

4.42 — siła graniczna, naprężenia graniczne
7.72 — plastyczność

prace doktorskie

Jerzy Podgórski

**STANY KRYTYCZNE
W CIAŁACH Z TARCIEM WEWNĘTRZNYM**

25/1986

P.269



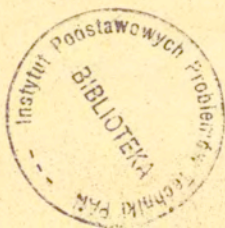
WARSZAWA 1986

<http://rcin.org.pl>

Praca doktorska

wykonana podczas stażu w Instytucie Podstawowych
Problemów Techniki PAN

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 maja 1986 r.



56880



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 150 egz. Ark.wyd. 4. Ark.druk. 5,25 .
Oddano do drukarni w czerwcu 1986 r.
Nr zamówienia 332/86

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

JERZY PODGÓRSKI

Wydział Inżynierii
Budowlanej i Sanitarnej
Politechniki Lubelskiej

STANY KRYTYCZNE W CIAŁACH Z TARCIEM WEWNĘTRZNYM

I WSTĘP

1. Treść rozprawy

Postęp w rozwoju konstrukcji inżynierskich wyrażający się w poszukiwaniu coraz to nowych, śmielszych rozwiązań a także dążeniu do ekonomiczniejszego i jednocześnie bezpiecznego projektowania zmusza konstruktorów do sięgnięcia po bardziej precyzyjne, nowocześniejsze metody projektowania.

Metody te do niedawna zbyt złożone dla szerokiego zastosowania w biurach konstrukcyjnych, stały się łatwiej dostępne dla inżyniera dzięki gwałtownemu rozwojowi techniki obliczeniowej, który obserwujemy w ostatnich latach, umożliwiającą szybkie i precyzyjne wykonanie złożonych obliczeń bezpośrednio na stanowisku konstruktora.

Powstała sytuacja z pewnością tłumaczy szerokie zainteresowanie badaczy całego świata problemami, które można określić jako stany krytyczne w ciałach z tarciem wewnętrznym.

Ośrodki z tarciem wewnętrznym stanowią modele używane do opisu zachowania szerokiej klasy materiałów konstrukcyjnych takich jak żeliwo, stopy niektórych metali itp. oraz beton i materiały geotechniczne.

Główne tematy badań zarówno teoretycznych jak i doświadczal-

nych nad tymi materiałami można scharakteryzować następująco:

- ustalenie możliwie dokładnego kryterium stanu granicznego,
- opis zachowania materiału przy pomocy odpowiedniego modelu (równania konstytutywne),
- sprecyzowanie kryterium bifurkacji i stateczności,
- rozwiązywanie zagadnień brzegowych.

Każdemu z tych zagadnień został poświęcony odpowiedni rozdział pracy.

Rozdział drugi i trzeci dotyczą kryterium stanu granicznego i funkcji mocy dysypowanej dla materiałów izotropowych.

Omówione są w nich stosowane powszechnie klasyczne warunki stanu granicznego oraz wiele warunków proponowanych ostatnio, które precyzyjniej starają się opisać zachowanie materiałów czułych na średnie ciśnienie. Przedstawiono tam także własną propozycję uniwersalnego warunku stanu granicznego, który następnie wykorzystano do opisu zniszczenia betonu oraz degradacji piasku. Przy pomocy tego warunku w rozdziale trzecim otrzymano funkcje mocy dysypowanej dla całej klasy warunków stanu granicznego, którym odpowiadają stożkowe powierzchnie graniczne.

Rozdział czwarty omawia równania konstytutywne proponowane dla tej klasy materiałów. Po przedstawieniu wielu stosowanych modeli skoncentrowano się na równaniach przyrostowych dla ciała sprężysto-plastycznego o niestowarzyszonym prawie płynięcia. Zaproponowano równania konstytutywne oraz podano przykład identyfikacji występujących w nich funkcji materiałowych wykorzystując dane doświadczalne dotyczące betonu.

Następny (piąty) rozdział pracy zawiera kryterium dla materiałów o niestowarzyszonym prawach płynięcia. Przedstawiono model ciała porównawczego zaproponowany w r.1979 przez B. Ranieckiego i 1981 przez B. Ranieckiego i O.T. Bruhnsa. Model ten

został zaadoptowany do określenia warunku bifurkacji dla osiowo ściskanego, niekoniecznie smukłego pręta. Sformułowano zagadnienie na wartości własne dla materiałów o niestowarzyszonych prawach płynięcia, prowadzące do wyznaczenia siły krytycznej dla ściskanego osiowo słupa.

Końcowa część tego rozdziału poświęcona jest wyznaczaniu naprężeń krytycznych w słupach betonowych. Podano tu (oraz w dodatku II) tabele i wykresy obrazujące zależność między naprężeniami słupa wykonanego z betonu o różnych charakterystykach. Wyniki te mogą być bezpośrednio wykorzystane przy projektowaniu słupów betonowych.

Dodatek I zawiera dowód ważnej nierówności między modułami ciała porównawczego i ciała rzeczywistego, która zilustrowana została w rozdziale piątym.

2. Układy współrzędnych, oznaczenia

W celu uproszczenia opisu powierzchni granicznych i powierzchni stałej dysypacji używane będą obok prostokątnych układów współrzędnych związanych z kierunkami głównymi tensora naprężenia, walcowe układy współrzędnych zarówno w przestrzeni naprężeń jak i w przestrzeni prędkości odkształceń.

