\text{cm}^2$ ,  $R_m = 325\text{mp/cm}^2$ ,  $Q_{z7} = -Q_c = 2500\text{kg/cm}^2$ ,  $Q_{rs} = 13600\text{kg/cm}^2$  oraz obszar  $\Omega_\epsilon$  dla:  $\epsilon_{bu} = -0,00135$ ,  $\epsilon_{bgr} = -0,003$ ,  $\epsilon_{sgr} = 0,01$ ,  $\epsilon_{zgr} = -\epsilon_{zgr} = 0,01$ ,  $E_s = 200000\text{kg/cm}^2$ ,  $E_z = 210000\text{kg/cm}^2$ .  
Rys. 26

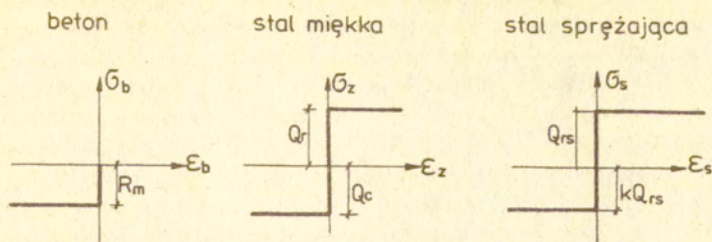
opisać w pierwszym przypadku czterema funkcjami, w drugim sześcioma. Okazuje się bowiem, że gdy w zbrojeniu sprężającym oraz w rozciągającym zbrojeniu miękkim występują graniczne naprężenia, przebieg odpowiadających tym stanom zniszczenia odcinków krzywych granicznych jest niemal identyczny, bądź wykazuje niewielkie różnice, niezależnie od przyjętych wartości odkształceń w tych zbrojeniach oraz przyjętego rozkładu naprężeń i odkształceń w betonie i w pozostałych zbrojeniach. W związku z tym, przypadki te można opisać jednym równaniem. Również i w zakresach ważności przypadków  $1_{\varepsilon}$  i  $1'_{\varepsilon}$  można z dostateczną dokładnością wyznaczać brzeg obszaru  $\Omega_{\varepsilon}$  z zależności granicznych wyprowadzonych dla przypadków  $2_{\varepsilon}$  i  $2'_{\varepsilon}$  zniszczenia przekroju.

Załącznik 1 zawiera podstawowe cztery /tablica A/ z wyznaczonych w pracy [73] dla prostokątnego przekroju betonowego sprężonego kablem iniektowanym zależności granicznych. Załącznik 2 zawiera zależności graniczne /tablica C/ wyznaczone w pracy [79] dla stanów zniszczenia /rys.24/ podwójnie zbrojonego przekroju prostokątnego sprężonego kablem iniektowanym<sup>x/</sup> oraz schematyczne przedstawienie kolejności i warunków występowania poszczególnych stanów.

### 2.3. Analiza wpływu uwzględnienia ograniczonej odkształcalności plastycznej materiałów na spadek nośności przekrojów kablo-betonowych w stosunku do nośności "idealnej".

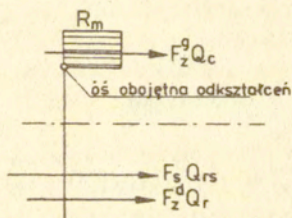
W celu przeprowadzenia analizy wpływu ograniczonej odkształcalności plastycznej materiałów na spadek nośności przekroju w stosunku do nośności "idealnej" wyznaczone w pracach [73] i [79] zależności graniczne między niszczącymi wartościami sił podłużnych i momentów zginających przyjmując za stan zniszczenia przekroju stosowane w teorii nośności granicznej naprężeniowe kryterium zniszczenia. Kryterium temu odpowiada pełne uplastycznienie przekroju, tj. osiągnięcie tak przez beton jak i przez stале miękką

<sup>x/</sup> Wprowadzono tu korektę wzorów  $1$  i  $1'$ , które zostały wyznaczone pierwotnie przy przyjęciu dla betonu przy ściskaniu osiowym granicznych odkształceń ekstremalnych takich jak przy zginaniu.



Rys.27

i sprężającą naprężeń granicznych z ewentualnym wyłączeniem włókna pokrywającego się z osią obojętną. Przyjmowane w tym kryterium idealnie sztywno-plastyczne wykresy zależności między naprężeniami a odkształceniami betonu, zbrojenia miękkiego i stali sprężającej przedstawia rys.27. Rozkład naprężeń w betonie /rys.28/ przyjęto prostokątny.



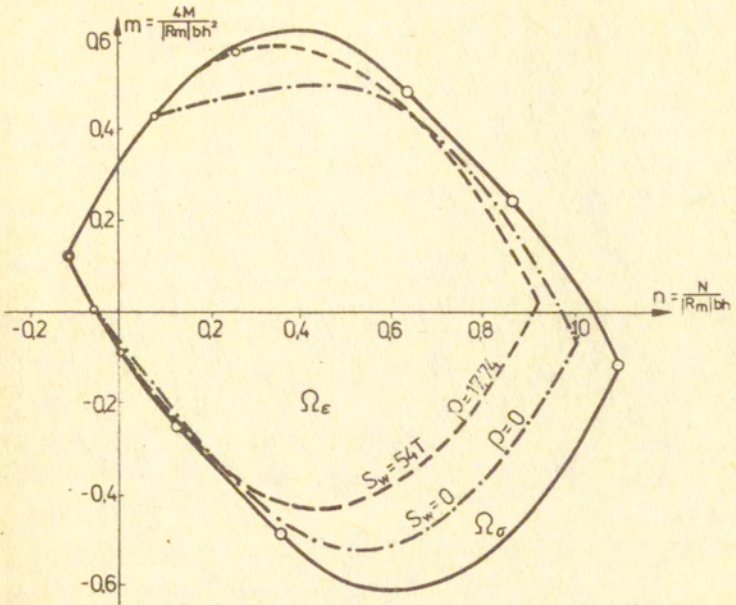
Rys.28

Na podstawie wyznaczonych w pracach [73] i [79] i zestawionych w tabelicy B załącznika 1 i w tabelicy D załącznika 2 zależności granicznych odpowiadających hipotezie naprężeniowej zniszczenia przekroju, wykreślono analogiczne do obszarów  $\Omega_\epsilon$  obszary  $\Omega_\sigma$  /rys.25 i rys.26/ zawierające siły podłużne i momenty zginające nie powodujące zniszczenia przekroju.

Przeprowadzenie właściwej oceny wpływu ograniczonej odkształcalności plastycznej na nośność przekroju wymagało eliminacji wstępnego sprężenia, tj. porównania obszaru  $\Omega_{\sigma}$  z obszarem  $\Omega_{\varepsilon}$ , odpowiadającym sile sprężającej  $S_w$  równej zeru. O ile bowiem wstępne sprężenie nie wpływa na wielkość naprężeń w zbrojeniu sprężającym w stanie zniszczenia przekroju odpowiadającym naprężeniowemu kryterium zniszczenia /naprężenia te przyjmuje się równe naprężeniom granicznym/, a zatem nie wpływa na określoną na podstawie tego kryterium nośność przekroju, o tyle ma ono istotny wpływ na nośność przekroju określoną w oparciu o odkształceniowe kryterium zniszczenia.

Istnieje wiele opracowań dotyczących wyznaczania nośności przekrojów obciążonych siłą osiową i momentem zginającym. Są to klasyczne rozwiązania teorii nośności granicznej. I tak zależności graniczne między niszczącymi wartościami tych sił wewnętrznych zostały dla przekroju z jednorodnego materiału plastycznego podane w pracach [37, 70, 100] dla przekroju żelbetowego w pracach [61, 102, 103, 110] i w normie [90]. Zależności te i odpowiadające im krzywe graniczne dla betonowego przekroju podwójnie zbrojonego zostały wyznaczone przez M. Janasa w pracy [42]. Dla przekrojów sprężonych te graniczne zależności zostały do czasu ukazania się moich prac [73] i [79] wyprowadzone jedynie dla przypadków sprężenia bez pomocy zbrojenia lub dla przekrojów niedostatecznie zbrojonych /w których nośność zbrojenia jest mniejsza od nośności strefy rozciąganej przekroju, tzn. zbrojenie zrywa się z chwilą zarysowania/ [68], [88].

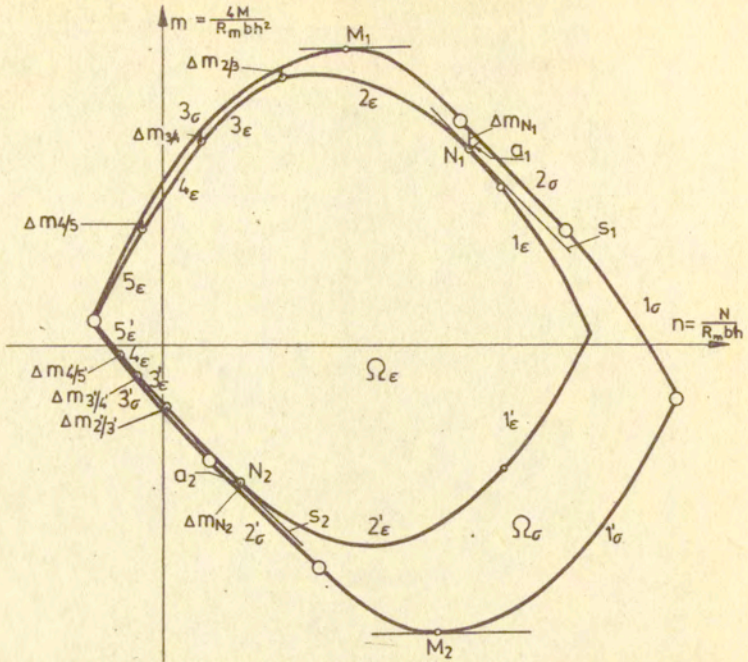
W pracy [78] przedstawiłam wykresy obszarów  $\Omega_{\sigma}$  i  $\Omega_{\varepsilon}$  sporządzone na podstawie zależności granicznych wyznaczonych dla prostokątnego przekroju betonowego sprężonego kablem iniektowanym. Obszary te zostały wykreślone dla różnych mimośrodów  $e$  kabla, a obszary  $\Omega_{\varepsilon}$  również i dla różnych wielkości  $S_w$  sił sprężających. Rys. 29 przedstawia jedno z podanych w pracy [78] rozwiązań.



Obszary  $\Omega_\epsilon$  i  $\Omega_\sigma$  wyznaczono dla następujących wartości :  $b = 25$  cm,  $h = 54$  cm,  $e = 14$  cm,  $F_S = 6,28$  cm<sup>2</sup>,  $R_m = 485$  kg/cm<sup>2</sup>,  $q_{rS} = 12000$  kg/cm<sup>2</sup> oraz obszar  $\Omega_\epsilon$  dla :  $\epsilon_{bc} = 0,00135$ ,  $\epsilon_{bgr} = 0,003$ ,  $\epsilon_{so} = 0,006$ ,  $\epsilon_{sgr} = 0,04$ .

Rys. 29

Uwaga: oznaczenia patrz załącznik 1.



$$\Delta m_{2/3} = \left| 0,5/1+\gamma/2 + \frac{A^2/1+\gamma/2}{B} \right| \quad \Delta m_{N_2} = \left| -0,5/1-\gamma/2 - \frac{A^2/1-\gamma/2}{B} \right|$$

$$\Delta m_{2/3} = \frac{\beta^2}{24} \left[ \frac{\alpha_1/1+\gamma/\rho}{\alpha_1+\alpha_2-\rho} \right]^2 \quad \Delta m_{2/3}' = \frac{\beta^2}{24} \left[ \frac{\alpha_1/1-\gamma/\rho}{\alpha_1+\alpha_2-\rho} \right]^2$$

$$\Delta m_{3/4} = \frac{\beta^2}{24} \left[ \frac{\alpha_1/1+\gamma/\rho}{\alpha_1+\alpha_3-\rho} \right]^2 \quad \Delta m_{3/4}' = \frac{\beta^2}{24} \left[ \frac{\alpha_1/1-\gamma/\rho}{\alpha_1+\alpha_3-\rho} \right]^2$$

$$\Delta m_{4/5} = \frac{1}{24} \left[ \frac{\alpha_3/1+\gamma/\rho}{\alpha_3+\alpha_4-\rho} \right]^2 \quad \Delta m_{4/5}' = \frac{1}{24} \left[ \frac{\alpha_3/1-\gamma/\rho}{\alpha_3+\alpha_4-\rho} \right]^2$$

$$a_1 = \frac{|0,5 + \frac{A^2}{B} // 1+\gamma/2|}{\sqrt{1+4\gamma^2}} \quad a_2 = \frac{|-0,5 - \frac{A^2}{B} // 1-\gamma/2|}{\sqrt{1+4\gamma^2}}$$

$$M_1 \left( \frac{1-2\alpha_2 f_s}{2}, m_{M_1} \right)$$

$$M_2 \left( \frac{1+2\alpha_1 f_s}{2}, m_{M_2} \right)$$

$$N_1 \left( \alpha_1 f_s / 1 + \frac{B}{A} / - \frac{1+\gamma/A^2}{B} - \rho f_s, -2\alpha_1 f_s \gamma / 1 + \frac{B}{A} / - \frac{A^2/1-\gamma/2}{B} + 2\rho f_s \gamma \right)$$

$$N_2 \left( \alpha_1 f_s / 1 + \frac{B}{A} / - \frac{1-\gamma/A^2}{B} - \rho f_s, -2\alpha_1 f_s \gamma / 1 + \frac{B}{A} / + \frac{A^2/1-\gamma/2}{B} + 2\rho f_s \gamma \right)$$

$$\text{styczna } s_1 : m = -2\delta n - \frac{A^2}{B} / 1+\gamma/2 \quad \text{styczna } s_2 : m = -2\delta n + \frac{A^2}{B} / 1-\gamma/2$$

Rys. 30

Porównanie obszarów  $\Omega_{\varepsilon}$  i  $\Omega_{\sigma}$  prowadzi do następujących wniosków. Obszary  $\Omega_{\sigma}$  zawierają obszary  $\Omega_{\varepsilon}$ ,  $\Omega_{\varepsilon} \subset \Omega_{\sigma}$ , co wynika zresztą z samej definicji tych obszarów. Dla wszystkich stanów zniszczenia w których naprężenia w stali sprężającej osiągną wartość graniczną, tj. stanów odwzorowanych przedstawionymi na rys.30 krzywymi  $3_{\varepsilon}$ ,  $4_{\varepsilon}$ ,  $5_{\varepsilon}$  oraz  $3'_{\varepsilon}$ ,  $4'_{\varepsilon}$  i  $5'_{\varepsilon}$  wpływ uwzględnienia ograniczonej odkształcalności plastycznej jest prawie niezauważalny; różnice  $\Delta m$  między wartościami momentów niszczących otrzymanych z rozwiązań obu hipotez, podane na rys.30 na granicy poszczególnych stanów, są w zakresie stosowanych rozwiązań praktycznych bardzo małe. Przy przyjęciu  $\varphi = 0$ , odpowiadającego  $S_w = 0$ , wynoszą one kilka promili. Dla pozostałych stanów zniszczenia przekroju, odwzorowanych przedstawionymi na rys.30 krzywymi  $1_{\varepsilon}$ ,  $2_{\varepsilon}$ ,  $1'_{\varepsilon}$  i  $2'_{\varepsilon}$ , uwzględnienie ograniczonej odkształcalności plastycznej wpływa w sposób istotny na różnice w wartościach momentów i sił niszczących wyznaczonych z obu hipotez. W rozwiązaniach w pracy [78] przykładach różnice te dochodzą do dwudziestu kilku procent.

Do podobnych wniosków prowadzi porównanie wyznaczonych w pracy [79] i przedstawionych na rys.26 obszarów  $\Omega_{\varepsilon}$  i  $\Omega_{\sigma}$ . Dla stanów zniszczenia, odwzorowanych krzywymi  $4_{\varepsilon}$  do  $7_{\varepsilon}$ , w których naprężenia w stali sprężającej i w zbrojeniu miękkim osiągają wartości graniczne, wpływ ograniczonej odkształcalności plastycznej na przebieg krzywych granicznych, jest znikomy. Dla stanów zniszczenia, odwzorowanych krzywymi  $3'_{\varepsilon}$  do  $7'_{\varepsilon}$ , w których naprężenia w górnym zbrojeniu miękkim osiągają wartość graniczną, wpływ ten jest niewielki, dla pozostałych stanów zniszczenia /krzywe  $1_{\varepsilon}$ ,  $2_{\varepsilon}$ ,  $3_{\varepsilon}$ ,  $1'_{\varepsilon}$ ,  $2'_{\varepsilon}$  / wpływ ten jest znaczny. W rozwiązaniu w pracy [79] przykładzie maksymalna różnica między wartościami dodatnich momentów niszczących wyznaczonych z obu hipotez przy tej samej wartości niszczącej siły podłużnej wynosi 30%.

W tym miejscu należy podkreślić, że z chwilą wprowadzenia sprężenia omawiane różnice w zakresie korzystnego wpływu sprężenia będą maleć wraz ze wzrostem sił sprężających  $S_w$ .

Z przedstawionej analizy wynika, że w celu przeprowadzenia właściwej oceny nośności takich konstrukcji, jak betonowe, żelbetowe i sprężone należy, zgodnie z międzynarodowymi zaleceniami

CEB-FIP [12] oraz stosownie do otrzymanych w moich pracach [73, 78, 79] rozwiązań i wypływających z nich wniosków przyjmować model ciała idealnie sprężysto-plastyczny, z ograniczoną odkształcalnością plastyczną. Zastąpienie tego modelu, modelem ciała idealnie sztywno-plastycznym jest dopuszczalne w przypadkach, w których momenty zginające mają decydujący wpływ na zachowanie się konstrukcji oraz dla konstrukcji poddanych mimośrodowemu rozciąganiu.

Powyższe wnioski znalazły odzwierciedlenie w nowej polskiej normie [90]. Wprowadzicie do wyznaczenia nośności przekroju obciążonego momentem i siłą podłużną norma ta zaleca stosowanie modelu ciała sztywno-plastycznego ale różnicuje rozwiązania na przypadki mimośrodowego rozciągania z małym mimośrodem /naprężenia w stali równe granicznym/, przypadki mimośrodowego rozciągania i mimośrodowego ściskania z dużym mimośrodem /naprężenia w stali równe granicznym, pominięcie w obliczeniach udziału siły podłużnej/, oraz przypadki mimośrodowego ściskania z małym mimośrodem /naprężenia w stali są funkcją położenia osi obojętnej/.

#### 2.4. Wklęsłość krzywej ograniczającej obszary $\Omega_{\varepsilon}$ .

Przedstawione w pracy [79] rozwiązanie, którego ilustrację stanowi rys.26, prowadzi do ciekawego spostrzeżenia. Otóż, w odróżnieniu od wypukłych krzywych granicznych wyznaczonych w oparciu o naprężeniowe kryterium zniszczenia, będących odwzorowaniem ekstremalnych naprężeń i spełniających postulat stateczności Druckera, krzywe graniczne wyznaczone w oparciu o kryterium odkształceniowe i będące odwzorowaniem ekstremalnych odkształceń mogą być odcinkami wklęsłe. Niewielkie wklęsłości tych krzywych występują, gdy naprężenia w stali sprężającej są równe, bądź bliskie zeru. Natomiast wielkościom naprężeń wstępnych o praktycznym znaczeniu odpowiadają już krzywe wypukłe.

Przyjęcie zatem założenia o wypukłości krzywej granicznej odpowiadającej odkształceniowemu kryterium zniszczenia /założenia nieściśłego jedynie dla niewielkich wartości naprężeń wstępnych/ jest dopuszczalnym przybliżeniem i stanowi, podobnie jak to ma miejsce przy stosowaniu kinematycznych metod teorii nośności granicznej, pewne oszacowanie od góry obszaru  $\Omega_{\varepsilon}$  zawierającego



nieniszczące wartości sił podłużnych i momentów zginających.

## 2.5. Analiza wpływu wstępnego sprężenia na podwyższenie nośności kablobetonowych przekrojów prostokątnych.

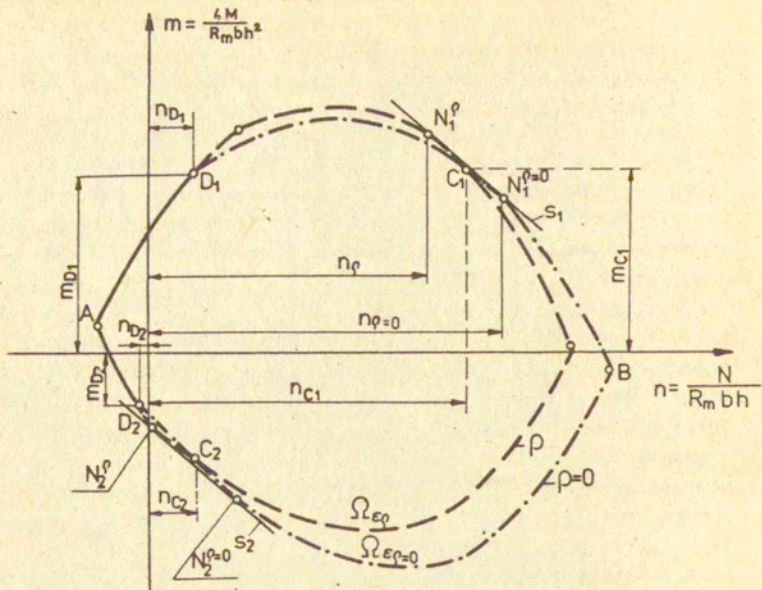
Analizę wpływu wstępnego sprężenia na nośność przekroju zawiera moja praca [78]. Przeprowadzono w niej szczegółową dyskusję tego wpływu na nośność prostokątnego przekroju betonowego. Dodatkową ilustrację tego wpływu na nośność podwójnie zbrojonego żelbetowego przekroju prostokątnego stanowią rozwiązania zawarte w mojej pracy [79].

Jak już uprzednio wspomniano wstępne sprężenie nie wpływa na nośność przekroju gdy określimy ją z naprężeniowego kryterium zniszczenia. W tej bowiem hipotezie przyjmuje się, że w każdym z możliwych stanów zniszczenia przekroju naprężenia w stali sprężającej osiągają wartość graniczną, a zatem są niezależne od wielkości wprowadzonego wstępnego sprężenia. W przypadku zastosowania odkształceniowego kryterium zniszczenia wstępne sprężenie może wpływać w sposób istotny na zmianę nośności przekroju. Analizę tego wpływu przeprowadzimy porównując obszar  $\Omega_{\varepsilon}$ , zawierający siły podłużne i momenty zginające nie powodujące zniszczenia przekroju, wyznaczony dla siły sprężającej  $S_w = 0$  z obszarem  $\Omega_{\varepsilon}$  wyznaczonym dla  $S_w \neq 0$ .

Do określenia zakresów znikomego, korzystnego i niekorzystnego wpływu sprężenia na wielkości niszczących sił podłużnych i momentów zginających posłużą nam przedstawione na rysunkach 29, 30 i 31 wykresy krzywych ograniczających obszary  $\Omega_{\sigma}$  i  $\Omega_{\varepsilon}$  oraz wyznaczone na granicy poszczególnych stanów zniszczenia i podane na rys. 30 wielkości  $\Delta m$ .

Dla stanów zniszczenia odwzorowanych odcinkami krzywych granicznych  $AD_1$  i  $AD_2$  /rys. 29/ różnice w niszczących wartościach momentów zginających, wyznaczonych dla  $S_w = 0$  i  $S_w \neq 0$ , są znikome, bowiem wynoszą /patrz rys. 30/  $\Delta m_{\rho} - \Delta m_{\rho=0}$ .

Omawiane zakresy A-D<sub>1</sub> i A-D<sub>2</sub> odpowiadają stanom zniszczenia, w których naprężenia w stali sprężającej osiągają wartość graniczną, równą granicy plastyczności stali przy rozciąganiu. Punkty D<sub>1</sub> i D<sub>2</sub> są to punkty przecięcia krzywych  $2_{\varepsilon}$  i  $3_{\varepsilon}$  oraz  $2'_{\varepsilon}$  i  $3'_{\varepsilon}$



$$n_{D1,2} = \frac{A \alpha_1 / 1 \pm \delta /}{\alpha_1 + \alpha_2} - \alpha_2 f_s$$

$$m_{D1,2} = 2 \alpha_2 f_s \pm \frac{2A \alpha_1 / 1 \pm \delta /}{\alpha_1 + \alpha_2} \pm B \left[ \frac{\alpha_1 / 1 \pm \delta /}{\alpha_1 + \alpha_2} \right]^2$$

$$n_{C1,2} \approx \alpha_1 f_s / 1 + \frac{B}{A} / - / 1 \pm \delta / A^2 - \frac{\rho f_s}{2}$$

$$m_{C1,2} \approx -2 \alpha_1 f_s \delta / 1 + \frac{B}{A} / \mp \frac{A^2 / 1 - \delta^2 /}{B} + \rho f_s \delta$$

Uwaga: oznaczenia patrz załącznik 1

Rys. 31

wyznaczonych dla  $S_w = 0$ . Ich współrzędne podano na rys.31.

W stanach zniszczenia, odwzorowanych odcinkami krzywych granicznych  $D_1C_1$  i  $D_2C_2$ , sprężenie wpływa w sposób korzystny na zmianę nośności przekroju<sup>x/</sup>, a w stanach zniszczenia odwzorowanych odcinkami krzywych  $C_1B$  i  $C_2B$  w sposób niekorzystny. Punkty  $C_1$  i  $C_2$  dzielące zakresy korzystnego i niekorzystnego wpływu sprężenia są to punkty przecięcia krzywych granicznych  $2_\epsilon$  ( $2'_\epsilon$ ) wyznaczonych dla  $S_w = 0$  i  $S_w$ . Ich współrzędne można z pewnym przybliżeniem określić wykorzystując własności krzywych granicznych stanowiących brzegi obszarów  $\Omega_\epsilon$  i  $\Omega_\delta$ . Z analizy tych krzywych wynika, że styczne  $s_1$  i  $s_2$  do brzegu obszaru  $\Omega_\epsilon$ , poprowadzone równoległe do odcinków prostych  $2_\epsilon$  i  $2'_\delta$  brzegu obszaru  $\Omega_\delta$  /rys.30/, są od nich oddalone o wartości  $a_1$  i  $a_2$  dla danego przekroju kablobetonowego stałe, niezależne od stopnia  $\rho$  jego sprężenia. Proste  $s_1$  i  $s_2$  są więc stycznymi do rodziny krzywych granicznych wyznaczonych dla danego przekroju przy zmiennym stopniu  $\rho$  jego sprężenia.

Do określenia zakresu korzystnego wpływu sprężenia można zatem z wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością przyjąć za współrzędne punktu  $C_1(C_2)$  przecięcia krzywych  $2_\epsilon$  ( $2'_\epsilon$ ), wyznaczonych dla  $S_w = 0$  i  $S_w$ , współrzędne punktu leżącego na stycznej  $s_1$  ( $s_2$ ) w połowie odległości między punktami styczności  $N_1(N_2)$  tych krzywych do prostej  $s_1$  ( $s_2$ ). Współrzędne te podano na rys.31.

Ostatecznie można stwierdzić, że w przypadku przekroju obciążonego siłą podłużną  $N$  i momentem zginającym  $M$  wzrastającymi proporcjonalnie do intensywności obciążenia, tzn. tak, że  $\frac{M}{N} = \text{const} \left( \frac{m}{n} = 4 \frac{\sigma}{h_r} \right)$ , zastosowanie sprężenia wpływa korzystnie na nośność przekroju jeśli prosta o równaniu:

$$(23) \quad m = 4 \frac{\sigma}{h_r} n$$

przecina brzeg obszaru  $\Omega_\epsilon$  w zakresie  $D_1C_1$  /por.rys.31/, tzn.

<sup>x/</sup> W rozwiązanych w pracach [78] i [79] przykładach maksymalne wzrosty wartości niszczonego momentu zginającego spowodowane sprężeniem /przy stałej wartości niszczonej siły podłużnej/ wyniosły w zakresie  $D_1C_1$  25% i 31%. W zakresie  $D_2C_2$  wpływ sprężenia był mało widoczny.

gdy jest spełniony warunek :

$$(24) \quad \arctg \frac{m_{D_1}}{n_{D_1}} \ll \arctg 4 \frac{E}{h_r} \ll \arctg \frac{m_{C_1}}{n_{C_1}} .$$

W zakresach  $D_1C_1$  i  $D_2C_2$ , w których wpływ sprężenia jest korzystny, nośność przekroju wzrasta wraz ze wzrostem stopnia  $\rho$  jego sprężenia, w zakresach  $C_1B$  i  $C_2B$ , w których wpływ sprężenia jest niekorzystny - maleje /por. rys. 29/. Osiągnięcie potrzebnej nośności możemy zatem otrzymać przez odpowiedni dobór wielkości siły sprężającej i przesunięcie /translację/ obszaru pierwotnego, odpowiadającego sile  $S_w = 0$ .

Dla przypadków, w których sprężenie jest korzystne, wzrost nośności przekroju można również uzyskać poprzez zwiększenie odległości położenia kabla od środka przekroju.

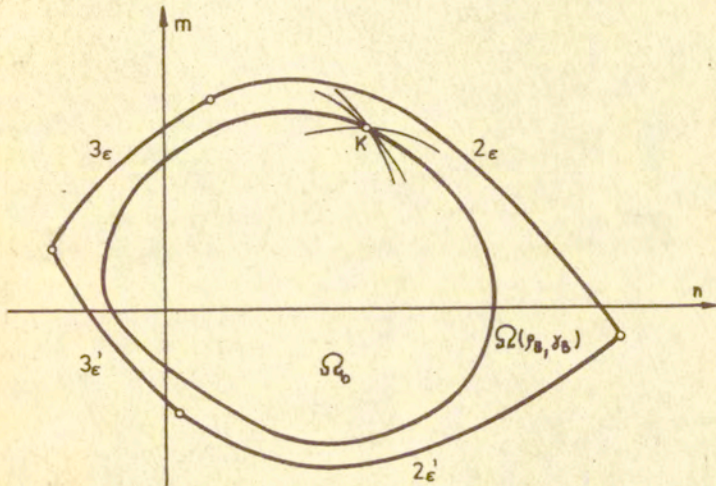
2.6. Rozwiązanie problemu optymalnego projektowania na minimum zbrojenia sprężającego kablobetonowego przekroju prostokątnego przy obciążeniu zadanym w postaci obszaru  $\Omega_0$  zmienności sił podłużnych i momentów zginających.

Zaprojektowanie przekroju kablobetonowego obciążonego momentem zginającym i siłą podłużną nie nastręcza trudności. Zakładając z góry parametry geometryczne przekroju betonu, markę betonu oraz rodzaj stali, możemy wyznaczyć przekrój  $F_s$  zbrojenia sprężającego, naprężenie wstępne  $\bar{\sigma}_s$  w tym zbrojeniu oraz mimośród  $e$  zbrojenia, korzystając z przepisów normowych. Optymalnym rozwiązaniem ze względu na minimum zbrojenia sprężającego  $F_s$  jest przyjęcie możliwie największych wartości  $\bar{\sigma}_s$  i  $e$ . Maksymalne podwyższenie nośności przekroju poprzez jego sprężenie otrzymujemy przyjmując możliwie największe wartości  $\bar{\sigma}_s$ ,  $e$  i  $F_s$ .

Zagadnienie optymalnego projektowania przekroju kablobetonowego na minimum zbrojenia sprężającego  $F_s$  znacznie się komplikuje, gdy obciążenie przekroju zadane jest w postaci obszaru zmienności sił podłużnych i momentów zginających. Problem ten dla kablobetonowego przekroju prostokątnego  $b \times h$  o jednej osi symetrii, obciążonego siłą osiową i momentem zginającym zmieniającymi się dowolnie w pewnym obszarze ograniczonym krzywą zamkniętą, został roz-

wiązany i przedstawiony w mojej pracy [74]. W rozwiązaniu wykorzystano, wyznaczone przeze mnie w pracy [73] w oparciu o odkształceniowe kryterium zniszczenia, zależności graniczne między niszczącymi wartościami sił podłużnych i momentów zginających stanowiące równania brzegu obszaru  $\Omega_\epsilon$  /tablica A załącznika 1/.

W pracy [74] przyjęto, że występujące w przekroju i przemnożone przez współczynniki pewności siły podłużne i momenty zginające zawarte są w obszarze  $\Omega_0$ . Zadanie polegało na takim dobraniu przekroju kablobetonowego, aby wyznaczony dla tego przekroju obszar  $\Omega_\epsilon$ , ograniczający nieniszczące wartości sił podłużnych i momentów zginających zawierał obszar  $\Omega_0$  /rys.32/<sup>x/</sup>



Rys. 32

Rozwiązanie przeprowadzono dla przyjętych z góry parametrów geometrycznych przekroju betonu, marki betonu oraz rodzaju stali, przy czym podano metodę pozwalającą na sprawdzenie czy przyjęte

<sup>x/</sup> Podstawy teoretyczne rozwiązania tego problemu zostały dla zakresu sprężystego sformułowane przez Cz. Eibera w pracy [21].

wielkości są wystarczające. Wielkościami poszukiwanymi były: najmniejsza wartość funkcji celu, tj. przekroju zbrojenia sprężającego  $F_g$ , naprężenie wstępne  $\bar{\sigma}_s$  w tym zbrojeniu oraz mimośród  $e$  zbrojenia.

Na wielkości  $\bar{\sigma}_s$  i  $e$  nałożono następujące ograniczenia:

$$(25) \quad \begin{aligned} 0 < \bar{\sigma}_s &\leq \bar{\sigma}_{s \text{ dop}} \\ -\frac{h}{2} < e < \frac{h}{2} \end{aligned}$$

Rozpatrzono przypadek, w którym obszar  $\Omega_0$  ograniczony jest krzywymi wypukłymi o równaniach podanych w postaci parametrycznej:

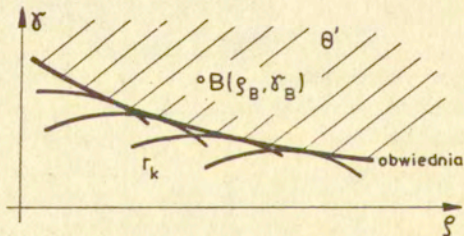
$$(26) \quad n = n(c) \quad , \quad m = m(c)$$

Przyjmując na razie, że wielkość sprowadzonego przekroju zbrojenia sprężającego  $f_g$  jest znana, zajęto się wyznaczeniem związku między sprowadzonymi wielkościami naprężenia wstępnego  $\rho$  w tym zbrojeniu oraz mimośrodu  $\gamma$  zbrojenia, dla których brzeg obszaru  $\Omega_c$  przejdzie przez położony na brzegu obszaru  $\Omega_0$  punkt K. Podstawiając (26) do dobranego z tablicy A załącznika 1, odpowiednio do położenia punktu K, równania brzegu obszaru  $\Omega_0$  otrzymano:

$$(27) \quad f = (f, \gamma, c) = 0$$

lub, gdy parametr  $\kappa(\kappa_1)$  nie został wyeliminowany:

$$(28) \quad \begin{aligned} f(\rho, \gamma, \kappa, c) &= 0 \\ F(\rho, \gamma, \kappa, c) &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 33

Dla parametru  $c = c_k$ , odpowiadającego pewnemu położeniu punktu  $K$  /rys.32/ równanie (27) lub (28) jest odwzorowanym krzywą  $r_k$  /rys.33/ poszukiwanym związkem między  $\varrho$  i  $\delta$  takim, że dla każdej pary  $\varrho$  i  $\delta$  spełniającej to równanie, tj. dla współrzędnych  $\varrho, \delta$  punktu położonego na krzywej  $r_k$ , otrzymujemy krzywą ograniczającą obszar  $\Omega_\varepsilon$  przechodzącą przez punkt  $K$ . Dla  $c$  zmieniającego się wzdłuż brzegu obszaru  $\Omega_0$  otrzymany związek jest równaniem rodziny krzywych  $r$  o własnościach jak wyżej. Obwódca tej rodziny krzywych /rys.33/ wyznaczy obszar  $\theta$  zmienności  $\varrho$  i  $\delta$  taki, że obszar  $\Omega_\varepsilon$  odpowiadający parze wielkości  $\varrho$  i  $\delta$ , leżącej wewnątrz lub na brzegu obszaru  $\theta$ , będzie zawierał obszar  $\Omega_0$ . Wynika to stąd, że w dowolnym punkcie  $B$  obszaru  $\theta$  /rys.33/ nie przecinają się żadne krzywe  $r$ , a więc dowolnej parze  $\varrho_B$  i  $\delta_B$  z obszaru  $\theta$  nie może odpowiadać brzeg obszaru  $\Omega_\varepsilon$  przecinający brzeg obszaru  $\Omega_0$ .  
Wyznaczenie obwiedni

$$(29) \quad \varrho = \varrho(c), \quad \delta = \delta(c)$$

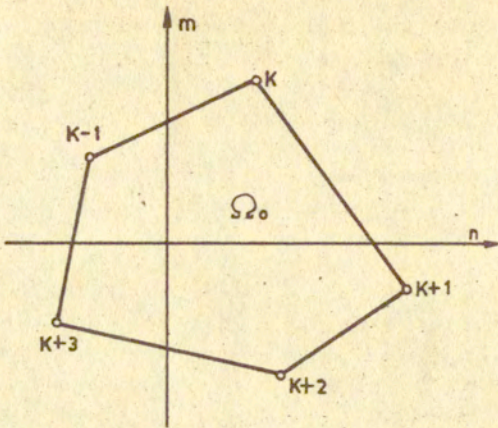
rodziny krzywych  $r$ , zapisanej równaniem (27) polega na rozwiązaniu znanego układu równań

$$(30) \quad \left. \begin{aligned} f(\varrho, \delta, c) &= 0 \\ f'(\varrho, \delta, c) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

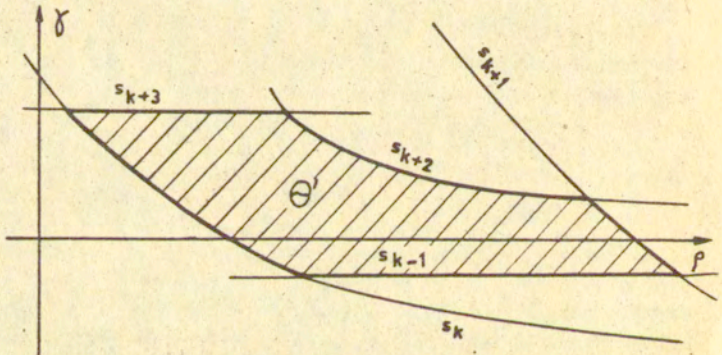
Gdy rodzina krzywych  $r$  jest zapisana w postaci (28) obwiednię można wyznaczyć z wyprowadzonych w tym celu równań:

$$(31) \quad \begin{aligned} F'_\kappa(\varrho, \delta, \kappa, c) f'_c(\varrho, \delta, \kappa, c) - F'_c(\varrho, \delta, \kappa, c) \cdot f'_\kappa(\varrho, \delta, \kappa, c) &= 0, \\ f(\varrho, \delta, \kappa, c) &= 0, \\ F(\varrho, \delta, \kappa, c) &= 0. \end{aligned}$$

Ze względu na skomplikowany charakter proponowanego wyżej rozwiązania, nawet dla najprostszych postaci równań brzegu obszaru  $\Omega_0$ , przeprowadzono rozwiązanie szczegółowe dla brzegu obszaru  $\Omega_0$  aproksymowanego prostymi tworzącymi wielobok wypukły /rys.34/. Otrzymany w wyniku obszar  $\theta'$  /rys.35/ ograniczony jest krzywymi a zależności między  $\varrho$  i  $\delta$ . Równania tych krzywych wyznaczono podstawiając współrzędne  $m_k$  i  $n_k$  wierzchołków wieloboku do zestawionych w tabelicy A załącznika 1, odpowiadających stanom znisz-



Rys. 34



Rys. 35



czenia  $2_{\varepsilon}$ ,  $2'_{\varepsilon}$ ,  $3_{\varepsilon}$  i  $3'_{\varepsilon}$ , równań brzegu obszaru  $\Omega_{\varepsilon}$ .  
Otrzymano:

dla stanu  $2_{\varepsilon}$  zniszczenia przekroju

$$(32) \quad \gamma = \frac{m_K - 2A\kappa_g - B\kappa_g^2}{2A\kappa_g - 2n_K},$$

$$\varrho = \frac{A}{f_s} \kappa_g - \frac{n_K}{f_s} + \alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\kappa_g} (1 + \gamma),$$

dla stanu  $2'_{\varepsilon}$  zniszczenia przekroju

$$(33) \quad \gamma = \frac{m_K + 2A\kappa_d + B\kappa_d^2}{2A\kappa_d - 2n_K},$$

$$\varrho = \frac{A}{f_s} \kappa_d - \frac{n_K}{f_s} + \alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\kappa_d} (1 - \gamma),$$

dla stanu  $3_{\varepsilon}$  zniszczenia przekroju

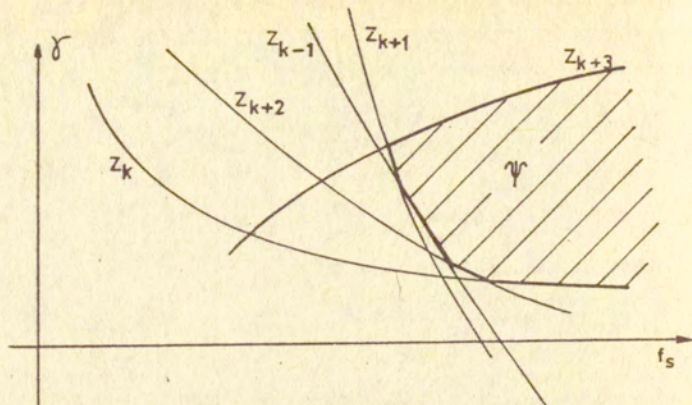
$$(34) \quad \gamma = \frac{m_K - 2n_K}{2\alpha_2 f_s} - 1 - \frac{B}{A^2} \frac{(n_K + \alpha_2 f_s)^2}{2\alpha_2 f_s},$$

dla stanu  $3'_{\varepsilon}$  zniszczenia przekroju

$$(35) \quad \gamma = \frac{m_K + 2n_K}{2\alpha_2 f_s} + 1 + \frac{B}{A^2} \frac{(n_K + \alpha_2 f_s)^2}{2\alpha_2 f_s}.$$

Powracając do określenia sprowadzonego przekroju zbrojenia sprężającego  $f_s$ , który w dotychczasowych rozważaniach traktowany był jako wielkość znana, wyznaczono; dla wierzchołków wieloboku 1 maksymalnej wartości naprężeń wstępnych w zbrojeniu sprężającym ( $\bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}_{s \text{ dop}}$ ), równania krzywych z ograniczających obszar  $\psi$  zmienności  $f_s$  i  $\gamma$  /rys.36/.