W przestrzeni naprężeń współrzędne walcowe (h, r, φ - Rys.1) związane są z niezmiennikami tensora naprężenia następującymi zależnościami:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{3} I_1 = \sqrt{3} \sigma_0 \quad ,$$

$$(2.1) \quad r = \sqrt{2 J_2} = \sqrt{3} \tau_0 \quad ,$$

$$(2.1)c.d. \quad \cos 3\phi = J = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}},$$

gdzie:

$I_1 = \text{tr } \underline{\sigma}$ - jest niezmiennikiem tensora naprężenia $\underline{\sigma}$,

$\sigma_0 = 1/3 I_1$ - jest średnim naprężeniem normalnym,

$J_2 = 1/2 \underline{\sigma}' \cdot \underline{\sigma}'$ - jest drugim niezmiennikiem dwiatora naprężenia $\underline{\sigma}'$,

$\gamma_0 = \sqrt{2/3} J_2$ - jest okteadrycznym naprężeniem stycznym,

$J_3 = 1/3 (\underline{\sigma}' \underline{\sigma}') \cdot \underline{\sigma}'$ - jest trzecim niezmiennikiem dwiatora naprężenia $\underline{\sigma}'$,

J - oznacza $\cos 3\phi$.

Analogicznie do związków (2.1) zapiszemy zależności między współrzędnymi h_D, r_D, ϕ_D w przestrzeni prędkości deformacji a niezmiennikami tensora prędkości odkształceń \underline{D} :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} h_D &= \frac{\sqrt{3}}{3} D_{kk} \\ r_D &= \sqrt{2 III} = \sqrt{3} \gamma_0 \\ \cos 3\phi_D &= J_D = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{III}{II^{3/2}} \end{aligned}$$

gdzie:

D_{kk} - jest pierwszym niezmiennikiem tensora prędkości odkształceń \underline{D} ,

$II = 1/2 \underline{D}' \cdot \underline{D}'$ - jest drugim niezmiennikiem dwiatora prędkości odkształceń,

$\gamma_0 = \sqrt{2/3} II$ - jest okteadryczną prędkością odkształceń postaciowych,

$III = 1/3 (\underline{D}' \underline{D}') \cdot \underline{D}'$ - jest trzecim niezmiennikiem dwiatora prędkości odkształceń \underline{D}' .

W pracy stosowana będzie następująca notacja:

$\underline{A} \cdot \underline{B}$ oznacza $A_{11}B_{11}$ lub $A_{11}B_{22}$ lub $A_{11}B_{33}$ lub $A_{11}B_{22}B_{33}$,

$\underline{A} \cdot \underline{B}$ oznacza $A_{11}B_{11}$ lub $A_{11}B_{22}$,

$$A_{ij}^T = A_{ji}, \quad A_{k_1 k_2}^T = A_{k_2 k_1}$$

$A \otimes B$ lub $A_{ij} \otimes B_{kl}$ - oznacza mnożenie tensorowe.

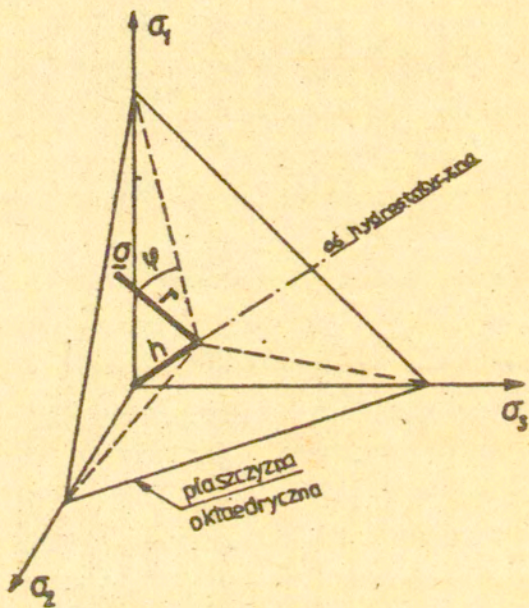
Szczegółowy spis oznaczeń stosowanych w poszczególnych rozdziałach znajduje się na końcu pracy.

II WARUNEK STANU GRANICZNEGO

Sformułowanie kryterium stanu granicznego dla materiałów których zachowanie w sposób istotny zależy zarówno od średniego ciśnienia jak i trzeciego niezmiennika tensora naprężenia, jest nadal aktualnym problemem.

Najpowszechniej stosowane dla tej grupy materiałów klasyczne warunki Coulomba-Mohra czy Druckera-Pragera prowadzą, jak wykazały to badania eksperymentalne skał, betonu, zaprawy cementowej, piasku i gliny, do rozbieżności sięgających nawet kilkunastu procent co wyklucza możliwość zastosowania tych kryteriów do precyzyjnych analiz. Rozbieżności te były powodem podejmowania przez wielu badaczy prób dokładniejszego określenia warunku stanu granicznego. Wymienić tu można prace LADE i DUNCANA [1], MATSUOKI [2], GUDEHUSA [3], w których zaproponowano kryterium dla piasku, oraz MILLSA i ZIMMERMANA [4], WILLAMA i WARNKE [5], OTTOSENA [6], LADE [7] gdzie podano warunek zniszczenia betonu.