Dla stanów zniszczenia  $2_{\varepsilon}$  i  $2'_{\varepsilon}$  równania tych krzywych otrzymano z przekształcenia zależności (32) i (33) w postaci:



Rys. 36

dla stanu zniszczenia  $2_{\epsilon}$

$$(36) \quad \gamma = \frac{m_k - 2A\kappa_g - B\kappa_g^2}{2A\kappa_g - 2n_k} ,$$

$$f_{s \min} = \frac{A\kappa_g - n_k}{f_{\max} - \alpha_1 + \frac{\alpha_d}{\kappa_g}(1+\gamma)} ,$$

dla stanu zniszczenia  $2'_{\epsilon}$

$$(37) \quad \gamma' = \frac{m_k + 2A\kappa_d + B\kappa_d^2}{2A\kappa_d - 2n_k} ,$$

$$f_{s \min}' = \frac{A\kappa_d - n_k}{f_{\max} - \alpha_1 + \frac{\alpha_d}{\kappa_d}(1-\gamma')} .$$

Dla stanów  $3_{\epsilon}$  i  $3'_{\epsilon}$  równania krzywych z mają ten sam zapis co równania (34) i (35) krzywych s, z tym, że  $f_s$  jest tu zmienną.

Ostateczny tok postępowania przy wyznaczaniu  $\min F_s$ ,  $\bar{\sigma}_s$  i  $\epsilon$  jest następujący. Wyznacza się obszar  $\Psi$  i określa się z niego minimalny przekrój  $F_s$  zbrojenia sprężającego. Dobiera się następ-

nie przekrój  $F_s$  kabla bliski  $\min F_s$  i wyznacza się dla niego obszar  $\Theta'$ . Z Obszaru  $\Theta'$  można już w sposób dowolny dobrać wielkość naprężenia wstępnego  $\sigma_s$  w zbrojeniu sprzężającym i mimośród  $e$  zbrojenia.

Ilustrację otrzymanego rozwiązania stanowi podany w pracy [74] przykład liczbowy.

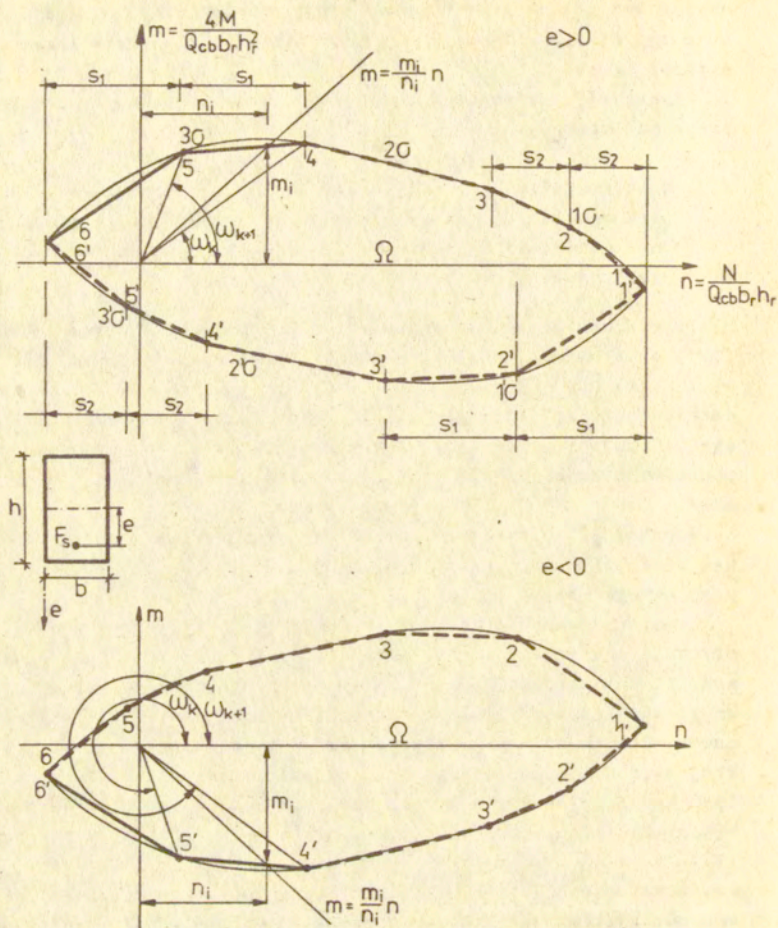
## 2.7. Metody analityczna i wykreslna wyznaczania obciążenia granicznego kablobetonowych ram portalowych, uwzględniające - poza momentami zginającymi - wpływ sił podłużnych na nośność przekrojów.

Istniejące przed ukazaniem się mojej pracy [75] liczne monografie i opracowania, dotyczące analizy plastycznej konstrukcji ramowych /Neal [64], Heyman [33], Beadle [4], Hodge [37], Sawczuk [104], Jackson [41] /, zajmowały się głównie ramami stalowymi i żelbetowymi. Ponadto, prace te w większości nie uwzględniały wpływu sił podłużnych zajmując się jedynie wyznaczaniem "nośności na zginanie".

W pracy [75] przedstawiłam metody wyznaczania granicznych obciążeń kablobetonowych ustrojów ramowych o przekrojach prostokątnych przy uwzględnieniu wpływu sił podłużnych.

Graniczne wartości momentu zginającego i siły podłużnej konstrukcji statycznie wyznaczalnej, której zniszczenie następuje wskutek zniszczenia jednego tylko przekroju, możemy wyznaczyć korzystając bezpośrednio z przedstawionych w pracy [73] rozwiązań zawierających równania krzywych granicznych wiążące niszczące przekrój wartości momentów zginających i sił podłużnych. Przejście od tych granicznych wartości sił wewnętrznych do wartości granicznego obciążenia zewnętrznego jest w tym przypadku bezpośrednie /por. [77] /.

Gdy konstrukcja jest  $n$  - krotnie statycznie niewyznaczalna, ulega ona całkowitemu zniszczeniu wskutek zniszczenia  $n+1$  przekrojów krytycznych i zmianie konstrukcji w mechanizm. Wyznaczenie zarówno wewnętrznych sił niszczących w przekrojach krytycznych jak i granicznego obciążenia zewnętrznego nie jest już w tym przypadku sprawą elementarną.



Rys. 37

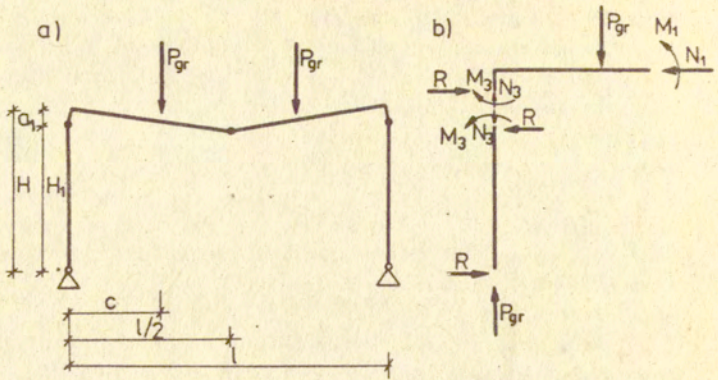
Przed przystąpieniem do właściwego rozwiązania przyjęto w pracy [75] pewne założenia upraszczające. Przede wszystkim, ze względu na nieznaczne różnice występujące w przebiegu krzywych granicznych wyznaczonych dla kablobetonowego przekroju prostokątnego w oparciu o hipotezy odkształceniową i naprężeniową w zakresie korzystnego wpływu sprężenia, zastąpiono w tym zakresie równania krzywych granicznych wyznaczone w oparciu o hipotezę odkształceniową zestawionymi w tabelicy B załącznika 1 równaniami tych krzywych wyznaczonymi w oparciu o hipotezę naprężeniową. Dalszym uproszczeniem była aproksymacja przyjętych krzywych granicznych odcinkami prostych. Sposób przeprowadzenia tej aproksymacji przedstawia rys.37. Równania prostych aproksymujących zawiera tablica B załącznika 3.

Dla tak przyjętych uproszczeń przedstawiono, na przykładzie dwuprzegubowej ramy portalowej obciążonej symetrycznie dwiema siłami P, metody analityczną i wykreślną wyznaczania granicznego obciążenia. Przedstawiona metoda analityczna polegała na ustaleniu kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia ramy /rys.38a i 39a/, założeniu w przekrojach krytycznych, w których przyjęto przeguby, przypuszczalnych schematów zniszczenia przekroju, a następnie na rozwiązaniu dla każdego mechanizmu zniszczenia układu równań złożonego z odpowiadających tym schematom zależności granicznych /równania prostych aproksymujących/, do których podstawiono wyznaczone na podstawie rys.38b i 39b metodą równowagi ogniw, siły podłużne i momenty zginające, będące funkcjami poszukiwanego obciążenia.

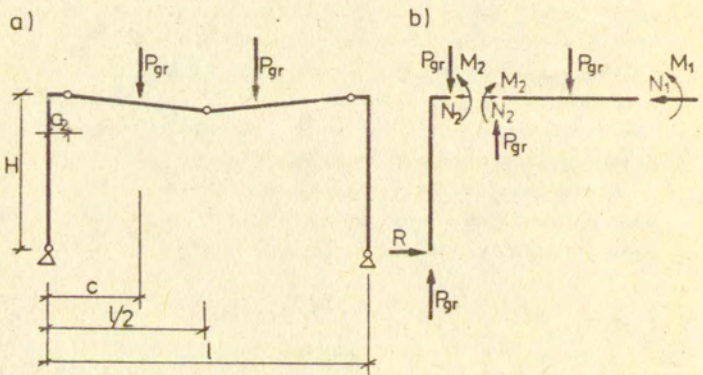
Dla mechanizmu zniszczenia przedstawionego na rys.38a otrzymano z równań równowagi poszczególnych ogniw łańcucha kinematycznego /r. s.38b/:

$$(38) \quad \begin{aligned} N_3 &= P_{gr} \quad ; \quad M_3 = -RH_p ; \\ N_1 &= R \quad ; \quad M_1 = M_3 + N_3 \frac{l}{2} - P_{gr} \left( \frac{l}{2} - c \right) - Ra_1 = -RH + P_{gr} c , \end{aligned}$$

a dla mechanizmu zniszczenia przedstawionego na rys.39



Rys. 38



Rys. 39

$$(39) \quad \begin{aligned} N_2 &= R ; & M_2 &= -RH + P_{gr} a_2 \\ N_1 &= N_2 = R ; & M_1 &= M_2 + P_{gr}(c - a_2) = -RH + P_{gr} c \end{aligned}$$

Z rozwiązania układów równań wynikających z odpowiedniego podstawienia [38], bądź [39] do równań prostych aproksymujących otrzymano, po wprowadzeniu oznaczeń podanych w załączniku 3, sprowadzoną wartość p obciążenia granicznego:

a/ dla mechanizmu zniszczenia przedstawionego na rys.38 przy przyjęciu, że związek między niszczącymi wartościami siły podłużnej i momentu zginającego wyraża się w przekroju 1 zależnością 5-6 tablicy E załącznika 3, a w przekroju 3 zależnością 4' - 5'

$$(40) \quad p = \left\{ \left[ (0,5 - 0,5\delta_3)^2 + 0,5\alpha_2(1 - \delta_3^2) f_{ss} \right] \frac{h_s}{4\varphi_1\varphi_2 H_4} + \frac{1,5\alpha_2(1 + \delta_1^2) f_{sr}}{1,5 - 0,5\delta_1^2 + 4H/h_r} \right\} \cdot \left[ \frac{4c}{h_r(1,5 - 0,5\delta_1^2 + 4\frac{H}{h_r})} - \frac{0,5 + 1,5\delta_3^2}{4} \frac{h_s}{H_4} \right]^{-1}$$

b/ dla mechanizmu zniszczenia przedstawionego na rys.39, przy przyjęciu, że związek między niszczącymi wartościami siły podłużnej i momentu zginającego wyraża się w przekroju 1 zależnością 5-6, a w przekroju 2 zależnością 5' - 6'

$$(41) \quad p = \left[ \frac{1,5\alpha_2(1 - \delta_2^2)}{4\frac{H}{h_r} - 1,5 + 0,5\delta_2^2} f_{sr} + \frac{1,5\alpha_2(1 + \delta_1^2)}{4\frac{H}{h_r} + 1,5 - 0,5\delta_1^2} f_{sr} \right] \cdot \left[ \frac{4c}{(4\frac{H}{h_r} + 1,5 - 0,5\delta_1^2)h_r} - \frac{4a_2}{(4\frac{H}{h_r} - 1,5 + 0,5\delta_2^2)h_r} \right]^{-1}$$

Wartości sprowadzonych niszczących sił podłużnych  $n_1$  i momentów zginających  $m_1$  w poszczególnych przekrojach ramy otrzymano z odpowiedniego podstawienia (40), bądź (41) do (38), bądź (39).

Pozostało już tylko sprawdzenie, czy do wyznaczenia obciążenia granicznego przyjęto właściwe równania prostych aproksymujących.

Sprawdzenie to polega na stwierdzeniu czy występujące w przekroju  $\underline{i}$  w stadium zniszczenia sprowadzone siły wewnętrzne  $n_i$  i  $m_i$  są współrzędnymi punktu leżącego na brzegu obszaru  $\Omega$ , tzn., czy prosta  $n = \frac{m_i}{n_i} n$  przecina przyjętą dla przekroju  $\underline{i}$  prostą aproksymującą w obrębie obszaru  $\Omega$ , czy też poza tym obszarem /por. rys.37/. W ostatnim przypadku rozwiązanie trzeba powtórzyć przyjmując inne, odpowiednie do spodziewanego ilorazu  $\frac{m_i}{n_i}$  równanie prostej aproksymującej.

Warunek przyjęcia właściwej prostej aproksymującej, jest spełniony, jeśli spełniona jest nierówność:

$$(42) \quad \omega_k < \text{arc tg } \frac{m_i}{n_i} < \omega_{k+1}$$

w której  $\omega_k$  i  $\omega_{k+1}$  są kątami nachylenia prostych łączących początek układu z końcami odcinka przyjętej dla przekroju  $\underline{i}$  prostej aproksymującej /rys.37/.

Ostatecznie granicznym obciążeniem badanej konstrukcji będzie mniejsze z otrzymanych dla przyjętych mechanizmów zniszczenia obciążeń.

W pracy [75] przedstawiono również metodę wykreślną wyznaczania obciążenia granicznego. Metoda ta jest prostsza od analitycznej i nie wymaga powtarzania całego toku postępowania, co jest konieczne w metodzie analitycznej w przypadku nietrafnego założenia schematów zniszczenia w przekrojach krytycznych. Niestety zakres stosowania metody wykreślniej jest ograniczony.

W przypadku rozpatrywanej konstrukcji metodę wykreślną można zastosować jedynie wtedy, gdy właściwym mechanizmem zniszczenia konstrukcji jest mechanizm przedstawiony na rys.39a i przy przyjęciu  $a_2 = 0$ . Równania (39) po wprowadzeniu oznaczeń podanych w załączniku 3, przyjmują wtedy postać:

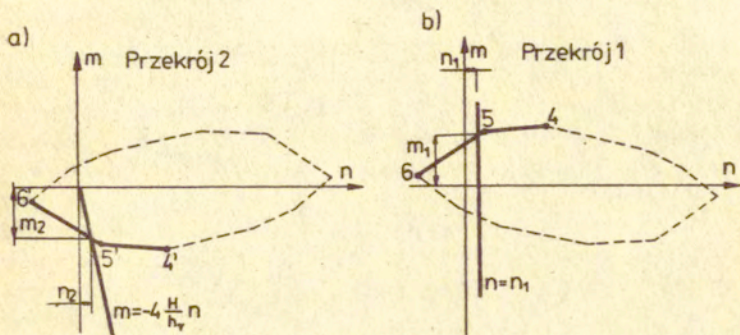
$$(43) \quad n_2 = r ; \quad m_2 = -H \frac{4}{h_r} n_2$$

$$(44) \quad n_1 = n_2 = r ; \quad m_1 = -H \frac{4}{h_r} n_1 + c \frac{4}{h_r} p .$$



Związki między sprowadzonymi momentami zginającymi  $m$  i sprowadzonymi siłami podłużnymi  $n$  w zakresie sprężystej pracy konstrukcji mają analogiczny do (43) i (44) zapis. W przekroju 2 będzie to zależność:

$$(45) \quad m = -H \frac{4}{h_r} n \quad .$$



Rys. 40

Przecinając prostą (45) z brzegiem obszaru  $\Omega$  /rys.40a/ wyznaczonego dla przekroju 2 otrzymujemy  $m_2$  i  $n_2$ . Jednocześnie z (44)<sub>1</sub> otrzymujemy  $n_1$ . Przecinając następnie prostą o równaniu:

$$(46) \quad n = n_1$$

z brzegiem obszaru  $\Omega$  wyznaczonego dla przekroju 1 /rys.40b/ otrzymujemy  $m_1$ .

Obciążenie graniczne  $p$  wyznaczmy podstawiając  $m_1$  i  $n_1$  do (44)<sub>2</sub>.

W pracy [75] przeprowadziłam również porównanie wyników analitycznych z wynikami przeprowadzonych przeze mnie badań doświadczalnych na jednonanowej kablobetonowej ramie przegubowo-podpartej, obciążonej symetrycznie dwiema siłami skupionymi [71]. Porównanie to wykazało bardzo dobrą zgodność obciążeń granicznych otrzymanych na drodze analitycznej i doświadczalnej.

3. Analiza nośności i pewne zagadnienia optymalnego projektowania stalowych konstrukcji prętowych poddanych działaniu obciążeń wielokrotnie zmiennych, przy decydującym na zachowanie się tych konstrukcji wpływie momentów zginających.

3.1. Podstawy i twierdzenia teorii przystosowania.

Metody wyznaczania granicznych wartości obciążeń działających na statycznie niewyznaczalne stalowe konstrukcje prętowe w sposób wielokrotnie zmienny.

Punktem wyjścia teorii przystosowania jest teoria nośności granicznej. Założenia, twierdzenia i rozwiązania teorii przystosowania, której początki dały prace Grűninga [28] i Bleicha [5] zawarte są w monografiach na temat plastycznych analizy i projektowania konstrukcji [33,37,64,106] oraz w opracowaniach [25,45,46,48,49,52,59].

Teoria przystosowania/adaptacji/zajmuje się rozwiązaniami problemów nośności konstrukcji wykonanych z materiałów o własnościach sprężysto-plastycznych, <sup>podciężnych</sup> działaniu obciążeń zmiennych w czasie, tj. wielokrotnych, cyklicznych, bądź o zmiennej intensywności.

Rozwiązania teorii przystosowania dotyczą ustrojów, których sztywność pozwala na przyjęcie założenia o małości przemieszczeń, a stosowanie dla materiałów z jakich zostały wykonane idealnie sprężysto-plastycznego modelu ciała /bez ograniczenia odkształceń/, o równych granicach plastyczności  $\pm \sigma_0$  przy rozciąganiu i ściskaniu /rys.7/ jest przy rozwiązaniu problemu nośności dostatecznie ścisłe. Ostatniemu założeniu odpowiada związek pomiędzy momentem a krzywizną przedstawiony na rys.3b. Uwzględnienie efektu wzmocnienia jest w teorii przystosowania przedmiotem osobnych rozwiązań.

Omawiane ustroje mogą przenieść większe obciążenia niż odpowiadające granicy stosowalności związków sprężystych /punkt A na rys.1/, ale też mogą ulec zniszczeniu przed osiągnięciem obciążenia granicznego wyznaczonego metodami teorii nośności granicznej. To ostatnie bowiem odnosi się ściśle jedynie do przypadków, w których obciążenie narasta w sposób monotoniczny, od zera do wartości największej, proporcjonalnie do jednego parametru.

Występujące w konstrukcjach obciążenia nie mają naogół tego

charakteru. W większości przypadków mamy do czynienia z pewną liczbą schematów obciążenia /śnieg, wiatr, obciążenie użytkowe itp./, których intensywności mogą zmieniać się niezależnie od siebie. Granice tych zmian możemy określić na podstawie norm obciążeń oraz założeń projektowych.

W konstrukcji poddanej działaniu obciążeń wielokrotnie zmiennych, w wyniku obciążania jej poza zakres sprężysty, a następnie odciążania, mogą powstać w każdym cyklu obciążeń nowe odkształcenia plastyczne. Odkształceniom tym towarzyszy powstanie stanu samozrównoważonych naprężeń resztkowych, który dla następnych cykli - jest stanem naprężeń wstępnych. Jeżeli naprężenia resztkowe w superpozycji z naprężeniami od obciążeń powodują redukcję naprężeń całkowitych, to konstrukcja, po powstaniu w niej w trakcie początkowych cykli obciążenia pewnych odkształceń plastycznych, może na kolejne cykle reagować w sposób czysto sprężysty, czyli przystosować się do programu obciążeń wykraczających poza pierwotne zakresy, bądź obszary, zawierające obciążenia gwarantujące jej czysto sprężyste zachowanie się. Stan ten, w którym omawiane zakresy ulegają przesunięciu, a obszary - transiacji i któremu towarzyszy stabilizacja odkształceń plastycznych, nazywa się stanem przystosowania, bądź adaptacji.<sup>\*</sup>

Granice omawianych zakresów, bądź obszarów są miarą nośności konstrukcji.

Jeżeli obciążenia działające na konstrukcję wyjdą poza granice określone dla obciążeń, do których konstrukcja może się przystosować, osiągnie ona pewien stan graniczny nośności i ulegnie zniszczeniu. Rozróżniamy dwa rodzaje zniszczenia, występujące czasem jednocześnie:

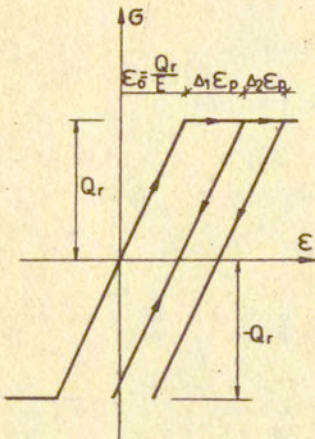
A. Zniszczenie przyrostowe,<sup>\*\*</sup> gdy występujące w kolejnych cyklach obciążeń odkształcenia plastyczne tych samych znaków sumując się /rys.41a/ powodują powstanie nadmiernych przemieszczeń, które czynią konstrukcję bezużyteczną lub powodują

---

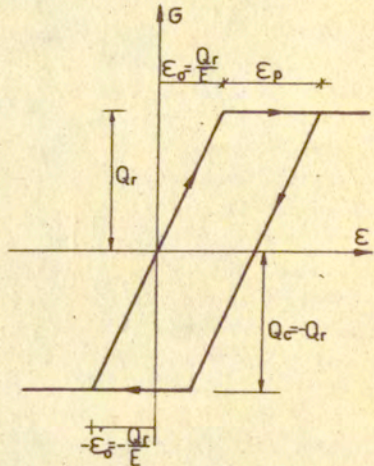
\*/ Rolę naprężeń resztkowych w procesie przystosowania się konstrukcji do zadanego obciążenia omówiono szczegółowo w p.1.6. rozprawy na przykładzie jednoprzęsłowej belki poddanej czystemu zginaniu.

\*\*/ ang. incremental collapse

a)



b)



Rys. 41

jej zniszczenie. Konstrukcja zmienia się wtedy w mechanizm o ograniczonych skutkach niepełnego uplastycznienia obrotach przekrojów w powstałych przegubach.

3. Zniszczenie wskutek zmęczenia niskocyklowego<sup>2</sup>, gdy występujące w kolejnych cyklach obciążeń przyrosty odkształceń plastycznych przeciwnych znaków znoszą się wprawdzie /rys.41 b/, ale których działanie powoduje po dostatecznie wielu cyklach/kilku do kilku tysięcy/ powstanie w materiale kruchych złomów spowodowanych zmęczeniem plastycznym. Jest to zjawisko odmienne od zmęczenia sprężystego, które następuje po setkach tysięcy lub milionach cykli.

Do wyznaczenia granicznych obciążeń przystosowania, tj. obciążeń, których osiągnięcie, bądź przekroczenie powoduje wystąpienie jednego z wyżej opisanych stanów zniszczenia służą twierdzenia teorii przystosowania. Twierdzenia te przyjmują jako kryterium przystosowania skończoność całkowitej pracy  $x/\text{ang. low cycle fatigue.}$

plastycznej rozproszonej w procesie adaptacji. Zostały one sformułowane dla obciążeń zmieniających się w znanych zakresach, bez potrzeby rozpatrywania historii ich działania.

Graniczne obciążenia przystosowania płaskich konstrukcji prętowych wyznacza się z podobnych do występujących w teorii nośności granicznej twierdzeń: kinematycznego Neala [63] i statycznego Bleicha [5].

Uogólnieniem twierdzeń Neala i Bleicha na trójwymiarowe stany naprężeń i odkształceń są twierdzenia o przystosowaniu dla ciała sformułowane i udowodnione: twierdzenie kinematyczne przez Koitera [45], twierdzenie statyczne przez Melana [59].

Pierwsze praktyczne zastosowanie twierdzenia kinematycznego dla płyt, powłok i tarcz podali Gokhfeld [24] i Sawczuk [105].

Teoria przystosowania zajmuje się nie tylko problemem określania zakresów, bądź obszarów obciążeń, do których konstrukcja może się przystosować, a których granice są miarą jej nośności.

Przedmiotem badań tej teorii są także metody wyznaczania rozkładu sił wewnętrznych w stadium zniszczenia konstrukcji, jak również metody oceny maksymalnych ugięć powstałych w procesie przystosowania.

Przedstawione w następnym punkcie opracowania rozwiązania prac [ 61 do 87 ] dotyczą określenia nośności konstrukcji prętowych, o decydującym na ich zachowanie się wpływie działania momentów zginających, dlatego też temu problemowi poświęcimy obecnie uwagę.

Twierdzenie kinematyczne Neala w zastosowaniu do płaskich konstrukcji prętowych /belki, ramy, ruszty/ można sformułować następująco:

"jeżeli dla pewnego mechanizmu o  $n$  przegubach plastycznych i o kątach  $\theta_i$  obrotu w tych przegubach jest spełniona nierówność:

$$(47) \quad \sum_{i=1}^n M_{oi} |\theta_i| \leq \sum_{i=1}^n M_i^* \theta_i$$

gdzie

$$M_i^* = \begin{cases} \max M_i & \text{jeżeli } \theta_i > 0 \\ \min M_i & \text{jeżeli } \theta_i < 0 \end{cases}$$

to przystosowanie konstrukcji nie nastąpi.

Twierdzenie statyczne Bleicha brzmi następująco:

przystosowanie płaskiej konstrukcji prętowej nastąpi, jeżeli istnieje stały rozkład momentów resztkowych  $M_{Ri}$  takich, że w każdym przekroju będą zachowane nierówności:

$$\max M_i + M_{Ri} \leq M_{oi}$$

$$(48) - M_{oi} \leq \min M_i + M_{Ri}$$

$$\max M_i - \min M_i \leq 2 \max M_{si}$$

Występujące w (47) i (48) momenty  $\max M_i$  i  $\min M_i$  oznaczają ekstremalne sprężyste momenty zginające, jakie przy zadanym programie obciążeń mogą w przekroju "i" wystąpić, moment  $M_{oi}$  jest momentem granicznym przekroju "i", a występujący w (48) moment  $\max M_{si}$  jest największym sprężystym momentem zginającym jaki przekrój "i" może przenieść.

Zastosowanie zarówno twierdzenia Neala, jak i Bleicha do obliczenia granicznych obciążeń przystosowania wymaga wyznaczenia obwiedni ekstremalnych momentów sprężystych  $\max M$  i  $\min M$ .

Graniczne obciążenie przystosowania odpowiadające zniszczeniu wskutek zmęczenia niskocyklowego wyznacza się z twierdzenia Bleicha wykorzystując równanie (48<sub>3</sub>). Równanie to należy wypisać w przypadku zróżnicowanych elementów, dla wszystkich przekrojów charakterystycznych /węzły, przekroje pod siłami, itp/. Najmniejsze z wyznaczonych z równań (48<sub>3</sub>) obciążenie jest granicznym obciążeniem przystosowania odpowiadającym zniszczeniu wskutek zmęczenia niskocyklowego. W przypadku stałego przekroju / $\max M_{si} = \text{const}$ / wystarczy równanie (48<sub>3</sub>) wypisać dla przekroju, w którym wyrażenie / $\max M_i - \min M_i$ / osiąga maksimum.

Graniczne obciążenie odpowiadające zniszczeniu przyrostowemu konstrukcji otrzymać można z obu twierdzeń. Z twierdzenia kinematycznego otrzymuje się jego górną ocenę, ze statycznego - dolną.

Wyznaczenie granicznego obciążenia przystosowania metodą kinematyczną, tj. przy wykorzystaniu twierdzenia Neala, wymaga znajomości kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów ruchu plastycznego, tych samych, którymi przy wyznaczaniu obciążenia niszczonego posługuje się teoria nośności granicznej. Metoda ta jest prosta, bowiem pozwala na bezpośrednie korzystanie

z równań (47) . Stosując ją należy i wystarczy rozpatrzyć wszystkie podstawowe i będące ich kombinacją liniową mechanizmy zniszczenia o jednym stopniu swobody /patrz p.1.3.4 rozprawy oraz np [37]/. Dla mechanizmów tych należy wyznaczyć kąty  $\theta_i$  obrotu przekrojów w przegubach plastycznych /por. rys.11/ i wypisać równania (47) . Najmniejsze z wyznaczonych z tych równań obciążenie jest górną oceną granicznego obciążenia przystosowania odpowiadającego zniszczeniu przyrostowemu konstrukcji.

Zastosowanie metody statycznej  $\bar{x}$  opierającej się na twierdzeniu Bleicha wymaga skonstruowania statycznie dopuszczalnego, samozrównoważonego pola momentów reszkowych. Założenie takiego pola nie przedstawia specjalnych trudności, nie zależy ono bowiem od obciążeń zewnętrznych, a jedynie od występujących w nieobciążonej konstrukcji hiperstatycznej wielkości nadliczbowych  $\bar{X}_j$ . W celu wyznaczenia tego pola należy konstrukcję zastąpić przez układ statycznie wyznaczalny i określić występujące w niej momenty reszkowe w funkcji przyjętych wielkości nadliczbowych  $\bar{X}_j$ . Dla konstrukcji n - krotnie statycznie niewyznaczalnej moment reszkowy  $M_{Ri}$  w dowolnym przekroju "i" konstrukcji można zapisać w postaci:

$$(49) \quad M_{Ri} = \sum_{j=1}^n \bar{m}_j \bar{X}_j$$

gdzie  $\bar{m}_j$  oznaczają momenty zginające od wielkości nadliczbowych  $\bar{X}_j = 1$ .

Rozwiązanie polega na takim dobraniu wielkości nadliczbowych  $\bar{X}_j$ , aby wynikające z nich pole momentów reszkowych i poszukiwane graniczne obciążenie przystosowania spełniały układ nierówności (48<sub>1</sub>) i (48<sub>2</sub>) zapisanych dla charakterystycznych przekrojów konstrukcji.

Zbiórów obciążeń i pól momentów reszkowych spełniających układ nierówności (48<sub>1</sub>) i (48<sub>2</sub>) może być nieskończenie wiele. Wyznaczenie granicznego obciążenia przystosowania polega na

---

\*/ Podejście statyczne wyznaczania granicznych obciążeń przystosowania oraz rozkładu sił wewnętrznych w stadium zniszczenia konstrukcji zostało omówione w pracach [99], [100] i [52] oraz w monografiach [25] i [106] .

znalezieniu dla założonego w funkcji wielkości  $\bar{X}_j$  pola momentów reszkowych, drogą np eliminacji tych wielkości, największej z maksymalnych wartości obciążenia spełniających układ nierówności (48<sub>1</sub>) i (48<sub>2</sub>). Wartość ta jest oszacowaniem od dołu wielkości granicznego obciążenia przystosowania odpowiadającego zniszczeniu przyrostowemu konstrukcji.

Ostatecznie, miarą nośności konstrukcji jest mniejsze z granicznych obciążeń przystosowania odpowiadających zniszczeniu przyrostowemu i zmęczeniu niskocyklowemu.

W teorii adaptacji konstrukcji prętowych możliwe jest uzyskanie rozwiązania zupełnego. Z właściwym mechanizmem zniszczenia konstrukcji stowarzyszone jest bowiem statycznie dopuszczalne pole, będące sumą momentów zginających i momentów reszkowych.

W przypadku konstrukcji prętowych o niewysokim stopniu statycznej niewyznaczalności metoda kinematyczna jest łatwiejsza w stosowaniu. Ustalenie wszystkich kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia o jednym stopniu swobody nie przedstawia bowiem trudności, a wyznaczenie odpowiadających im granicznych obciążeń jest sprawą elementarną.

Dla konstrukcji wielokrotnie statycznie niewyznaczalnych wygodnie jest zadanie sprowadzić do pewnego problemu programowania liniowego i rozwiązać je przy pomocy maszyn liczących, wykorzystując istniejące standardowe programy [15, 50, 52, 55]. Dla tych konstrukcji można również skorzystać z omówionej np w [52] metody kinematyczno-statycznej. Metoda ta polega na sprawdzeniu otrzymanego z twierdzenia Neala rozwiązania metodą statyczną, tj. na wykazaniu istnienia dla tego rozwiązania statycznie dopuszczalnego pola momentów reszkowych, które by spełniło w całej konstrukcji warunki określone nierównościami (48<sub>1</sub>) i (48<sub>2</sub>). Inaczej mówiąc ekstremalne momenty sprężyste, odpowiadające wyznaczonemu metodą kinematyczną granicznemu obciążeniu przystosowania, plus momenty reszkowe nie mogą przekroczyć w żadnym przekroju konstrukcji wartości  $\frac{1}{2} M_{0i}$ . Jeśli pole takie nie istnieje, <sup>oznacza</sup> to, że w rozpatrywanym zbiorze wyznaczonych intuicyjnie mechanizmów zniszczenia pominięto mechanizmy o decydującym dla tej konstrukcji i obciążenia znaczeniu.

Metody kinematyczną i statyczną obliczania ram na przystosowanie przedstawiono w postaci schematów blokowych w [52].



Obliczenia komplikują się nieco, gdy mamy do czynienia z obciążeniem ciągłym, bądź ruchomym.

W tych bowiem przypadkach przeguby plastyczne nie tworzą się w miejscach występowania ekstremalnych sprężystych momentów zginających, a tworzą się w miejscach, w których momenty zginające od obciążeń zewnętrznych plus momenty resztkowe osiągają wartości ekstremalne. W związku z tym na odcinku występowania obciążenia ciągłego, bądź ruchomego należy założyć położenie przegubu plastycznego w zmiennej odległości  $x$  np. od podpory. W przypadku, gdy obciążenie stanowi siła ruchoma położenie siły określa jednocześnie położenie przegubu /przegub tworzy się pod siłą/. Następnie, w funkcji tej zmiennej odległości  $x$  należy wyznaczyć: kąty obrotu w przegubach plastycznych, moment sprężysty w założonym przegubie oraz jeśli przekrój jest różny wzdłuż długości elementu także i moment graniczny w tym przegubie, jak również z twierzeń teorii przystosowania obciążenie graniczne. Z minimalizacji tego obciążenia względem  $x$  otrzymujemy położenie przegubu, a następnie poszukiwaną wartość granicznego obciążenia przystosowania. W przypadku istnienia pewnej liczby  $n$  przegubów plastycznych "i", których położenia są określone odległościami  $x_1$ , należy wymienione wielkości przedstawić w funkcji tych odległości, a następnie przeprowadzić minimalizację obciążenia względem  $x_1, x_2 \dots x_1 \dots x_n$ .

3.2. Rozwiązania problemów nośności stalowych konstrukcji prętowych. Analiza wpływu zmienności obciążeń na spadek udźwigu tych konstrukcji. Metody podwyższania tego udźwigu. Pewne zagadnienia optymalnego projektowania.

Prace [81 do 87] zawierają rozwiązania problemów nośności stalowych konstrukcji prętowych: belek ciągłych, rusztów i ram portalowych. W pracach tych przedstawiam metody wyznaczania zakresów, bądź obszarów zawierających obciążenia nie powodujące występowania stanów granicznych nośności odpowiadających obciążeniom niezmiennym się /stałym/, zmiennym w czasie, przekroczenia stanu sprężystego zachowania się konstrukcji.

Niniejszy punkt zawiera wyniki przeprowadzonych w pracach [81 do 87] rozwiązań, niektóre wyprowadzenia oraz analizę

wpływu zmienności obciążeń na przesunięcie zakresu sprężystej pracy i spadek udźwigu rozpatrywanych konstrukcji. Omówiono w nim również możliwości podwyższenia tego udźwigu oraz przedstawiono pewne zagadnienia optymalnego projektowania.

Metody wyznaczania granicznego obciążenia nośności, czyli nośności "idealnej", będącej udźwigiem konstrukcji w przypadku występowania obciążeń jednokrotnych i stanowiącej poziom odniesienia dla pozostałych nośności, tj. granicznego obciążenia przystosowania oraz nośności sprężystej są powszechnie znane. Są to metody kinematyczna i statyczna teorii nośności granicznej. Zostały one w skróconej formie omówione w p.2.1 niniejszego opracowania. Metody teorii adaptacji wyznaczania granicznego obciążenia przystosowania płaskich konstrukcji prętowych: kinematyczna Neala i statyczna Bleicha zostały omówione w p.3.1 opracowania oraz np. w pracy [52].

Nośność sprężystą otrzymuje się z zależności obowiązujących w teorii linowo-sprężystej. Nośność ta odpowiada warunkowi pojawienia się w konstrukcji naprężeń równych granicy sprężystości  $R_s$ .

W przypadku zginanych ustrojów prętowych, konstrukcja osiąga nośność sprężystą, gdy naprężenia w skrajnych włóknach najbardziej wyczerpanego przekroju są równe:

$$(50) \quad \sigma = \frac{\max |M|}{W} = R_s$$

gdzie  $\max |M|$  jest największą bezwzględną wartością sprężystego momentu zginającego występującego w konstrukcji. Przyjmując, że granica sprężystości  $R_s$  równa jest w przybliżeniu granicy plastyczności  $R_e$  oraz zastępując wskaźnik wytrzymałości  $W$  wskaźnikiem oporu plastycznego  $W_{pl} / W = c W_{pl} /$  i wprowadzając następnie wielkość momentu granicznego  $M_0 = R_e W_{pl}$  otrzymuje się z przekształcenia (50) równanie:

$$(51) \quad \max |M| = c M_0,$$

z którego wyznacza się wielkość obciążenia odpowiadającego granicy stosowalności związków sprężystych, czyli nośność sprężystą konstrukcji.

W pracach [81 do 87] graniczne obciążenia nośności i przystosowania zostały wyznaczone metodami kinematycznymi teorii nośności granicznej i teorii przystosowania. Wyniki tych rozwiązań, otrzymane w postaci wartości liczbowych, zależności obciążeń gra-

nicznych od występujących parametrów, bądź w postaci zależności granicznych między działającymi obciążeniami, zostały wraz z wynikami dotyczącymi nośności sprężystej zestawione w tablicach.