Wszystkie z ostatnio zaproponowanych warunków zależą od trzeciego niezmiennika tensora naprężenia (lub dewiatora naprężenia), co pozwala dokładniej określić graniczny stan naprężenia w materiale. W rozdziale tym zaproponowany będzie uniwersalny warunek stanu granicznego, zawierający jako przypadki szczególne większość z wymienionych uprzednio warunków, umożliwia on także jeszcze dokładniejsze dopasowanie kryterium do wyników badań eksperymentalnych.



Rys. 1

Układy współrzędnych w przestrzeni naprężeń

3. Obraz kryterium na płaszczyźnie oktaedrycznej

Porównanie wyników badań eksperymentalnych z wielkościami naprężeń przewidywanych przez kryteria stanu granicznego wykazuje, że bardzo ważnym elementem powierzchni granicznej jest jej przekrój płaszczyzną dewiatorową. Fakt ten był powodem proponowania przez wielu badaczy różnych funkcji opisujących kształt tego przekroju. Funkcje te zapisane w postaci $r = r(\varphi)$ lub $r = r(J)$ nazywane będą w dalszym ciągu pracy funkcjami kształtu. Jednymi z najprostszych funkcji kształtu są funkcje :

$$r = r_0 - J \quad , \quad -$$

MILLSA i ZIMMERMANA [4], oraz

$$r^2 = r_0 - J \quad , \quad -$$

GUDEHUSA [3], w których r_0 oznacza stałą spełniającą warunek wypukłości : $r_0 > 10$ - dla funkcji MILLSA i ZIMMERMANA i $r_0 > 4$ - dla funkcji GUDEHUSA.

Wzruki te poważnie ograniczają obszar zastosowania kryteriów, gdyż dla wielu materiałów (beton, piasek, glina, skały) istnieje konieczność użycia kształtów przekroju powierzchni granicznej płaszczyzną dewiatorową bardziej zbliżonych do trójkąta. Możliwość taką stwarza np. funkcja zaproponowana przez WILLAMA i WARNKE [5], którzy posłużyli się równaniem elipsy :

$$r = \frac{2(1-\lambda^2)\cos\varphi + (2\lambda-1)\sqrt{4(1-\lambda^2)\cos^2\varphi + 5\lambda^2 - 4\lambda}}{4(1-\lambda^2)\cos^2\varphi + (2\lambda-1)^2}$$

gdzie λ oznacza pewną stałą równą stosunkowi promienia dla kąta φ równego 0 i $\pi/3$:

$$(3.1) \quad \lambda = r(0) / r(\pi/3) \quad .$$

W warunkach LADE [1,7], MATSUGKI [2] i QITOSENA [6] występuje funkcja opisana prostszym równaniem, mianowicie :

$$r = [\cos(1/3 \arccos \alpha J)]^{-1} ,$$

gdzie α jest stałą spełniającą warunek $0 \leq \alpha \leq 1$. Funkcja ta podobnie jak elipsa WILLAMA i WARNKE opisuje rodzinę krzywych leżących między kołem ($\alpha = 0$) a trójkątem równobocznym ($\alpha = 1$).

Również klasyczny warunek Coulomba Mohra można analizować w podobny sposób wprowadzając funkcje kształtu w postaci :

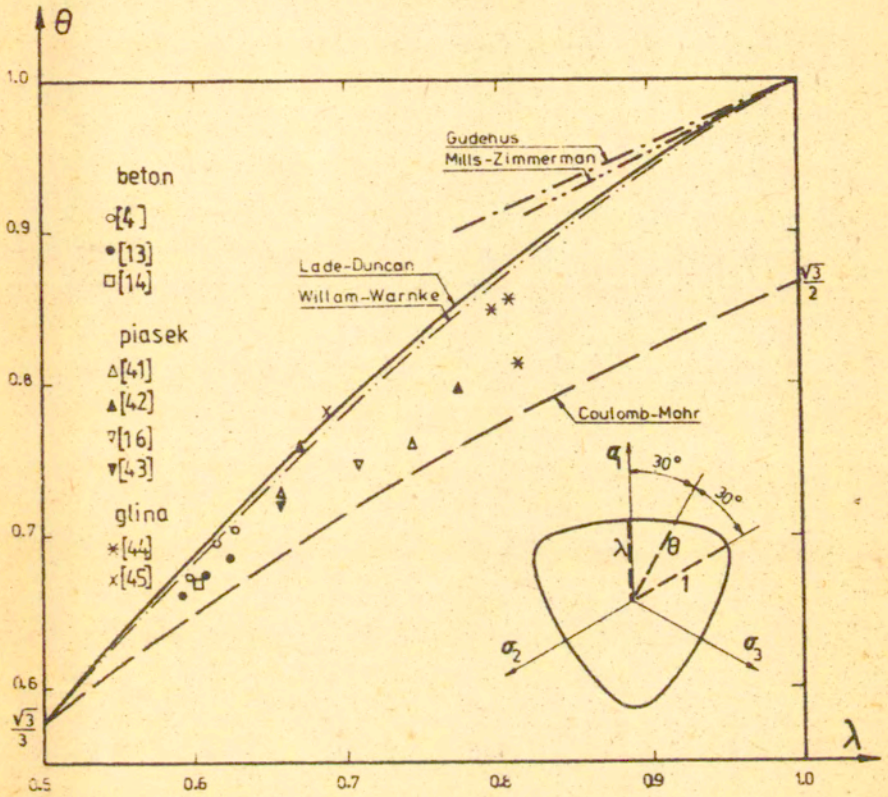
$$r = [\cos(1/2(\varphi - \beta))]^{-1} ,$$

gdzie β jest stałą zależną od kąta tarcia wewnętrznego (por. Tabela 1) a φ spełnia warunek $0 < \varphi < \pi/3$.