Dla przypadków, w których obciążenie miało charakter złożony, np. obciążenie ram siłami pionowymi i poziomymi [83], obciążenie belek ciągłych ciężarem stałym i zmiennym [82], rozwiązanie przedstawiłam również w postaci wykresów obszarów zawierających obciążenia niepowodujące wystąpienia stanów granicznych nośności odpowiadających obciążeniom niezmienną się /stałym/, zmiennym w czasie, bądź przekroczenia stanu sprężystego zachowania się konstrukcji.

Gdy obciążenie graniczne zależało od zmiennego parametru, np. od rozstawu a sił  $P$  [84], od współczynnika  $k$  sprężystości podpory [85], od współczynnika  $\psi$  określającego dolną granicę zmienności sił  $P_i$  [86], rozwiązania przedstawiłam w postaci wykresów obciążeń granicznych w zależności od wielkości tych parametrów.

Niniejsze opracowanie zawiera wyniki wszystkich przedstawionych w pracach [81 do 87] rozwiązań oraz wyprowadzenia rozwiązań dotychczas nieopublikowanych.

W celu ujednoczenia oznaczeń wprowadzono następujące indeksy. Indeksem  $g$  oznaczono ogólnie wszystkie obciążenia graniczne. Indeksem  $n$  opatrzone graniczne obciążenie nośności, indeksem  $p$  - graniczne obciążenie przystosowania, przy czym występujący przy tym obciążeniu drugi indeks  $p$ , bądź  $z$  odpowiada zniszczeniu przyrostowemu, bądź zniszczeniu wskutek zmęczenia niskocyklowego. Indeksem  $s$  opatrzone obciążenie odpowiadające nośności sprężystej. Indeks  $o$  wprowadzono dodatkowo, dla przypadków, w których graniczne obciążenie nośności, bądź przystosowania otrzymano jako wynik minimalizacji obciążenia względem położenia przekroju krytycznego.

Przepisy normy PN-80/B-3200 polegają stosowanie do obliczenia stalowych konstrukcji budowlanych, jako jedynej metody stanów granicznych, przy czym rozwiązania należy przeprowadzać rozpatrując stany graniczne nośności oraz stany graniczne użytkowania. Przedstawione w pracach [81 do 87] rozwiązania zawierają oceny udźwigu tych konstrukcji odpowiadające osiągnięciu stanu granicznego nośności.

3.2.1. Belki ciągłe obciążone siłami  $P$  przesuwanymi się po nich w sposób quasi-statyczny [84].

Przedmiotem rozwiązania jest problem nośności belek ciągłych o stałym przekroju, o liczbie przęseł  $n = 2$  i  $n \gg 3$  i rozpiętościach przęseł równych  $L$ . Obciążenie stanowią:

- a/ dwie siły skupione  $P$  o rozstawie  $a$ , przesuwane się wielokrotnie po belkach w sposób quasi-statyczny,
- b/ dwie siły  $P$  o rozstawie  $a$ , wznoszące się monotonicznie od zera do wartości końcowej, ustawione na belkach w dowolnym miejscu.

O zniszczeniu belek zdecydowało tu zniszczenie przęseł skrajnych. Schemat statyczny belek oraz dowolny z nieskończenie wielu /ze względu na zmienność  $x$ / dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia belek przedstawia rys.42.

Rozwiązanie przeprowadzono dla rozstawu  $a$  sił  $P$  zmieniającego się w granicach  $0 \ll a \ll L$  wyznaczając siły  $P_{ppo}$ ,  $P_{no}$  i  $P_g$ .

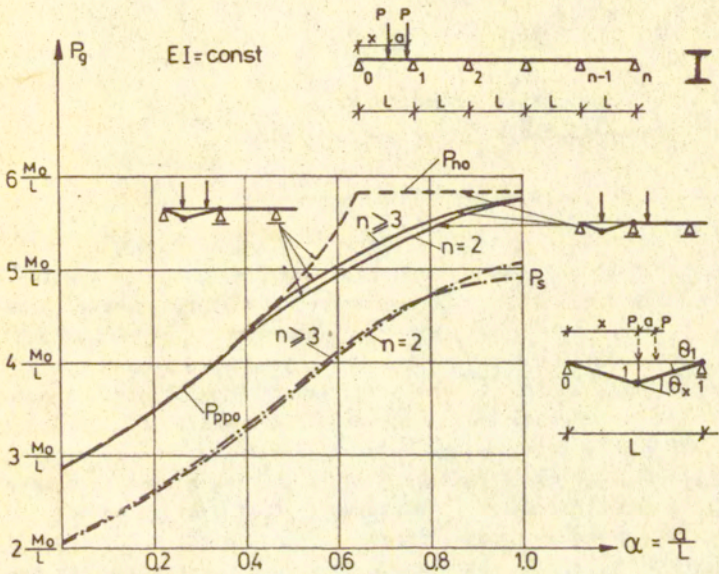
Siły  $P_{ppo}$ , czyli graniczne siły przystosowania powodujące zniszczenie przyrostowe konstrukcji /ono decydowało/, odpowiadają obciążeniom belek dwiema siłami  $P$  przesuwanymi się wielokrotnie po belkach w sposób quasi-statyczny. Siły te mogą się również zmieniać w granicach  $0 \ll P \ll P_{ppo}$ . Graniczne siły nośności  $P_{no}$  odpowiadają obciążeniu belek siłami  $P$  wznoszącymi się monotonicznie od zera do wartości końcowej  $P_{no}$  i ustawionymi na belkach tak, aby belki ulegały zniszczeniu przy najmniejszej intensywności tych sił. Graniczne siły  $P_g$ , czyli nośności sprężyste, wyznaczono dla takich ustawień sił  $P$ , które dawały ekstremalne wartości momentów zginających w przekrojach krytycznych. Nośności te, niezależne od sposobu oddziaływania obciążeń, odpowiadają granicy stosowalności związków sprężystych.

W pracy [84] wyznaczono graniczne obciążenie przystosowania  $P_{ppo}$  w sposób przybliżony, przy założeniu, że maksymalny moment przęsłowy w stanie sprężysto-plastycznym występuje w tym samym miejscu co w stanie sprężystym.

Rozwiązanie ściśle prowadzi do niemal identycznych wartości  $P_{ppo}$  sił  $P$ . Istotne różnice występują jedynie w położeniach  $x_p$  przegubów plastycznych. Rozwiązanie to dla belek dwu i trzyprzę-

Wykresy granicznych wartości  $P_g$  sił  $P$  w zależności od rozstawu  $a$  tych sił wyznaczone metodami :

- teorii nośności granicznej
- teorii przystosowania / zniszczenie przyrostowe /
- teorii liniowo-sprężystej



Rys. 42

słów, przedstawimy poniżej. Dla belek o liczbie przęseł  $n > 3$  można z wystarczającym przybliżeniem stosować wzory wyznaczone dla belek trzyprzęsłowych /por. [84] /.

Wprowadzmy, zgodnie z oznaczeniami z rys.42 i oznakowaniem z rys.11e, wyrażenia na kąty obrotu w przegubach plastycznych w postaci:

$$(52) \quad \theta_1 = -\frac{1}{L-x} \quad ; \quad \theta_x = \frac{L}{x(L-x)}$$

i przyjmijmy następnie  $\kappa = \frac{x}{L}$ .

Z równania (47) zapisanego dla przedstawionego na rys.42 mechanizmu zniszczenia belki w postaci:

$$(53) \quad M_0 |\theta_x| + M_0 |\theta_1| = \max M_x^{P=1} P_{pp} \theta_x + \min M_1^{P=1} P_{pp} \theta_1$$

otrzymamy graniczną siłę przystosowania odpowiadającą zniszczeniu przyrostowemu belki:

$$(54) \quad P_{pp} = \frac{1 + \alpha}{\max M_x^{P=1} - \alpha \min M_1^{P=1}} M_0$$

gdzie  $M_0$  jest momentem granicznym przekroju belki,  $\alpha$  jest wprowadzoną odległością od podpory 0 przekroju, w którym powstał przegub plastyczny,  $\max M_x^{P=1}$  jest maksymalnym momentem zginającym od sił  $P = 1$ , występującym w tym przekroju /gdy lewa siła znajduje się nad przekrojem/, a  $\min M_1^{P=1}$  najmniejszym momentem zginającym na podporze 1 od przesuujących się po belce sił  $P = 1$ .

Przegub plastyczny powstanie w przęśle belki w przekroju, w którym maksymalny moment zginający od sił  $P$  plus moment resztkowy osiągną wartość największą. Zniszczenie belki nastąpi po jej wielokrotnym obciążeniu parą przesuujących się sił  $P_{ppo}$ , najmniejszych z sił  $P_{pp}$  (54) odpowiadających nieskończenie wielu dopuszczalnym mechanizmom zniszczenia belki. Niszczące siły  $P_{ppo}$  otrzymamy zatem minimalizując względem  $\kappa$  funkcję (54) po uprzednim wprowadzeniu do niej wielkości  $\max M_x^{P=1}$  i  $\min M_1^{P=1}$ .

Przyjmując  $\alpha = \frac{a}{L}$  otrzymamy dla belki dwuprzęsłowej przy ustawieniu obu sił  $P = 1$  w przęśle 0-1 następujące wyrażenia na  $\max M_x^{P=1}$  i  $\min M_1^{P=1}$ :

$$(55) \quad \max M_x^{P=1} = [0,5 \kappa^4 + 0,75 \alpha \kappa^3 + (-2,5 + 0,75 \alpha) \kappa^2 + (2 - 1,25 \alpha + 0,25 \alpha^3) \kappa] L$$

$$\min M_1^{P=1} = [0,5 \mu_1^3 + 0,75\alpha \mu_1^2 + (0,75\alpha^2 - 0,5)\mu_1 + 0,25\alpha^3 - 0,25\alpha] L$$

$$(56) \quad \text{gdzie} \quad \mu_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{1,3333 - \alpha^2}}{2}$$

a przy ustawieniu jednej siły w przęśle 0-1, drugiej w przęśle 1-2:

$$(57) \quad \max M_x^{P=1} = [(1,5 - 0,75\alpha)\mu^3 + (-0,75\alpha^2 + 3\alpha - 4)\mu^2 + (-0,25\alpha^3 + 1,5\alpha^2 + 2,75\alpha + 2,5)\mu] L$$

$$(58) \quad \min M_1^{P=1} = [0,5333 \mu_1^3 + 0,8\alpha \mu_1^2 + (0,8\alpha^2 - 0,5333)\mu_1 + 0,2667\alpha^3 - 0,2667\alpha] L$$

$$\text{gdzie} \quad \mu_1 = 1 - 0,5\alpha.$$

Dla belki trzyprzęsłowej przy ustawieniu obu sił  $P = 1$  w przęśle 0-1 wyrażenia na  $\max M_x^{P=1}$  i  $\min M_1^{P=1}$  przyjmą postać:

$$(59) \quad \max M_x^{P=1} = [0,5333 \mu^4 + 0,8\alpha \mu^3 + (0,8\alpha^2 - 2,5333)\mu^2 + (0,2667\alpha^3 - 1,2667\alpha + 2)\mu] L$$

$$(60) \quad \min M_1^{P=1} = [(1,5 - 0,75\alpha)\mu_1^2 + (-0,75\alpha^2 + 3\alpha - 3)\mu_1 - 0,25\alpha^3 + 1,5\alpha^2 - 2,75\alpha + 1,5] L$$

gdzie:

$$\mu_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{1,3333 - \alpha^2}}{2}$$

a przy ustawieniu jednej siły w przęśle 0-1, drugiej w przęśle 1-2:

$$\max M_X^{P=1} = [-0,0667x^4 + (1,8 - \alpha)x^3 + (3,6\alpha - \alpha^2 - 4,3333)x^2 + (2,6 - 0,3333\alpha^3 + 1,8\alpha^2 - 3,0667\alpha)x]L \quad (61)$$

$$\min M_1^{P=1} = [-0,0667x_1^3 + (1,8 - \alpha)x_1^2 + (3,6\alpha - \alpha^2 - 3,3333)x_1 - 0,3333\alpha^3 + 1,8\alpha^2 - 3,0667\alpha + 1,6]L \quad (62)$$

gdzie  $x_1 = 9 - 5\alpha - \sqrt{20\alpha^2 - 72\alpha + 64,3333}$ .

Momenty  $\max M_X^{P=1}$  są funkcjami wprowadzonej odległości  $x$  lewej siły od podpory 0, będącej jednocześnie założoną odległością od tej podpory przegubu plastycznego i jako takie wchodzi do wzoru (54). Momenty  $\min M_1^{P=1}$  zależą natomiast od wyznaczonej odległości  $x_1$  lewej siły od podpory 0, której odpowiada wystąpienie na podporze 1 najmniejszego momentu zginającego. Korzystając z wzorów (56), (58), (60) lub (62) można dla zadanych  $\alpha$  wyznaczyć zawczasu ich wartości liczbowe.

Z podstawienia  $\max M_X^{P=1}$  do (54) otrzymujemy następujące wyrażenia na siły  $P_{pp}$ :

a/ dla belki dwuprzęsłowej przy ustawieniu obu sił w przęśle 0-1

$$(63) P_{pp} = (1+x) \left[ 0,5x^4 + 0,75\alpha x^3 + (0,75\alpha^2 - 2,5)x^2 + \left( 2 - 1,25\alpha + 0,25\alpha^3 - \frac{\min M_1^{P=1}}{L} \right) x \right]^{-1}$$

b/ dla belki dwuprzęsłowej przy ustawieniu jednej siły w przęśle 0-1, drugiej w przęśle 1-2

$$(64) P_{pp} = (1+x) \left[ (1,5 - 0,75\alpha)x^3 + (-0,75\alpha^2 + 3\alpha - 4)x^2 + (-0,25\alpha^3 + 1,5\alpha^2 - 2,75\alpha + 2,5 - \frac{\min M_1^{P=1}}{L})x \right]^{-1}$$

c/ dla belki trzyprzęsłowej przy ustawieniu obu sił w przęśle 0-1



$$(65) P_{pp} = 3(1 + \varkappa) \left[ 1,6 \varkappa^4 + 2,4 \alpha \varkappa^3 + (2,4 \alpha^2 - 7,6) \varkappa^2 + \right. \\ \left. + (0,8 \alpha^3 - 3,8 \alpha + 6 - \frac{3 \min M_A^{P=1}}{L}) \varkappa \right]^{-1},$$

d/ dla belki trzyprzęsłowej przy ustawieniu jednej siły w przęśle 0-1, drugiej w przęśle 1-2

$$(66) P_{pp} = 3(1 + \varkappa) \left[ -0,2 \varkappa^4 + (5,4 - 3 \alpha) \varkappa^3 + (10,8 \alpha - 3 \alpha^2 - 13) \varkappa^2 + \right. \\ \left. + (7,8 - \alpha^3 + 5,4 \alpha^2 - 9,2 \alpha - \frac{3 \min M_A^{P=1}}{L}) \varkappa \right]^{-1}.$$

Minimalizując funkcje (63), (64), (65) i (66) względem  $\varkappa$ , tj. wyznaczając

$$(67) \quad \frac{dP_{pp}}{d\varkappa} = 0$$

otrzymujemy równania, z których dla zadanych  $\alpha$  możemy wyznaczyć położenia przegubów  $\varkappa_p$ . Równania te mają postać:

a/ dla belki dwuprzęsłowej, przy ustawieniu obu sił w przęśle 0-1, tj. gdy  $\varkappa_p + \alpha \ll 1$

$$(68) \quad 1,5 \varkappa^4 + (2 + 1,5 \alpha) \varkappa^3 + (0,75 \alpha^2 + 2,25 \alpha - 2,5) \varkappa^2 + (1,5 \alpha^2 - 5) \varkappa + \\ + 2 - 1,25 \alpha - 0,25 \alpha^3 - \frac{\min M_A^{P=1}}{L} = 0,$$

b/ dla belki dwuprzęsłowej przy ustawieniu jednej siły w przęśle 0-1, drugiej w przęśle 1-2, tj. gdy  $\varkappa_p + \alpha \gg 1$

$$(69) \quad (6 \alpha - 12) \varkappa^3 + (3 \alpha^2 - 3 \alpha + 2) \varkappa^2 + (6 \alpha^2 - 24 \alpha + 32) \varkappa + \\ + \alpha^3 - 6 \alpha^2 + 11 \alpha - 10 + \frac{4 \min M_A^{P=1}}{L} = 0,$$

c/ dla belki trzyprzęsłowej przy ustawieniu obu sił w przęśle 0-1, tj. gdy  $\kappa_p + \alpha \ll 1$

$$(70) \quad 4,8\kappa^4 + (6,4 + 4,8\alpha)\kappa^3 + (2,4\alpha^2 + 7,2\alpha - 7,6)\kappa^2 + \\ + (4,8\alpha^2 - 15,2)\kappa + 6 - 3,8\alpha + 0,8\alpha^3 - \frac{3 \min M_1^{P_2-1}}{L} = 0,$$

d/ dla belki trzyprzęsłowej przy ustawieniu jednej siły w przęśle 0-1, drugiej w przęśle 1-2, tj. gdy  $\kappa_p + \alpha \gg 1$ .

$$(71) \quad 0,6\kappa^4 + (6\alpha - 10)\kappa^3 + (-3,2 - 1,8\alpha + 3\alpha^2)\kappa^2 + \\ + (26 - 21,6\alpha + 6\alpha^2)\kappa - 7,8 + \alpha^3 - 5,4\alpha^2 + 9,2\alpha + \frac{3 \min M_1^{P_2-1}}{L} = 0.$$

Podstawiając wyznaczone dla zadanych  $\alpha$  z równań (68), (69), (70) i (71) wielkości  $\kappa_p = \frac{x_p}{L}$  odpowiednie do wzorów (63), (64), (65) lub (66) otrzymujemy wartości  $P_{ppo}$  granicznych sił przystosowania. Dla belek o przekrojach dwuteowych i idealnie sandwiczowych są to wartości sił niszczących, dla tych bowiem przekrojów o zniszczeniu belek decyduje zniszczenie przyrostowe, a nie zmęczenie niskocyklowe.

Siły  $P_{no}$  i odpowiadające im sprowadzone odległości  $x_n = \frac{x_n}{L}$  przegubów plastycznych od podpory 0 określono minimalizując względem  $\kappa$  siły  $P_n$  wyznaczone z równania (19), zapisanego dla przedstawionych na rys.42 mechanizmów zniszczenia belek. Otrzymano:

$$a/ \text{ dla } 0 \leq \alpha \leq 0,656 \quad \left( \alpha = \frac{a}{L} \right)$$

$$(72) \quad P_{no} = \frac{1}{6 - \alpha - 2\sqrt{2(4-\alpha)}} \frac{M_o}{L}; \quad x_n = -1 + \sqrt{2 - \frac{\alpha}{2}},$$

$$b/ \text{ dla } 0,656 \leq \alpha \leq 1,0$$

$$(73) \quad P_{no} = 5,83 \frac{M_o}{L}; \quad x_n = 0,414$$

Tablica 1

$\alpha = \frac{a}{L}$	liczba pręseł $n = 2$				
	Nośność sprężysta	Przystosowani		Nośność graniczna	
$P_s^I (c=0,85)$	$k_p = \frac{X_p}{L}$	$P_{ppo}$	$k_n = \frac{X_n}{L}$	$P_{no}$	
0	2,06 $M_c/L$	0,393	2,859 $M_o/L$	0,414	2,91 $M_d$
0,1	2,31	0,379	3,140	0,396	3,18 $L$
0,2	2,60	0,365	3,467	0,378	3,49
0,3	2,92	0,353	3,848	0,360	3,86
0,4	3,27	0,342	4,283	0,342	4,29
0,5	3,67	0,337	4,653	0,323	4,80
0,6	4,06	0,339	4,955	0,307	5,43
0,656	-	-	-	0,293	5,83
0,656	-	-	-	0,414	5,83
0,7	4,40	0,345	5,226	0,414	5,83
0,8	4,72	0,357	5,460	0,414	5,83
0,9	4,95	0,370	5,636	0,414	5,83
1,0	5,06	0,385	5,761	0,414	5,83

Tablica 2

$\alpha = \frac{a}{L}$	liczba pręseł $n \geq 3$				
	Nośność sprężysta	Przystosowanie		Nośność graniczna	
$P_s^I (c=0,85)$	$k_p = \frac{X_p}{L}$	$P_{ppo}$	$k_n = \frac{X_n}{L}$	$P_{no}$	
0	2,08 $M_o/L$	0,391	2,854 $M_o/L$	0,414	2,91 $M_o/L$
0,1	2,34	0,377	3,137	0,396	3,18
0,2	2,63	0,364	3,466	0,378	3,49
0,3	2,96	0,352	3,846	0,360	3,86
0,4	3,32	0,342	4,286	0,342	4,29
0,5	3,72	0,334	4,737	0,323	4,80
0,6	4,09	0,338	5,029	0,307	5,43
0,656	-	-	-	0,293	5,83
0,656	-	-	-	0,414	5,83
0,7	4,45	0,347	5,307	0,414	5,83
0,8	4,72	0,360	5,524	0,414	5,83
0,9	4,88	0,374	5,682	0,414	5,83
1,0	4,92	0,390	5,779	0,414	5,83

Siły  $P_s$  wyznaczono z zależności (51) w postaci wzoru:

$$(74) \quad P_s = \frac{c}{\max |M^{P=1}|} M_0$$

gdzie  $\max |M^{P=1}|$  oznacza największą bezwzględną wartość sprężystego momentu zginającego występującego w konstrukcji od sił  $P = 1$ . Wyznaczone z wzorów (72), (73) i (74) dla  $0 \ll \alpha \ll 1$  wartości sił  $P_{no}$  i  $P_s$  oraz  $\delta_n$  zestawiono obok wartości  $P_{ppo}$  i  $\delta_p$  w tablicach 1 i 2. Siły  $P_s$  zostały wyznaczone dla przekroju dwuteowego belek ( $c = 0,85$ ).

Rysunek 42 przedstawia wykresy granicznych obciążeń  $P_{ppo}$ ,  $P_{no}$  i  $P_s$  belek dwu i wieloprzęśłowych w zależności od rozstawu a sił P.

Każdy z przedstawionych na rys.42 wykresów składa się z dwóch gałęzi - jednej odpowiadającej ustawieniu obu sił w przęśle skrajnym, drugiej odpowiadającej ustawieniu jednej siły w przęśle skrajnym, drugiej w przęśle sąsiednim. Graniczne siły nośności  $P_{no}$  i przystosowania  $P_{ppo}$  są znacznie większe /od 18% do 45%/ od nośności sprężystej  $P_s$  i to tym większe im rozstaw sił P jest mniejszy.

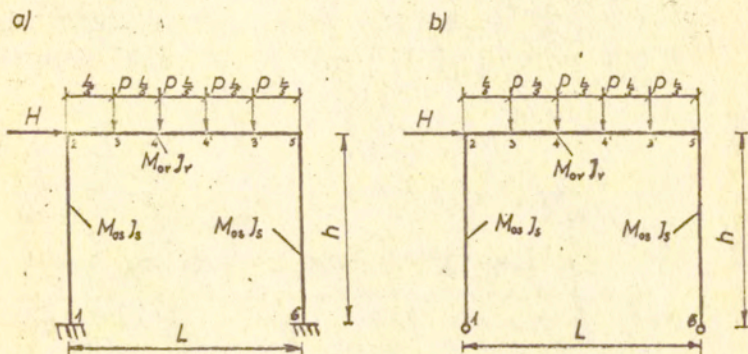
Dla rozstawu  $0 \ll a \ll 0,5L$  oraz  $a \approx L$  różnice między wartościami granicznych sił nośności i przystosowania są nieznaczne i w tych zakresach można zastąpić rozwiązania teorii przystosowania rozwiązaniami teorii nośności granicznej.

W pozostałym zakresie, tj. dla  $0,5L \ll a < L$  różnice te są na tyle duże /maksymalna, wynosząca 12,3% występuje dla  $a = 0,656L/$ , że przy obciążeniu belek siłami ruchomymi należy je projektować na przystosowanie.

Na uwagę zasługuje tu fakt, że przesuwanie się po belkach jednej siły / $a = 0/$  powoduje spadek nośności tych belek o niecałe 2%, w związku z czym przy takim obciążeniu nie ma potrzeby projektowania belek na przystosowanie.

3.2.2. Ramy portalowe poddane działaniu skupionych obciążeń o zmiennej intensywności [83].

Celem pracy [83] było wyznaczenie obszarów zawierających niszczące wartości sił pionowych  $P$  i poziomych  $H$  /por. [52] i [11] / obciążających w sposób stały /monotoniczny wzrost sił  $P$  i  $H$  od zera do wartości końcowych  $P_n$  i  $H_n$ / oraz zmienny /  $0 \leq P \leq P_p$  ;  $-H_p \leq H \leq H_p$  /jednonawowe ramy portalowe: utwierdzoną i przegubowo-podpartą /rys.43/. Ramy te stanowią podstawowy element konstrukcyjny np. w budynkach nadszybi w kopalniach.



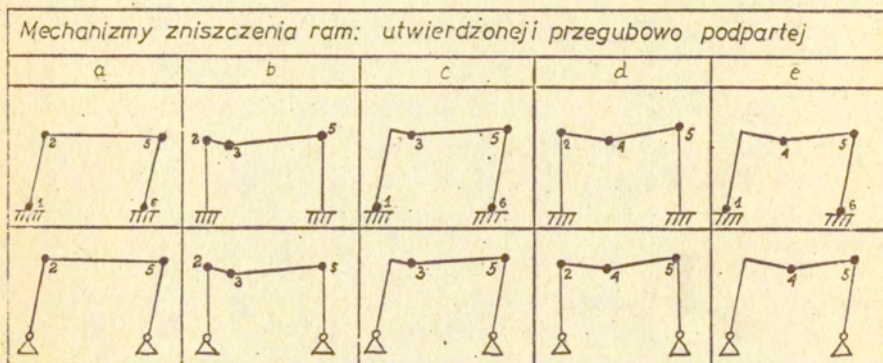
Rys.43

Przedstawione w pracy [83] rozwiązanie przeprowadzono przyjmując, że stosunek wartości granicznych obciążeń  $\xi = \frac{H_2}{P_2}$  może się zmieniać w zakresie  $-\infty \leq \xi \leq \infty$  oraz wprowadzając następujące oznaczenia /por.rys.43/:

$$(75) \quad \beta = \frac{M_{or}}{M_{os}} ; \quad K = \frac{J_r}{J_s} \frac{h}{L} ; \quad \delta = \frac{h}{L} ; \quad N = 2K + 3 ;$$

$$N_1 = K + 2 ; \quad N_2 = 6K + 1 ; \quad c = \frac{W}{W_{pl}} .$$

Tablica 3



Tablica 4

Kąty $\theta$ obrotu przekrojów w przegubach plastycznych oraz zasada ich znakowania							
Mechanizm zniszczenia	Kąty $\theta$ obrotu przekrojów:						Oznakowanie
	1	2	3	4	5	6	
a	$-\frac{1}{h}$	$+\frac{1}{h}$			$-\frac{1}{h}$	$+\frac{1}{h}$	<p><math>M &gt; 0, \theta &gt; 0</math></p> <p><math>M &lt; 0, \theta &lt; 0</math></p>
b		$-\frac{5}{L}$	$\frac{25}{4L}$		$-\frac{5}{4L}$		
c	$-\frac{1}{h}$		$\frac{5}{4h}$		$-\frac{5}{4h}$	$+\frac{1}{h}$	
d		$-\frac{5}{2L}$		$\frac{25}{6L}$	$-\frac{5}{3L}$		
e	$-\frac{1}{h}$			$\frac{5}{3h}$	$-\frac{5}{3h}$	$+\frac{1}{h}$	

Przeprowadzone rozwiązanie polegało na określeniu kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia /tablica 3/, kątów obrotu przekrojów w przegubach plastycznych /tablica 4/, wartości ekstremalnych momentów w przekrojach krytycznych /tablica 5/, a następnie na wyznaczeniu z równań (19), (47) i (54) zależności między granicznymi obciążeniami nośności  $P_n$  i  $H_n$  /dla obciążeń stałych/ i przystosowania  $P_p$  i  $H_p$  /dla obciążeń zmiennych w czasie/ oraz obciążeniami  $P_g$  i  $H_g$  odpowiadającymi granicy stosowności związków sprężystych /tablice 6 i 7/.

Zależności te, wyprowadzone dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia i przekrojów krytycznych ram, pozwalają na określenie poszukiwanych obszarów zawierających niszczące wartości sił  $P$  i  $H$  /rys.44/. Brzegi tych obszarów wyznacza się wybierając spośród prostych wykreślonych na podstawie wyprowadzonych zależności te odcinki, którym odpowiadają ograniczone nimi i osiami współrzędnych najmniejsze obszary. Znajdujące się wewnątrz tych obszarów obciążenia nie powodują wystąpienia stanów granicznych nośności odpowiadających obciążeniom niezmiennych się, zmiennych w czasie /obszar zakreskowany/, bądź przekroczenia naturalnego zakresu sprężystego zachowania się konstrukcji.

W przypadku działania obciążeń zmiennych o osiągnięciu stanu granicznego nośności rozpatrywanych konstrukcji decydowały - w zależności od stosunku sił  $P$  do  $H$  oraz parametrów geometrycznych ram - zmęczenie niskocyklowe lub zniszczenie przyrostowe, bądź też oba typy zniszczenia były równouprawnione. Różne były też mechanizmy zniszczenia ram.

Dla występujących na ogół w tego typu konstrukcjach obciążeń, tj. dla sił poziomych  $H$  wyraźnie mniejszych od  $P$ , zmienność obciążeń, w przypadku ram przegubowo-podpartych nie wpłynęła na wartości graniczne  $P_g$  i  $H_g$  tych sił, tj. nie spowodowała spadku nośności konstrukcji. Wartości te wyznaczone w oparciu o teorię nośności granicznej i teorię przystosowania są identyczne. Dla ram utwierdzonych różnice między siłami  $P_g$  i  $H_g$  wyznaczonymi w oparciu o teorię nośności granicznej i teorię przystosowania są znaczące. W obu przypadkach obszary zawierające obciążenia gwarantujące czysto sprężyste zachowanie się konstrukcji uległy wskutek przystosowania się tych konstrukcji do zadanych programów obciążeń znacznemu powiększeniu.

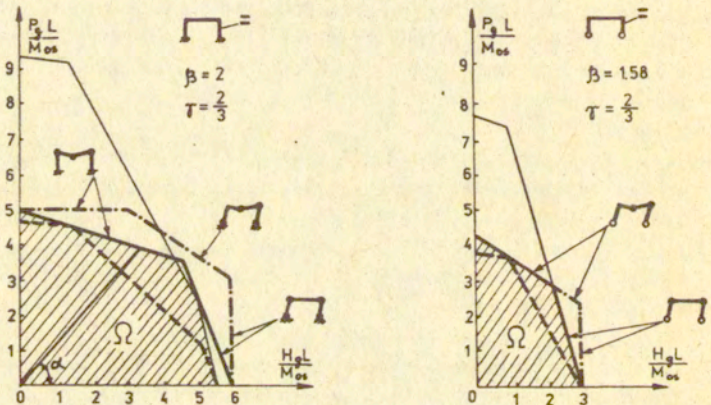
Brzeźni obszary  $\Omega$  wyznaczone metodami :

- - - - - teorii nośności granicznej
- ===== teorii przystosowania / zniszczenie przyrostowe /  
zmęczenie niskocyklowe /
- teorii liniowo-sprężystej

$$0 \leq P \leq P_g \quad - \quad H_g \leq H \leq H_g$$

$$\beta = \frac{M_{gr}}{M_{os}}$$

$$\gamma = \frac{h}{L}$$



Rys. 44



Tablica 5

		Ekstremalne momenty sprężyste występujące w przekrojach :					
		1 lub 6	2 lub 5	3 lub 3'	4 lub 4'		
Rama	Oznaczenie momentów						
	max $M_i$	$\frac{2}{5N_1} PL + \frac{3k+1}{N_2} \frac{Hh}{2}$	$\frac{3k}{N_2} \frac{Hh}{2}$	$\frac{2N-4}{5N_1} PL + \frac{9k}{5N_2} \frac{Hh}{2}$	$\frac{3N-4}{5N_1} PL + \frac{3k}{5N_2} \frac{Hh}{2}$		
	min $M_i$	$-\frac{3k+1}{N_2} \frac{Hh}{2}$	$-\frac{4PL}{5N_1} - \frac{3k}{N_2} \frac{Hh}{2}$	$-\frac{9k}{5N_2} \frac{Hh}{2}$	$-\frac{3k}{5N_2} \frac{Hh}{2}$		
Utwardzona	max $M_i$ -min $M_i$	$\frac{2}{5N_1} PL + \frac{3k+1}{N_2} \frac{Hh}{2}$	$\frac{4}{5N_1} PL + \frac{3k}{N_2} \frac{Hh}{2}$	$\frac{2N-4}{5N_1} PL + \frac{9k}{5N_2} \frac{Hh}{2}$	$\frac{3N-4}{5N_1} PL + \frac{3k}{5N_2} \frac{Hh}{2}$		
	max $M_i$	0	$\frac{Hh}{2}$	$\frac{2N-6}{5N_1} PL + \frac{3}{10} Hh$	$\frac{3N-6}{5N_1} PL + \frac{1}{10} Hh$		
	min $M_i$	0	$-\frac{6}{5N_1} PL - \frac{Hh}{2}$	$-\frac{3}{10} Hh$	$-\frac{1}{10} Hh$		
Przebudowa podparta	max $M_i$ -min $M_i$	0	$\frac{6}{5N_1} PL + Hh$	$\frac{2N-6}{5N_1} PL + \frac{3}{5} Hh$	$\frac{3N-6}{5N_1} PL + \frac{1}{5} Hh$		

Związki między granicznymi obciążeniami $P_g$ i $H_g$ ramy przegubowej podpartej		Przystosowanie		Nośność graniczna	
		Zniszczenie przyrostowe		$\beta \geq 1$	$\beta \leq 1$
Przełoty	Nośność sprężysta	Przystosowanie		Zniszczenie przyrostowe	
		Zniszczenie wskutek zmęczenia niskocyklowego		$\beta \geq 1$	$\beta \leq 1$
2	$\frac{6}{5N} P_g + \frac{\gamma}{2} H_s = \frac{cM_{os}}{L}$	$\frac{6}{5N} P_{pz} + \gamma H_{pz} = \frac{2cM_{os}}{L}$	$\frac{6}{5N} P_{pp} + \gamma H_{pp} = \frac{2M_{os}}{L}$	$\frac{6}{5N} P_{pp} + \gamma H_{pp} = \frac{2M_{os}}{L}$	$H_n = \frac{2\beta M_{os}}{\gamma L}$
	$\frac{6}{5N} P_g + \frac{\gamma}{2} H_s = \frac{c\beta M_{os}}{L}$	$\frac{6}{5N} P_{pz} + \gamma H_{pz} = \frac{2c\beta M_{os}}{L}$	$\frac{P_{pp} + 2\gamma H_{pp}}{5(1+\beta)M_{os}} = \frac{5\beta M_{os}}{L}$	$H_n = \frac{5(1+\beta)M_{os}}{2L}$	$H_n = \frac{5\beta M_{os}}{L}$
3	$\frac{2N-6}{5N} P_g + \frac{3\gamma}{10} H_s = \frac{c\beta M_{os}}{L}$	$\frac{2N-6}{5N} P_{pz} + \frac{3\gamma}{5} H_{pz} = \frac{2c\beta M_{os}}{L}$	$\frac{P_{pp} + \gamma H_{pp}}{5(1+\beta)M_{os}} = \frac{10\beta M_{os}}{3L}$	$P_{pp} + \gamma H_{pp} = \frac{10\beta M_{os}}{3L}$	$P_n + 2\gamma H_n = \frac{5\beta M_{os}}{L}$
	$\frac{3N-6}{5N} P_g + \frac{\gamma}{10} H_s = \frac{c\beta M_{os}}{L}$	$\frac{3N-6}{5N} P_{pz} + \frac{\gamma}{5} H_{pz} = \frac{2c\beta M_{os}}{L}$	$P_{pp} + \gamma H_{pp} = \frac{10\beta M_{os}}{3L}$	$P_{pp} + \gamma H_{pp} = \frac{10\beta M_{os}}{3L}$	$P_n + \gamma H_n = \frac{10\beta M_{os}}{3L}$

Tablica 7

Związki między granicznymi obciążeniami $P_B$ i $H_B$ ramy utwierdzonej		Przystosowanie		Przystosowanie		Nośność graniczna	
		Zniszczenie wskutek zmęczenia niskocyklowego		Zniszczenie przyrostowe		Nośność graniczna	
Przekrój	Nośność sprężysta	Przystosowanie		Przystosowanie		Nośność graniczna	
1	$\frac{2}{5N_1} P_B + \frac{(3k+1)\gamma}{2N_2} H_B = \frac{cM_{os}}{L}$	$\frac{2}{5N_1} P_{pz} + \frac{(3k+1)\gamma}{N_2} H_{pz} = \frac{2cM_{os}}{L}$	$\beta \geq 1$	$\beta \leq 1$	$H_n = \frac{4M_{os}}{\gamma L}$	$\beta \geq 1$	$H_n = \frac{2(1+\beta)M_{os}}{\gamma L}$
		$\frac{4}{5N_1} P_B + \frac{3\gamma k}{2N_2} H_B = \frac{cM_{os}}{L}$	$\frac{4}{5N_1} P_{pz} + \frac{3\gamma k}{N_2} H_{pz} = \frac{2cM_{os}}{L}$	$P_{pp} + \frac{3\gamma k}{N_2} H_{pp} = \frac{5(1+\beta)M_{os}}{L}$	$P_{pp} + \frac{3\gamma k}{N_2} H_{pp} = \frac{5\beta M_{os}}{L}$	$H_n = \frac{5(1+\beta)M_{os}}{2L}$	$H_n = \frac{5\beta M_{os}}{L}$
2	$\frac{4}{5N_1} P_B + \frac{3\gamma k}{2N_2} H_B = \frac{c\beta M_{os}}{L}$	$\frac{4}{5N_1} P_{pz} + \frac{3\gamma k}{N_2} H_{pz} = \frac{2c\beta M_{os}}{L}$	$(1 + \frac{4}{5N_1} P_{pp} + 2H_{pp}) + 2H_{pp} = \frac{4}{5N_1} P_{pp} + 2(1 + \frac{4}{5N_1} P_{pp}) + 2H_{pp} = \frac{(5\beta + 4)M_{os}}{L}$	$P_{pp} + 2H_{pp} = \frac{4}{5N_1} P_{pp} + 2H_{pp} = \frac{(5\beta + 4)M_{os}}{L}$	$P_{pp} + 2H_{pp} = \frac{(5\beta + 13)M_{os}}{2L}$	$P_{pp} + 2H_{pp} = \frac{(5\beta + 13)M_{os}}{2L}$	$P_{pp} + 2H_{pp} = \frac{(4 + 5\beta)M_{os}}{L}$
		$\frac{4}{5N_1} P_B + \frac{3\gamma k}{2N_2} H_B = \frac{c\beta M_{os}}{L}$	$\frac{4}{5N_1} P_{pz} + \frac{3\gamma k}{N_2} H_{pz} = \frac{2c\beta M_{os}}{L}$	$P_{pp} + \frac{3\gamma k}{N_2} H_{pp} = \frac{5(1+\beta)M_{os}}{L}$	$P_{pp} + \frac{3\gamma k}{N_2} H_{pp} = \frac{10\beta M_{os}}{3L}$	$P_{pp} + \frac{3\gamma k}{N_2} H_{pp} = \frac{10\beta M_{os}}{3L}$	$P_{pp} + \frac{3\gamma k}{N_2} H_{pp} = \frac{10\beta M_{os}}{3L}$
3	$\frac{2N_1 - 4}{5N_1} P_B + \frac{9\gamma k}{10N_2} H_B = \frac{c\beta M_{os}}{L}$	$\frac{2N_1 - 4}{5N_1} P_{pz} + \frac{9\gamma k}{5N_2} H_{pz} = \frac{2c\beta M_{os}}{L}$	$(1 + \frac{2}{5N_1} P_{pp} + \gamma H_{pp}) + \frac{2}{5N_1} P_{pp} + \gamma H_{pp} = \frac{2(5\beta + 3)M_{os}}{3L}$	$(1 + \frac{2}{5N_1} P_{pp} + \gamma H_{pp}) + \frac{2}{5N_1} P_{pp} + \gamma H_{pp} = \frac{2(5\beta + 3)M_{os}}{3L}$	$P_{pp} + \gamma H_{pp} = \frac{(11 + 5\beta)M_{os}}{3L}$	$P_{pp} + \gamma H_{pp} = \frac{(11 + 5\beta)M_{os}}{3L}$	$P_{pp} + \gamma H_{pp} = \frac{2(3 + 5\beta)M_{os}}{3L}$
		$\frac{3N_1 - 4}{5N_1} P_B + \frac{3\gamma k}{10N_2} H_B = \frac{c\beta M_{os}}{L}$	$\frac{3N_1 - 4}{5N_1} P_{pz} + \frac{3\gamma k}{5N_2} H_{pz} = \frac{2c\beta M_{os}}{L}$	$P_{pp} + \gamma H_{pp} = \frac{(11 + 5\beta)M_{os}}{3L}$	$P_{pp} + \gamma H_{pp} = \frac{(11 + 5\beta)M_{os}}{3L}$	$P_{pp} + \gamma H_{pp} = \frac{(11 + 5\beta)M_{os}}{3L}$	$P_{pp} + \gamma H_{pp} = \frac{(11 + 5\beta)M_{os}}{3L}$

Otrzymane rozwiązanie można wykorzystać do zaprojektowania konstrukcji na przystosowanie przy zakresach zmienności obciążeń danych w postaci:

$$(76) \quad 0 \leq P \leq P_{max} \quad , \quad -H_{max} \leq H \leq H_{max}$$

gdzie  $P_{max}$  i  $H_{max}$  są maksymalnymi obciążeniami występującymi w konstrukcji.

Wyznaczenie stosunku obciążeń granicznych  $P_p$  i  $H_p$  posłuży do znalezienia wartości momentu granicznego  $M_{os}$ . Stosunek ten jest równy:

$$(77) \quad \frac{P_p}{H_p} = \frac{s P_{max}}{s H_{max}} = \operatorname{tg} \alpha$$

gdzie  $s$  jest współczynnikiem bezpieczeństwa względem nieprzystosowania.

Mając wyznaczony dla przyjętych charakterystyk geometrycznych ramy z warunku przystosowania obszar  $\Omega$  prowadzimy ze środka układu współrzędnych /rys.44/ prostą o kącie nachylenia do osi odciętych:

$$(78) \quad \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{P_{max}}{H_{max}}$$

i przecinamy ją z brzegiem tego obszaru. Otrzymujemy  $P_p$  i  $H_p$  w funkcji  $M_{os}$ . Wprowadzając następnie  $P_p = s P_{max}$  wyznaczamy  $M_{os}$ .

3.2.3. Belki wieloprzęskowe poddane działaniu obciążeń stałych i użytkowych [81], [82].

Tematem prac [81] i [82] jest analiza stanów granicznych nośności belek ciągłych o stałym przekroju i liczbie przęseł  $n = 2$ ,  $n = 3$  i  $n \gg 4$ . Rozpiętości przęseł równe są  $L$ . Obciążenie belek stanowią obciążenia ciągłe: stałe  $g$ , wzrastające monotonicznie od zera do wartości końcowej  $g_g$  i przyłożone do wszystkich przęseł belek oraz użytkowe  $p$  o zmiennej intensywności ( $0 \leq p \leq p_g$ ) występujące na wszystkich, bądź na niektórych przęsłach belek.

Zniszczenie belek następuje wskutek zniszczenia pręseł skrajnych. Schematy statyczne belek oraz właściwy mechanizm ich zniszczenia przedstawiono na rys.45.

Wprowadzając współczynnik  $k = \frac{p_g}{g_g} = \frac{s p_{max}}{s g_{max}}$ , gdzie  $s$  jest współczynnikiem bezpieczeństwa, a  $p_{max}$  i  $g_{max}$  maksymalnymi obciążeniami występującymi w konstrukcji, wyznaczono związki między granicznymi obciążeniami nośności  $g_{no}$  i  $p_{no}$  dla przypadku gdy obciążenie  $p$  wzrastało monotonicznie od zera do wartości końcowej  $p_{no}$ , między granicznymi obciążeniami przystosowania  $g_{pp}$  i  $p_{pp}$ , odpowiadającymi zniszczeniu przyrostowemu /ono decydowało/, gdy obciążenie  $p$  zmieniało się w granicach  $0 < p < p_{pp}$  i między granicznymi obciążeniami  $g_s$  i  $p_s$  odpowiadającymi nośnościom sprężystym.

W pracy [81] graniczne obciążenia przystosowania zostały wyznaczone w sposób przybliżony, przyjęto bowiem przeguby plastyczne w miejscach wystąpienia maksymalnych zginających momentów sprężystych. Praca [82] przedstawia rozwiązanie ścisłe, w którym przyjęto przeguby plastyczne, w miejscach w których momenty zginające od obciążeń zewnętrznych plus momenty resztkowe osiągają wartości maksymalne. Różnice w wartościach granicznych obciążeń przystosowania wyznaczonych w sposób ścisły i metodą przybliżoną są znikome. Znaczące różnice występują jedynie w położeniach przegubów plastycznych.

Z minimalizacji względem  $\alpha = \frac{x}{L}$  obciążenia  $g_n$ , wyznaczonego z równania (19), zapisanego dla przedstawionego na rys.45 mechanizmu zniszczenia belek w postaci:

$$(79) \quad (1 + k) g_n \frac{1 \cdot L}{2} = M_o |\theta_x| + M_o |\theta_1|$$

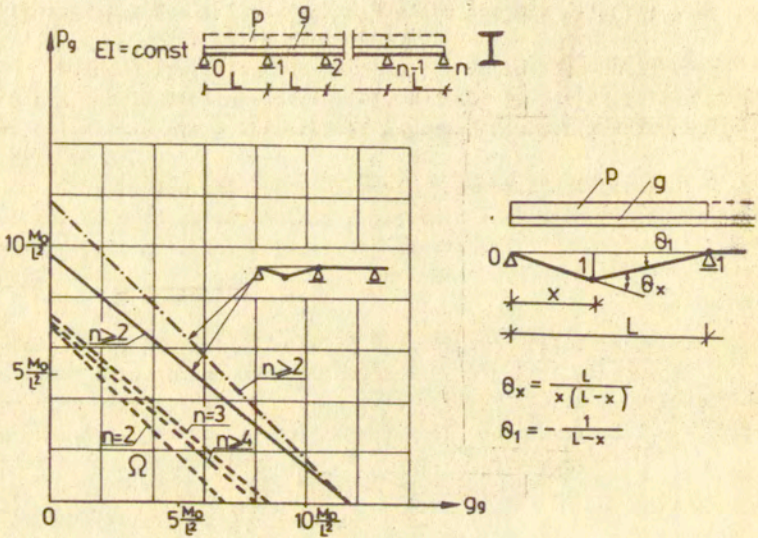
otrzymano dla belek o liczbie pręseł  $n \geq 2$  położenie przegubu plastycznego  $x_n$  oraz graniczne obciążenia nośności:

$$(80) \quad x_n = 0,414 L, \\ g_{no} = 11,67 \frac{1}{1+k} \frac{M_o}{L^2}, \quad p_{no} = k g_{no}.$$

Obciążenie  $g_{pp}$  wyznaczone z równania (47) zapisanego dla przedstawionego na rys.45 mechanizmu zniszczenia belek podstawiając następujące wartości ekstremalnych momentów zginających występujących w przegubach plastycznych :

Brzeźi obszarów  $\Omega$  wyznaczone metodami :

- teorii nośności granicznej
- teorii przystosowania / zniszczenie przyrostowe /
- teorii liniowo-sprężystej



Rys. 45

a/ dla belki dwuprzęsłowej

$$(81) \begin{aligned} \max M_x &= (0,375 + 0,437k) x L g - 0,5 (1 + k) x^2 g \\ \min M_1 &= -0,125 (1 + k) L^2 g \end{aligned}$$

b/ dla belki trzyprzęsłowej

$$(82) \begin{aligned} \max M_x &= (0,400 + 0,450k) x L g - 0,5 (1 + k) x^2 g \\ \min M_1 &= -(0,100 + 0,117k) L^2 g \end{aligned}$$

c/ dla belki czteroprzęsłowej

$$(83) \begin{aligned} \max M_x &= (0,393 + 0,446k) x L g - 0,5 (1 + k) x^2 g \\ \min M_1 &= -(0,107 + 0,121k) L^2 g \end{aligned}$$

Następnie z minimalizacji obciążenia  $\epsilon_{pp}$  względem  $\alpha$  otrzymano położenie  $\alpha_p = \frac{x_p}{L}$  przegubu plastycznego w przęśle.

Ostatecznie wzory na  $\epsilon_{ppo}$  i  $\alpha_p$  mają postać :

a/ dla belki dwuprzęsłowej /  $n = 2$  /

$$(84) \quad \epsilon_{ppo} = \frac{1 + \alpha_p}{(0,5 + 0,562 k) \alpha_p - 0,5 (1 + k) \alpha_p^2} \frac{M_o}{L^2},$$

$$\text{gdzie} \quad \alpha_p = -1 + \sqrt{1 + \frac{1 + 1,124 k}{1 + k}}$$

b/ dla belki o liczbie przęseł  $n \geq 3$

$$(85) \quad \epsilon_{ppo} = \frac{1 + \alpha_p}{(0,5 + 0,567 k) \alpha_p - 0,5 (1 + k) \alpha_p^2} \frac{M_o}{L^2},$$

$$\text{gdzie} \quad \alpha_p = -1 + \sqrt{1 + \frac{1 + 1,134 k}{1 + k}}$$

Graniczne obciążenie  $p_{ppo}$  otrzymuje się z zależności :

$$(86) \quad p_{ppo} = k \epsilon_{ppo}.$$

Wyznaczone z wzoru (51) obciążenia  $\epsilon_s$ , odpowiadające nośności sprężystej / o osiągnięciu tej nośności decyduje wyteżenie przekroju nad podporą 1 / mają postać :

a/ dla belki dwuprzęsłowej /  $n = 2$  /

$$(87) \quad \epsilon_s = \frac{c}{0,125 (1 + k)} \frac{M_o}{L^2}$$

b/ dla belki trzyprzęsłowej /  $n = 3$  /

$$(88) \quad \epsilon_S = \frac{c}{0,100 + 0,117 k} \frac{M_0}{L^2}$$

c/ dla belek o liczbie przęseł  $n \geq 4$

$$(89) \quad \epsilon_S = \frac{c}{0,107 + 0,121 k} \frac{M_0}{L^2}$$

Obciążenie  $p_s$  otrzymuje się z zależności:

$$p_s = k g_s .$$

Na podstawie przedstawionych rozwiązań wyznaczono dla belek wykonanych z dwuteowników walcowanych ( $c = 0,85$ ) obszary ograniczone przez proste odpowiadające związkowi między obciążeniami granicznymi  $p_g$  i  $g_g$  oraz osie odciętych i rzędnych /rys.45/. Znajdujące się wewnątrz tych obszarów obciążenia nie powodują wystąpienia stanów granicznych nośności, odpowiadających obciążeniom  $p$  niezmiennych się, zmiennych w czasie, bądź przekroczenia naturalnego zakresu sprężystego zachowania się konstrukcji.

Spadek nośności belek będący wynikiem zmienności obciążenia  $p$  jest wyraźny. Znaczne są również różnice /największe dla belki dwuprzęsłowej/ występujące między rozwiązaniami teorii przystosowania i teorii liniowo-sprężystej. Wynika z tego, że belki winny być projektowane na przystosowanie, bowiem projektowanie na nośność graniczną jest nie dość bezpieczne, a w oparciu o teorię liniowo-sprężystą nieekonomiczne.

Wniosek ten znalazł swoje odbicie w normie PN-80/B-03200, która poleca stosować przy projektowaniu tych belek, ujęte w innej formie od przedstawionych w pracach [81] i [82], wyniki rozwiązań teorii przystosowania. Norma ta podaje wartości momentów zginających dla belek ciągłych, poddanych działaniu obciążeń: stałego  $q$  i zmiennego  $p$  w postaci wzoru (31) oraz współczynników  $C_q$  i  $C_p$  zestawionych w tabelicy załącznika 5 normy. Jest to podane przez Bleicha w pracy [6] dobre przybliżenie rozwiązania ścisłego przeprowadzonego metodą statyczną teorii przystosowania.



Nasuwa się w związku z tym uwaga, że zalecane przez normę dla rozwiązań teorii plastyczności, a sugerujące chęć pewnej aseku-racji, projektowanie, stosujące zamiast wskaźnika oporu plastycz-  
nego  $W_{pl}$  wskaźnik zastępczy  $\frac{W_{pl} + W}{2}$  /wzór (23) normy/  
jest zbyt bezpieczne.

Przy dysponowaniu bowiem nie rozwiązaniem nośności granicznej, a rozwiązaniem teorii przystosowania, a więc w przypadku obciążeń zmiennych - rozwiązaniem ścisłym, stosowanie takiej dodatkowej rezerwy bezpieczeństwa jest nieuzasadnione.

### 3.2.4. Belki ciągłe obciążone grupami sił skupionych o zmiennej intensywności [86].

Praca [86] zawiera wyznaczenie i porównanie granicznych obciążeń belek ciągłych o stałym przekroju i liczbie przęseł  $n = 2$  i  $n \gg 3$ . Rozpiętości przęseł równe są  $L$ . Obciążenie belek stanowią siły skupione  $P_i$ , które mogą być ustawione po jednej, po dwie, bądź po trzy na każdym przęśle. Grupy sił obciążające poszczególne przęsła mogą je obciążać w sposób stały /monotoniczny wzrost sił  $P$  od zera do wartości końcowej/, bądź zmieniać się wielokrotnie, niezależnie dla każdego przęsła, ale w tych samych granicach:

$$(90) \quad \varphi P \leq P_i \leq P$$

Rozwiązanie przeprowadzono dla współczynnika  $\varphi$  zmieniającego się w zakresie:

$$(91) \quad -1 \leq \varphi \leq 1.$$

Górna granica zakresu zmienności sił  $P_i$  jest dla wszystkich rozpatrywanych przypadków obciążeń równa  $P$ . Dolna granica tego zakresu jest zależna od  $\varphi$  i dla  $\varphi$  dodatnich odpowiadają jej siły  $P_i$  większe od zera, lecz mniejsze od  $P$ , skierowane w dół, a dla  $\varphi$  ujemnych siły większe od  $-P$ , lecz mniejsze od zera, skierowane do góry.

Dla obciążeń stałych w postaci najniekorzystniej działających grup sił  $P_i$  o wartościach:

$$(92) \quad P_i = \varphi P, \quad P_i = 0, \quad \text{bądź } P_i = P \quad \text{dla } \varphi \leq 0 \quad \text{oraz}$$

$$P_i = \varphi P, \quad \text{bądź } P_i = P \quad \text{dla } \varphi > 0$$

graniczne siły nośności  $P_g = P_n$  wyznaczono stosując metodę kinematyczną teorii nośności granicznej.

Dla grup sił  $P_i$  zmieniających się wielokrotnie, w granicach określonych wzorem (90), graniczne siły przystosowania  $P_g = P_{pp}$  odpowiadające zniszczeniu przyrostowemu belki oraz  $P_g = P_{pz}$  odpowiadające zniszczeniu wskutek zmęczenia niskocyklowego wyznaczono stosując odpowiednio twierdzenie kinematyczne i twierdzenie statyczne teorii przystosowania.

Siły  $P_n$  i  $P_{pp}$  wyznaczono rozpatrując wybrane z kinematycznie dopuszczalnych i przedstawione na rys.46 miarodajne mechanizmy zniszczenia belek. Siły te zestawiono w tabelicy 8, przy czym wzory A, B i B' odpowiadają mechanizmom A, B i B' zniszczenia belek.

Graniczne siły przystosowania  $P_{pz}$  odpowiadające zniszczeniu wskutek zmęczenia niskocyklowego /wzory Z, Z' i Z'' tabelicy 8/ wyznaczono z wzoru:

$$(93) \quad P_{pz} = \frac{2c}{\max_{M/\beta} \frac{P=1}{M/\beta} - \min_{M/\beta} \frac{P=1}{M/\beta}} M_0$$

wynikającego z podstawienia do (48)<sub>3</sub>, analogicznej do (54) zależności:  $\max_{M/\beta} M_{s1} = cM_0$ , a następnie z podstawienia do (93) różnic ekstremalnych momentów występujących w przekrojach  $\beta$  wyznaczonych dla grup sił  $P_i$  o wartościach (92) i przy przyjęciu  $P=1$ . Przez  $\beta$  oznaczono przekroje, w których różnice te osiągają maksimum. Przez Z' oznaczono przypadki, w których maksimum tych różnic występuje w przęśle 0-1, przez Z'', gdy występuje ono na podporze 1, a przez Z gdy występuje ono zarówno na podporze 1, jak i w przęśle 0-1.

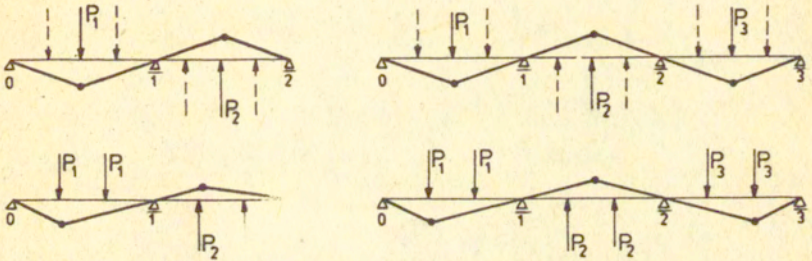
Siły  $P_s$ , czyli nośność sprężystą belek wyznaczono z wynikającego z zależności (51) wzoru (74), w którym

Miarodajne mechanizmy zniszczenia belek

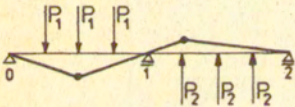
Mechanizmy A



Mechanizmy B

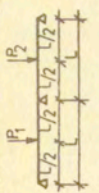
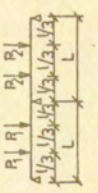
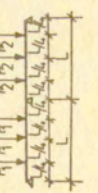


Mechanizm B'

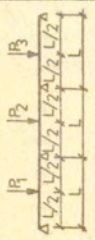
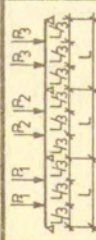
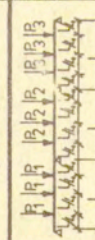


Rys. 46

Tablino 8

Nr poz.	Schemat statyczny i obciążenie	$P_s$		$P_p$		$P_n$	
		a	b	A	Z	A	B
1	 $\varphi P \leq R \leq P$ $\varphi P \leq P_2 \leq P$ $-1 \leq \varphi \leq 1$	$\frac{1}{3} \leq \varphi \leq 1$ $P_s = \frac{16c}{3} \frac{M_0}{L}$	$-1 \leq \varphi \leq \frac{1}{3}$ $P_s = \frac{64c}{13-3\varphi} \frac{M_0}{L}$	$\frac{12-19c}{12-3c} \leq \varphi \leq 1$ $P_{pp} = \frac{96}{19-3\varphi} \frac{M_0}{L}$	A	$-\frac{1}{3} \leq \varphi \leq 1$ $P_n = 6 \frac{M_0}{L}$	
		$-1 \leq \varphi \leq 1$	$-1 \leq \varphi \leq \frac{12-19c}{12-3c}$ $P_{pz} = \frac{8c}{1-\varphi} \frac{M_0}{L}$	B	$-1 \leq \varphi \leq \frac{1}{3}$ $P_n = \frac{8}{1-\varphi} \frac{M_0}{L}$		
2	 $\varphi P \leq R_1 \leq P$ $\varphi P \leq P_2 \leq P$ $-1 \leq \varphi \leq 1$	$P_s = 3c \frac{M_0}{L}$	A	$\frac{4-7c}{4-c} \leq \varphi \leq 1$ $P_{pp} = \frac{24}{7-\varphi} \frac{M_0}{L}$	A	$-\frac{1}{4} \leq \varphi \leq 1$ $P_n = 4 \frac{M_0}{L}$	
		$-1 \leq \varphi \leq 1$	Z	$-1 \leq \varphi \leq \frac{4-7c}{4-c}$ $P_{pz} = \frac{6c}{1-\varphi} \frac{M_0}{L}$	B	$-1 \leq \varphi \leq -\frac{1}{4}$ $P_n = \frac{9}{2-\varphi} \frac{M_0}{L}$	
3	 $\varphi P \leq R_1 \leq P$ $\varphi P \leq R_2 \leq P$ $-1 \leq \varphi \leq 1$	$-\frac{11}{15} \leq \varphi \leq 1$ $P_s = \frac{32c}{15} \frac{M_0}{L}$	A	$\frac{48-79c}{48-15c} \leq \varphi \leq 1$ $P_{pp} = \frac{192}{79-15\varphi} \frac{M_0}{L}$	A	$-\frac{2}{9} \leq \varphi \leq 1$ $P_n = 3 \frac{M_0}{L}$	
		$-1 \leq \varphi \leq -\frac{11}{15}$ $P_s = \frac{128c}{49-15\varphi} \frac{M_0}{L}$	Z	$-1 \leq \varphi \leq \frac{48-79c}{48-15c}$ $P_{pz} = \frac{4c}{1-\varphi} \frac{M_0}{L}$	B	$-\frac{1}{2} \leq \varphi \leq -\frac{2}{9}$ $P_n = \frac{20}{3(2-\varphi)} \frac{M_0}{L}$	

Tablica 8 c.d.

4	 <p> <math>\varphi_P \leq P_1 \leq P</math>  <math>\varphi_P \leq P_2 \leq P</math>  <math>\varphi_P \leq P_3 \leq P</math>  <math>-1 \leq \varphi \leq 1</math> </p>	<p>b</p> $P_S = \frac{80c}{17 - 3\varphi} \frac{M_0}{L}$	<p>dia c</p>	<p>A</p>	$- \frac{2}{3} \leq \varphi \leq 1 \quad P_{pp} = \frac{30}{6 - \varphi} \frac{M_0}{L}$	<p>A</p>	$0 \leq \varphi \leq 1$ $P_H = 6 \frac{M_0}{L}$
5	 <p> <math>\varphi_P \leq P_1 \leq P</math>  <math>\varphi_P \leq P_2 \leq P</math>  <math>\varphi_P \leq P_3 \leq P</math>  <math>-1 \leq \varphi \leq 1</math> </p>	<p>a</p> $P_S = \frac{45c}{14 - 2\varphi} \frac{M_0}{L}$	<p>dia c</p>	<p>A</p>	$\frac{32 - 53c}{32 - 8c} \leq \varphi \leq 1$	<p>A</p>	$0 \leq \varphi \leq 1$ $P_H = 4 \frac{M_0}{L}$
6	 <p> <math>\varphi_P \leq P_1 \leq P</math>  <math>\varphi_P \leq P_2 \leq P</math>  <math>\varphi_P \leq P_3 \leq P</math>  <math>-1 \leq \varphi \leq 1</math> </p>	<p>a</p> $P_S = \frac{16c}{7 - \varphi} \frac{M_0}{L}$	<p>dia c</p>	<p>A</p>	$\frac{3 - 5c}{3 - c} \leq \varphi \leq 1$	<p>A</p>	$0 \leq \varphi \leq 1$ $P_H = 3 \frac{M_0}{L}$

$\max |M^{P=1}|$  jest bezwzględną wartością występującego w belce ekstremalnego momentu zginającego, wywołanego przez najniekorzystniejszą działającą grupę sił  $P_1$  o wartościach (92), przy przyjęciu  $P=1$ . Zestawiono je w tabelicy 8. Przypadki a tej tabelicy odpowiadają wystąpieniu ekstremalnych momentów na podporze 1, przypadki b - wystąpieniu tych momentów w przęśle 0-1.

W pracy [86] wykazano, że otrzymane wielkości sił  $P_n$  są dla belek o liczbie przęseł  $n \gg 2$  jednakowe, wyznaczone dla belek o liczbie przęseł  $n = 3$ ,  $n = 4$  i  $n = 5$  wartości sił  $P_p$  są niemal identyczne, a wartości sił  $P_s$  wyznaczone dla belek trzyprzęsłowych można z pewnym przybliżeniem stosować do belek o liczbie przęseł  $n > 3$ . W związku z tym rozwiązanie sprowadzono do wyznaczenia wartości granicznych obciążeń dla belek o liczbie przęseł  $n = 2$  i  $n = 3$ .

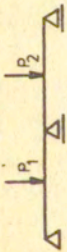
Na podstawie wyznaczonych i zestawionych w tabelicy 8 wielkości tych granicznych obciążeń sporządzono dla przekrojów: prostokątnego ( $c = \frac{2}{3}$ ), dwuteownika walcowanego ( $c = 0,85$ ) i idealnego przekroju sandwiczowego ( $c = 1,0$ ) wykresy zależności sił  $P_s$ ,  $P_p$  i  $P_n$  od współczynnika  $\varphi$  /rys.47 do 52/.

Prawie wszystkie z przedstawionych krzywych składają się z więcej niż jednej gałęzi.

Wykresy sił  $P_p$  składają się z jednej gałęzi /oznaczonej przez  $P_{pp}/$ , gdy o nośności belki w całym zakresie zmienności  $\varphi$  decyduje zniszczenie przyrostowe oraz z dwu gałęzi /oznaczonych przez  $P_{pp}$  i  $P_{pz}/$ , gdy o nośności decydują dla części tego zakresu zniszczenie przyrostowe, a dla pozostałej części zmęczenie niskocyklowe. Gałąź  $P_{pp}$ , jako niezależna od kształtu przekroju belki, jest dla wszystkich przekrojów wspólna. Gałęzie  $P_{pz}$  są dla różnych przekrojów różne.

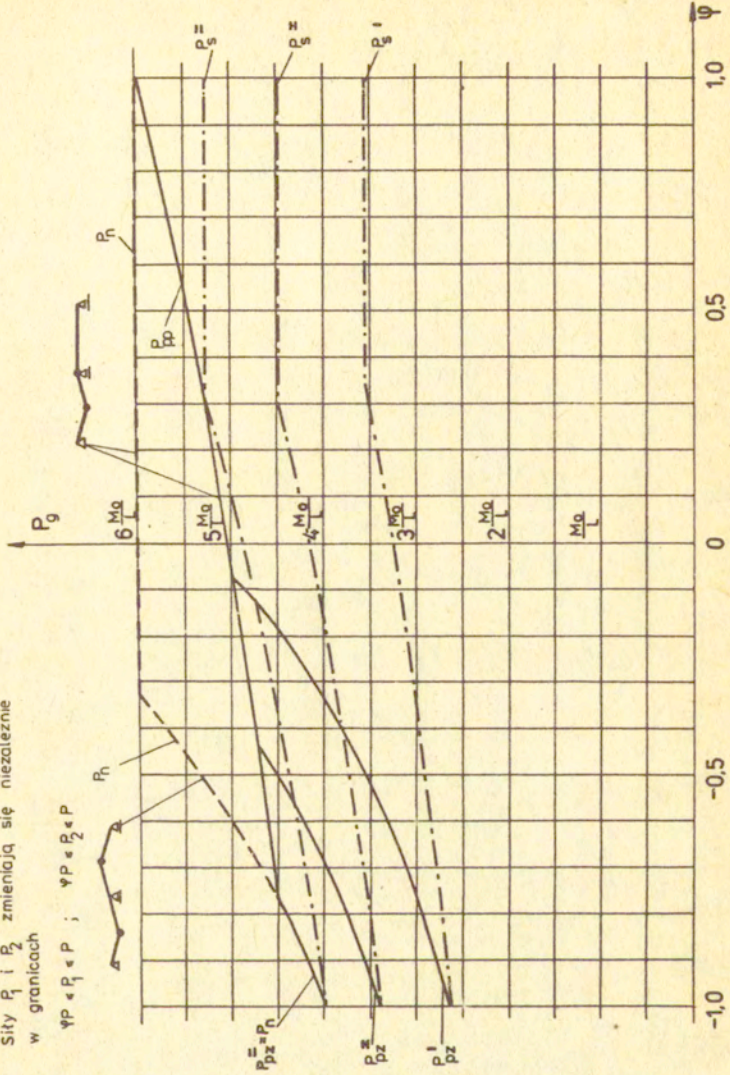
Wykresy sił  $P_n$  składają się z dwu lub trzech gałęzi, z których każda odpowiada innemu mechanizmowi zniszczenia belki.

Wykresy sił  $P_s$  są dla różnych przekrojów różne i składają się z jednej, bądź z dwóch gałęzi w zależności od tego, czy występujący we wzorze (74) moment  $\max |M^{P=1}|$  jest wyrażony dla całego zakresu zmienności  $\varphi$  jednym wzorem, czy też dwoma.

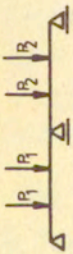


Sily  $P_1$  i  $P_2$  zmieniają się niezależnie w granicach

$$\Psi P \leq P_1 \leq P; \quad \Psi P \leq P_2 \leq P$$

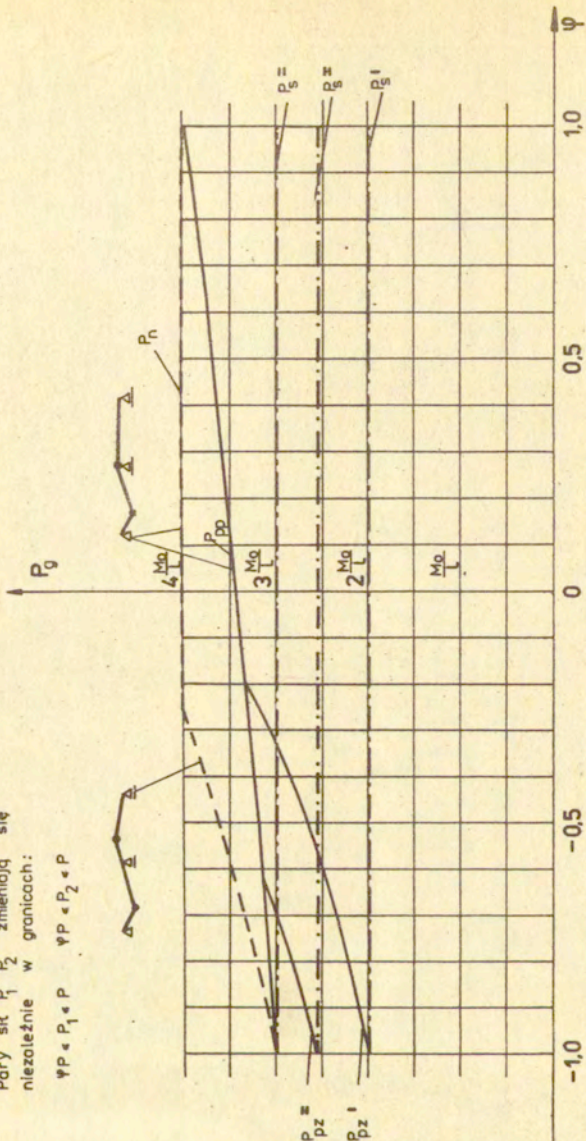


Rys. 47. Opis jak na rys. 49.



Pary sił  $P_1$   $P_2$  zmieniają się niezależnie w granicach:

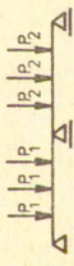
$$\psi P \leq P_1 \leq P \quad \psi P \leq P_2 \leq P$$



Rys. 48 Wykresy granicznych wartości  $P$  sił  $P_1$  i  $P_2$  w zależności od współczynnika  $\psi$  określającego dolną granicę zmienności sił  $P_1$ .

- - - -  $P_z$  - graniczne obciążenie nośności wyznaczone dla obciążeń stałych wg teorii mełności granicznej
- $P_z'$  - graniczne obciążenie przystosowania wyznaczone dla obciążeń zmiennych wg teorii przystosowania
- $P_p$  - zmniejszenie przrostowe,  $P_n$  - zmniejszenie niskocyklowe/
- - - -  $P_0$  - nośność sprężysta, tj. obciążenie odpowiadające granicy stesowalności wiązków sprężystych

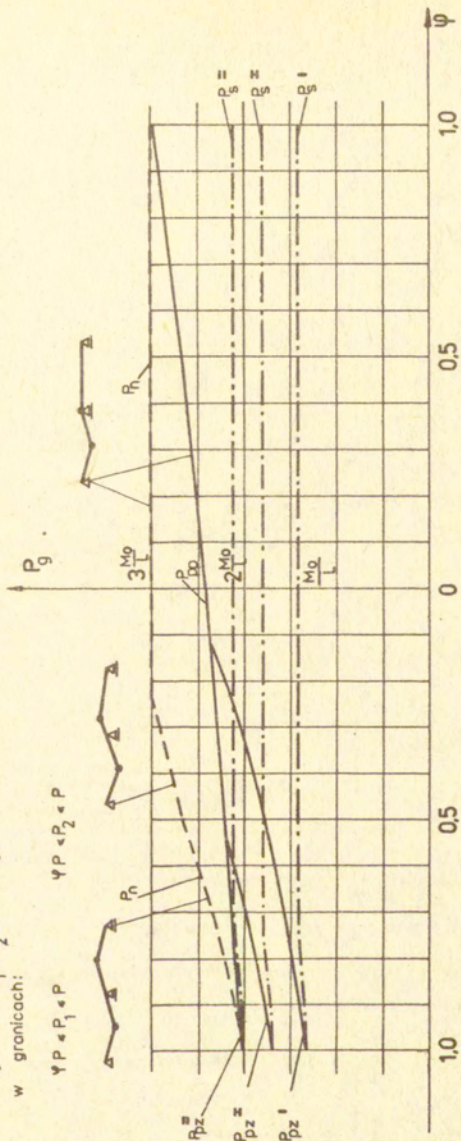




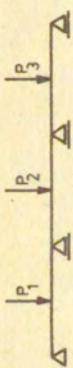
Trójki sił  $P_1, P_2$  zmieniają się niezależnie w granicach:

$$\Psi P \leq P_1 \leq P$$

$$\Psi P \leq P_2 \leq P$$

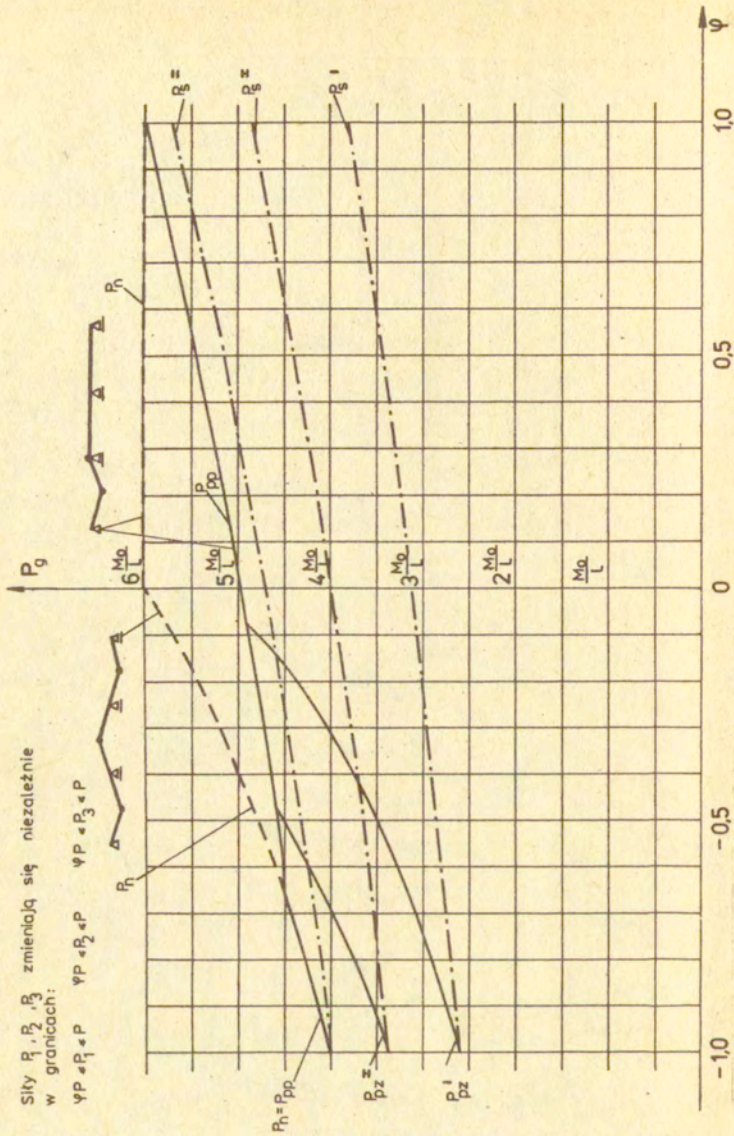


Rys. 49. Opis jak na rys. 48.

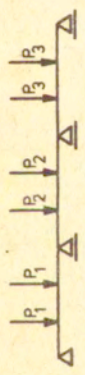


Sily  $P_1, P_2, P_3$  zmieniają się niezależnie w granicach:

$$\psi P \leq P_1 \leq P \quad \psi P \leq P_2 \leq P \quad \psi P \leq P_3 \leq P$$

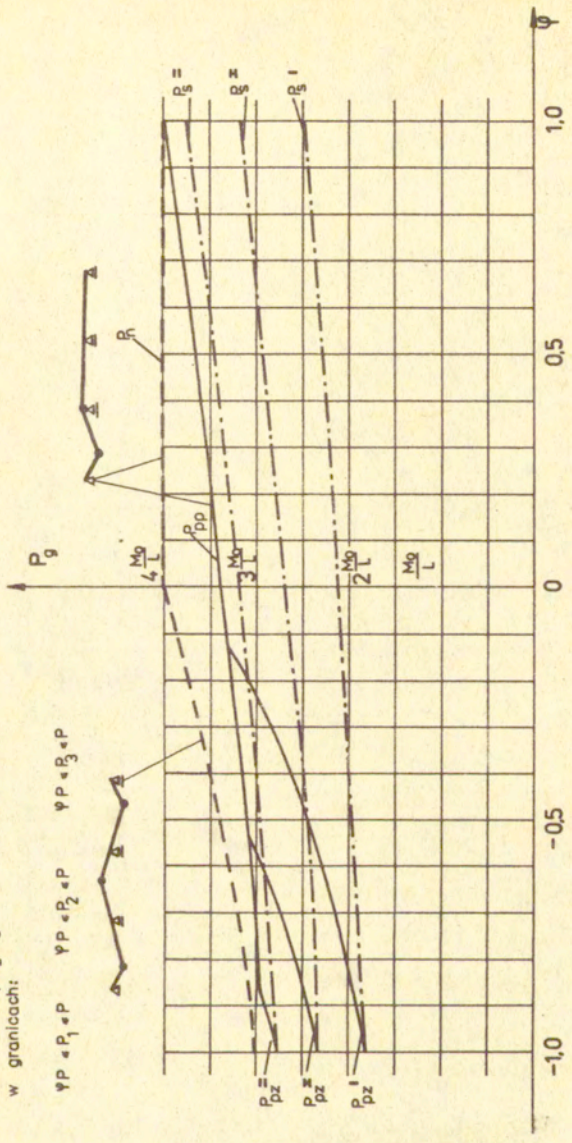


Rys. 50. Opis jak na rys. 48.

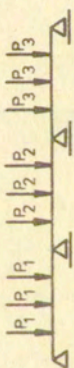


Pary sił  $P_1, P_2, P_3$  zmieniają się niezależnie w granicach:

$$\Psi P \leq P_1 \leq P \quad \Psi P \leq P_2 \leq P \quad \Psi P \leq P_3 \leq P$$

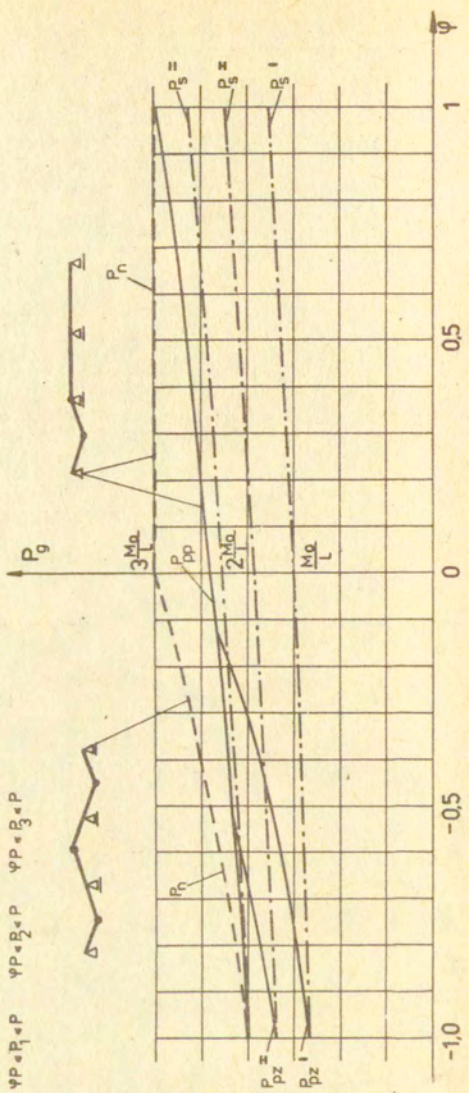


Rys. 51. Opis jak na rys. 49.