Aby w miarę możliwości dokładnie przeanalizować możliwości doboru wymienionych funkcji do danych doświadczalnych, wprowadzimy, drugą obok λ charakterystykę kształtu przekroju, będzie nią stosunek promienia dla kąta φ równego $\pi/6$ i $\pi/3$:

$$(3.2) \quad \theta = \frac{r(\pi/6)}{r(\pi/3)} ,$$

Zależności między charakterystykami θ i λ dla omawianych funkcji kształtu oraz dane z badań doświadczalnych przedstawione są na Rys.2. Porównanie tych zależności pozwala wysnuć wnioski, że żadna ze stosowanych dotąd funkcji kształtu ze względu na zależność od jednego parametru (np. λ) nie pozwala z dostateczną dokładnością opisać zachowania materiałów kruchych i ośrodków rozdrobnionych. Pożądane jest więc wprowadzenie nowej funkcji, zależnej od dwóch parametrów, która pozwoliłaby otrzymać charakterystyki $\theta - \lambda$ leżące w całym obszarze



Rys. 2

Porównanie zależności $\theta - \lambda$ dla różnych kryteriów z wynikami eksperymentów

ograniczonym od góry krzywą wynikającą z warunku LADE i DUNCANA [1], oraz z dołu warunkiem Coulomba - Mohra.

Funkcja spełniająca te wymogi może być opisana następującym równaniem (por. [8]) :

$$(3.3) \quad r = [P(J)]^{-1} , \quad P(J) = \cos(1/3 \arccos \alpha J - \beta) ,$$

gdzie α i β są stałymi spełniającymi warunki :
 $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta < \pi/6$. Równanie to opisuje krzywą wypukłą względem punktu $r = 0$, co jest również niezbędnym warunkiem stawianym funkcjom kształtu ze względu na ich dalszą przydatność w zastosowaniach. W pewnym obszarze (por. Rys.4) złożona postać równania (3.3) może być zastąpiona wygodniejszym w obliczeniach wzorem :

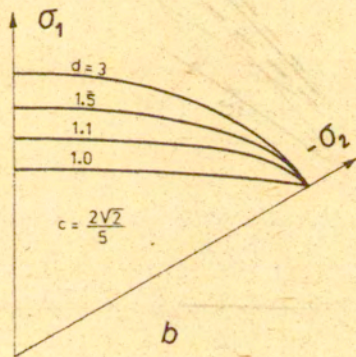
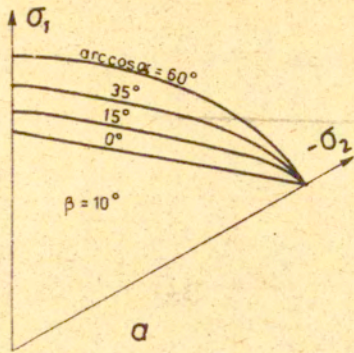
$$(3.4) \quad r = [P_1(J)]^{-1} , \quad P_1(J) = 1 + c \sqrt{d + J} ,$$

gdzie c i d są stałymi spełniającymi warunek wypukłości :

$$c \leq \frac{2\sqrt{d+1}}{7-2d} , \quad \text{oraz} \quad d \geq 1 .$$

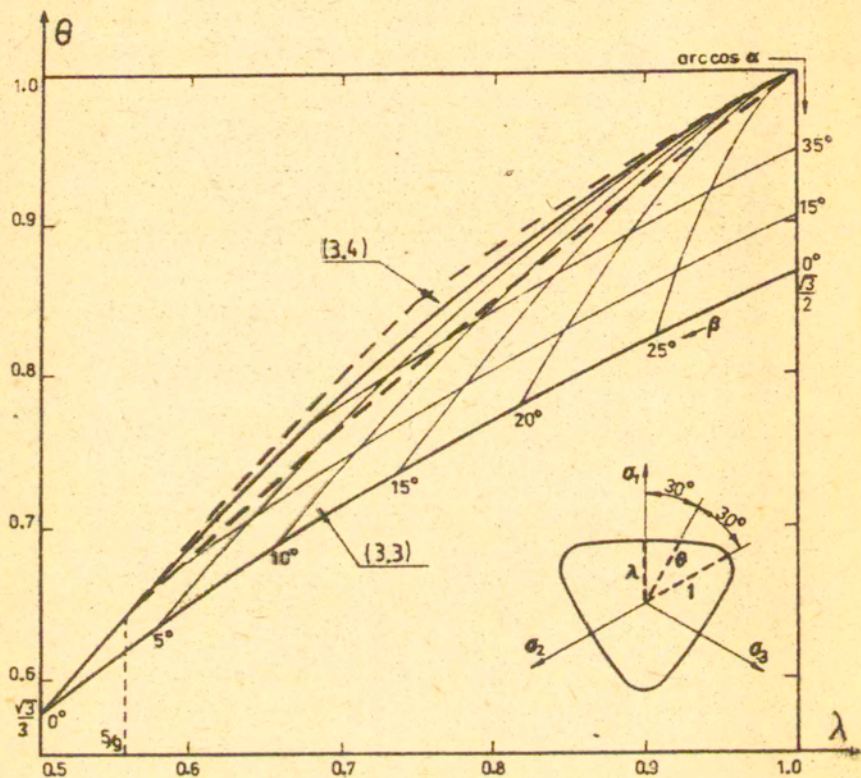
Uproszczona postać funkcji kształtu posiada jeszcze jedną cechę, pozwala mianowicie rozszerzyć obszar zastosowań kryterium w stosunku do funkcji (3.3) (por. Rys.4). Funkcja ta została ostatnio wykorzystana w warunku zniszczenia betonu, który zaproponowali FARUQUE i CHANG [9].