Trójki sił  $P_1, P_2, P_3$  zmieniają się niezależnie w granicach:

$$\psi P \leq P_1 \leq P \quad \psi P \leq P_2 \leq P \quad \psi P \leq P_3 \leq P$$



Rys. 52. Opis jak na rys. 48.

Różnice w wyznaczonych granicznych wartościach  $P_n$ ,  $P_p$  i  $P_s$  sił  $P_1$  są znaczne. Jedynie w dwu z rozpatrywanych przypadków belek i obciążeń krzywa  $P_n$  pokrywa się z krzywą  $P_{pz}$ . Ma to miejsce dla idealnego przekroju sandwiczowego w niewielkim zakresie zmienności  $\varphi$ , bliskim  $\varphi = -1$ . W trzech innych przypadkach krzywe  $P_n$  i  $P_{pz}$  mają dla  $\varphi = -1$  punkt wspólny. W punktach odpowiadających  $\varphi = -1$  przecinają się także krzywe  $P_s$  z odpowiednimi, tzn. wyznaczonymi dla tych samych kształtów przekrojów, krzywymi  $P_p$ .

Z analizy przedstawionych rozwiązań wynika konieczność projektowania na przystosowanie belek ciągłych obciążonych grupami sił skupionych, gdy działanie tych sił jest wielokrotnie zmienne.

### 3.2.5. Belka ciągła na podporze sprężystej poddana działaniu skupionego obciążenia ruchomego [85].

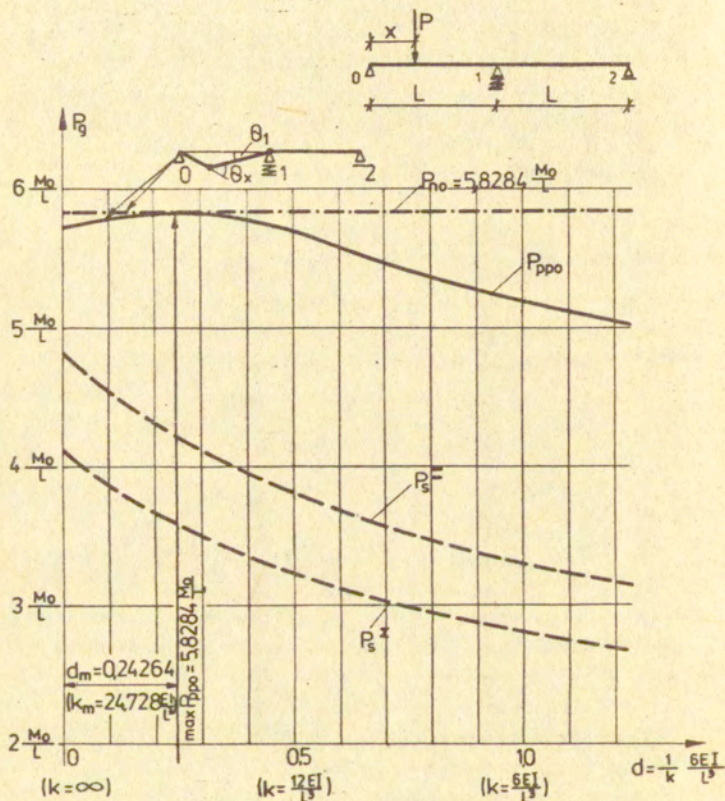
W pracy [85] rozwiązałam problem nośności dwuprzęsłowej belki na środkowej podporze sprężystej /rys.53/ poddanej działaniu obciążeń:

- a/ stałego w postaci siły  $P$ , która może być ustawiona na belce w dowolnym miejscu i która wzrasta monotonicznie od zera do wartości  $P_g = P_{no}$  oraz
- b/ zmiennego w czasie w postaci siły  $P$ , która może być ustawiona na belce w dowolnym miejscu i która zmienia się w granicach  $0 \ll P \ll P_g$ , bądź, co daje tę samą wartość granicznej siły przystosowania  $P_g = P_p$ , siły  $P$  przesuwałcej się wielokrotnie po belce w sposób quasi-statyczny i zmieniającej się w granicach  $0 \ll P \ll P_g$ .

Rozwiązanie przeprowadziłam dla belek o przekrojach stałych na całej długości: idealnym sandwiczowym i dwuteowym walcowanym. Rozwiązanie podobnego problemu - nośności belki na podporze sprężystej obciążonej w środkach rozpiętości przeseł dwiema siłami skupionymi o zmiennej intensywności - zawiera praca Ciampiego i Gavariniego [14].

Wykresy obciążeń granicznych  $P_g$  wyznaczonych metodami :

- teorii liniowo-sprężystej
- teorii przystosowania
- teorii nośności granicznej



Rys. 53

Przedstawiony na rys.53 schemat statyczny belki jest właściwym schematem statycznym belek na podporach sprężystych, sprężysto-plastycznych i sprężysto-kruchych, jeśli spełniony jest warunek sprężystej pracy podpory do chwili wyczerpania nośności belki. Gdy podpora traci sprężystość lub ulega zniszczeniu, bądź deformacji, przed wyczerpaniem nośności samej belki, wytrzymałość konstrukcji należy wyznaczać rozpatrując układ belka-podpora.

Właściwy mechanizm zniszczenia belki został przedstawiony na rys.53. Zakładając zmienność współczynnika  $k$  sprężystości podpory wyznaczono graniczne obciążenia nośności  $P_{no}$  i graniczne obciążenie przystosowania  $P_{ppo}$  odpowiadające zniszczeniu przyrostowemu /ono decydowało/ oraz nośność sprężystą  $P_s$ .

Następnie przeprowadzono analizę wpływu tego współczynnika na wartości wyznaczonych obciążeń oraz określono jego optymalną wartość, tj. wartość dla której graniczne obciążenie przystosowania jest największe.

W teorii konstrukcji sztywno-plastycznych nie istnieje pojęcie sprężystego podparcia, czy sprężystego zamocowania, przyjęcie bowiem przez tę teorię modelu ciała idealnie sztywno-plastycznego jest równoznaczne z przyjęciem założenia, że konstrukcja do momentu zniszczenia pozostaje nieodkształcona. Graniczna siła nośności  $P_{no}$ , odpowiadająca obciążeniu stałemu, jest w związku z tym niezależna od współczynnika  $k$  sprężystości podpory. W przypadku natomiast zmienności obciążenia można przez odpowiedni dobór tego współczynnika zwiększyć wartość granicznej siły przystosowania  $P_{ppo}$ , czyli rozszerzyć zakres obciążenia, do którego konstrukcja może się przystosować.

Przedstawione niżej rozwiązanie, dotyczące określenia granicznych obciążeń  $P_{no}$  i  $P_p$ , jest słuszne jedynie dla belek, których ugięcia są dostatecznie małe, aby można było stosować obowiązującą w teorii nośności granicznej i teorii przystosowania zasadę zeszywnienia. Na wielkość ugięć ma bowiem między innymi wpływ podatność sprężysta podpory  $\frac{1}{k}$ . Gdy jest ona nadmierna może powodować zbyt duże przemieszczenia belek. Dlatego też przedstawionego rozwiązania nie można stosować do belek na podporach o nadmiernej sprężystej podatności. Zastosowanie zasady zeszywnienia w przypadku takich dużych przemieszczeń prowadzi do paradoksu

przypominającego paradoks Stüssi-Kollbrunnera [108, 111]. Okazuje się bowiem, że dla belki dwuprzęsłowej, na środkowej podporze sprężystej o podatności  $\frac{1}{k} \rightarrow \infty$  i o rozpiętości pręseł  $L$ , wyznaczone z przedstawionych rozwiązań graniczne obciążenia wynoszą: graniczna siła nośności  $P_{no} = 5,8284 \frac{M_0}{L}$ , graniczna siła przystosowania dla przekroju idealnie sandwiczowego  $P_p = P_{ppo} = 3,7321 \frac{M_0}{L}$  oraz graniczna siła przystosowania dla dwuteownika walcowanego  $P_p = P_{pz} = 3,400 \frac{M_0}{L}$ , podczas gdy w przypadku pominięcia tej podpory i zastosowania schematu belki jednoprzęsłowej o rozpiętości  $2L$  otrzymujemy  $P_{no} = P_p = \frac{2M_0}{L}$ , choć pozornie oba te schematy statyczne niczym się nie różnią /jest to prawdziwe w zakresie odkształceń sprężystych konstrukcji/. Rzeczywiste wartości sił  $P_{no}$  i  $P_p$  dla belki na podporze będącej sprężyną winklerowską mieszczą się między tymi rozwiązaniami.

W praktyce inżynierskiej nie stosuje się podpór o dużej podatności sprężystej, ponieważ podpory takie nie posiadając dostatecznej wytrzymałości ulegają zniszczeniu przed zniszczeniem belki. Dlatego też nie przeprowadzono analizy stanów granicznych belek na podporach o dużej podatności sprężystej.

Tok postępowania przy wyznaczaniu granicznych obciążeń  $P_{no}$ ,  $P_{ppo}$  i  $P_s$  był następujący.

Z równania (19) po podstawieniu do niego (52) wyznaczono obciążenie niszczące  $P_n$ , odpowiadające przedstawionemu na rys.53, jednemu z nieskończenie wielu/ze względu na dowolność ustawienia siły  $P$ / dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia belki w postaci wzoru:

$$(94) \quad P_n = \frac{L+x}{x(L-x)} M_0 .$$

Najmniejsza z sił  $P_n$  jest poszukiwaną graniczną siłą nośności  $P_{no}$ .

Z minimalizacji (94) względem  $x$  otrzymano położenie przegubu plastycznego:

$$(95) \quad x_n = 0,4142 L ,$$

a następnie z podstawienia (95) do (94) wartość granicznej siły nośności:



$$(96) \quad P_{no} = 5,8284 \frac{M_0}{L} .$$

Graniczną siłę przystosowania  $P_p$  wyznaczono korzystając z twierdzenia kinematycznego Neala, stwierdzone bowiem, że w rozpatrywanym zakresie zmienności  $k$ , zawierającym belki na podporach o nie nadmiernej podatności sprężystej, o przystosowaniu się do zmiennego obciążenia zarówno belki o przekroju idealnie sandwiczowym, jak i dwuteowym walcowanym decyduje zniszczenie przystosowane.

Niszczącą siłę  $P_{pp}$ , odpowiadającą dowolnemu z nieskończenie wielu /se względu na zmienność  $x$ / dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia belki, otrzymane z równania (47), po podstawieniu doń (52) i wprowadzeniu  $\mathcal{K} = \frac{x}{L}$ , w postaci:

$$(97) \quad P_{pp} = \frac{1 + \alpha}{\max M_x^{P=1} - \min M_1^{P=1}} M_0 ,$$

gdzie  $\max M_x^{P=1}$  oraz  $\min M_1^{P=1}$  są to ekstremalne sprężyste momenty zginające w przegubach plastycznych od przesuwającej się siły  $P = 1$ .

Zniszczenie belki nastąpi po wielokrotnym obciążeniu belki siłą  $P_{ppe}$ , najmniejszą z sił  $P_{pp}$ . Siłę  $P_{ppe}$  otrzymamy zatem minimalizując względem  $\mathcal{K}$  wzór (97), po uprzednim podstawieniu do niego wielkości  $\max M_x^{P=1}$  i  $\min M_1^{P=1}$ .

Wprowadzając oznaczenie:

$$(98) \quad d = \frac{6EI}{kL^3} ,$$

gdzie  $EI$  jest sztywnością belki, otrzymane wyrażenie na moment zginający na podporze 1 od siły  $P = 1$  w postaci wseru:

$$(99) \quad M_1^{P=1} = [\mathcal{K}^3 + (2d-1)\mathcal{K}] \frac{L}{4(1+d)} .$$

Z minimalizacji (99) względem  $\mathcal{K}$  otrzymano bezwymiarową odległość  $\mathcal{K}_1$  siły  $P$  od podpory 0, przy której moment na podporze 1 osiąga wartość najmniejszą, w postaci:

$$(100) \quad x_1 = \left( \frac{1-2d}{3} \right)^{1/2}.$$

Z wzoru (100) wynika, że gdy:

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq d \leq \frac{1}{2}, \quad \text{czyli} \quad \frac{12EJ}{L^3} \leq k \leq \infty, \quad \text{to} \\ x_1 = \left( \frac{1-2d}{3} \right)^{1/2} \quad \text{oraz} \\ \min M_1^{P=1} = - \left( \frac{1-2d}{3} \right)^{3/2} \frac{L}{2(1+d)} \end{array} \right.$$

Dla  $d > \frac{1}{2}$ , tj. dla belek na podporach bardziej podatnych sprężyste, pojawia się na podporze sprężystej moment dodatni. Za minimum momentu podporowego należy wtedy przyjąć moment równy zeru, tj. moment odpowiadający  $x = 0$ , czyli przypadkowi braku obciążenia na belece.

Można zatem zapisać, że gdy:

$$(102) \quad d \gg \frac{1}{2}, \quad \text{czyli} \quad 0 \leq k \leq \frac{12EJ}{L^3} \quad \text{to} \quad \min M_1^1 = 0.$$

Maksymalny moment w przekroju oddalonym o  $x$  od podpory 0, wywołany przez siłę  $P = 1$  /ustawioną nad tym przekrojem/ jest równy :

$$(103) \quad \max M_x^{P=1} = [x^4 - (5+2d)x^2 + 4(1+d)x] \frac{L}{4(1+d)}.$$

Z podstawienia (103) do (97) otrzymano:

$$(104) \quad P_{pp} = \frac{4(1+d)(1+x)}{x^4 - (5+2d)x^2 + [4(1+d) - \frac{4(1+d)}{L} \min M_1^{P=1}]x} \frac{M_0}{L}.$$

Podstawiając następnie do (104) wszy (101), bądź (102) i wprowadzając dalej oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 B &= 4(1+d) & C &= 5+2d \\
 (105) \quad D &= 4(1+d) = B & \text{dla } d &\geq \frac{1}{2} \\
 D &= 4(1+d) + 2\left(\frac{1-2d}{3}\right)^{\frac{3}{2}} & \text{dla } d &\leq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

otrzymano wyrażenie na siłę  $P_{pp}$  w postaci:

$$(106) \quad P_{pp} = B(1+\kappa)(\kappa^4 - C\kappa^2 + D\kappa)^{-1} \frac{M_0}{L}.$$

Z minimalizacji wzoru (106) względem  $\kappa$  otrzymano równanie:

$$(107) \quad 3\kappa^4 + 4\kappa^3 - C\kappa^2 - 2C\kappa + D = 0,$$

z którego dla przyjętego  $k$  można wyznaczyć  $\kappa_p$ , tj. sprowadzoną odległość od podpory 0 przegubu plastycznego oraz siły  $P_{ppo}$  będącej najmniejszą z sił  $P_{pp}$  zapisanych wzorem (106). Podstawiając następnie  $\kappa_p$  do (106) otrzymujemy wartość siły  $P_{ppo}$ .

Nośność sprężystą  $P_s$  wyznaczone z wzoru (93),

w którym  $\max |M^{P=1}|$  jest największą z bezwzględnych wartości występujących w belce sprężystych momentów zginających od siły  $P = 1$ . W rozpatrywanym przypadku  $\max |M^{P=1}|$  są to, dla całego zbioru  $k$ , wartości maksymalnych momentów przeszłowych. Wartości te wyznaczone minimalizując równanie (103) względem  $\kappa$ . Otrzymano równanie

$$(108) \quad \kappa^3 - (2,5+d)\kappa + 1 + d = 0,$$

z którego dla zaleźnego  $k$  wyznaczone położenie  $\kappa_0$  przekroju, w którym wystąpił  $\max M_{x_0}^{P=1}$  a następnie podstawiając  $\kappa_0$  do (103) wartość  $\max M_{x_0}^{P=1}$ . Wyznaczone dla  $0 \leq k < \infty$  wartości  $\kappa_0$  i  $\max M_{x_0}^{P=1}$ , jak również  $\kappa_1$  i  $\min M_1^{P=1}$  zawiera tabela 9.

W dalszym ciągu rozwiązano problem optymalizacji sprężystego podparcia rozpatrywanej belki, gdy obciążenie belki stanowiła przesuwająca się po niej siła  $P$ . Zadanie polegało na znalezieniu takiej wartości współczynnika  $k$  sprężystości podpory, dla którego nośność belki byłaby największa. Polegało ono zatem na wyznaczeniu spośród odpowiadających różnym  $k$  granicznym sił przystosowania siły największej. Siłę tę wyznaczone rozwiązując równanie:

$$(109) \quad \frac{dP_{pp}}{dd} = 0 \quad \text{o postaci:}$$

$$(110) \quad 4x^3 - 12x - \frac{4}{3}(1+d)(2d-1)\left(\frac{1-2d}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} + \\ + \left(\frac{2d-4d}{3}\right)\left(\frac{1-2d}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

łącznie z równaniem (107). Otrzymane:

$$(111) \quad x_m = 0,4142, \quad d_m = 0,2426,$$

a następnie z podstawienia (111) do (108):

$$(112) \quad \max P_{ppo} = 5,8284 \frac{M_0}{L}$$

Jak to wynika z wzoru (112) maksymalna z odpowiadających różnym  $k$  sił  $P_{ppo}$  równa jest granicznej sile nośności  $P_{no}$ , a, zastosowanie podpory o odpowiadającym tej sile współczynniku sprężystości  $k$  równym:

$$(113) \quad k_m = \frac{6EJ}{d_m L^3} = 24,728 \frac{EJ}{L^3}$$

jest optymalnym rozwiązaniem sprężystego podparcia rozpatrywanej konstrukcji.

Ilustracją otrzymanych rozwiązań są przedstawione na rys.53 wykresy granicznych obciążeń  $P_{no}$ ,  $P_{ppo}$  i  $P_s$ . Sporządzono je w oparciu o wyznaczone z wyprowadzonych wyżej wzorów, dla  $0 \ll d \ll 1,2$  i zestawione w tabeli 10 ich wartości liczbowe.

Tablica 9

$d = \frac{6EJ}{kL^3}$	$\frac{kL^3}{EJ}$	$\alpha_1$	$\min M_1^1$	$\alpha_0$	$\max M_{X0}^1$
0,0	$\infty$	0,5773	-0,0962L	0,4323	0,2074L
0,1	60	0,5164	-0,0626L	0,4607	0,2201L
0,2	30	0,4472	-0,0373L	0,4873	0,2319L
0,3	20	0,3650	-0,0187L	0,5123	0,2429L
0,4	15	0,2582	-0,0061L	0,5358	0,2532L
0,5	12	0,0	0,0	0,5578	0,2628L
0,6	10	0,0	0,0	0,5786	0,2718L
0,75	8	0,0	0,0	0,6074	0,2843L
0,857	7	0,0	0,0	0,6264	0,2925L
1	6	0,0	0,0	0,6498	0,3026L
1,2	5	0,0	0,0	0,6793	0,3155L
$\infty$	0	0,0	0,0	1,0000	0,5000L

Tablica 10

$d = \frac{6EJ}{kL^3}$	$\frac{kL^3}{EJ}$	$P_s$		$\alpha_p$	$P_p = P_{ppo}$	$P_{no}$
		$c = 0,85 \text{ I}$	$c = 1,0 \text{ II}$		$\text{I} =$	
0,0	$\infty$	4,1063 $\frac{M_0}{L}$	4,8216 $\frac{M_0}{L}$	0,3927	5,7158 $\frac{M_0}{L}$	
0,1	60	3,8619 "	4,5434 "	0,4014	5,7906 "	
0,2	30	3,6654 "	4,3122 "	0,4103	5,8248 "	
0,24264	24,728			0,4142	$\max P_{ppo} =$ 5,8284 "	5,8284 $\frac{M_0}{L}$
0,3	20	3,4994 "	4,1169 "	0,4196	5,8228 "	
0,4	15	3,3570 "	3,9494 "	0,4296	5,7842 "	
0,5	12	3,2344 "	3,8052 "	0,4408	5,6996 "	
0,6	10	3,1273 "	3,6792 "	0,4536	5,5717 "	
0,75	8	2,9898 "	3,5174 "	0,4710	5,4074 "	
0,857	7	2,9060 "	3,4188 "	0,4824	5,3065 "	
1	6	2,8090 "	3,3047 "	0,4962	5,1890 "	
1,2	5	2,6941 "	3,1696 "	0,5135	5,0506 "	

Z porównania wartości granicznych sił  $P_{no}$  i  $P_p$  wynika, że dla  $\frac{12EI}{L^3} \ll k \ll \infty$ , tj. dla podpór dostatecznie sztywnych, różnice między  $P_p$  i  $P_{no}$  nie przekraczają 2,2%. W pozostałym zakresie zmienności  $k$  różnice w wartościach sił  $P_p$  i  $P_{no}$  są znaczne. Dla  $\frac{12EI}{L^3} \ll k \ll \infty$  również i różnice między wartościami samych sił  $P_p$  nie przekraczają 2,2%. Wynika z tego, że dla  $k \gg \frac{12EI}{L^3}$  można z dostateczną dokładnością przyjmować, że podpora jest sztywna, a graniczne obciążenie przystosowania wynosi  $P_{ppo} = 5,7158 \frac{M_0}{L}$ , co odpowiada  $k \rightarrow \infty$ , bądź też można w tym zakresie depuścić stosowanie rozwiązania teorii nośności granicznej przyjmując  $P_p = P_{no} = 5,8284 \frac{M_0}{L}$ .

Graniczne siły  $P_p$ , odpowiadające nośności sprężystej, różnią się znacznie między sobą osiągając dla  $k \rightarrow \infty$ , tj. dla podpory sztywnej, wartości maksymalne. Znaczne są też różnice między ich wartościami, a wartościami sił  $P_{ppo}$  i  $P_{no}$ .

Z otrzymanych rozwiązań wynika, że dla stosowanych w praktyce współczynników  $k$  sprężystości podpór, mieszczących się w przedziale  $\frac{12EI}{L^3} \ll k \ll \infty$ , zmienność obciążenia wpłynęła bardzo nieznacznie na spadek udźwigu belki. Spowodowała natomiast poważny wzrost wartości obciążenia, na które konstrukcja reaguje czysto sprężysto.

### 3.2.6. Ruszty stalowe obciążone siłą ruchomą oraz siłami skupionymi o zmiennej intensywności [87].

Celem pracy [87] było przeprowadzenie analizy stanów granicznych stalowych ruszów prostokątnych poddanych działaniu skupionych obciążeń stałych i zmiennych w czasie.

Założono, że ruszty pracują jak układy belek podłużnych wspartych swobodnie na belkach poprzecznych, tzn. pominięto wpływ skręcania. Założenie to jest wystarczającym przybliżeniem przy wyznaczaniu udźwigu ruszów złożonych z elementów o przekrojach dwuteowych /per. [35] i [1] /, bowiem momenty skręcające są w tych urządzeniach bardzo małe w stosunku do momentów zginających, podczas gdy odpowiadające im obroty przekrojów są tego samego rzędu. Założenie to przyjęto przy określaniu nośności rusztów wykonanych

z dwuteowników walcowanych i z belek o przekrojach idealnie sandwiczowych.

W przeciwieństwie do analizy sprężystej istnieje dość skąpa literatura dotycząca obliczania rusztów złożonych z belek metodami teorii nośności granicznej /np. [1, 7, 8, 31, 35] /.

Jeszcze mniej liczne są opracowania zawierające obliczenia nośności rusztów poddanych działaniu obciążeń zmiennych w czasie, przeprowadzone metodami teorii przystosowania /np. [23], [27] /.

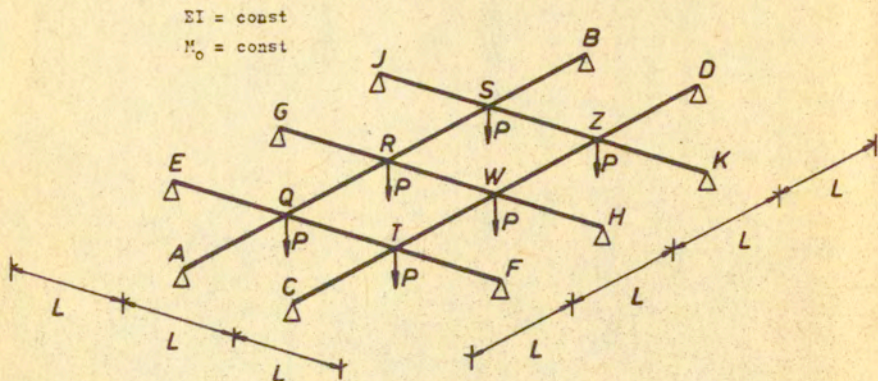
W pracy [87] przeprowadziłam rozwiązania problemów nośności czterech rusztów prostokątnych, obciążonych w węzłach siłami skupionymi  $P$  o intensywności zmieniającej się w granicach  $0 \ll P \ll P_p$  oraz siłami  $P$  wzrastającymi monotonicznie od zera do wartości końcowej  $P_n$ , jak również rusztu składającego się z dwu belek: poprzecznej i podłużnej, obciążonego siłą  $P$  przesuwaną się po bele poprzecznej w sposób quasi-statyczny i zmieniającą się w granicach  $0 \ll P \ll P_p$  oraz siłą  $P$  wzrastającą monotonicznie od zera do wartości końcowej  $P_n$ , ustawioną na bele podłużnej w dowolnym miejscu. Dodatkowo zostały wyznaczone wartości sił  $P_s$  odpowiadające nośnościom sprężystym konstrukcji.

Otrzymane dla rusztów obciążonych w węzłach, o jednakowych /idealnie sandwiczowych, bądź dwuteowych walcowanych/ przekrojach belek poprzecznych i podłużnych i zestawione w tablicy 11 graniczne wartości  $P_n$ ,  $P_p$  i  $P_s$  sił  $P$ , są to graniczne obciążenia /nośności/ odpowiadające: siły  $P_n$  najniekorszystniej, ze względu na minimum udźwigu rusztu, ustawionym w węzłach siłom  $P$ , wzrastającym monotonicznie od zera do wartości końcowej, siły  $P_p$  - działającym w węzłach siłom  $P$ , o odpowiednio, ze względu na minimum udźwigu rusztu, dobranych z zakresu  $0 \ll P \ll P_p$  intensywnościach; siły  $P_s$  - siłom  $P$  ustawionym tak, aby dawały ekstremalne wartości sprężystych momentów zginających w przekrojach krytycznych.

Przyjęty przy wyznaczaniu granicznych sił  $P_n$ ,  $P_p$  i  $P_s$  tok postępowania podamy dla rusztu składającego się z dwu belek podłużnych i trzech poprzecznych /rys.54/, obciążonego w węzłach siłami  $P$  oraz rusztu składającego się z belki poprzecznej i belki podłużnej /rys.61/ obciążonego siłą ruchomą.

Rozwiązania pozostałych przykładów przedstawimy w formie skróconej.

**Przykład 1.** Ruszt prostokątny przedstawiony na rys.54 obciążony sześcioma siłami  $P$ .



Rys.54

Na rysunku 55 podane wybrane spośród dopuszczalnych miarodajne mechanizmy zniszczenia rusztu. Są one równouprawnione.

Graniczną siłę nośności  $P_n$  wyznaczone z równania (19). Dla mechanizmu 1 /rys.55/ zniszczenia rusztu równanie to przyjmuje postać:

$$(114) \quad 4 P_n L \phi + 2 P_n 2L \phi = M_o (\phi + \phi) 2 + M_o (2\phi + 2\phi) + M_o (\phi + \phi) 2 ,$$

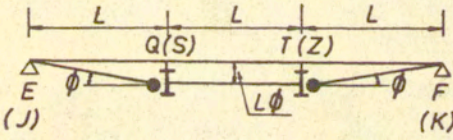
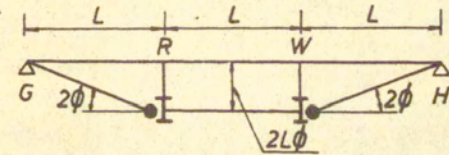
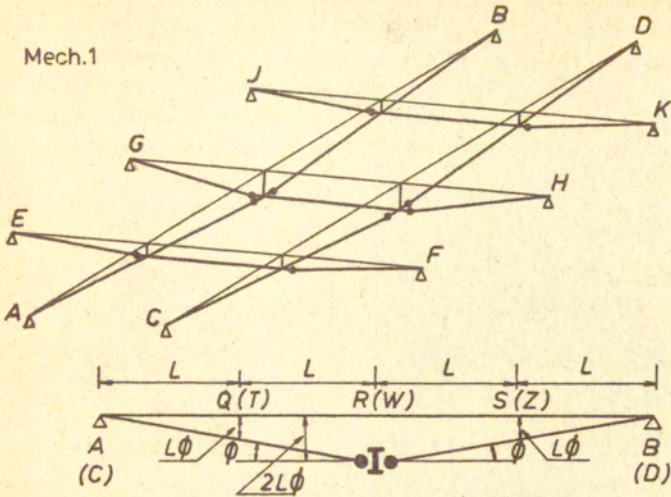
skąd

$$(115) \quad P_n = 1,5 \frac{M_o}{L}$$

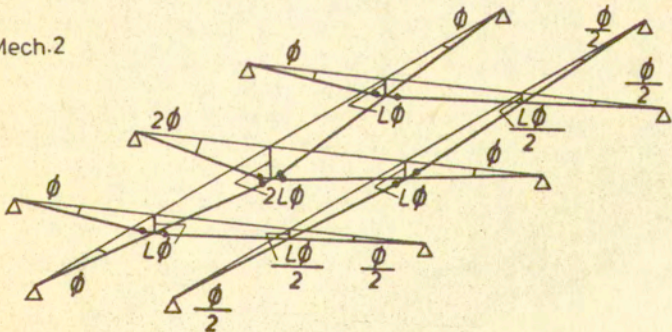
W celu wyznaczenia granicznego obciążenia przystosowania  $P_{pp}$  odpowiadającego siłom  $P$  zmieniającym się w granicach  $0 \ll P \ll P_{pp}$  znalezione wartości ekstremalnych sprężystych momentów zginających występujących w miejscach powstałych przegubów.



Mech.1

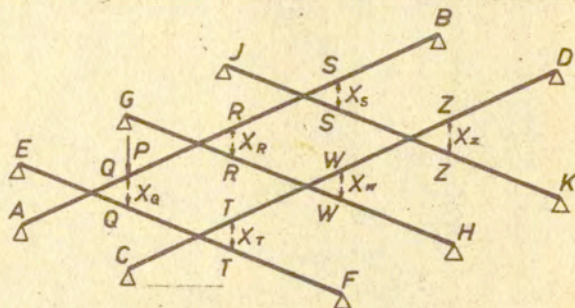


Mech.2



Rys. 55

Rowiązanie przeprowadzone dla dwóch schematów obciążenia: dla siły P działającej w węźle Q i dla siły P działającej w węźle R. Wykorzystując następnie warunki symetrii rusztu i jego obciążenia wyznaczono momenty zginające od siły P działającej w węzłach S, P, W i Z i dalej ekstremalne wartości momentów zginających od łączonego oddziaływania 6-siu sił o wartościach P, bądź 0.



Rys. 56

Zastępczy schemat statyczny rusztu, który posłużył do wyznaczenia sił X wzajemnego oddziaływania belek poprzecznych i podłużnych rusztu przedstawia rys. 56.

Tablica 12

	ugięcia	Siła P = 1 w Q	Siła P = 1 w R		ugięcia	Siła P=1 w Q
Belka AB	$y_Q$	$\frac{3}{4} \frac{L^3}{EJ}$	$\frac{11}{12} \frac{L^3}{EJ}$	Belka EF	$y_Q$	$\frac{4}{9} \frac{L^3}{EJ}$
	$y_R$	$\frac{11}{12} \frac{L^3}{EJ}$	$\frac{4}{3} \frac{L^3}{EJ}$			$\frac{7}{18} \frac{L^3}{EJ}$
	$y_S$	$\frac{7}{12} \frac{L^3}{EJ}$	$\frac{11}{12} \frac{L^3}{EJ}$			

W tablicy 12 zestawiono wartości ugięć  $y_Q$ ,  $y_R$  i  $y_S$  belki AB wywołanych siłą P = 1 przyłożoną w węźle Q; a następnie w węźle R oraz ugięć  $y_Q$  i  $y_T$  belki EF obciążonej w węźle Q siłą P = 1. Ugięcia te wykorzystano do wyznaczenia ugięć belek podłużnych i poprzecznych rusztu od sił X.

Z porównania ugięć belek podłużnych i poprzecznych w poszczególnych węzłach rusztu, wywołanych obciążeniem belek siłami X oraz siłą P działającą raz w węźle Q belki AB, drugi raz w węźle

Tablica 43

	1	2	3	4	5	6	7	8
NT równa- nia	$X_Q$	$X_R$	$X_S$	$X_T$	$X_W$	$X_Z$		
1	43	33	21	14			27P	33P
2	33	64	33		14		33P	48P
3	21	33	43			14	21P	33P
4	14			43	33	21	0	0
5		14		33	64	33	0	0
6			14	21	33	43	0	0
A	<hr/>							
sta P w Q	0,501757P	0,229213P	0,043424P	-0,217963P	0,0242436P	0,0737035P		
B	<hr/>							
sta P w R	0,229213P	0,545181P	0,229212P	0,0242436P	-0,144260P	0,0242436P		

	Sila P w Q	Sila P w S	Sila F w T	Sila P w Z	Sila P w R	Sila P w W	M <sub>max</sub>	M <sub>min</sub>
Belka AB	M <sub>Q</sub>	0,2482PL	-0,0129PL	+0,1329PL	-0,0018PL	0,0479PL	0,4290PL	-0,0373PL
	M <sub>R</sub>	-0,0018PL	0,0479PL	0,0479PL	+0,2256PL	0,1200PL	0,4414PL	-0,0036PL
	M <sub>S</sub>	-0,0226PL	0,2482PL	0,1329PL	-0,0129PL	0,0479PL	0,4290PL	-0,0373PL
Belka EF	M <sub>Q</sub>	0,2618PL	0,0219PL	0,0636PL	0,1608PL	0,0925PL	0,6541PL	0
	M <sub>T</sub>	0,0219PL	0,0636PL	0,0535PL	0,0925PL	0,1608PL	0,6541PL	0
	M <sub>R</sub>	0,1608PL	0,0925PL	0,0925PL	0,3135PL	0,0855PL	0,9056PL	0
Belka GH	M <sub>W</sub>	0,0925PL	0,1608PL	0,1608PL	0,0855PL	0,3135PL	0,9056PL	0
	M <sub>S</sub>	0,0535PL	0,2618PL	0,0219PL	0,1608PL	0,0925PL	0,6541PL	0
	M <sub>Z</sub>	0,0636PL	0,0219PL	0,2618PL	0,0925PL	0,1608PL	0,6541PL	0
Belka CD	M <sub>T</sub>	0,1329PL	-0,0129PL	-0,0226PL	0,0479PL	-0,0018PL	0,4290PL	-0,0373PL
	M <sub>W</sub>	0,0479PL	0,0479PL	-0,0018PL	0,1200PL	0,2256PL	0,4414PL	-0,0036PL
	M <sub>Z</sub>	-0,0129PL	0,1329PL	0,2482PL	0,0479PL	-0,018 PL	0,4290PL	-0,0373PL

R tej belki otrzymano układ równań, którego macierz pierwotną podane w tabeli 13. Wyrasy welne, zestawione w kolumnie 7, odnoszą się do przypadku obciążenia rusztu siłą P działającą w węźle Q; zestawione w kolumnie 8 - do przypadku działania siły P w węźle R. Wartości sił X otrzymane z rozwiązania tych dwóch układów równań zestawiono w rzędach A i B tabeli 13.

Następnie w sposób elementarny wyznaczono wartości momentów zginających w belkach podłużnych i poprzecznych rusztu od siły P przyłożonej raz w węźle Q, drugi raz w R oraz na ich podstawie momenty zginające od siły P ustawionej kolejnie w węzłach S, T, W, Z. Otrzymane wyniki oraz wartości ekstremalnych momentów zginających podane w tabeli 14.

Ostatecznie graniczne obciążenie  $P_{pp}$  wyznaczone z równania (47). Dla przedstawionego na rys.55 mechanizmu i zniszczenia rusztu równanie to przyjmie postać:

$$(116) \quad M_0(\phi + \phi)2 + M_0(2\phi + 2\phi) + M_0(\phi + \phi)2 = \\ = 2 \cdot 0,4414 P_{pp} L(\phi + \phi) + 0,9056 P_{pp} L(2\phi + 2\phi) + 2 \cdot 0,6541 P_{pp} L(\phi + \phi),$$

skąd

$$(117) \quad P_{pp} = 1,5 \frac{M_0}{L}.$$

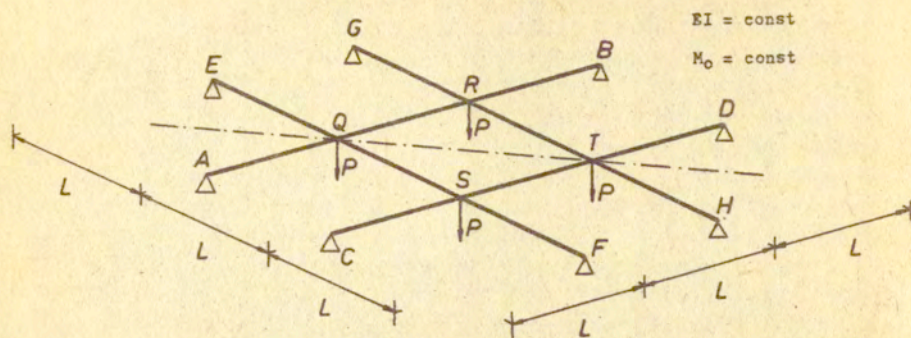
Graniczne obciążenie  $P_{pz}$  wyznaczono z (48)<sub>3</sub>. Decydującymi były tu przekroje R i W belki GH. Graniczne obciążenie  $P_s$  wyznaczono z (51). Wartości sił  $P_{pz}$  i  $P_s$  zestawiono w tabeli 18. Przykład 2. Ruszt prostokątny przedstawiony na rys.57 obciążony czterema siłami P.

W celu wyznaczenia wartości ekstremalnych momentów zginających wystarczy przeprowadzić jedno rozwiązanie np. dla siły P działającej w węźle Q /rys.58/. Przedstawiony na rys.58 układ jest symetryczny względem osi QT. Z symetrii tej wynikają następujące zależności:

$$(118) \quad X_R = X_S, \quad X_T = -X_T = 0, \quad P - X_Q = X_Q.$$

Z (118)<sub>3</sub> otrzymujemy:

$$(119) \quad X_Q = \frac{P}{2}.$$



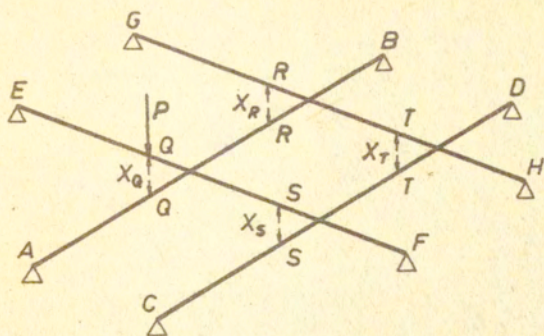
Rys. 57

Zastępcze schematy statyczne belek AB, EF, CD i GH, na podstawie których wyznaczono niewiadomą reakcję  $X_R$ , przedstawia rys. 59. Wartości momentów zginających, wyznaczone w sposób analogiczny do przedstawionego w przykładzie 1, zestawiono w tabeli 15.