Na Rys.3 przedstawiono kształty krzywych opisanych równaniami (3.3) i (3.4) a na Rys.4 ich charakterystyki $\theta - \lambda$. Jak widać z porównania Rys.2 i Rys.4 zaproponowane postacie funkcji kształtu pozwalają uzyskać bardzo dobrą zgodność kryterium z danymi doświadczalnymi dla wielu różnych materiałów



Rys.3

Wykresy funkcji kształtu, a - funkcja opisana równaniem (3.3),
b - funkcja opisana równaniem (3.4)



Rys. 4

Charakterystyki $\theta - \lambda$ proponowanych funkcji kształtu, linią ciągłą zaznaczono obszar opisany równaniem (3.3), linią przerywaną - obszar opisany równaniem (3.4)

np. betonu, zaprawy cementowej, piasku i gliny.

Parametry α i β występujące w równaniu (3.3) można wyznaczyć np. metodą kolejnych przybliżeń korzystając z następujących związków :

$$\alpha = \cos 3\beta ,$$

$$(3.5) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\lambda \cos \beta - \cos(\pi/3 - \beta)}{\sin(\pi/3 - \beta) - \lambda \sin \beta}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\lambda \cos \beta - \sqrt{3} \theta}{\theta - 2\lambda \sin \beta}$$

Początkową wartość parametru β można przyjąć równą zero lub, też na podstawie Rys.4, który można traktować jak nomogram. Stałe c i d występujące w równaniu (3.4) wyliczamy z równań :

$$d = 1 + \frac{t^2 - 2}{3 - 2t} ,$$

$$(3.6) \quad t = \frac{(1-\lambda)\theta}{2(1-\theta)\lambda} + \frac{(1-\theta)\lambda}{(1-\lambda)\theta}$$

$$z = \frac{1 - \lambda}{\lambda \sqrt{d+1} - \sqrt{d-1}}$$

Wartości charakterystycznych stosunków θ i λ powierzchni granicznej występujących w równaniach (3.5) i (3.6) należy wyznaczyć na podstawie danych eksperymentalnych.

4. Sformułowanie kryterium stanu granicznego

Kryterium osiągnięcia stanu granicznego może być wyrażone następującym równaniem :

TABELA 1.- Szczególne przypadki kryterium określonego równaniem (4.1)

ksz talt	Kryterium	F u n k c j e			U w a g i
		A_0	A_1	A_2	
cy- lin- dry	Huber - Mises	$- C_0$	1	0	cylinder kołowy
	Tresca	$- C_0$	$P(J)$	0	graniastosłup
stoż- ki	Drucker- Prager	$C_1 \sigma_0 - C_0$	1	0	stożek kołowy
	Lade - Duncan	$C_1 \sigma_0$	$P(J)$	0	
	Matsuoka	$C_1 \sigma_0$	$P(J)$	0	
	Coulomb- Mohr	$C_1 \sigma_0 - C_0$	$P(J)$	0	ostrosłup
para- bolo- idy	zbliżone do kryter. Willama - Wernke	$C_0 - \sigma_0$	$C_1 P(J)$	$C_2 [P(J)]$	stały kształt przekroju de- wiatorowego
	Ottosen	$C_0 - \sigma_0$	$C_1 P(J)$	C_2	zmienny kształt przekroju

Oznaczenia : $C_0, C_1, C_2 = \text{const.}$

TABELA 2.- Rodzaje testów używane do określenia parametrów kryterium zniszczenia dla betonu

Typ testu	$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$	Max σ_1	Uwagi
Jednoosiowe rozciąganie	1 : 0 : 0	f_{ct}	$J = 1$
Jednoosiowe ściskanie	1 : 0 : 0	f_{cc}	$J = -1$
Dwuosiowe ściskanie	1 : 0.5 : 0	f_{cc}	$J = 0$
Dwuosiowe ściskanie	1 : 1 : 0	f_{cc}	$J = 1$
Trójosiowe rozciąganie	1 : 1 : 1	f_{ct}	wierzchołek

$$(4.1) \quad A_0 + A_1 \tau_0 + A_2 \tau_0^2 = 0$$

gdzie A_0 jest funkcją tylko średniego ciśnienia σ_0 , A_1 i A_2 zależą od funkcji kształtu postaci (3.3) lub (3.4).

Ogólna postać kryterium zawiera w sobie wiele szczególnych warunków stanu granicznego, z których najważniejsze podano w Tabeli 1 wraz z odpowiednią specyfikacją funkcji A_0 , A_1 , A_2 . Wartości parametrów tych funkcji podane są w pracy [8].

5. Przykłady zastosowań kryterium

5.1 Kryterium zniszczenia dla betonu

W przypadku betonu najważniejszą formą kryterium będzie równanie :

$$(5.1) \quad \sigma_0 - C_0 + C_1 P(J) \tau_0 + C_2 \tau_0^2 = 0$$

gdzie $C_0, C_1, C_2 = \text{const.}$, $P = \cos(1/3 \arccos \alpha J - \beta)$.