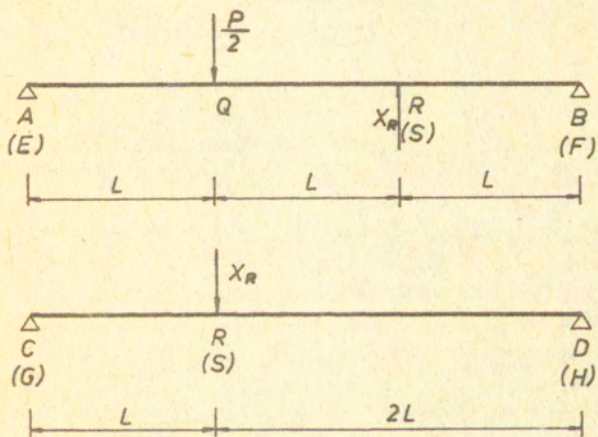
Tabela 15

Belka AB		Siła P	Siła P	Siła P	Siła P	$M_{max}$	$M_{min}$	$M_{max} - M_{min}$
		w Q	w R	w S	w T			
	$M_Q$	$\frac{25}{96} PL$	$\frac{1}{48} PL$	$\frac{7}{48} PL$	$\frac{7}{96} PL$	$\frac{1}{2} PL$	0	$\frac{1}{2} PL$
	$M_R$	$\frac{1}{48} PL$	$\frac{25}{96} PL$	$\frac{7}{96} PL$	$\frac{7}{48} PL$	$\frac{1}{2} PL$	0	$\frac{1}{2} PL$

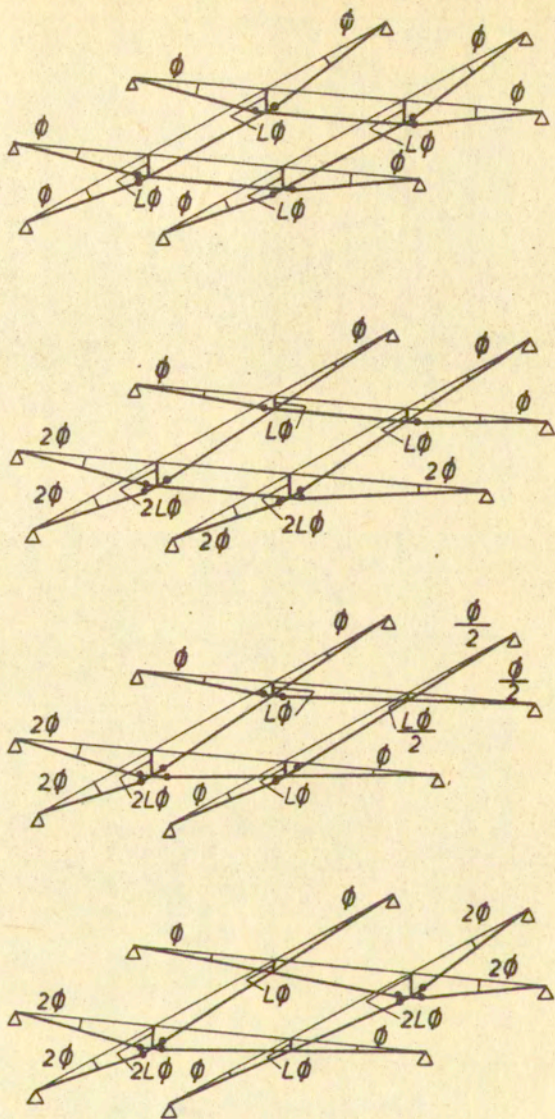
Rysunek 60 przedstawia kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia rusztu. Dla mechanizmów tych wyznaczone z wzorów (19) i (47) wartości granicznych obciążeń  $P_n$  i  $P_{pp}$ . Dla wszystkich czterech mechanizmów otrzymano te same wartości. Zestawiono je w wierszu 2 tabeli 18. Zestawiono tam również wartości sił  $P_{ps}$  i  $P_s$  wyznaczone z wzorów (49)<sub>3</sub> i (54).



Rys. 58



Rys. 59

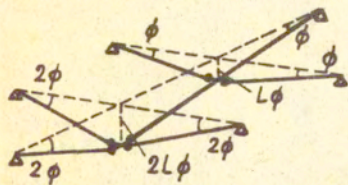


Rys. 60



Przykład 3. Ruszt przegubowo podparty obciążony dwiema siłami P, przedstawiony w wierszu 3 tabelicy 18. Miarodajny mechanizm zniszczenia rusztu przedstawia rys.61. Wartości ekstremalnych momentów zginających zestawiono w tabelicy 16, a wartości obciążeń granicznych w wierszu 3 tabelicy 18.

Tabelica 16



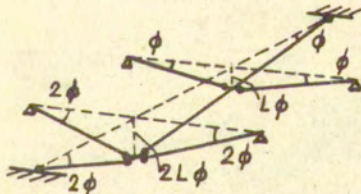
		$M_{max}$	$M_{min}$
Belka AB	$M_Q$	0,208 PL	- 0,043 PL
	$M_R$		
Belka CD	$M_Q$	0,418 PL	0
Belka EF	$M_R$		

Rys.61

Przykład 4. Ruszt z belką podłużną utwierdzoną, obciążony dwiema siłami P, przedstawiony w wierszu 4 tabelicy 18. Miarodajny mechanizm zniszczenia rusztu przedstawia rys.62. Wartości ekstremalnych momentów zginających zestawiono w tabelicy 17, a wartości obciążeń granicznych w wierszu 4 tabelicy 18.

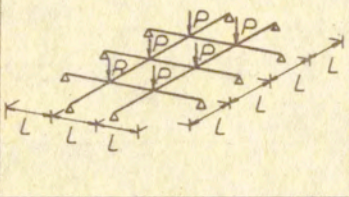
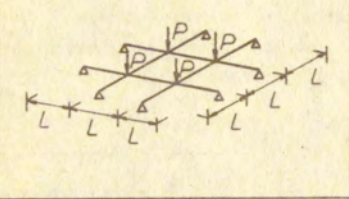
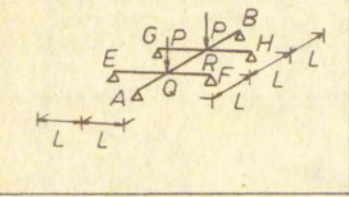
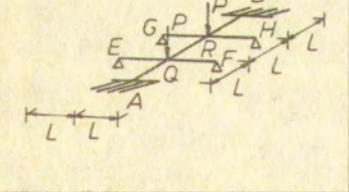
Tabelica 17

		$M_{max}$	$M_{min}$
Belka AB	$M_A, M_B$	0	- 0,334 PL
	$M_Q, M_R$	0,193 PL	-0,026 PL
Belka CD	$M_Q$	0,250 PL	0
Belka EF	$M_R$		



Rys.62

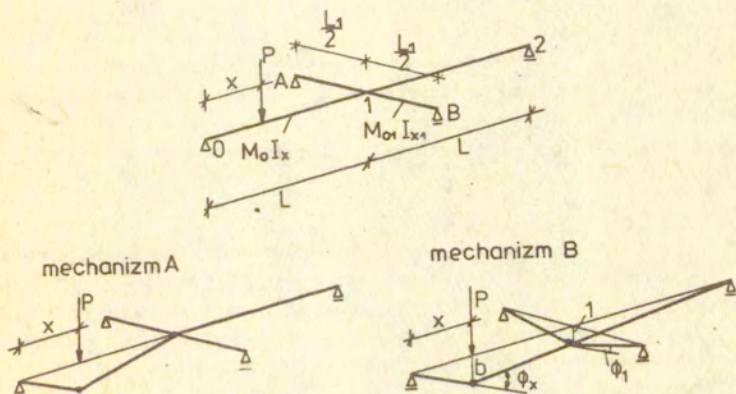
Tablica 18

Charakterystyki geometr. rusztu i jego obciążenie	$P_s$	$P_{pp}$	$P_{pz}$	$P_n$
	$\begin{aligned} &= \\ &1.105 \frac{M_o}{L} \\ &I \\ &0.94 \frac{M_o}{L} \end{aligned}$	$\begin{aligned} &1.5 \frac{M_o}{L} \end{aligned}$	$\begin{aligned} &= \\ &2.21 \frac{M_o}{L} \\ &I \\ &1.88 \frac{M_o}{L} \end{aligned}$	$1.5 \frac{M_o}{L}$
	$\begin{aligned} &= \\ &2 \frac{M_o}{L} \\ &I \\ &1.7 \frac{M_o}{L} \end{aligned}$	$2 \frac{M_o}{L}$	$\begin{aligned} &= \\ &4 \frac{M_o}{L} \\ &I \\ &3.4 \frac{M_o}{L} \end{aligned}$	$2 \frac{M_o}{L}$
	$\begin{aligned} &= \\ &2.4 \frac{M_o}{L} \\ &I \\ &2.04 \frac{M_o}{L} \end{aligned}$	$2.87 \frac{M_o}{L}$	$\begin{aligned} &= \\ &4.8 \frac{M_o}{L} \\ &I \\ &4.07 \frac{M_o}{L} \end{aligned}$	$3 \frac{M_o}{L}$
	$\begin{aligned} &= \\ &3.00 \frac{M_o}{L} \\ &I \\ &2.545 \frac{M_o}{L} \end{aligned}$	$3.9 \frac{M_o}{L}$	$\begin{aligned} &= \\ &6.00 \frac{M_o}{L} \\ &I \\ &5.09 \frac{M_o}{L} \end{aligned}$	$4 \frac{M_o}{L}$

Przykład 5. Ruszt przegubowo podparty, przedstawiony na rys.63, obciążony siłą ruchomą P.

Rozwiązanie przeprowadzono wyznaczając siły  $P_p$ ,  $P_n$  i  $P_s$  dla różnych stosunków sztywności pręseł belki podłużnej do sztywności belki poprzecznej.

Graniczna siła przystosowania  $P_p$  odpowiada udźwignięciu rusztu obciążonego siłą P przesuwaną się w sposób quasi-statyczny po belce podłużnej i zmieniającą się w granicach  $0 \ll P \ll P_p$ . Graniczna siła nośności  $P_n$  odpowiada udźwignięciu rusztu obciążonego siłą P, warastającą monotonicznie od zera do wartości końcowej, ustawioną na belce podłużnej tak, aby udźwignięcie ten był najmniejszy. Nośność sprężystą  $P_s$ , odpowiadającą granicy stosowalności związów sprężystych, wyznaczono dla takich ustawień siły P, które dawały ekstremalne wartości sprężystych momentów zginających w przekrojach krytycznych rusztu, tj. przekrojach znajdujących się w pręśle belki podłużnej i w środku rozpiętości belki poprzecznej.



Rys.6

Wprowadzone następujące oznaczenia:

$$(120) \quad a_1 = \frac{L_1}{L} ; \quad a_2 = \frac{W_x}{W_{x1}} = \frac{W_{pl}}{W_{pl1}} = \frac{M_0}{M_{01}} ;$$

$$a_3 = \frac{I_x}{I_{x1}} .$$

Miarodajne mechanizmy zniszczenia rusztu przedstawiono na rys. 63.

Mechanizmowi A odpowiadają rozwiązania otrzymane dla belki dwuprzęsłowej na podporze sprężystej /por. p.3.2.B/. Siła  $P_{no}$  określona jest zatem wzorem (96). Natomiast siłę  $P_{ppo}$  znajduje się z wzoru (106), po uprzednim wyznaczeniu z wzoru (107) dla zadanego k położenia  $\mathcal{K}_p$  przegubu plastycznego. Zachowują przy tym swoją ważność oznaczenia (105) i (98).

Podatnością sprężystą  $\frac{1}{k}$  podpory 1 jest tu ugięcie pod siłą belki AB od siły  $P = 1$  ustawionej w 1, czyli:

$$(121) \quad \frac{1}{k} = \frac{L_1^3}{48 E I_{x1}} .$$

Uwzględniając związek między  $d$  i  $k$  określony wzorem (98), gdzie  $I = I_x$ , jak również zależność (121) oraz wprowadzone w postaci (120) oznaczenia, należy przy korzystaniu z określonych dla belki na podporze sprężystej w postaci wzorów (105), (106) i (107) rozwiązań, podstawić w miejsce współczynnika  $d$  wartość:

$$(122) \quad d = \frac{a_1^3 a_3}{8} .$$

W celu określenia sił  $P_n$  i  $P_p$  odpowiadających mechanizmowi B zniszczenia rusztu wyznaczmy przesunięcie pionowe  $b$  pod siłą, kąty obrotu  $\phi_x$  i  $\phi_1$  /rys.63/ oraz wartości ekstremalnych momentów sginających w przekrojach krytycznych belek podłużnej i poprzecznej rusztu.

Przesunięcie  $b$  oraz kąty obrotu  $\phi_x$  i  $\phi_1$  wynoszą:

$$(123) \quad b = 2 - \frac{x}{L} ; \quad \phi_x = \frac{2}{x} ; \quad \phi_1 = \frac{2}{a_1 L} .$$

Maksymalny moment zginający  $\max M_x^{P=1}$  od przesuwającej się siły  $P = 1$  w przekroju belki podłużnej rusztu oddalonym o  $x$  od podpory  $O$  występuje wtedy, gdy siła ustawiona jest nad tym przekrojem. Przy uwzględnieniu (122) moment ten określony jest wzorem (103), gdzie  $\kappa = \frac{x}{L}$ .

Maksymalny moment zginający w środku rozpiętości belki poprzecznej A-B rusztu od przesuwającej się siły  $P = 1$  występuje wtedy, gdy siła ta jest ustawiona w węźle 1 rusztu. Wynosi on:

$$(124) \quad \max_{AB} M_1^{P=1} = \frac{2a_1 L}{8 + a_1^3 a_3}.$$

Graniczną siłę nośności  $P_n$  dla mechanizmu B zniszczenia rusztu wyznaczmy z równania (19) napisanego dla tego mechanizmu w postaci:

$$(125) \quad P_n \left(2 - \frac{x}{L}\right) = M_0 \frac{2}{x} + 2 \frac{M_0}{a_2} \cdot \frac{2}{a_1 L}$$

skąd:

$$(126) \quad P_n = \frac{2a_1 a_2 + 4\kappa}{a_1 a_2 \kappa (2 - \kappa)} \cdot \frac{M_0}{L}.$$

Z minimalizacji (126) względem  $\kappa$  otrzymujemy sprowadzoną odległość:  $\kappa_n = \frac{x_n}{L}$  przegubu plastycznego, przy której siła  $P_n$  osiąga najmniejszą wartość  $P_{n0}$ . Odległość ta wynosi:

$$(127) \quad \kappa_n = \frac{-a_1 a_2 + \sqrt{a_1^2 a_2^2 + 4a_1 a_2}}{2}.$$

Graniczną siłę nośności  $P_{n0}$  znajdujemy podstawiając (127) do (126).

Graniczną siłę przystosowania  $P_{pp}$  odpowiadającą zniszczeniu przystosowemu dla mechanizmu B zniszczenia rusztu wyznaczmy z

równania (47) zapisanego w postaci:

$$(128) \max M_x^{P=1} P_{pp} \phi_x + 2 \max M_1^{AB} M_1^{P=1} P_{pp} \cdot \phi_1 = M_0 |\phi_{x1}| + 2 M_{01} |\phi_1|.$$

Siła ta wynosi:

$$(129) P_{pp} = \frac{2(8 + a_1^3 a_3)(a_1 a_2 + 2\kappa)}{a_1 a_2 [4\kappa^4 - (20 + a_1^3 a_3)\kappa^2 + (24 + 2a_1^3 a_3)\kappa]} \cdot \frac{M_0}{L}.$$

Z minimalizacji wzoru (129) względem  $\kappa$  otrzymujemy równanie:

$$(130) 12\kappa^4 + 8a_1 a_2 \kappa^3 - (20 + a_1^3 a_3)\kappa^2 - a_1 a_2 (20 + a_1^3 a_3)\kappa + a_1 a_2 (12 + a_1^3 a_3) = 0,$$

z którego wyznacza się  $\kappa_p$ , tj. sprowadzoną odległość od podpory 0 przegubu plastycznego oraz siły  $P_{ppo}$ , będącej najmniejszą z sił  $P_{pp}$  zapisanych wzorem (129). Podstawiając następnie  $\kappa_p$  do (129) otrzymujemy siłę  $P_{ppo}$ .

Graniczną siłę przystosowania  $P_{ps}$ , odpowiadającą zniszczeniu wskutek zmęczenia niskocyklowego, wyznaczymy z wynikającego z (48)<sub>3</sub> wzoru (92).

Maksymalne różnice ekstremalnych momentów zginających, występujące tu w przęśle 0-1 belki podłużnej, bądź w środku rozpiętości belki poprzecznej A-B, wynoszą:

a/ w przęśle belki podłużnej

$$(131) \max M_{\beta}^{P=1} - \min M_{\beta}^{P=1} = \max M_{x_0}^{P=1},$$

b/ w środku rozpiętości belki poprzecznej

$$(132) \max M_{\beta}^{P=1} - \min M_{\beta}^{P=1} = \max M_1^{AB} M_1^{P=1}.$$

Występujący we wzorze (131) moment  $\max M_{x_0}^{R=1}$  można otrzymać minimalizując (103) względem  $\alpha$ .

Z otrzymanego w ten sposób równania (108), po wprowadzeniu doń oznaczenia (122), wyznacza się położenie  $\kappa_0$  przekroju, w którym

wystąpił  $\max M_{x0}^{P=1}$  a następnie podstawiając  $K_0$  i (122) do (103) wartość  $\max M_{x0}^{P=1}$ .

Występujący we wzorze (132) maksymalny moment zginający zapisany jest wzorem (124).

Nośność sprężystą wyznacza się z wynikającego z (51) wzoru (74) wybierając mniejszą z odpowiadających wartościom  $\max |M^{P=1}| = \max M_{x0}^{P=1}$  i  $M_0^{01} = M_0$  oraz  $\max |M^{P=1}| = \frac{AB}{\max M_1} P=1$  i  $M_0^{AB} = M_{01}$  sił  $P_s$ .

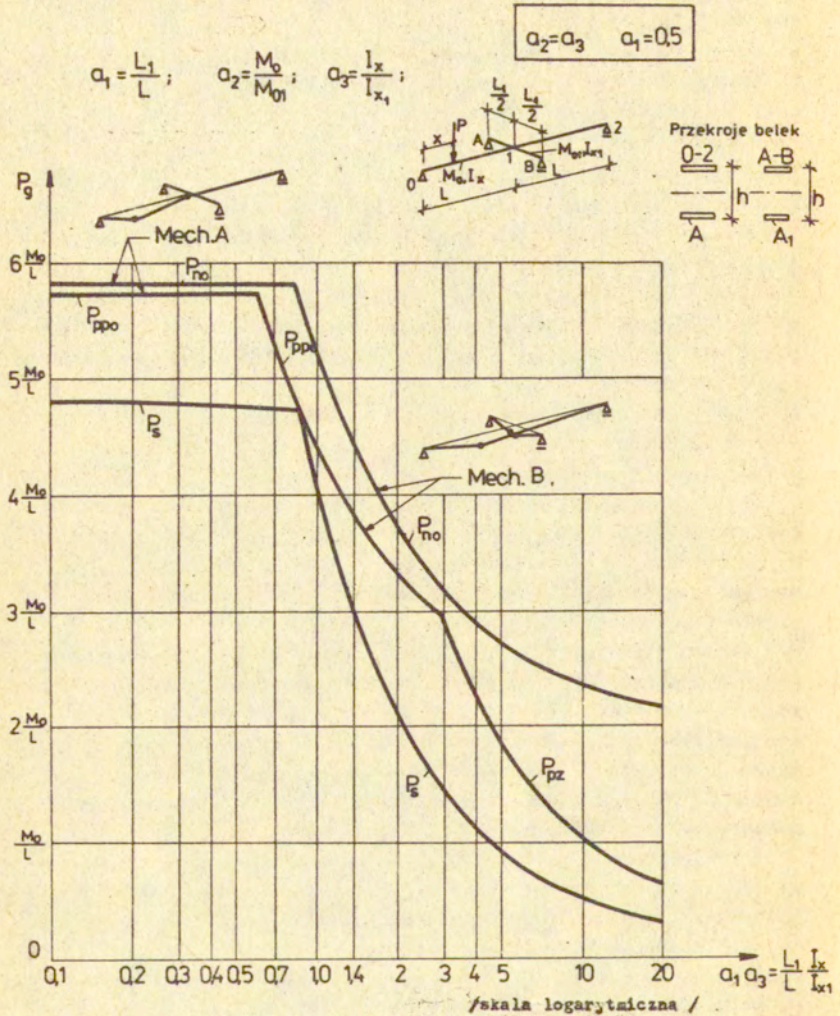
Rozwiązania szczegółowe przeprowadzone dla rusztów, w których przekroje belek podłużnych i poprzecznych dobrano tak, aby stosunek  $a_2$  wytrzymałości tych przekrojów, był równy stosunkowi  $a_3$  ich momentów bezwładności. Warunek ten spełniają przekroje idealnie sandwichowe o równej wysokości i tej samej grubości półek, różniące się jedynie szerokością półek. Przedstawione w zależności od stosunku sztywności przęsła belki podłużnej do sztywności belki poprzecznej  $\left(\frac{I_x}{L} : \frac{I_{x1}}{L_1}\right)$  wykresy granicznych obciążeń  $P_p$ ,  $P_n$  i  $P_s$  /rys. 62 do 65/ odpowiadają czterem różnym stosunkom  $a_1 = \frac{L_1}{L}$  długości  $L_1$  belki poprzecznej do długości  $L$  przęsła belki podłużnej równym: 0,5; 1; 1,5 i 2. Wyznaczone wartości tych granicznych obciążeń zestawiono w tablicach od 19 do 22.

A oto wnioski wynikające z analizy otrzymanych rozwiązań.

Dla rusztów /tablica 18/ obciążonych w węzłach siłami skupionymi  $P$ , zmieniającymi się w granicach  $0 \ll P \ll P_{\max}$ , granicznymi obciążeniami przystosowania są, jako mniejsze, obciążenia  $P_{pp}$  odpowiadające zniszczeniu przystosowemu, przy czym dla rusztów o więcej niż jednej belce podłużnej sztywność obciążeń nie wpływa na spadek ich udźwigu  $P_{pp} = P_n$ . Dla rusztów o jednej belce podłużnej sztywność obciążeń powoduje nieduże /kilkuprocentowe/ zmniejszenie ich nośności. Nośności sprężyste są, z wyjątkiem rusztu o dwóch osiach symetrii i idealnym przekroju sandwichowym, dla którego  $P_s = P_{pp} = P_n$ , znacznie mniejsze od granicznych obciążeń nośności  $P_n$  i przystosowania  $P_{pp}$ .

W przypadku występowania obciążenia międzywęzłowego w postaci siły ruchomej  $P$  /rys. 64 do 67/ granicznymi obciążeniami przystosowania są siły  $P_{ppo}$  odpowiadające zniszczeniu przystosowemu. Wyjątek stanowią tu ruszty o znacznej sztywności belki podłużnej w stosunku do sztywności belki poprzecznej oraz gdy rozpiętość  $L_1$  belki poprzecznej w stosunku do rozpiętości  $2L$  belki podłużnej jest nieduża /np.:  $\frac{L_1}{2L} = 0,5$ ;  $\frac{L_1}{2L} = 0,25$  i mniejsze/. O zniszczeniu decyduje wtedy zmęczenie niskocyklowe.

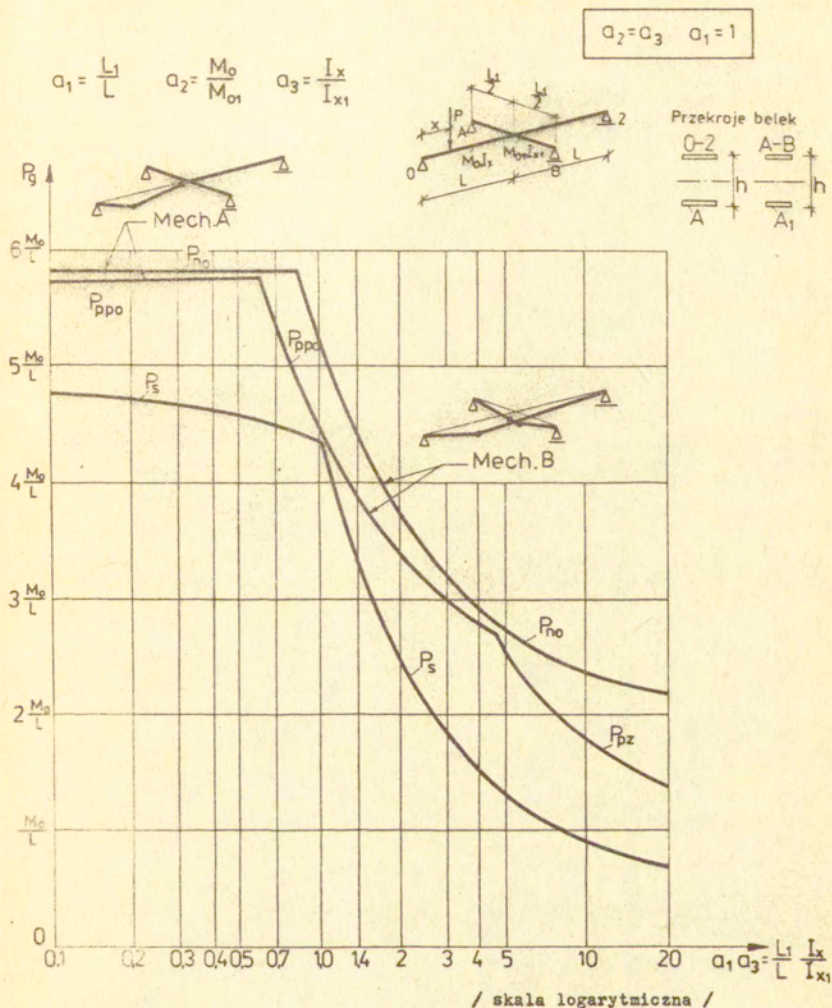
Wykresy obciążeń granicznych  $P_g$  w zależności od stosunku sztywności belki podłużnej 0 - 1 - 2 do belki poprzecznej A - B rusztu



Rys. 64



Wykresy obciążeń granicznych  $P_g$  w zależności od stosunku sztywności belki podłużnej 0-1-2 do sztywności belki poprzecznej A-B rusztu

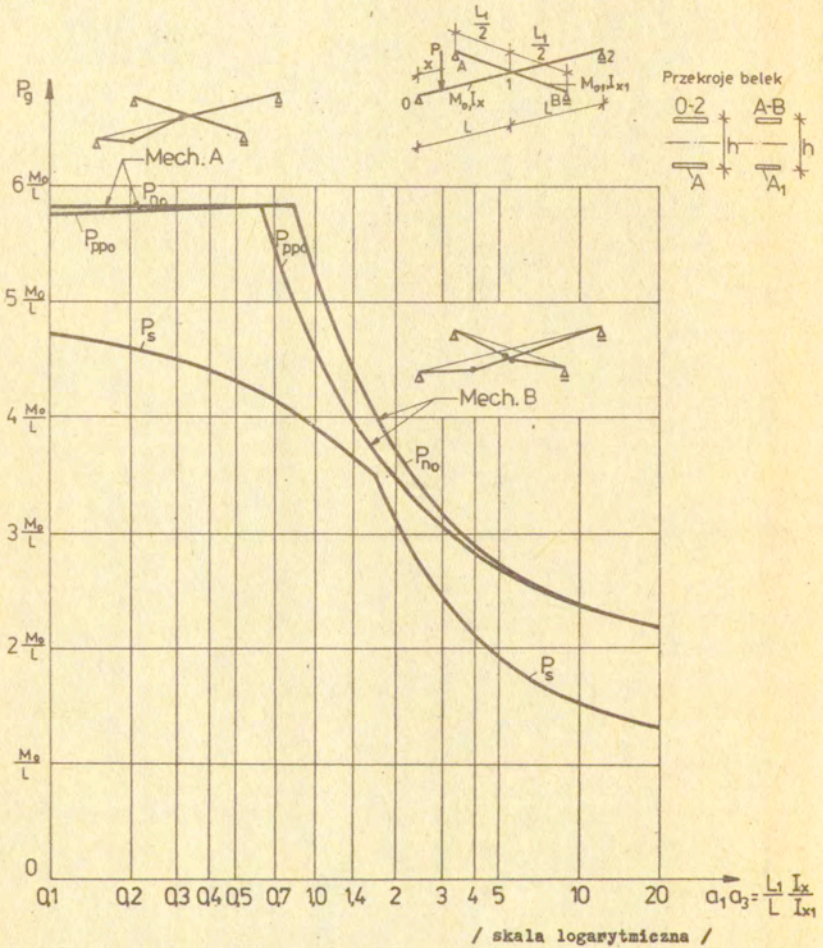


Rys. 65

Wykresy obciążeń granicznych  $P_g$  w zależności od stosunku sztywności belki podłużnej 0-1-2 do sztywności belki poprzecznej A-B rusztu

$$\alpha_1 = \frac{L_1}{L} ; \quad \alpha_2 = \frac{M_0}{M_{01}} ; \quad \alpha_3 = \frac{I_x}{I_{x1}}$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 \quad \alpha_1 = 1,5$$

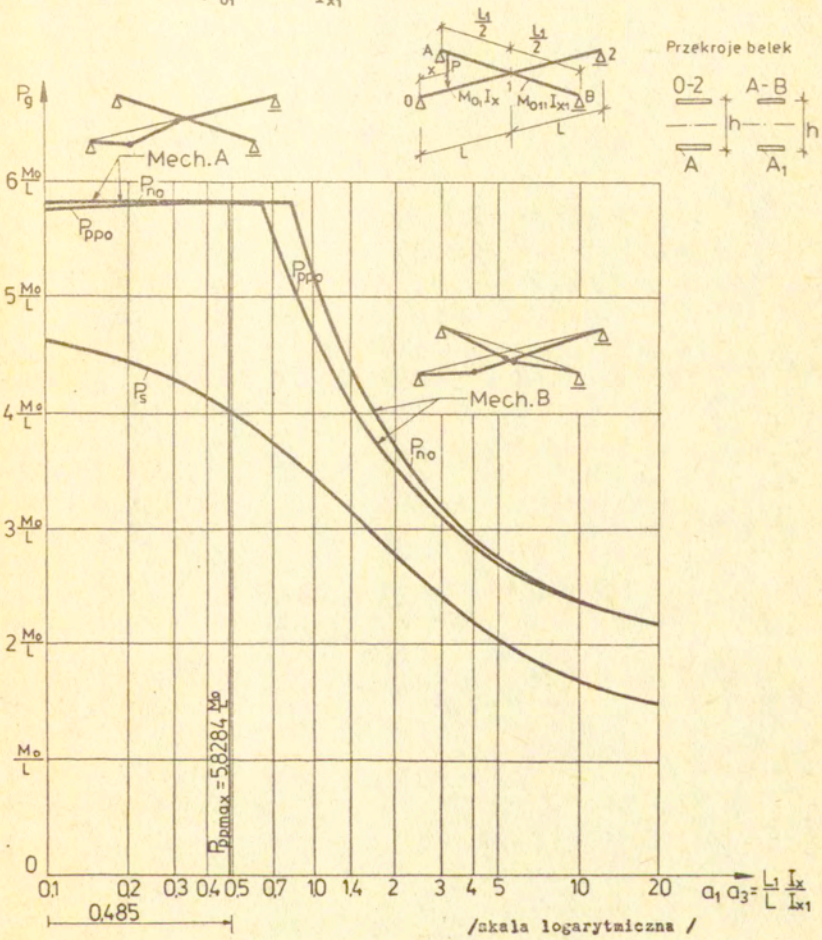


Rys. 66

Wykresy obciążeń granicznych  $P_g$  = zależności od stosunku sztywności belki podłużnej 0-1-2 do sztywności belki poprzecznej A-B rusztu

$$\alpha_1 = \frac{L_1}{L} \quad \alpha_2 = \frac{M_0}{M_{01}} \quad \alpha_3 = \frac{I_x}{I_{x1}}$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 \quad \alpha_1 = 2$$



Rys. 67

Tablica 19

$$a_1 = \frac{L_1}{L};$$

$$a_2 = \frac{M_0}{M_{01}};$$

$$a_3 = \frac{I_x}{I_{x_1}}$$

$$a_2 = a_3 \quad a_1 = 0,5$$

$a_2 = a_3$	$a_1 a_2$		$P_s$		$P_p$		$P_{no}$
0,2	0,1	$\frac{P=1}{\max M} = \max M_{x0}$	4,8081 $\frac{M_0}{L}$	Mechanism A	5,7243 $\frac{M_0}{L}$	Mechanism A	5,8284 $\frac{M_0}{L}$
0,4	0,2		4,7953 "		5,7216 "		
0,6	0,3		4,7825 "		5,7245 "		
0,8	0,4		4,7699 "		5,7274 "		
1,0	0,5		4,7573 "		5,7302 "		
1,2	0,6		4,7448 "		5,7330 "		
1,4	0,7		4,7324 "		5,2948 "		
1,6	0,8		4,7201 "		4,9363 "		
1,6568	0,8284						
1,8	0,9				4,5694 "		
2,0	1,0		4,1250 "	4,4220 "	5,2361 "		
2,4	1,2	$\frac{P=1}{\max M} = \max M_1$	3,4583 "	Mechanism B	4,0690 "	Mechanism B	4,7483 "
2,8	1,4		2,9821 "		3,8107 "		4,3925 "
3,2	1,6		2,8250 "		3,6130 "		4,1208 "
3,6	1,8		2,3472 "		3,4564 "		3,9062 "
4	2		2,1250 "		3,3292 "		3,7320 "
6	3		1,4583 "		2,9166 "		3,1942 "
8	4		1,1250 "		2,2500 "		2,9142 "
10	5		0,9250 "		1,8500 "		2,7416 "
20	10		0,5250 "		1,0500 "		2,3632 "
40	20		0,3250 "		0,6500 "		2,1954 "

Tablica 20

$$a_1 = \frac{L_1}{L}; \quad a_2 = \frac{M_0}{M_{01}}; \quad a_3 = \frac{I_X}{I_{X1}}$$

$$a_2 = a_3 \quad a_1 = 1$$

$a_2 = a_3$	$a_1 a_2$		$P_s$		$P_p$		$P_{no}$
0,1	0,1	$\max \left  \frac{P=1}{M} \right  = \max \frac{M_{10}}{M_0}$	4,7699 $\frac{M_0}{L}$	Mechanizm A P ppo nizm A	5,7274 $\frac{M_0}{L}$	Mechanizm A	5,8284 $\frac{M_0}{L}$
0,2	0,2		4,7201 "		5,7385 "		
0,3	0,3		4,6715 "		5,7489 "		
0,4	0,4		4,6241 "		5,7585 "		
0,5	0,5		4,5779 "		5,7676 "		
0,6	0,6		4,5329 "		5,7759 "		
0,7	0,7		4,4889 "		5,3605 "		
0,8	0,8		4,4459 "		5,0032 "		
0,8284	0,8284						
0,9	0,9		$\max \left  \frac{P=1}{M} \right  = \max \frac{M_1}{M_{AB}}$		4,4039 "		
1,0	1,0	4,3629 "		4,4995 "	5,2361 "		
1,2	1,2	3,8333 "		4,1387 "	4,7483 "		
1,4	1,4	3,3571 "		3,8812 "	4,3925 "		
1,6	1,6	3,0000 "		3,6839 "	4,1208 "		
1,8	1,8	2,7200 "		3,5276 "	3,9062 "		
2	2	2,5000 "		3,4003 "	3,7320 "		
3	3	1,8333 "		3,0033 "	3,1942 "		
4	4	1,5000 "		2,7922 "	2,9142 "		
5	5	1,3000 "		2,6000 "	2,7416 "		
10	10	0,9000 "	1,8000 "	2,3632 "			
20	20	0,7000 "	1,4000 "	2,1954 "			

Tablica 21

$$a_1 = \frac{L_1}{L};$$

$$a_2 = \frac{M_0}{M_{01}};$$

$$a_3 = \frac{I_x}{I_{x1}}$$

$$a_2 = a_3 \quad a_1 = 1,5$$

$a_2 = a_3$	$a_1 a_2$	$P_s$	$P_{ppo}$	$P_{no}$
0,0667	0,1	4,7078 $\frac{M_c}{L}$	5,7411 $\frac{M_c}{L}$	
0,1333	0,2	4,6009 "	5,7631 "	
0,2	0,3	4,4998 "	5,7818 "	
0,2667	0,4	4,4039 "	5,7971 "	
0,3333	0,5	4,3130 "	5,8093 "	
0,4	0,6	4,2267 "	5,8185 "	
0,4667	0,7	4,1446 "	5,4558 "	
0,5333	0,8	4,0664 "	5,0979 "	
0,5523	0,8284	-	-	5,8284 $\frac{M_c}{L}$
0,6	0,9	3,9919 "	4,8144 "	5,5555 $\frac{M_c}{L}$
0,6667	1,0	3,9208 "	4,5836 "	5,2361 "
0,8	1,2	3,7881 "	4,2295 "	4,7483 "
0,9333	1,4	3,6666 "	3,9692 "	4,3925 "
1,0667	1,6	3,5551 "	3,7689 "	4,1208 "
1,2	1,8	3,3472 "	3,6093 "	3,9062 "
1,3333	2	3,1250 "	3,4787 "	3,7320 "
2,0	3	2,4583 "	3,0652 "	3,1942 "
2,6667	4	2,1250 "	2,8399 "	2,9142 "
3,3333	5	1,9250 "	2,6954 "	2,7416 "
6,6667	10	1,5250 "	2,3748 "	2,3832 "
13,3333	20	1,3250 "	2,1942 "	2,1954 "

Tablica 22

$$a_1 = \frac{L_1}{L}; \quad a_2 = \frac{M_0}{M_{01}}; \quad a_3 = \frac{I_x}{I_{x_1}}$$

$a_2 = a_3 \quad a_1 = 2$

$a_2 = a_3$	$a_1 a_2$	$P_s$	$P_{ppo}$	$P_{ne}$
0,05	0,1	4,6241 $\frac{M_0}{L}$	5,7585 $\frac{M_0}{L}$	
0,1	0,2	4,4459 "	5,7907 "	
0,15	0,3	4,2837 "	5,8127 "	
0,2	0,4	4,1357 "	5,8251 "	
0,24264	0,48528	-	5,8284 "	5,8284 $\frac{M_0}{L}$
0,25	0,5	4,0000 "	5,8283 "	
0,3	0,6	3,8752 "	5,8225 "	
0,35	0,7	3,7602 "	5,5653 "	
0,4	0,8	3,6538 "	5,2041 "	
0,4142	0,8284			
0,45	0,9	3,5551 "	4,9169 "	5,5555 $\frac{M_0}{L}$
0,5	1,0	3,4635 "	4,6825 "	5,2361 "
0,6	1,2	3,2983 "	4,3211 "	4,7483 "
0,7	1,4	3,1539 "	4,0536 "	4,3925 "
0,8	1,6	3,0266 "	3,8465 "	4,1208 "
0,9	1,8	2,9141 "	3,6805 "	3,9062 "
1,0	2	2,8136 "	3,5439 "	3,7320 "
1,5	3	2,4431 "	3,1073 "	3,1942 "
2,0	4	2,2092 "	2,8674 "	2,9142 "
2,5	5	2,0512 "	2,7138 "	2,7416 "
5	10	1,6998 "	2,3786 "	2,3832 "
10	20	1,5150 "	2,1948 "	2,1954 "

$\max \frac{P_s}{M_{01}} = \max \frac{P_{ppo}}{M_0}$

Mechanism A

Mechanism A

Mechanism B

Mechanism B

Dla niedużych w stosunku do sztywności belki poprzecznej sztywności przęseł belki podłużnej  $0,1 < \frac{L_1 I_x}{L I_{x1}} < 0,6$  ruszt pracuje jak belka dwuprzęsłowa na sprężystej podporze i ulega zniszczeniu wskutek zmiany przęśla tej belki w mechanizmie częściowy. Graniczna siła przystosowania jest wtedy nieznacznie mniejsza /do ok. 1,8%/ od granicznej siły nośności - w tym zakresie stałej. Dla większych od ok. 0,6 stosunków sztywności przęseł belki podłużnej do sztywności belki poprzecznej udźwig ruszt wraz ze wzrostem tego stosunku szybko maleje. W tym zakresie ruszt ulega zniszczeniu wskutek zmiany w mechanizmie supełny. Różnice w granicznych siłach nośności  $P_{no}$  i przystosowania  $P_{ppo}$  są tu rzędu kilku do kilkunastu /max. 16,5/ procent. Gdy o zniszczeniu decyduje zmęczenie niskocyklowe spadek nośności wskutek występowania obciążeń zmiennych wynosi kilka do kilkudziesięciu procent.

Wykresy nośności sprężystej, czyli sił  $P_g$ , składają się z dwóch gałęzi odpowiadających wystąpieniu maksymalnego momentu w przęśle belki podłużnej /dla mniejszych stosunków sztywności tej belki do sztywności belki poprzecznej/, bądź w środku rozpiętości belki poprzecznej /dla większych stosunków sztywności belki podłużnej do sztywności belki poprzecznej/. Występujące różnice między wartościami sił  $P_p$  i  $P_g$  są rzędu kilku do kilkudziesięciu procent.

Przeprowadzona analiza otrzymanych wyników dowodzi konieczności /przynajmniej w pewnych zakresach/ projektowania na przystosowanie rusztu obciążonego siłą ruchomą. Jeżeli chodzi o ruszty obciążone w węslach siłami skupionymi /tablica 1/ można niektóre z nich projektować na nośność graniczną.

Optymalnym, ze względu na minimum materiału, rozwiązaniem dla rusztu obciążonego siłą ruchomą  $P$  jest przyjęcie stosunku sztywności przęśla belki podłużnej do sztywności belki poprzecznej, odpowiadającego punktowi nieciągłości na wykresie sił  $P_{ppo}$  równego  $\frac{L_1 I_x}{L I_{x1}} \approx 0,6$ , a gdy obciążenie jest monotoniczne przyjęcie stosunku  $\frac{L_1 I_x}{L I_{x1}} = 0,6264$ , odpowiadającego punktowi nieciągłości na wykresie sił  $P_{no}$ .