Powierzchnia zniszczenia betonu opisana tym równaniem spełnia warunki sformułowane przez K. NEWMANA i J.B. NEWMANA [10], oraz OTTOSENA [6], które w skrócie można przedstawić następująco :

- powierzchnia zniszczenia jest wypukła, zakrzywiona i gładka,
- promień r przekroju powierzchni płaszczyzną dewiatorową rośnie wraz ze wzrostem ciśnienia hydrostatycznego,
- charakterystyczny stosunek λ przekroju powierzchni płaszczyzną dewiatorową zmienia się od wartości $\lambda = 0.5$ (dla $\tau_0 = 0$) do $\lambda = 1$ (dla $\sigma_0 \rightarrow -\infty$).

Zaproponowane kryterium zawiera pięć parametrów $C_0, C_1, C_2, \alpha, \beta$, których wartości mogą być wyznaczone na podstawie danych doświadczalnych, uzyskiwanych podczas badań próbek betonowych. Stany naprężenia, na podstawie których określono parametry powierzchni zniszczenia przedstawia Tabela 2.

Przyjmując hipotezę PAULA (tension cut-off) [11], oraz analizując wyniki badań doświadczalnych betonu w dwuosioowych stanach naprężenia przeprowadzonych przez ANDENAESA i in. [12], KUPFERA [13], TASUJI i in. [14], ustalono następujące zależności (oznaczenia podane są w Tabeli 2) :

$$f_{vs} = f_t, \quad f_{cs} = 1.1 f_c, \quad f_{ec} = 1.25 f_c$$

Dla tych relacji wyliczono charakterystyki θ i λ a następnie w/g równań (3.5) wartości parametrów α i β funkcji kształtu. Wyniki obliczeń w zależności od założonego stosunku f_t/f_c podane są w Tabeli 3.

TABELA 3.- Charakterystyczne stosunki θ i λ , oraz wartości parametrów $\arccos \alpha$ i β w zależności od f_t/f_c

f_t/f_c	λ	θ	$\arccos \alpha$ [deg]	β [deg]
0.06	0.51375	0.59182	2.034	0.235
0.07	0.51567	0.59386	2.339	0.261
0.08	0.51748	0.59581	2.635	0.283
0.09	0.51917	0.59764	2.922	0.300
0.10	0.52074	0.59936	3.197	0.313
0.11	0.52219	0.60097	3.462	0.321
0.12	0.52351	0.60246	3.717	0.325

Stale C_0 , C_1 , C_2 występujące w równaniu (5.1) mogą być obliczone przy pomocy związków :

$$C_0 = f_t$$

$$(5.2) \quad C_1 = \frac{\sqrt{2}}{P_0} \left(1 - 1.5 \frac{f_t/f_{ec}}{f'_{ec}/f_t - 1} \right)$$

$$C_2 = 4.5 \frac{f_t/f_{ec}}{f_{ec} - f_t}$$

w których $P_0 = P(0) = \cos(1/2 \arccos \alpha - \beta)$.

Rysunek 5 przedstawia krzywą zniszczenia betonu dla płaskiego stanu naprężenia przy stosunku $f_c/f_m = 0.1$ wynikającą z przyjętego kryterium oraz dla porównania krzywe otrzymane na podstawie kryteriów OTTOSENA [6] i LADE [7], a także punkty odpowiadające wynikom badań doświadczalnych. Rys.6 obrazuje przekrój powierzchni zniszczenia płaszczyzną $\tau_0 - \sigma_0$ dla $J=1$, analogicznie jak na Rys.5 porównano tu zaproponowane kryterium z warunkami OTTOSENA i LADE oraz z eksperymentalnymi danymi MILLSA i ZIMMERMANA [4], ANDENAESA i in. [12], KUPFERA [13], TASUJI i in. [14] oraz SCHICKERTA i WINKLERA [15]. Widoczna jest na tych rysunkach dobra zgodność zaproponowanego kryterium z danymi doświadczalnymi zarówno dla małych jak i dla dużych wartości ciśnień hydrostatycznych. Zgodność ta jest szczególnie dobrze widoczna w obszarze $J = 0$ ($\sigma_1 / \sigma_2 = 1/2$ w płaskim stanie naprężenia).

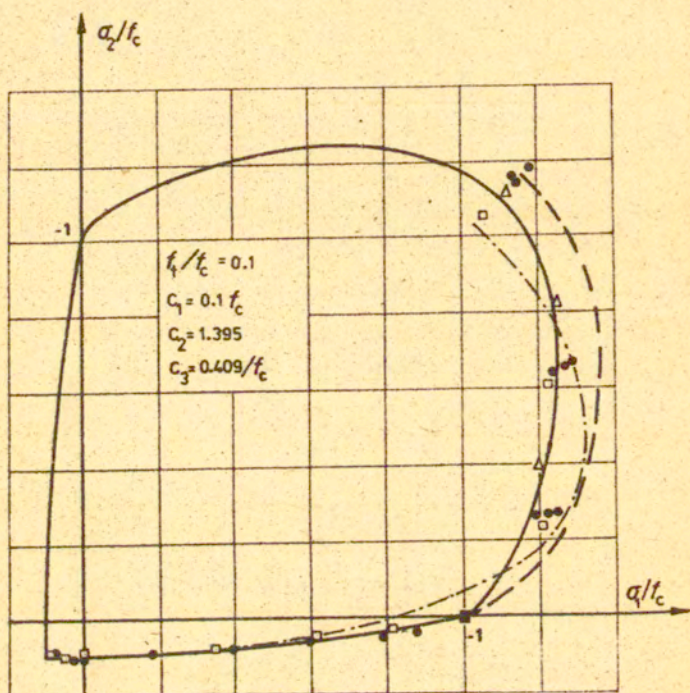
5.2 Warunek stanu granicznego dla piasku

Powierzchnie graniczne materiałów rozdrobnionych mogą być zwykle z dostateczną dokładnością opisane przy pomocy liniowej wersji równania (4.1) :

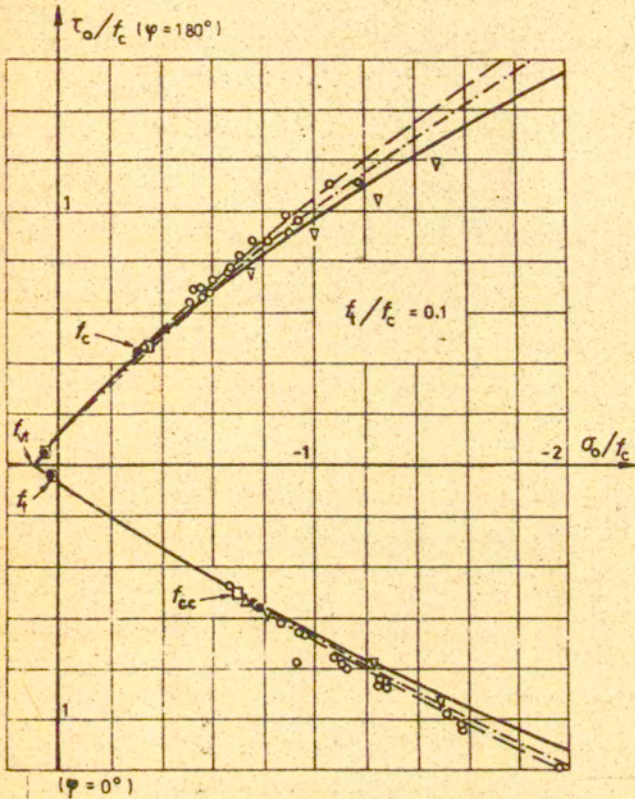
$$(5.3a) \quad P(J) \tau_0 + C_1 \sigma_0 - C_0 = 0 \quad , \quad \text{lub}$$

$$(5.3b) \quad P_1(J) \tau_0 + C_1 \sigma_0 - C_0 = 0 \quad .$$

W równaniach powierzchni granicznych dla piasków zagęszczonych i gliny może być z powodzeniem użyta uproszczona postać funkcji kształtu, bardzo ułatwiająca obliczenia. W tym punkcie będzie pokazana metoda obliczenia parametrów C_0 , C_1 , α , β występujących w bardziej złożonej postaci funkcji (5.3a) dla piasku



Rys.5 - Krzywa zniszczenia dla betonu w dwuosiowym stanie naprężenia. Linia ciągła - proponowane kryterium; linia przerywana - kryterium Ottosena; linia punktowa - warunek Lade. Wyniki badań doświadczalnych: ● - Kupfer; □ - Tasuji i in.; △ - Andenaes i in.



Rys. 6 - Przekrój powierzchni zniszczenia płaszczyzną $\tau_0 - \sigma_0$.
Linia ciągła - proponowane kryterium; linia przerywana - kryterium Ottosena; linia punktowa - warunek Lade;
Wyniki badań doświadczalnych: ● - Kupfer; ○ - Mills i Zimmerman; ◻ - Tasuji i in.; △ - Andenaes i in.; ▽ - Schickert i Winkler.

badanego przez GREENA i BISHOPA [16]. Tabela 4 pokazuje odczytane na podstawie rysunku zamieszczonego w cytowanej pracy wartości kątów tarcia wewnętrznego badanego przy różnych stanach naprężenia. Dane te, oraz założenie zerowej kohezji ($\tau_0 = 0$ dla $\sigma_0 = 0$), pozwalają wyliczyć charakterystyki przekroju powierzchni granicznej przy pomocy równań :

$$\lambda = \frac{3/\sin\phi_e - 1}{3/\sin\phi_e + 1}$$

(5.4)

$$\theta = (\sqrt{3}/6)\sin\phi_0 (3/\sin\phi_e - 1) ,$$

gdzie ϕ_e , ϕ_0 , ϕ_e oznaczają odpowiednio kąty tarcia wewnętrznego odpowiednio przy trójosiowym ściskaniu ($\varphi=\pi/3, J=-1$), trójosiowym ścinaniu ($\varphi=\pi/6, J=0$) i trójosiowym rozciąganiu ($\varphi=0, J=1$).

TABELA 4.- Kąty tarcia wewnętrznego ϕ dla piasku

b	φ [deg]	ϕ [deg]	b	φ [deg]	ϕ [deg]
0	60	39	0.43	34.62	43
0.09	55.33	42.5	0.44	33.96	43
0.14	52.57	44	0.51	29.34	43.5
0.16	51.43	44	0.59	24.7	43
0.22	47.92	43.5	0.72	15.75	45, 43.5
0.27	44.87	43.5	0.86	7.43	45, 44
0.28	44.25	44	0.91	4.67	45
0.31	42.37	42	0.98	1.0	44
0.33	41.11	42	1.0	0	44, 41

$$b = (\alpha_2 - \alpha_3) / (\alpha_1 - \alpha_3); \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3; \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} (1-b) / (1+b)$$