## Zakończenie

Przeprowadzona w części pierwszej rozprawy analiza porównawcza oddziaływania naprężeń wstępnych od sprężenia i naprężeń resztkowych na wielkość udźwigu i przesunięcia zakresu sprężystej pracy konstrukcji wykazała, że oba rodzaje naprężeń mogą spowodować korzystne przesunięcie zakresu, bądź translaację obszaru zawierającego obciążenia zewnętrzne gwarantujące sprężyste zachowanie się konstrukcji.

Osiągnięcie wzrostu nośności konstrukcji jest natomiast możliwe jedynie poprzez sprężenie i spowodowany nim wzrost nośności poszczególnych przekrojów.

Naprężenia resztkowe wpływają w większości przypadków na spadek nośności przekrojów i konstrukcji. Miarą nośności są bowiem wtedy granice obszaru zawierającego obciążenia gwarantujące sprężystą pracę konstrukcji. Zwiększenie obciążeń poza te granice powoduje przyrost odkształceń trwałych bądź złamania plastyczne i w konsekwencji zniszczenie konstrukcji.

Przedstawione w części drugiej rozprawy rozwiązania prac [73] i [79] i wynikające z nich wnioski uzupełniły braki istniejące w zakresie wyznaczania nośności granicznej mimośrodowo obciążonych przekrojów kablebetonowych. Rozwiązania te, przeprowadzone przy przyjęciu zalecanego przez przepisy międzynarodowe CEB-FIP [95] kryterium zniszczenia przekroju, opartego na osiągnięciu nie granicznych wartości naprężeń, a granicznych wartości odkształceń, umożliwiły sformułowanie nowych, obowiązujących obecnie w Polsce przepisów normowych [90] <sup>x/</sup>.

Przeprowadzona analiza wpływu wielkości wstępnej siły sprężającej na nośność mimośrodowo obciążonych kablebetonowych przekrojów prostokątnych wykazała możliwość podwyższenia tej nośności, a tym samym nośności całej konstrukcji, poprzez odpowiedni

<sup>x/</sup>wyznaczone w pracach [73] i [79] nośności przekrojów bazowały na obowiązujących wówczas, zgodnych z FN-66/B-03320, charakterystykach wytrzymałościowych materiałów. Dostosowanie przedstawionych rozwiązań do obecnie obowiązujących przepisów normowych można przeprowadzić przez zastosowanie odpowiedniej korekty wielkości tych charakterystyk.

dobór wielkości siły sprężającej.

Przedstawione rozwiązanie problemu optymalnego projektowania ze względu na minimum zbrojenia sprężającego mimośrodowe obciążonego prostokątnego przekroju kablebetonowego rozszerza zakres rozwiązań wcześniejszych, bowiem obejmuje przypadki, w których obciążenie zadane jest w postaci obszaru zmienności momentów zginających i sił podłużnych.

Podane metody wyznaczania nośności kablebetonowych ram, umożliwiające uwzględnienie - poza momentem zginającym - wpływu sił podłużnych na nośność przekrojów, prowadzą do wyników bardziej dokładnych od otrzymywanych metodami dotychczas stosowanymi, pomijającymi ten wpływ.

Część treści rozprawy poświęcono przedstawieniu rozwiązań problemów nośności stalowych konstrukcji prętowych poddanych działaniu obciążeń wielokrotnie zmiennych.

Analiza wyników przeprowadzonych badań doświadczalnych na belkach ciągłych [20, 22, 26, 53, 57], prętach [43], ramach [34, 35, 66, 91] i rusztach [23, 27], jak i zgodnych z nimi w zasadzie wyników rozwiązań teoretycznych<sup>x/</sup>, wykazała, że dla konstrukcji o własnościach sprężyste-plastycznych, poddanych działaniu obciążeń o znaczących amplitudach zmian, właściwym kryterium wytrzymałościowym jest przystosowanie. Dalszym potwierdzeniem tej tezy są wyniki przeprowadzonych przez mnie w pracach [81 do 87] rozwiązań problemu nośności belek ciągłych, rusztów i ram portalcowych. Rozwiązania te wykazują, że w udźwigu konstrukcji poddanych obciążeniem niezmienną się i zmiennych w czasie mogą wystąpić istotne różnice.

Otrzymane metodami teorii przystosowania nośności rozpatrywanych ustrojów są bliskie, a w niektórych przypadkach równe nośnościom otrzymanym metodami teorii nośności granicznej lub z zależności obowiązujących w teorii liniowo-sprężystej, bądź też przyjmują wartości pośrednie. Zależy to od parametrów geometrycznych kon-

<sup>x/</sup> Wyznaczone doświadczalnie nośności tych konstrukcji są na ogół /s korzyścią dla bezpieczeństwa/ nieco większe od wynikających z obliczeń na przystosowanie, co w głównej mierze jest efektem nieuwzględnienia w obliczeniach wzmocnienia materiału.

strukeji, jej własności mechanicznych oraz programu występujących obciążeń.

Nie istnieje niestety żadna korelacja pomiędzy wartościami granicznych obciążeń nośności, przystosowania oraz nośności sprężystej, która mogłaby pozwolić na uwzględnienie wpływu działania obciążeń wielokrotnie zmiennych poprzez zastosowanie pewnych współczynników odniesienia do rozwiązań teorii nośności granicznej lub teorii liniewo-sprężystej.

Pewne jedynie analogie dają się zauważyć w rozwiązaniach uzyskanych dla podobnie obciążonych konstrukcji. Przykładem tego mogą być wyniki otrzymane dla przegubowo-podpartyh ram portalowych obciążonych siłą poziomą  $H$  i siłami pionowymi  $P$ . Tak w przypadku działania jednej siły pionowej [52], jak i działania czterech sił [83] istnieje pewien zakres wartości sił  $H / 0 < H < \alpha \cdot P$ ;  $\alpha < 1$ , w których występuje zgodność rozwiązań przeprowadzonych metodami teorii nośności granicznej i teorii przystosowania, tzn. w zakresie tym zmienność obciążeń nie powoduje spadku nośności konstrukcji. Z podobieństw tych nie można jednak wyciągnąć żadnych wniosków natury ogólnej. Inny bowiem przykład - belek ciągłych obciążonych siłami ruchomymi [84] - świadczy o braku występowania takich podobieństw. Gdy po belkach przesuwają się dwie siły - zależny od rozstawu tych sił spadek ich nośności może wynieść nawet 12,3%.

W świetle powyższych uwag rysuje się wyraźna potrzeba opracowania dla powszechnie stosowanych konstrukcji i typowych programów obciążeń szczegółowych rozwiązań: analitycznych - dla konstrukcji o niskim stopniu statycznej niewyznaczalności oraz numerycznych - dla konstrukcji wielokrotnie statycznie niewyznaczalnych i przedstawienia wyników tych rozwiązań w formie katalogu. Katalog ten obejmie wyniki przeprowadzonych przez mnie w pracach [81 do 87] rozwiązań.

Na zakończenie wypada przypomnieć, że poza sprawdzeniem warunków osiągnięcia stanu granicznego nośności, ce było tematem prac [81 do 87], istnieje konieczność sprawdzenia warunków osiągnięcia stanu granicznego użytkowania, w którym o nieprzydatności konstrukcji do normalnej eksploatacji decyduje, jakie jedno z

podstawowych kryteriów, wystąpienie nadmierne w stosunku do dopuszczalnych przemieszczeń. Wcześniejse osiągnięcie stanu granicznego użytkowania, niż stanu granicznego nośności, może np. wystąpić w smukłych konstrukcjach prętowych, takich jak ramy wielokondygnacyjne. Przykładem tego może być przeprowadzone w pracy [80] sprawdzenie stanu granicznego użytkowania jednoosobowej ramy pięciopiętrowej zaprojektowanej na przystosowanie, ze współczynnikiem bezpieczeństwa równym 1,5. Wyznaczone w tej pracy, a tądą zaproponowaną przez J.A. Königa, przemieszczenie poziome górnego ryglu ramy, równe 4,03 cm, okazało się większe od określonego normą przemieszczenia dopuszczalnego, równego 3,30 cm.

## ZAŁĄCZNIK 1

Zależności graniczne dla mimośrodowo obciążonego betonowego przekroju prostokątnego sprężonego kablem iniektowanym.

Występujące w tablicach A i B, na rys. 30 i rys.31 oraz w pracach [73], [74] i [78] oznaczenia.

$b, h$  — szerokość i wysokość przekroju betonowego,

$e$  — mimośród zbrojenia sprężającego,

$F_s$  — przekrój zbrojenia sprężającego,

$\sigma_b, \sigma_s$  — naprężenia w betonie i w zbrojeniu sprężającym

$\sigma_s^w$  — naprężenia wstępne w zbrojeniu sprężającym po uwzględnieniu strat spowodowanych siłami tarcia-

$\sigma_{\text{dop}}$  — naprężenia dopuszczalne w zbrojeniu sprężającym,

$Q_{cb}$  — naprężenia ściskające w betonie na umownej granicy plastyczności,

$R_k, R_w$  — wytrzymałość kostkowa i walcowa betonu,

$R_s$  — wytrzymałość stali sprężającej,

$Q_{rs}$  — umowna granica plastyczności stali sprężającej przy rozciąganiu,

$Q_{cs}$  — umowna granica plastyczności stali sprężającej przy ściskaniu,

$\epsilon_b, \epsilon_s$  — odkształcenia jednostkowe betonu i stali sprężającej,

$\epsilon_{b0}, \epsilon_{sr}$  — graniczne sprężyste i graniczne maksymalne odkształcenie jednostkowe betonu,

$E_b = \frac{Q_{cb}}{\epsilon_{b0}}$  — obliczeniowy współczynnik sprężystości betonu,

$\epsilon_{s0}, \epsilon_{sr}$  — graniczne sprężyste i graniczne maksymalne odkształcenie jednostkowe stali sprężającej,

$E_s = \frac{Q_{rs}}{\epsilon_{s0}}$  — obliczeniowy współczynnik sprężystości stali sprężającej,

$\epsilon_s^w = \frac{\sigma_s^w}{E_s}$  — wstępne odkształcenia jednostkowe stali sprężającej,

$S^w = \sigma_s^w F_s$  — siła sprężenia wstępnego po uwzględnieniu strat spowodowanych siłami tarcia,

$\Delta \epsilon_c = \epsilon_s - \epsilon_s^w, \Delta \epsilon_{s0} = \epsilon_{s0} - \epsilon_s^w, \Delta \epsilon_{sr} = \epsilon_{sr} - \epsilon_s^w,$

$M, N$  — moment zginający i siła podłużna powodujące wspólnie zniszczenie przekroju,

$x_g, x_d$  — odległość osi obojętnej od górnej i dolnej krawędzi przekroju,

$y$  — zasięg sprężystej strefy naprężeń ściskających w betonie.

Wprowadzono ponadto następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\kappa_g = \frac{x_g}{h}, \quad \kappa_d = \frac{x_d}{h}, \quad \gamma = \frac{e}{h}, \quad f_s = \frac{F_s}{bh}, \quad \varrho = \frac{\sigma_s^w}{Q_{cb}}, \quad \varrho_{\text{dop}} = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{Q_{cb}}, \quad \beta = \frac{\epsilon_{b0}}{\epsilon_{sr}}$$

$$\beta_1 = \frac{\epsilon_{b0}}{\Delta \epsilon_{sr}}, \quad m = \frac{4M}{Q_{cb}bh^2}, \quad n = \frac{N}{Q_{cb}bh}, \quad \alpha_1 = \frac{\epsilon_{sr} E_s}{Q_{cb}}, \quad \alpha_2 = \frac{Q_{rs}}{Q_{cb}}, \quad \alpha_3 = \frac{\epsilon_{sr} E_s}{Q_{cb}}$$

$$\alpha_4 = \frac{E_s}{E_b}, \quad A = 0,5(1 - 0,5\beta), \quad B = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{6} - \frac{1}{2}$$

Tablica A

Hipoteza odkształceniowa. Wzory wiążące niszczące wartości sił podanych i momentów zginających oraz zakresy ich stosowania

Sposób zniszczenia	Rozkład naprężeń i odkształceń w betonie i stali w chwili zniszczenia przekroju		Naprężenia $\sigma_s$ — w stali sprężającej, $\sigma_b$ — w górnym (dolnym) skrajnym włóknie betonu	Odkształcenia $\epsilon_s$ — w stali sprężającej, $\epsilon_b$ — w górnym (dolnym) skrajnym włóknie betonu	$\kappa_l = \frac{x_l}{h}$ $l = \epsilon_s \cdot d$	Niszczące wartości sprężadzonej sily podłużnej i sprężadzonego momentu zginającego $h = \frac{N}{R_{m,bl}}, m = \frac{M}{R_{m,bl} \cdot \frac{h^2}{4}}$ $\delta_{zb} = R_{m,bl}$
	a	b				
2.1.2			$\sigma_s < Q_{s1}$ $\sigma_b = Q_{cb}$	$\epsilon_s < \epsilon_{sp}$ $\epsilon_b = \epsilon_{sp}$	↑	$n = \frac{A_{s1}(1 \pm \gamma) + \alpha_1 f_s - \alpha_2 f_s(1 \pm \gamma)}{\kappa_l}$ $m = 2\alpha_2 f_s \gamma - 2\alpha_1 f_s \gamma + 2\alpha_1 f_s \gamma(1 \pm \gamma) \times \frac{1}{\kappa_l} \pm 2A_{s1} \pm B\alpha_1^2$
			$\sigma_s < Q_{s2}$ $\sigma_b = Q_{cb}$	$\epsilon_s < \epsilon_s$ $\epsilon_b = \epsilon_{sp}$		
3.1.3			$\sigma_s = Q_{s1}$ $\sigma_b = Q_{cb}$	$\epsilon_{s0} < \epsilon_s < \epsilon_{sp}$	↑	$n = \frac{A_{s1}(1 \pm \gamma) + \alpha_1 f_s - \alpha_2 f_s(1 \pm \gamma)}{\kappa_l}$ $m = 2\alpha_2 f_s \gamma - 2\alpha_1 f_s \gamma + 2\alpha_1 f_s \gamma(1 \pm \gamma) \times \frac{1}{\kappa_l} \pm 2A_{s1} \pm B\alpha_1^2$
			$\sigma_s = Q_{s2}$ $\sigma_b = Q_{cb}$	$\epsilon_s = \epsilon_{sp}$ $\epsilon_b = 0$		

Tablica B

Hipoteza naprężeniowa.  
Związek między uśrednionymi wartościami siły podłużnej N i momentu zginającego M.

Stan zniszczenia	Rozkład naprężeń i odkształceń w betonie i stali w chwili zniszczenia przekroju		Naprężenia $\sigma_s$ — w stali sprężalnej $\sigma_b$ — w górnym (dolnym) skrajnym włóknie betonu	$\eta_1 = \frac{M}{N \cdot h}$ $l = e, d$	Niszczące wartości sprowadzonej siły podłużnej $n = \frac{N}{Q_{s,b} b h}$ i sprowadzonego momentu zginającego $m = \frac{M}{Q_{s,b} b \frac{h^2}{4}}$
	a	b			
1. 6			$\sigma_s = -Q_{s1}$ $\sigma_b = Q_{cb}$	$n = 1 + a_1 f_s$ $m = -2a_1 f_s \gamma$	
2. 2			$\sigma_s = -Q_{s2}$ $\sigma_b = Q_{cb}$	$1 \pm \gamma$	$n = a_1 f_s + 0,5(1 \pm \gamma)$ $m = -2a_1 f_s \gamma \pm 0,5(1 - \gamma^2)$
3. 3			$-Q_{s3} < \sigma_s < Q_{s3}$ $\sigma_b = -Q_{cb}$	$1 \pm \gamma$	$n = \pm 0,5(1 \pm \gamma)^2 - 2\gamma n$
			$\sigma_s = Q_{s4}$ $\sigma_b = Q_{cb}$	$1 \pm \gamma$	$n = -a_1 f_s + 0,5(1 \pm \gamma)$ $m = 2a_1 f_s \gamma \pm 0,5(1 - \gamma^2)$
			$\sigma_s = Q_{s5}$ $\sigma_b = -Q_{cb}$	0	$n = 2a_1 f_s (\pm 1 + \gamma \mp a_1 f_s) \pm 2(1 - 2a_1 f_s) m \mp 2a_1^2 \gamma$ $n = -a_1 f_s$ $m = 2a_1 f_s \gamma$

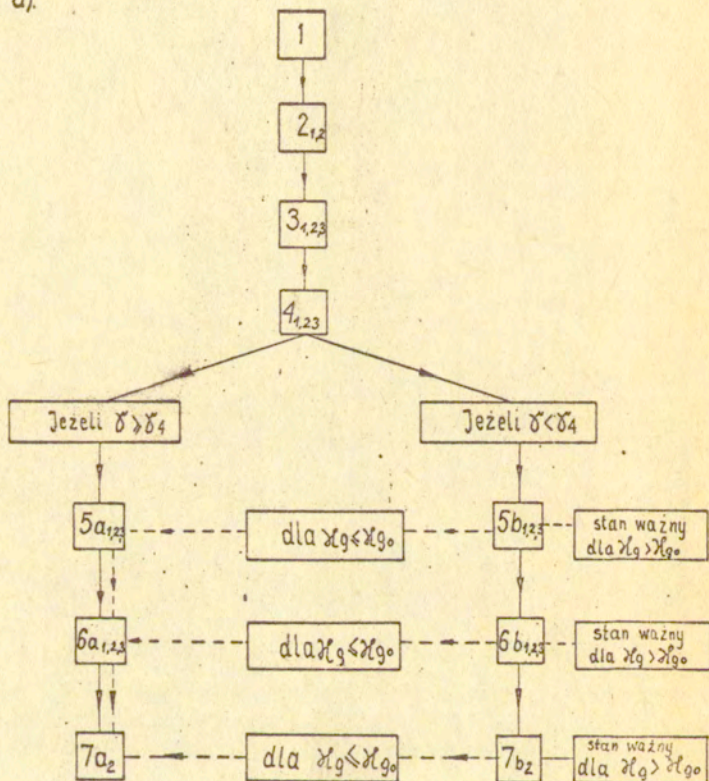
U w a g a. Przypadkom a zniszczenia przekroju odpowiadałają  $\eta_1$  i znaki górne we wzorach, przypadkom b —  $\eta_2$  i znaki dolne

ZALĄCZNIK 2

Zależności graniczne dla mimośrodowo obciążonego podwójnie zbrojonego betonowego przekroju prostokątnego sprężonego kablem iniektowanym.

A. Schematyczne przedstawienie możliwych stanów zniszczenia przekroju, kolejności w jakiej występują w krzywej granicznej oraz warunków ich występowania.

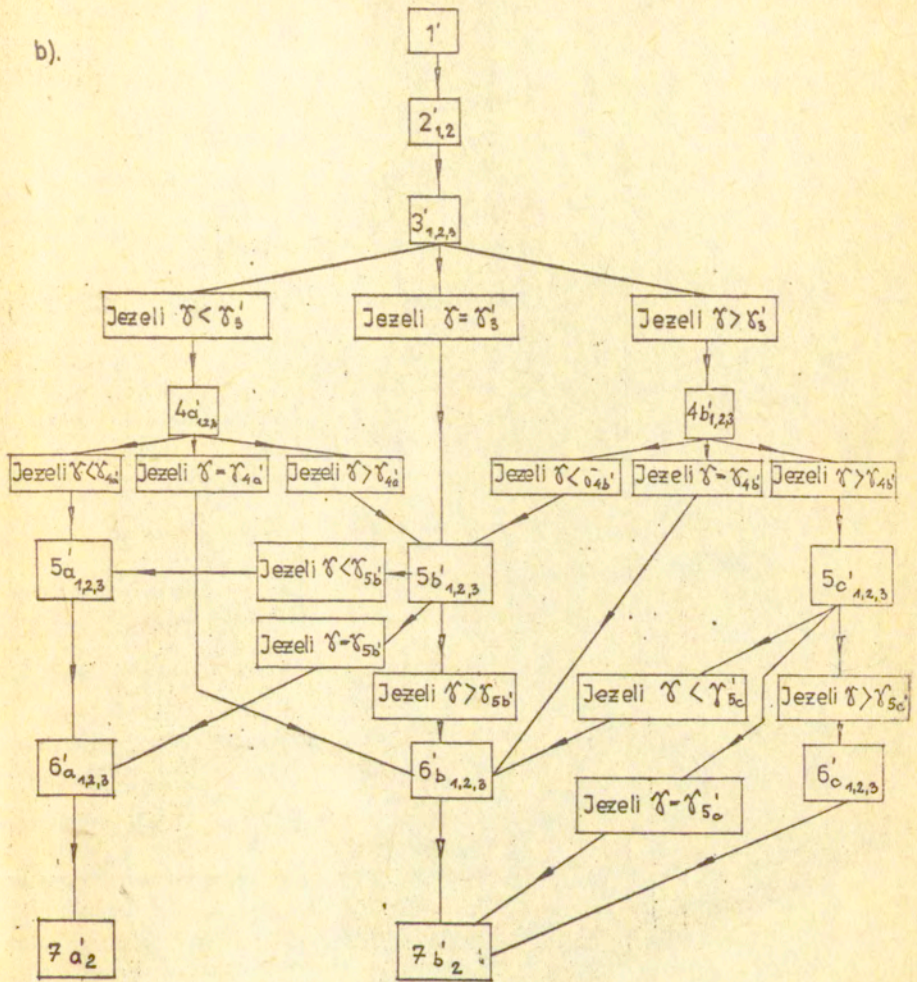
a).



$$\chi_{g0} = \frac{1 + \delta - \beta_{13}(2 - \eta d)}{1 - \beta_{13}}$$



b).



B. Występujące w tablicach C i D oraz w pracy [79] oznaczenia.

$h$	- wysokość przekroju betonowego
$a$	- mimośród zbrojenia sprężającego $F_s$
$e_g, e_d$	- mimośrodoby górnego i dolnego zbrojeń miękkich, $F_z^g, F_z^d$
$t_g, t_d$	- odległości od górnej, dolnej krawędzi przekroju zbrojenia górnego, dolnego
$F_s$	- przekrój zbrojenia sprężającego
$F_z^g, F_z^d$	- przekrój górny, dolny zbrojenia miękkiego
$\sigma_b, \sigma_s, \sigma_z^g$ $\sigma_z^d$	- naprężenia w betonie, zbrojeniu sprężającym, w górnym, dolnym zbrojeniu miękkim
$\sigma_m$	- naprężenia ściskające w betonie na umownej granicy plastyczności
$Q_r$	- umowna granica plastyczności stali miękkiej przy rozciąganiu
$Q_o$	- umowna granica plastyczności stali miękkiej przy ściskaniu
$Q_{rs}$	- umowna granica plastyczności stali sprężającej przy rozciąganiu
$\epsilon_b, \epsilon_s, \epsilon_z$	- odkształcenia jednostkowe betonu, stali sprężającej i stali miękkiej
$\epsilon_{bo}, \epsilon_{bgr}$	- graniczne sprężyste i graniczne maksymalne skrócenia jednostkowe betonu
$E_b = \frac{R_m}{\epsilon_{bo}}$	- obliczeniowy współczynnik sprężystości betonu
$\epsilon_{so}, \epsilon_{sgr}$	- graniczne sprężyste i graniczne maksymalne wydłużenia jednostkowe stali sprężającej
$E_s = \frac{Q_{rs}}{\epsilon_{so}}$	- obliczeniowy współczynnik sprężystości stali sprężającej
$\epsilon_{zo}, \epsilon_{zgr}$	- graniczne sprężyste i graniczne maksymalne wydłużenia jednostkowe stali miękkiej
$\epsilon'_{zo}, \epsilon'_{zgr}$	- graniczne sprężyste i graniczne maksymalne skrócenia jednostkowe stali miękkiej
$E_z = \frac{Q_r}{\epsilon_{zo}}$	- obliczeniowy współczynnik sprężystości stali miękkiej
$\epsilon_s^w = \frac{\sigma_s^w}{E_s}$	- wstępne wydłużenie jednostkowe stali sprężającej

- $S^W = \sigma_s^W F_s$  - siła sprężenia wstępnego po uwzględnieniu strat spowodowanych siłami tarcia  
 $M, N$  - moment zginający i siła podłużna działające w przekroju  
 $x_i$  ( $i = g, d$ ) - odległość osi obojętnej od górnej, dolnej krawędzi przekroju  
 $y$  - zasięg sprężystej strefy naprężeń ściskających w betonie.

$$\Delta \varepsilon_s = \varepsilon_s - \varepsilon_s^W, \quad \Delta \varepsilon_{s0} = \varepsilon_{s0} - \varepsilon_s^W, \quad \Delta \varepsilon_{zgr} = \varepsilon_{zgr} - \varepsilon_s^W$$

$$\alpha_g = \frac{x_g}{\frac{h}{2}}, \quad \alpha_d = \frac{x_d}{\frac{h}{2}}, \quad \eta_g = \frac{t_g}{\frac{h}{2}}, \quad \eta_d = \frac{t_d}{\frac{h}{2}}$$

$$\gamma = \frac{e}{\frac{h}{2}}, \quad \gamma_d = \frac{e_d}{\frac{h}{2}}, \quad \gamma_g = \frac{e_g}{\frac{h}{2}}$$

$$f_s = \frac{F_s}{h}, \quad f_z^g = \frac{F_z^g}{h}, \quad f_z^d = \frac{F_z^d}{h}, \quad \rho = \frac{\sigma_s^W}{|R_m|}$$

$$m = \frac{8M}{|R_m|h^2}, \quad n = \frac{2N}{|R_m|h}$$

$$\beta = \frac{E_{b0}}{E_{bgr}}, \quad \beta_1 = \frac{E_{b0}}{\Delta \varepsilon_{zgr}}, \quad \beta_2 = \frac{E_{z0}}{|E_{bgr}|}, \quad \beta_3 = \frac{E_{z0}'}{E_{bgr}}, \quad \beta_4 = \frac{\Delta \varepsilon_{z0}}{|E_{bgr}|}$$

$$\beta_5 = \frac{E_{zgr}}{|E_{bgr}|}, \quad \beta_6 = \frac{|E_{z0}'|}{E_{zgr}}, \quad \beta_7 = \frac{E_{z0}}{E_{zgr}}, \quad \beta_8 = \frac{|E_{b0}|}{E_{zgr}}, \quad \beta_9 = \frac{\Delta \varepsilon_{z0}}{E_{zgr}}$$

$$\beta_{10} = \frac{|E_{z0}'|}{\Delta \varepsilon_{zgr}}, \quad \beta_{11} = \frac{E_{z0}}{\Delta \varepsilon_{zgr}}, \quad \beta_{12} = \frac{\Delta \varepsilon_{zgr}}{|E_{bgr}|}, \quad \beta_{13} = \frac{\Delta \varepsilon_{zgr}}{E_{zgr}}, \quad \beta_{14} = \frac{E'_{z0}}{E_{b0}}$$

$$\alpha_1 = \frac{E_{bgr} E_s}{|R_m|}, \quad \alpha_2 = \frac{Q_{rs}}{|R_m|}, \quad \alpha_5 = \frac{Q_r}{|R_m|}, \quad \alpha_6 = \frac{Q_c}{|R_m|}$$

$$\alpha_7 = \frac{E_{bgr} E_s}{|R_m|}, \quad \alpha_8 = \frac{E_{zgr} E_s}{|R_m|}, \quad \alpha_9 = \frac{E_z E_{zgr}}{|R_m|}, \quad \alpha_{10} = \frac{E_z \Delta \varepsilon_{zgr}}{|R_m|}$$

$$A = 0,5 (1 - 0,5\beta), \quad A_1 = 0,5 (1 + 0,5\beta_9),$$

$$B = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{6} - \frac{1}{2}, \quad B_1 = \frac{\beta_9}{2} + \frac{\beta_9^2}{6} + \frac{1}{2},$$

$$C = (2 - \eta_g)\beta_8$$

Uwaga: Odległości  $e_g, e_d, t_g, t_d$  oraz  $y$  mają zawsze znak plus. Mimośród  $e$  zbrojenia sprężającego jest dodatni w położeniu zaznaczonym na rys.23.

$R_m, Q_c, E_{b0}, E_{bgr}, E'_{z0}$  i  $E'_{zgr}$  mają zawsze znak minus.



<p>Na granicy stanów 2 i 3' oraz 2' i 3' <math>x_i = \frac{2 - \eta_{a,9}}{1 + \beta_2}</math></p>	
<p>dla <math>x_i &gt; \frac{\eta_{9,d}}{1 - \beta_3}</math></p>	<p>dla <math>\frac{\eta_{9,d}}{1 + \beta_2} &lt; x_i &lt; \frac{\eta_{9,d}}{1 - \beta_3}</math></p>
<p>dla <math>x_i &lt; \frac{\eta_{9,d}}{1 + \beta_2}</math></p>	<p>dla <math>x_i &lt; \frac{\eta_{9,d}}{1 + \beta_2}</math></p>
<p>3<sub>4,2,3</sub> i 3'<sub>4,2,3</sub></p>	<p>3<sub>4,2,3</sub> i 3'<sub>4,2,3</sub></p>
<p>n = -2A x<sub>i</sub> + 2 f<sub>z</sub><sup>0,d</sup> α<sub>6</sub> + 2 f<sub>z</sub><sup>d,9</sup> α<sub>5</sub> + 2 f f<sub>5</sub> + 2 α<sub>4</sub> f<sub>5</sub> - 2 α<sub>4</sub> f<sub>5</sub> <math>\frac{1 \pm \gamma}{x_i}</math></p> <p>m = ± 4 f<sub>z</sub><sup>d,9</sup> α<sub>5</sub> γ<sub>a,9</sub> ± 4 f<sub>z</sub><sup>0,d</sup> α<sub>6</sub> γ<sub>a,9,d</sub> + 4 f f<sub>5</sub> γ + 4 α<sub>4</sub> f<sub>5</sub> γ - 4 α<sub>4</sub> f<sub>5</sub> γ (1 ± γ) <math>\frac{1}{x_i}</math> + 4A x<sub>i</sub> ± 2B x<sub>i</sub><sup>2</sup></p>	<p>n = -2A x<sub>i</sub> + 2 f<sub>z</sub><sup>d,9</sup> α<sub>5</sub> + 2 f<sub>z</sub><sup>0,d</sup> α<sub>6</sub> + 2 f f<sub>5</sub> + 2 α<sub>4</sub> f<sub>5</sub> - 2 f<sub>z</sub><sup>0,d</sup> α<sub>7</sub> η<sub>9,d</sub> <math>\frac{1}{x_i}</math> - 2 f<sub>5</sub> α<sub>4</sub> <math>\frac{1 \pm \gamma}{x_i}</math></p> <p>m = ± 4 f<sub>z</sub><sup>d,9</sup> γ<sub>a,9</sub> α<sub>5</sub> ± 4 f<sub>z</sub><sup>0,d</sup> γ<sub>a,9,d</sub> α<sub>6</sub> + 4 f f<sub>5</sub> γ + 4 α<sub>4</sub> f<sub>5</sub> γ ± 4 f<sub>z</sub><sup>0,d</sup> α<sub>7</sub> γ<sub>9,d</sub> η<sub>9,d</sub> <math>\frac{1}{x_i}</math> - 4 α<sub>4</sub> f<sub>5</sub> γ (1 ± γ) <math>\frac{1}{x_i}</math> ± 4A x<sub>i</sub> ± 2B x<sub>i</sub><sup>2</sup></p>
<p>Na granicy stanów 3 i 4 oraz 3' i 4' <math>x_i = \frac{1 \pm \gamma}{1 + \beta_4}</math></p>	
<p>Uwaga: Stan 4a' występuje po stanie 3' gdy <math>\gamma &lt; \gamma_3' = 1 - \frac{1 + \beta_4}{1 + \beta_5} (2 - \eta_9)</math></p>	
<p>dla <math>x_i &gt; \frac{\eta_{9,d}}{1 - \beta_3}</math></p>	<p>dla <math>\frac{\eta_{9,d}}{1 + \beta_2} &lt; x_i &lt; \frac{\eta_{9,d}}{1 - \beta_3}</math></p>
<p>dla <math>x_i &lt; \frac{\eta_{9,d}}{1 + \beta_2}</math></p>	<p>dla <math>x_i &lt; \frac{\eta_{9,d}}{1 + \beta_2}</math></p>
<p>4<sub>4,2,3</sub> i 4'<sub>4,2,3</sub></p>	<p>4<sub>4,2,3</sub> i 4'<sub>4,2,3</sub></p>
<p>n = -2A x<sub>i</sub> + 2 f<sub>z</sub><sup>0,d</sup> α<sub>6</sub> + 2 f<sub>z</sub><sup>d,9</sup> α<sub>5</sub> + 2 f<sub>5</sub> α<sub>2</sub></p> <p>m = ± 4 f<sub>z</sub><sup>d,9</sup> α<sub>5</sub> γ<sub>a,9</sub> ± 4 f<sub>z</sub><sup>0,d</sup> α<sub>6</sub> γ<sub>a,9,d</sub> + 4 f<sub>5</sub> α<sub>2</sub> γ + 4 f<sub>5</sub> α<sub>2</sub> γ ± 4A x<sub>i</sub> ± 2B x<sub>i</sub><sup>2</sup></p>	<p>n = -2A x<sub>i</sub> + 2 f<sub>z</sub><sup>d,9</sup> α<sub>5</sub> + 2 f<sub>z</sub><sup>0,d</sup> α<sub>6</sub> + 2 f<sub>5</sub> α<sub>2</sub> - 2 f<sub>z</sub><sup>0,d</sup> α<sub>7</sub> η<sub>9,d</sub> <math>\frac{1}{x_i}</math></p> <p>m = ± 4 f<sub>z</sub><sup>d,9</sup> γ<sub>a,9</sub> α<sub>5</sub> ± 4 f<sub>z</sub><sup>0,d</sup> γ<sub>a,9,d</sub> α<sub>6</sub> + 4 f<sub>5</sub> α<sub>2</sub> γ + 4 f<sub>5</sub> α<sub>2</sub> γ ± 4 f<sub>z</sub><sup>0,d</sup> α<sub>7</sub> η<sub>9,d</sub> <math>\frac{\eta_{9,d}}{x_i}</math> - 4A x<sub>i</sub> ± 2B x<sub>i</sub><sup>2</sup></p>



Na granicy stanów  $6a_1$  i  $7a_1$  oraz  $6a_2$  i  $7a_2$   $x_i = 0$   
 Uwaga: Stany  $7a_2$  i  $7a_1$  istnieją jeżeli:  $\frac{\eta_{gd} - \beta_{11}(1 \pm \tau)}{1 - \beta_{11}} < 0$

dla  $\frac{d_5(1 \pm \tau) - d_{10}\eta_{gd}}{d_5 - d_{10}} < x_i < 0$

$n = 2f_z^d d_5 + 2f_z^d d_5 - 2f_z^d d_{10} \frac{x_i - \eta_{gd}}{1 \pm \tau - x_i}$   
 $m = \pm 4f_z^d d_5 \delta + 4f_z^d d_5 \delta \pm 4f_z^d d_{10} \delta \frac{x_i - \eta_{gd}}{1 \pm \tau - x_i}$

Na granicy stanów  $3'$  i  $4b'$   $x_d = \frac{2 - \eta^g}{1 + \beta_5}$   
 Uwaga: stan  $4b'$  wystąpi po stanie  $3'$  jeżeli  $\delta > \delta_3 = 1 - \frac{1 + \beta_4}{1 + \beta_5} (2 - \eta^g)$

dla  $x_d > \frac{(2 - \eta_g)\beta_5 + \eta_d}{\beta_5 + 1}$

$n = -2A_1 x_d + 2f_z^d d_6 + 2f_z^g d_5 + 2f_z^g \delta + 2f_z^g d_5 (2 - \eta_g) - x_d + \frac{1}{2} C$   
 $m = 4f_z^d d_6 \delta - 4f_z^g d_5 \delta + 4f_z^g \delta + 4f_z^g d_5 \delta \frac{(1 - \tau) - x_d}{(2 - \eta_g) - x_d} + C(1 + \frac{5}{3}) - 2[2A_1 + C(\frac{1}{2} + \frac{\beta_5}{3})] x_d + 2B_1 x_d^2$

$4b'_{4,2,3}$

dla  $\frac{(2 - \eta_g)\beta_5 - \eta_d}{\beta_5 - 1} < x_d < \frac{(2 - \eta_g)\beta_6 + \eta_d}{\beta_6 + 1}$

$n = -2A_1 x_d - 2f_z^d d_6 \frac{x_d - \eta_d}{2 - \eta_g - x_d} + 2f_z^g d_5 + 2f_z^g d_5 (2 - \eta_g) - x_d + \frac{1}{2} C$   
 $m = -4f_z^d d_6 \delta \frac{x_d - \eta_d}{2 - \eta_g - x_d} - 4f_z^g d_5 \delta + 4f_z^g \delta + 4f_z^g d_5 \delta \frac{(1 - \tau) - x_d}{(2 - \eta_g) - x_d} + C(1 + \frac{5}{3}) - 2[2A_1 + C(\frac{1}{2} + \frac{\beta_5}{3})] x_d + 2B_1 x_d^2$

dla  $x_d < \frac{(2 - \eta_g)\beta_7 - \eta_d}{\beta_7 - 1}$

$n = -2A_1 x_d + 2(f_z^d + f_z^g) d_5 + 2f_z^g \delta + 2f_z^g d_5 (2 - \eta_g) - x_d + \frac{1}{2} C$   
 $m = 4(f_z^d \delta - f_z^g \delta) d_5 + 4f_z^g \delta + 4f_z^g d_5 \delta \frac{(1 - \tau) - x_d}{(2 - \eta_g) - x_d} + C(1 + \frac{5}{3}) - 2[2A_1 + C(\frac{1}{2} + \frac{\beta_5}{3})] x_d + 2B_1 x_d^2$

Na granicy stanów 4 i 5b oraz 1a' i 5b'  $x_i = \frac{2 - \eta_{gd}}{1 + \beta_5}$ ; no granicy stanów 4b' i 5b'  $x_d = \frac{1 - \eta - (2 - \eta_2)/\beta_3}{1 - \beta_3}$

Uwaga: stan 5b wystąpi po stanie 4 jezeli  $\eta < \eta_4 = \frac{1 + \beta_2}{1 + \beta_5} (2 - \eta_2) - 1$ ; stan 5b' wystąpi po stanie 4b' gdy

$$\eta < \eta_{4b'} = 1 - \frac{\beta_2 + \beta_3}{\beta_2 + 1} (2 - \eta_3) \text{ oraz po stanie 3' gdy } \eta < \eta_3 = 1 - \frac{1 + \beta_0}{1 + \beta_5} (2 - \eta_1) \text{ i po stanie 4a' gdy } \eta > \eta_{4a'} = 1 - \frac{1 + \beta_0}{1 + \beta_5} (2 - \eta_3)$$

dla  $x_i > \frac{(2 - \eta_{2g})/\beta_5 - \eta_{gd}}{\beta_5 + 1}$

dla  $x_i < \frac{(2 - \eta_{2g})/\beta_3 + \eta_{gd}}{\beta_3 + 1}$

dla  $x_i < \frac{(2 - \eta_{2g})/\beta_7 - \eta_{gd}}{\beta_7 - 1}$

5b<sub>4,5</sub> i 5b'<sub>4,5</sub>

$$n = -2A_1 x_i + 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\eta_{gd}} d_5 + 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\eta_{gd}} d_6 + 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\eta_{gd}} d_7 + \frac{1}{2} C$$

$$m = \pm 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\eta_{gd}} d_5 \eta_{2g} \mp 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\eta_{gd}} d_6 \eta_{gd} + 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\eta_{gd}} d_7 \eta + 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\eta_{gd}} d_8 \eta + \mp C \left(1 + \frac{\beta_2}{3}\right) \pm 2 \left[ 2A_1 + C \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta_2}{3}\right) \right] x_i \mp 2B_1 x_i^2$$

$$n = -2A_1 x_i + 2 \left( \int_{\frac{1}{2}}^{\eta_{gd}} d_5 + \int_{\frac{1}{2}}^{\eta_{gd}} d_7 + 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\eta_{gd}} d_8 + \frac{1}{2} C \right)$$

$$m = 4 \left( \int_{\frac{1}{2}}^{\eta_{gd}} d_8 - 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\eta_{gd}} d_9 \right) d_5 + 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\eta_{gd}} d_7 + \mp C \left(1 + \frac{\beta_2}{3}\right) \pm 2 \left[ 2A_1 + C \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta_2}{3}\right) \right] x_i \mp 2B_1 x_i^2$$

Na granicy stanów 5b i 6b oraz 5b' i 6b'  $x_i = \frac{\beta_2 (2 - \eta_{2g})}{1 + \beta_2}$ ; no granicy stanów 5c i 6b'  $x_d = \frac{1 - \eta - (2 - \eta_2)/\beta_3}{1 - \beta_3}$

Uwaga: stan 6b wystąpi po stanie 5b dla  $x_2 > x_{2b} = \frac{1 + \eta - \beta_{23} (2 - \eta_2)}{1 - \beta_{23}}$  (dla  $x_2 < x_{2b}$  wystąpią stany 5a i 6a bądź 6b i 6a)

Stan 6b' wystąpi po stanie 5b' gdy  $\eta > \eta_{5b'} = 1 - \frac{\beta_2 + \beta_3 (2 - \eta_2)}{1 + \beta_5}$ ; po stanie 5c gdy  $\eta < \eta_{5c} = 1 - \beta_3 (2 - \eta_3)$ ; po stanie 4b'

$$\text{gdy } \eta = \eta_{4b'} = 1 - \frac{\beta_2 + \beta_3}{\beta_2 + 1} (2 - \eta_3)$$

dla  $x_i > \frac{(2 - \eta_{2g})/\beta_5 + \eta_{gd}}{\beta_5 + 1}$

dla  $x_i < \frac{(2 - \eta_{2g})/\beta_3 + \eta_{gd}}{\beta_3 + 1}$

dla  $x_i < \frac{(2 - \eta_{2g})/\beta_7 - \eta_{gd}}{\beta_7 - 1}$

oraz  $x_i \geq 0$



<p>6b<sub>2,3</sub> i 6b<sub>2,3,3</sub></p>	$n = 2f_{12}^{d_3} d_3 + 2f_{12}^{d_2} d_2 + 2f_{12}^{d_1} d_1 - \frac{x_1}{2\beta_2(2-\eta_2-x_1)}$ $m = 4f_{12}^{d_3} d_3 \gamma_{d_3} \pm 4f_{12}^{d_2} d_2 \gamma_{d_2} + 4f_{12}^{d_1} d_1 \gamma_{d_1} \pm \frac{x_1(1-\frac{1}{3}x_1)}{\beta_2(2-\eta_2-x_1)}$	$n = 2f_{12}^{d_3} d_3 - 2f_{12}^{d_2} d_2 - \frac{x_1 - \eta_2}{2\beta_2(2-\eta_2-x_1)} + 2f_{12}^{d_1} d_1 + \frac{x_1 - \eta_2}{2\beta_2(2-\eta_2-x_1)}$ $m = 4f_{12}^{d_3} d_3 \gamma_{d_3} \pm 4f_{12}^{d_2} d_2 \gamma_{d_2} + 4f_{12}^{d_1} d_1 \gamma_{d_1} + 4f_{12}^{d_1} d_1 \gamma_{d_1} \pm \frac{x_1(1-\frac{1}{3}x_1)}{\beta_2(2-\eta_2-x_1)}$	$n = 2(f_{12}^{d_3} + f_{12}^{d_2}) d_3 + 2f_{12}^{d_1} d_1 - \frac{x_1}{2\beta_2(2-\eta_2-x_1)}$ $m = 4(f_{12}^{d_3} d_3 - f_{12}^{d_2} d_2) d_3 + 4f_{12}^{d_1} d_1 \gamma_{d_1} \pm \frac{x_1(1-\frac{1}{3}x_1)}{\beta_2(2-\eta_2-x_1)}$
<p>7b<sub>2</sub> i 7b<sub>2</sub>'</p>	<p>No granicy stanów 6b<sub>2</sub> i 7b<sub>2</sub> oraz 6c<sub>2</sub> i 7b<sub>2</sub>'</p>	<p>No granicy stanów 7b<sub>2</sub> i 7b<sub>2</sub>'</p>	<p>7b<sub>2</sub> i 7b<sub>2</sub>'</p>
<p>5c<sub>2,3,3</sub></p>	<p>No granicy stanów 4b' i 5c' x<sub>d</sub> = 1 + β<sub>6</sub></p>	<p>dla <math>\frac{d_5(2-\eta_5) - d_5 \eta_{gd}}{d_5 - d_5} &lt; x_i &lt; 0</math></p> $n = 2f_{12}^{d_5} d_5 + 2f_{12}^{d_2} d_2 - 2f_{12}^{d_1} d_1 - \frac{x_1 - \eta_{gd}}{2-\eta_5 - x_i}$ $m = 4f_{12}^{d_5} d_5 \gamma_{d_5} + 4f_{12}^{d_2} d_2 \gamma_{d_2} \pm 4f_{12}^{d_1} d_1 \gamma_{d_1} \pm \frac{x_1 - \eta_{gd}}{2-\eta_5 - x_i}$	<p>dla <math>\frac{d_5(2-\eta_5) - d_5 \eta_{gd}}{d_5 - d_5} &lt; x_i &lt; 0</math></p> $n = 2f_{12}^{d_5} d_5 + 2f_{12}^{d_2} d_2 - 2f_{12}^{d_1} d_1 - \frac{x_1 - \eta_{gd}}{2-\eta_5 - x_i}$ $m = 4f_{12}^{d_5} d_5 \gamma_{d_5} + 4f_{12}^{d_2} d_2 \gamma_{d_2} \pm 4f_{12}^{d_1} d_1 \gamma_{d_1} \pm \frac{x_1 - \eta_{gd}}{2-\eta_5 - x_i}$
<p>5c<sub>2,3,3</sub></p>	<p>dla <math>x_d &gt; \frac{(2-\eta_1)\beta_2 + \eta_d}{\beta_2 + 1}</math></p> $n = 2f_{12}^{d_5} d_5 + 2f_{12}^{d_2} d_2 + 2f_{12}^{d_1} d_1 - \frac{1-x-x_d}{2-\eta_3-x_d} + \frac{1-x-x_d}{2\beta_2(2-\eta_3-x_d)}$ $m = 4f_{12}^{d_5} d_5 \gamma_{d_5} - 4f_{12}^{d_2} d_2 \gamma_{d_2} + 4f_{12}^{d_1} d_1 \gamma_{d_1} + 4f_{12}^{d_1} d_1 \gamma_{d_1} + \frac{1-x-x_d}{\beta_2(2-\eta_3-x_d)}$	<p>dla <math>x_d &lt; \frac{(2-\eta_1)\beta_2 + \eta_d}{\beta_2 + 1}</math></p> $n = -2f_{12}^{d_5} d_5 - 2f_{12}^{d_2} d_2 - \frac{x_d}{2\beta_2(2-\eta_3-x_d)} + 2f_{12}^{d_1} d_1 + 2f_{12}^{d_1} d_1$ $m = -4f_{12}^{d_5} d_5 \gamma_{d_5} - 4f_{12}^{d_2} d_2 \gamma_{d_2} - \frac{x_d}{2-\eta_3-x_d} - 4f_{12}^{d_1} d_1 \gamma_{d_1} + 4f_{12}^{d_1} d_1 \gamma_{d_1} + \frac{1-x-x_d}{\beta_2(2-\eta_3-x_d)}$	<p>dla <math>x_d &lt; \frac{(2-\eta_1)\beta_2 + \eta_d}{\beta_2 + 1}</math> oraz <math>x_d &gt; 0</math></p> $n = 2(f_{12}^{d_5} + f_{12}^{d_2}) d_5 + 2f_{12}^{d_1} d_1 + 2f_{12}^{d_1} d_1 - \frac{1-x-x_d}{2-\eta_3-x_d} + \frac{1-x-x_d}{2\beta_2(2-\eta_3-x_d)}$ $m = 4(f_{12}^{d_5} d_5 - f_{12}^{d_2} d_2) \gamma_{d_5} + 4f_{12}^{d_1} d_1 \gamma_{d_1} + 4f_{12}^{d_1} d_1 \gamma_{d_1} + \frac{1-x-x_d}{\beta_2(2-\eta_3-x_d)}$

<p>Na granicy stanów <math>5c'</math> i <math>6c'</math> <math>x_d = 0</math>. Uwaga: Stan <math>6c'</math> występuje po stanie <math>5c'</math> gdy <math>x &gt; x_{5c'} = 1 - \beta_9 (2 - \eta_9)</math>.</p>	<p>dla <math>\frac{(\alpha_2 - \rho)(2 - \eta_9) - (1 - \gamma)\alpha_8}{\alpha_2 - \rho - \alpha_8} &lt; x_d &lt; \frac{(2 - \eta_9)\beta_2 - \eta_d}{\beta_2 - 1}</math></p>	<p>dla <math>\frac{(\alpha_2 - \rho)(2 - \eta_9) - (1 - \gamma)\alpha_8}{\alpha_2 - \rho - \alpha_8} &lt; x_d &lt; 0</math>          oraz <math>x_d &gt; \frac{(\alpha_2 - \rho)(2 - \eta_9) - (1 - \gamma)\alpha_8}{\alpha_2 - \rho - \alpha_8}</math></p>	<p>Po stanie <math>6c'_2</math> wystąpi stan <math>7b'_2</math> jeżeli <math>\frac{(2 - \eta_9)\beta_2 - \eta_d}{\beta_2 - 1} &lt; \frac{(\alpha_2 - \rho)(2 - \eta_9) - (1 - \gamma)\alpha_8}{\alpha_2 - \rho - \alpha_8}</math></p>
<p><math>6c'_{2,3}</math></p>	<p><math>n = 2 \left( f_x^d + f_x^g \right) \alpha_5 + 2 f_y \rho + 2 f_z \alpha_4 \frac{x_d - \eta_4}{2 - \eta_9 - x_d} + 2 f_x \alpha_5 + 2 f_y \rho + 2 f_z \alpha_4 \frac{1 - \gamma - x_d}{2 - \eta_9 - x_d}</math></p>	<p><math>n = 2 \left( f_x^d + f_x^g \right) \alpha_5 + 2 f_y \rho + 2 f_z \alpha_4 \frac{1 - \gamma - x_d}{2 - \eta_9 - x_d}</math></p>	<p><math>m = 4 \left( f_x^d \alpha_8 - f_z \alpha_8 \right) \alpha_5 + 4 f_y \rho \delta + 4 f_x \alpha_8 \delta \frac{1 - \gamma - x_d}{2 - \eta_9 - x_d}</math></p>
	<p><math>m = -4 f_x^d \alpha_8 \alpha_4 \frac{x_d - \eta_4}{2 - \eta_9 - x_d} - 4 f_x^g \alpha_3 \alpha_3 + 4 f_y \rho \delta + 4 f_x \alpha_8 \delta \frac{1 - \gamma - x_d}{2 - \eta_9 - x_d}</math></p>		

Hipoteza naprężeniowa zniszczenia przekroju.  
Związki między niszczącymi wartościami siły podłużnej  $N$  i momentu zginającego  $M$ .

Tablica D

Zależności graniczne między spowodowaną siłą podłużną  $n = \frac{2N}{|R_m|h}$  i spowodowanym momentem zginającym

$$m = \frac{8M}{|R_m|^2}$$

Stan zniszczenia przekroju

Uwaga: Stanom 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 zniszczenia przekroju odpowiadają  $\alpha_g$  i znaki górne we wzorach, stanom 1', 2', 3', 4', 5', 6' i 7' zniszczenia przekroju odpowiadają  $\alpha_d$  i znaki dolne. Ponadto pierwszy z podanych indeksów (d, g), występujących przy  $f_z$  i  $\gamma$  odnosi się do stanów 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, drugi do stanów 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7'.

Na granicy stanów 1 i 1'  $n = 2(f_z^g + f_z^d)\alpha_c + 2kf_3\alpha_2 - 2$ .

$$m = \pm 4f_z^d\alpha_c(1 \pm \gamma_d) \pm 4f_z^g\alpha_c(1 \pm \gamma_g) \pm 4kf_3\alpha_2(1 \pm \gamma) \pm [2(f_z^g + f_z^d)\alpha_c + 2kf_3\alpha_2]^2 \pm 2[2(f_z^g + f_z^d)\alpha_c + 2kf_3\alpha_2 - 1]n \mp n^2$$

1 i 1'

Na granicy stanów 1 i 2 oraz 1' i 2'  $n = 2(f_z^g + f_z^d)\alpha_c + 2kf_0\alpha_2 - (1 + \gamma_{g,d})$

$$m = \mp 4f_z^{g,d}\alpha_c(\gamma_{g,d} + \gamma_{a,g}) + 4kf_0\alpha_2(\gamma \mp \gamma_{a,g}) \pm (1 + \gamma_{d,g})^2 \pm 2\gamma_{a,g}n$$

2 i 2'

Na granicy stanów 2 i 3 oraz 2' i 3'  $n = 2f_z^{g,d}\alpha_c + 2f_z^{d,g}\alpha_5 + 2kf_5\alpha_2 - (1 + \gamma_{g,d})$

$$m = \pm 4f_z^{d,g}\alpha_5(1 + \gamma_{d,g}) \pm 4f_z^{g,d}\alpha_c(1 - \gamma_{g,d}) \pm 4kf_5\alpha_2(1 \pm \gamma) \pm (2f_z^{g,d}\alpha_c + 2f_z^{d,g}\alpha_5 + 2kf_5\alpha_2)^2 \pm 2[2f_z^{g,d}\alpha_c + 2f_z^{d,g}\alpha_5 + 2kf_5\alpha_2 - 1]n \mp n^2$$

3 i 3'

Na granicy stanów 3 i 4 oraz 3' i 4'  $n = 2f_z^{g,d} \alpha_6 + 2f_z^{d,g} \alpha_5 + 2kf_s \alpha_2 - (1 \pm \gamma)$ .

4 i 4'  $m = \pm 4f_z^{d,g} \alpha_5 (f_{d,g} \mp \gamma) \mp 4f_z^{g,d} \alpha_6 (V_{g,d} \pm \gamma) \pm (1 \pm \gamma)^2 + 2\gamma n$

Na granicy stanów 4 i 5 oraz 4' i 5'  $n = 2f_z^{g,d} \alpha_6 + 2f_z^{d,g} \alpha_5 + 2f_s \alpha_2 - (1 \pm \gamma)$ .

5 i 5'  $m = \pm 4f_z^{d,g} \alpha_5 (1 + V_{d,g}) \pm 4f_z^{g,d} \alpha_6 (1 - V_{g,d}) \pm 4f_s \alpha_2 (1 \pm \gamma) \mp [2f_z^{g,d} \alpha_6 + 2f_z^{d,g} \alpha_5 + 2f_s \alpha_2]^2 \pm \pm 2(2f_z^{g,d} \alpha_6 + 2f_z^{d,g} \alpha_5 + 2f_s \alpha_2 - 1)n \mp n^2$

Na granicy stanów 5 i 6 oraz 5' i 6'  $n = 2f_z^{g,d} \alpha_6 + 2f_z^{d,g} \alpha_5 + 2f_s \alpha_2 - (1 - V_{g,d})$ .

6 i 6'  $m = \pm 4f_z^{d,g} \alpha_5 (V_{d,g} + V_{g,d}) + 4f_s \alpha_2 (\gamma \pm V_{g,d}) \pm (1 - V_{g,d})^2 \mp 2V_{g,d} n$

Na granicy stanów 6 i 7 oraz 6' i 7'  $n = 2(f_z^g + f_z^d) \alpha_5 + 2f_s \alpha_2 - (1 - V_{g,d})$

7 i 7'  $m = \pm 4f_z^{d,g} \alpha_5 (1 \pm V_d) \pm 4f_z^g \alpha_5 (1 + V_g) \pm 4f_s \alpha_2 (1 \pm \gamma) \mp [2(f_z^g + f_z^d) \alpha_5 + 2f_s \alpha_2]^2 \pm \pm 2[2(f_z^g + f_z^d) \alpha_5 + 2f_s \alpha_2 - 1]n \mp n^2$

Na granicy stanów 7 i 7'  $n = 2(f_z^g + f_z^d) \alpha_5 + 2f_s \alpha_2$ .

ZALĄCZNIK 3

Równania prostych aproksymujących brzeg obszaru  $\Omega$ .

A. Występujące w p.2.7, w pracy [75] oraz w tabelicy E oznaczenia.

- H - wysokość ramy
- l - rozpiętość ryglu ramy
- P - wypadkowa obciążenia znajdującego się na połowie ryglu ramy
- c - odległość P od osi słupa
- $b_r, h_r$  - szerokość i wysokość przekroju betonowego ryglu
- $b_s, h_s$  - szerokość i wysokość przekroju betonowego słupa
- e - mimośród zbrojenia sprężającego
- $F_{sr}$  - przekrój zbrojenia sprężającego ryglu
- $F_{ss}$  - przekrój zbrojenia sprężającego każdy ze słupów
- $\sigma_s^w$  - naprężenie wstępne w zbrojeniu sprężającym po uwzględnieniu strat spowodowanych siłami tarcia
- $\sigma_{sdop}$  - naprężenie dopuszczalne w zbrojeniu sprężającym
- $Q_{cb}$  - naprężenia ścisające w betonie na umownej granicy plastyczności
- $R_w$  - wytrzymałość walcowa betonu
- $R_r$  - wytrzymałość stali sprężającej
- $Q_{rs}$  - umowna granica plastyczności stali sprężającej przy rozciąganiu
- $\epsilon_{bo}, \epsilon_{bgr}$  - graniczne sprężyste i graniczne maksymalne odkształcenie jednostkowe betonu
- $\epsilon_{so}, \epsilon_{sgr}$  - graniczne sprężyste i graniczne maksymalne odkształcenie jednostkowe stali sprężającej
- $S^w = \sigma_s^w F_s$  - siła sprężenia wstępnego
- M, N - moment zginający i siła podłużna w przekroju ramy /na brzegu obszaru  $\Omega$  są to moment i siła powodujące wspólnie zniszczenia przekroju/.

$$\gamma = \frac{e}{\frac{h}{2}}, \quad f_{ss} = \frac{F_{ss}}{b_s h_s}, \quad f_{sr} = \frac{F_{sr}}{b_r h_r}, \quad \rho = \frac{\sigma_s^M}{Q_{cb}}$$

$$\rho_{dop} = \frac{\bar{\sigma}_{s dop}}{Q_{cb}}, \quad \beta = \frac{E_{bo}}{E_{bgr}}, \quad \alpha_1 = \frac{E_{bgr} E_s}{Q_{cb}}, \quad \alpha_2 = \frac{Q_{rs}}{Q_{cb}},$$

$$A = 0,5(1 - 0,5\beta), \quad B = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{6} - \frac{1}{2}, \quad p = \frac{p_{gr}}{Q_{cb} b_r h_r},$$

$$r = \frac{R}{Q_{cb} b_r h_r}, \quad \varphi_1 = \frac{b_r}{b_s}, \quad \varphi_2 = \frac{h_r}{h_s},$$

w ryglu:

$$m = \frac{4M}{Q_{cb} b_r h_r^2} \quad ; \quad n = \frac{N}{Q_{cb} b_r h_r},$$

w słupach:

$$m = \frac{4M}{Q_{cb} b_s h_s^2} \quad ; \quad n = \frac{N}{Q_{cb} b_s h_s}.$$

B. Aproxymacja zestawionych w tabelicy B równań brzegu obszaru odcinkami prostych.

Tabela B

Równania prostych aproksymujących oraz współrzędne wierzchołków wieloboku  $\Omega$

Br. pos.	Opiszenia prostych i wierzchołków zgodnie z rys. 2	Wzrostające wartości sprężonej siły podłużnej i sprężonego momentu zginającego $n = \frac{N}{Q_{cb} b h}$ $m = \frac{4M}{Q_{cb} b h^2}$ Uwagi: Cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6 odpowiadają znakom górne w wsczech, cyfry 1', 2', 3', 4', 5', 6' - znaki dolne
1	1, 1'	$\mu = 1 + \alpha_2 f_0$ $m = -2\alpha_2 f_0 \delta$
2	1-2, 1'-2'	$m = \mp (4,5 \pm 0,5\delta) n \pm (4,5 \pm 0,5\delta) \pm 4,5\alpha_2 f_0 (1 \mp \delta)$
3	2, 2'	$n = 0,25(3 \pm \delta) + \alpha_2 f_0$ $m = \pm 0,25(4,5 \pm 0,5\delta)(1 \mp \delta) - 2\alpha_2 f_0 \delta$
4	2-3, 2'-3'	$m = \mp (0,5 \pm 1,5\delta) n \pm 0,25(3 \pm \delta)(1 \pm \delta) \pm 0,5\alpha_2 f_0 (1 \mp \delta)$
5	3, 3'	$n = \alpha_2 f_0 + 0,5(1 \pm \delta)$ $m = -2\alpha_2 f_0 \delta \pm 0,5(1 - \delta^2)$
6	3-4, 3'-4'	$m = \pm 0,5(1 \pm \delta)^2 - 2\delta n$
7	4, 4'	$n = -\alpha_2 f_0 + 0,5(1 \pm \delta)$ $m = 2\alpha_2 f_0 \delta \pm 0,5(1 - \delta^2)$
8	4-5, 4'-5'	$m = \pm (0,5 \mp 1,5\delta) n \pm (0,5 \pm 0,5\delta)^2 \pm 0,5\alpha_2 f_0 (1 \pm \delta)$
9	5, 5'	$n = 0,25(1 \pm \delta) - \alpha_2 f_0$ $m = \pm 0,5(1 \pm \delta) \mp 0,125(1 \pm \delta)^2 + 2\alpha_2 f_0 \delta$
10	5-6, 5'-6'	$m = \pm (4,5 \mp 0,5\delta) n \pm 4,5\alpha_2 f_0 (1 \pm \delta)$
11	6, 6'	$n = -\alpha_2 f_0$ $m = 2\alpha_2 f_0 \delta$

Bibliografia

1. Askari M.R. "Analyse limite des réseaux de poutres croisées en négligeant l'effet de torsion". Construction métallique. Puteaux, 4. 1973.
2. Baker A.L.L. "The ultimate - load theory applied to design of reinforced and prestressed concrete beams". London, 1956.
3. Baker J.F., Horne M.R., Heyman J. "The steel skeleton". Vol.2. Plastic behaviour and design. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1956.
4. Beadle L.S. "Plastic design of steel frames", Wiley, New York, 1958.
5. Bleich H. "Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes" Bauingenieur 19-20, 1932.
6. Bleich F. "Dimensionnement des systèmes hyperstatiques d'après la théorie de la plasticité AIPC". Deuxième Congrès, Berlin 1936.
7. Boni B., Kleiber M. "Limit analysis of plane bending-and-torque supporting grids" Arch.Inż.Łąd. - Tom XX1, 1/1975.
8. Boni B., Kleiber M. "Numerical plastic collapse analysis of plane bending-and-torque supporting grids" Computer methods in applied mechanism and engineering. 19, 1979, North-Holland Publishing Company.
9. Borkowski A., Sawczuk A. "Nośność graniczna i optymalizacja plastycznych konstrukcji prętowych" Mechanika budo li. Ujęcie komputerowe. Makieta - Rozdział 6. Warszawa 1977.
10. Brakel J., "Classification of limit states". Structural Design of Tall Concrete and Masonry Buildings. Limit States Design. ASCE-IABSE International Conference Preprints; Reports Vol. III-26. 1972.
11. Brzeziński R., König J.A. "Obliczanie ram wg teorii adaptacji". Prace IPPT 6/1973.

12. Bulletin d information N° 124/125-F. Comité Euro-international du béton. Avril 1978. 3<sup>e</sup> Édition des recommandations internationales CEB-FIB.
13. CECM /ECCS/ European Recommendations for Steel Constructions, Vol. I,II,III. 1-st Ed.1975/Rev. Dec 1975/
14. Ciampi V., Gavarini C., "Optimal choice of plastic parameters for systems in conditions of static or dynamic shakedown. XXth Polish Solid Mechanics Conference. Sept. 1978.
15. Cziras A.A. "Metody liniejnogo programmirowanija pri rasczotie uprugo - płaściczeskich sistem." Lit. Stroj., Leningrad 1969.
16. Dietrich M., Miastkowski J., Szczepiński W. "Nośność graniczna elementów konstrukcji". PWN, Warszawa 1970.
17. Dorosz St. "Metoda szacowania ugięć konstrukcji sprężysto-plastycznych w stanie przystosowania". Prace IPPT,65/1977.
18. Dorosz St., "Calculo de desplazamientos de estructuras elastoplasticas". Instituto de Ingenieria. Universidad Nacional Autonoma de Mexico. Julio 1980, 425.
19. Drucker D.C., Prager W., Greenberg J.H. "Extended limit design theorems for continuos media". Quat. Appl. Math., 9, 1952, 381.
20. Dyrbye C. "Kontinuerlige elasto-plastiske bjaelker med gentagne, overkorende belastinger". Polyteknisk Forlag, Kobenhavn 1969.
21. Eimer Cz. "O podstawach teoretycznych projektowania przekrojów sprężonych". Arch. Inż. Łąd. XIV, 1, 1968.
22. Eyre D.G., Galambos T.V. "Shakedown tests on steel bars and beams". Vol. 96, N° St 7. July 1970. J. Struct.Div., ASCE.
23. Eyre D.G., Galambos T.V. "Shakedown of grids" J.Struct. Div., ASCE., Vol 99, No ST10, October, 1973.
24. Gokhfeld D.A. "Niekotoryje zadaczy teoriii prisposobliajemości płastin i obożoczek". Trudy VI Wsiesojuz. Konf, Płastin i Obożoczek, Baku 1966, Izd. Nauka, Moskwa 1966.



25. Gokhfeld D.A. "Niesuszczajaja sposobnost konstrukcji w usłowiach tieplosmen. Maszynostrojenie". Moskwa 1970.
26. Grundy P. "Shakedown under Moving Loads". Civil Eng. Trans. CE 13, 1971.
27. Grundy P., Spencer W.J. "Shakedown of elastoplastic grids". Fifth Australasian Conference on the Mechanics of structures and Materials, Melbourne, 1975.
28. Gröning M. "Die Tragfähigkeit statisch unbestimmten Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung" Springer. Berlin 1926.
29. Guyon Y. "Etude sur les poutres continues et sur certains systèmes hyperstatiques en béton précontraint". Ann. ITBTP 1945, N° 8 Paris.
30. Guyon Y. "Béton précontraint" t.1,2 Eyrolles. Paris 1958.
31. Gwozdiew A.A. "Teorijsa priedielnogo rawnowiesija". Strojisdat. Moskwa 1949
32. Heyman J. "The limit design of a transversely loaded square grid". Journ. Appl. Mech. 19, 1952.
33. Heyman J., "Plastic design of portal frames" Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1957.
34. Heyman J., Johnson R.P., Fowler P.P., Gillson I.P. "Shakedown analysis of the desing of a 275 kV switchhouse" The Structural Engineer, 46, 1968. N° 4.
35. Heyman J. "Plastic design of frames" Vol.2, Applications, Cambridge University Press, Cambridge 1971.
36. Heyman J. "Beams and framed structures". Structures and solid body mechanics. Pergamon Press. Oxford-New York-Toronto-Sydney. 1974.
37. Hodge P.G. "Elastic Analysis of Structures". NYork, 1959.
38. Horne M.R. "A moment distribution method for the analysis and design of structures by the plastic theory". Proc. Inst.Civil Engrs., London vol.3, part 3, 1954.

39. Institution Research Committee ., "Ultimate load design of concrete structures". The Institution of Civil Engineers, London 1962.
40. ISO 2394/1973/E/., General principles for the verification of the safety of structures.
41. Jackson N., "Plastic analysis of transversely loaded frames: ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 97.No.St. 8. Aug. 1971.
42. Janas M., "Nośność graniczna łuków i sklepień". Arkady, Warszawa, 1967.
43. Kato B., Akiyama H. "Inelastic bar subjected to thrust and cyclic bending". J.Struct.Div. ASCE, 95, ST 1, 1969.
44. Kaufman S., Olszak W. Bimer Cz. "Konstrukcje sprężone". Arkady. Warszawa 1965.
45. Koiter W.T. "A new general theorem on shakedown of elastic - plastic structures". Proc. Kon. Nederl. Akad.Wet. B,59.1956,24.
46. Konieczny L. "Teoria przystosowania się belek" Mech.Teoret. i Stos. 8, 1970.
47. König J.A. "Zagadnienia teorii dostosowania się konstrukcji sprężysto-plastycznych". IPPT PAN, 1965 /praca doktorska/.
48. König J.A. "Podstawowe twierdzenia z zakresu teorii dostosowania się konstrukcji sprężysto-plastycznych do obciążeń zmiennych w czasie". Mech. Teoret. i Stos. 8, 1970.
49. König J.A. "A method of shakedown analysis of frames and arches". Int. J. Solids and Structs. 7, 1971.
50. König J.A. "Shakedown deflections. A finite element approach". Bulg.Ac.Sci.Theor.Appl.Mechs. III nr 2, 1972.
51. König J.A. "Projektowanie konstrukcji sprężysto-plastycznych przy obciążeniach zmiennych". Prace IPPT PAN, 24/1974.
52. König J.A., Sawczuk A. Paprocka-Grabczyńska W. "Obliczenie ram i belek na przystosowanie". Zeszyty problemowe "Mostostalu". 5/1974.
53. Kowal Z. i inni "Deflections of elastic-plastic hyperstatic beams under cyclic loading". Rozp.Łuż. W druku.
54. Levi F. "Application of limit states design to tall buildings". Structural Design of Tall Concrete and Masonry Buildings. Limit States Design. ASCE - IABSE International Conference Preprints: Reports Vol. III-26. 1972.
55. Maier G. "Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and non - associated flow-laws ". Meccanica, 6/1969.
56. Maier G. "A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects". Int. Symp. Found. Plasticity, Warszawa 1972.
57. Massonet C.E., Save M.A. "Plastic analysis and design". Vol. 1. Beams and frames. Blaisdell Publ. Co. 1968.

58. Massonet C., Save M. "Calcul plastique des constructions. I. Ossatures planes". Bruxelles 1961.
59. Melan E. "Die Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal plastischen Baustoff". S.B.Akad.Wiss.Wien Abt.IIa 145, 1936.
60. Miller C.A., Guralnick S.A. "Reinforced concrete beams subjected to repeated loads". J. Struct.Div. Vol.93 No. St.5. Oct. 1967.
61. Mróz Z. "The load - carrying capacity of orthotropic shells". Arch. Mech. Stos., 12, 1960.
62. Mutermilch J., Olszewski E., Łubiński M. "Wymiarowanie konstrukcji stalowych. Nowe metody". Budownictwo i Architektura, Warszawa, 1956.
63. Neal B.G. "The behaviour of framed structures under repeated loading". Quart J.Mech.Appl. Math. 4.78, 1951.
64. Neal B.G. "The plastic methods of structural analysis". Chapman and Hall. London 1956.
65. Neal B.G., Symonds P.S. "The rapid calculation of plastic collapse load for a framed structures". Proc. Inst. Civil Engrs. London, 1/3/, 1952.
66. Neal B.G., Symonds P.S. "Cyclic loading of portal frames. Theory and tests. Publ. IAESSE, 18, 1958.
67. "Obliczanie konstrukcji żelbetowych i sprężonych metodą stanów granicznych wg PN-76/B-09264". Praca zbiorowa. Arkady. Warszawa 1976.
68. Olszak W., Kaufman S., Eimer Cz., Pychawski Z. "Teoria konstrukcji sprężonych". PWN, Warszawa 1961.
69. Olszak W., Sawczuk A. "Teoria nośności granicznej płyt w świetle weryfikacji doświadczalnej". Rozpr. Inżyn., 2, 1955; Bull. Acad.Polon. Sci., 4, 1955.
70. Onat E.T., Prager W. "Limit analysis of arches". Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 1, 1953.
71. Paprocka-Grabczyńska W. "Studium pracy dwuprzegubowej ramy wstępnie sprężonej" Inż. i Bud. 3, 1959.
72. Paprocka-Grabczyńska W. "Podstawy projektowania jednonawowych sprężonych ram wielopiętrowych". Rozpr. Inż. 1, 13, 1965.
73. Paprocka-Grabczyńska W. "Analiza stanu granicznego przekroju kablobetonowego. Arch.Inż.Ląd.Tom. XVII Z. 1/1971.
74. Paprocka-Grabczyńska W. "Nośność graniczna przekroju kablobetonowego. Podstawy Projektowania. Arch. Inż. Ląd. Tom XVII, Z. 3/1971.
75. Paprocka-Grabczyńska W. "Z zagadnień nośności granicznej hiperstatycznych konstrukcji sprężonych". Prace IPPT 33/1972.
76. Paprocka-Grabczyńska W. "A method of statical analysis of multi-storey frames under construction. Application to the design of prestressed frames" Proceedings of the Regional Conference of Planning and Design of Tall Buildings. Warsaw, Poland, November 1972.

77. Paprocka-Grabczyńska W. "On the optimum design of posttensioned concrete bars" Symposium on plastic analysis of structures. Jasi, 6-8 September, 1972, Romania.
78. Paprocka-Grabczyńska W. "Wpływ wielkości wstępnej siły sprężającej na nośność graniczną elementów kablobetonowych". Prace IPPT, 35/1973.
79. Paprocka-Grabczyńska W. "Stany graniczne przekroju kablobetonowego zbrojonego stalą miękką". Prace IPPT, 40/1975.
80. Paprocka-Grabczyńska W., König J.A. "On the shakedown of tall buildings" Planning and design of tall buildings, Regional Conference, Bratislava, 1973.
81. Paprocka-Garlicka W. "Nośność belek ciągłych przy obciążeniach zmiennych" Prace IPPT, 29/1975.
82. Paprocka-Garlicka W., König J.A. "Projektowanie metodami plastyczności belek ciągłych poddanych obciążeniom wielokrotnym". Inż. i Bud. 4, 1979.
83. Paprocka-Garlicka W. "Stany graniczne ram portalowych poddanych obciążeniom zmiennym" Inż. i Bud. 6, 1978.
84. Paprocka-Garlicka W. "Zasady i metoda projektowania sprężysto-plastycznych belek ciągłych poddanych obciążeniom ruchomym". Rozp. Inż., 27, 4, 1979.
85. Paprocka-Garlicka W. "Analiza wytrzymałości poddanej działaniu obciążenia ruchomego stalowej belki ciągłej na podporze sprężystej". Prace IPPT, 7/1982.
86. Paprocka-Garlicka W. "Przystosowanie belek ciągłych obciążonych grupami sił skupionych". Prace IPPT, 4/1982.
87. Paprocka-Garlicka W. "Analiza stanów granicznych nośności sprężysto-plastycznych rusztów". /W przygotowaniu do druku/.
88. Pietrzykowski J. "O belce sprężonej w fazie odkształceń sprężysto-plastycznych przed zarysowaniem". Rozp. Inż. 3, 1961.
89. PK-80/B-03200. Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.
90. PK-76/B-03264. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie.
91. Popov E.P., Mc Carthey R.E. "Deflection stability of frames under repeated loading". J.Eng.Mech. Div. 86, 1960.
92. Prager W. "General theory of limit design". Proc. 8th Intern. Congr. Appl. Mech. /Istambul 1952/, Istambul 1956, 2.
93. Projektowanie konstrukcji stalowych. Komentarz do normy PK-76/B-03200." Praca zbiorowa "Bistyp" i "Mostostal", Warszawa, grudzień 1976.
94. Radejowska-Iwanowska B. "Nośność graniczna sprężonych stalowych belek pełnościennych pracujących w obszarze sprężysto-plastycznym". Praca doktorska. Warszawa 1975.
95. "Recommandations internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton". Bulletin d'Information No 72, Comité Européen du Béton. VI Congrès de la FIP, Prague, Juin 1970.

96. Rühsh H. "Erläuterungen zur DIN 4227, Spannbeton, Richtlinien für die Bemessung und Ausführung". Fassung Oktober 1953.
97. RWPG/ST 242-72 "Osnownyje położenija po nasczotu stroitielnych konstrukcj.
98. RWPG/ST-76-74. Bietonnyje i żelezobietonnyje konstrukcij. Osnownyje położenija projektirowanija.
99. Pozenblum W.I. "K teorii prisposoblajemnosti uprogo-plastycznych tież". Izv.Ak.Nauk SSSR. OTN.Mech.Masz. No 6, 1958.
100. Rżanicyn A.R. "Rasczot sooruzenij s uczetom plasticzeskich swoistw materiałow" Gosstrojizdat, Moskwa 1954.
101. Save M. "Introduction au calcul plastique de constructions". Technique et Humanisme, 4, 1958-1959.
102. Sawczuk A., Olszak W., "A method of limit analysis of reinforced concrete tanks. Simplified calculation methods of shell structures". /Proc. Col. Simp. Cal. Met. Brussels, September 4-6, 1961/, North-Holland, Amsterdam 1962.
103. Sawczuk A., König J.A. "Analiza stanu zniszczenia walcowych silosów żelbetowych". Arch.Inż. Łąd. , 8, 1962.
104. Sawczuk A. "Nośność graniczna ram płaskich". Biblioteka Inżynierii i Budownictwa, Warszawa, 1964.
105. Sawczuk A. "On incremental collapse of shells under cyclic loading". Proc. IUTAM Sym. Kopenhagen 1967, Theory of Thin Shells. Springer Verlag, 1969.
106. Sawczuk A., M.Janas, König J.A. "Analiza plastyczna konstrukcji". Ossolineum, Wrocław-Warszawa-Kraków-Gdańsk. 1972.
107. Sawczuk A. Duszek M., Zawidzki J. "Zagadnienia analizy plastycznej konstrukcji metalowych". Zeszyty problemowe "Mostostalu" Nr. 4, 1973.
108. Stüssi F., Kollbrunner C.F. "Beitrag zum Traglastverfahren". Bautechnik 13, 1935, 264.
109. "Teoria plastyczności . Praca zbiorowa pod red W.Olszaka, P.Perzyny i A.Sawczuka. PWN, Warszawa 1956.
110. Wood R.H. "Plastic and elastic design of slabs and plates". London 1961.
111. Życzkowski M. "Obciążenia złożone w teorii plastyczności". PWN, Warszawa 1973.

Spis treści

s.

Wprowadzenie	3
1. Podstawy analizy plastycznej konstrukcji prętowych. Tematyka i cel przedstawionych rozwiązań.	
1.1. Uwagi wstępne . . . . .	8
1.2. Metoda stanów granicznych obliczania konstrukcji. Przepisy norm polskich . . . . .	11
1.3. Rozpatrywane ustroje. Przyjęte założenia. Mechanizmy zniszczenia . . . . .	14
1.4. Tematyka i cel przedstawionych rozwiązań. Osiągnięte wyniki . . . . .	25
1.5. Konstrukcje z naprężeniami wstępnymi wywołanymi sprężeniem . . . . .	29
1.6. Konstrukcje z naprężeniami wstępnymi wywołanymi działaniem obciążeń wielokrotnie zmien- nych . . . . .	39
2. Analiza nośności i rozwiązanie problemu optymalnego projektowania kablobetonowych przekrojów prostokątnych poddanych działaniu obciążeń stałych w postaci sił podłużnych i momentów zginających przy uwzględnieniu ograniczonej odkształcalności plastycznej materiału. Nośność kablobetonowych ram portalowych.	
2.1. Założenia i twierdzenia teorii nośności granicznej . . . . .	48
2.2. Kryterium odkształceniowe zniszczenia przekroju oparte na modelu ciała idealnie sprężysto - plastycznym z ograniczoną odkształcalnością. Obszary $\Omega_{\xi}$ zawierające nieniszczące wartości sił podłużnych i momentów zginających wyznaczone dla kablobetonowych przekrojów prostokątnych	51

2.3.	Analiza wpływu uwzględnienia ograniczonej odkształcalności plastycznej materiałów na spadek nośności przekrojów kablobetowych w stosunku do nośności "idealnej" . . . . .	58
2.4.	Wklęsłość krzywej ograniczającej obszar $\Omega_{\xi}$	64
2.5.	Analiza wpływu wstępnego sprężenia na podwyższenie nośności kablobetonowych przekrojów prostokątnych . . . . .	65
2.6.	Rozwiązanie problemu optymalnego projektowania na minimum zbrojenia sprężającego kablobetonowego przekroju prostokątnego przy zadanym w postaci obszaru $\Omega_{\xi}$ zmienności sił podłużnych i momentów zginających obciążeniu . . . . .	68
2.7.	Metody analityczna i wykreślna wyznaczania obciążenia granicznego kablobetonowych ram portalowych uwzględniające - poza momentami zginającymi - wpływ sił podłużnych na nośność przekrojów . . . . .	75
3.	Analiza npśności i pewne zagadnienia optymalnego projektowania stalowych konstrukcji prętowych, poddanych działaniu obciążeń wielokrotnie zmiennych, przy decydującym na zachowanie się tych konstrukcji wpływie momentów zginających	
3.1.	Podstawy i twierdzenia teorii przystosowania. Metody wyznaczania granicznych wartości obciążeń działających na statycznie niewyznaczalne stalowe konstrukcje prętowe w sposób wielokrotnie zmienny . . . . .	82
3.2.	Rozwiązania problemów nośności stalowych konstrukcji prętowych. Analiza wpływu zmienności obciążeń na spadek udźwigu tych konstrukcji. Metody, podwyższania tego udźwigu. Pewne zagadnienia optymalnego projektowania . . . . .	89

Zakończenie.....	181
Załączniki	
1. Zależności graniczne dla nimeśredowe obciążonego betonowego przekroju prostokątnego sprężonego kablem iniektwanym.....	165
2. Zależności graniczne dla nimeśredowe obciążonego podwójnie zbrojenego betonowego przekroju prostokątnego, sprężonego kablem iniektwanym.....	168
3. Równania przestych apreksymujących brzeg obstaru $\Omega$ .....	181
Bibliografia.....	183