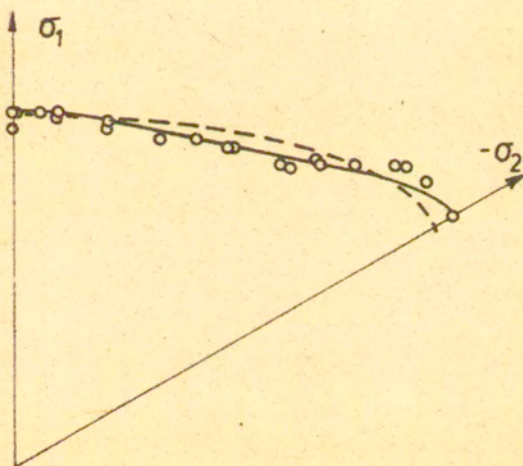
Przyjęcie zerowej kohezji daje $C_0 = 0$, parametry α i β mogą być wyliczone na podstawie znanych charakterystyk θ i λ z równań (3.5) tak więc tylko parametr C_1 pozostaje nieznanym. Można wyznaczyć go przy pomocy następującego związku :

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}}{4 P_0} (3/\sin\phi_0 + 1) , \text{ gdzie } P_0 = \cos(1/3 \arccos \alpha - \beta) .$$

Dla danych zawartych w Tabeli 4 obliczono :

$$\lambda = 0.7083, \theta = 0.7486, \alpha = 0.9721, \beta = 10.28^\circ, C_1 = 1.89.$$

Rys.7 pokazuje przekrój powierzchni granicznej, określonej tymi parametrami, płaszczyzną dewiatorową $\sigma_3 = \text{const.}$ oraz rzuty środkowe punktów odpowiadających danym z Tabeli 4. Dla porównania pokazano także krzywą odpowiadającą warunkowi LADE i DUNCANA [1]. Widoczna jest dobra zgodność zaproponowanego warunku z danymi eksperymentalnymi oraz możliwość dokładniejszego doboru powierzchni granicznej do tych danych niż w przypadku warunku Łade i Duncana.



Rys.7 - Przekrój dewiatorowy powierzchni granicznej dla piasku. Linia ciągła - proponowane kryterium; linia przerywana - warunek Łade i Duncana; O - dane eksperymentalne Greena i Bishopa.

III FUNKCJA DYSYPACJI

W zagadnieniach szacowania nośności granicznej metoda kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości odkształceń pomocny jest potencjał mocy dysypowanej. Korzystając z przedstawionego w poprzednim rozdziale uniwersalnego warunku stanu granicznego określimy funkcje dysypacji stowarzyszone z częściami stosowanymi kryteriami stanu granicznego (w/g [17]).

6. Związki konstytutywne dla ciała idealnie plastycznego

Zakładając stowarzyszone prawo płynięcia, tensor prędkości odkształceń zapiszemy w postaci :

$$\underline{\underline{D}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

gdzie $F = 0$ jest warunkiem stanu granicznego a $\dot{\lambda} > 0$. Zapiszmy powyższe równanie w wygodniejszej do rozważań postaci:

$$(6.1) \quad \underline{\underline{D}} = 1/3 D_{kk} \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{D}}',$$

$$\underline{\underline{D}}' = \dot{\lambda} \underline{\underline{n}}$$

gdzie $\underline{\underline{n}} = \partial F / \partial \underline{\underline{\sigma}}'$.

Przyjmując warunek stanu granicznego w postaci (5.3a) otrzymamy :

$$(6.2) \quad \underline{\underline{n}} = \frac{\partial [P(J)\tau_0]}{\partial \underline{\underline{\sigma}}'} = P \frac{\underline{\underline{\sigma}}'}{3\tau_0} + P' \left(\sqrt{2} \frac{\underline{\underline{\sigma}}'}{\tau_0^2} - J \frac{\underline{\underline{\sigma}}'}{\tau_0} \right),$$

$$D_{kk} = \dot{\lambda} C_1,$$

gdzie

$$P' = \frac{\partial P}{\partial J} = 1/3 \frac{\sin(1/3 \arccos \alpha J - \beta)}{\sqrt{1/\alpha^2 - J^2}},$$

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \partial J / \partial \underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}}' \underline{\underline{\sigma}}' - \tau_0 \underline{\underline{1}}.$$

Ostatecznie więc równanie (6.1) przyjmie postać :

$$(6.3) \quad \underline{D} = \lambda (1/3 C_1 \underline{1} + \underline{n}) \quad ,$$

która dla kryteriów wymienionych w Tabeli 1 (dla walcowych i stożkowych powierzchni granicznych) pozostanie niezmienna*), zmieniać się będzie jedynie formuła określająca dewiator \underline{n} . Związek między dewiatorem \underline{n} a tensorem $\underline{\sigma}$ dla klasycznych warunków stanu granicznego określony jest w Tabeli 5, tutaj przedstawimy sposób wyznaczania tego związku w najbardziej złożonym przypadku - kryterium Coulomba-Mohra.

Dla tego kryterium powierzchnia graniczna jest ostrosłupem, posiada więc krawędzie w miejscach $J^2 = 1$. Osobliwości te są przyczyną nieokreśloności kierunku \underline{n} w płaszczyźnie dewiatorowej. Zakładając $J^2 \neq 1$ wyznaczmy dewiator \underline{n} dla boku ostrosłupa Coulomba-Mohra. Podstawiając $\alpha = 1$ w równaniu (6.2) (por. Tab. 1) otrzymamy :

$$(6.4) \quad \underline{n} = \frac{\cos \psi}{3 \tau_0^2} \tau_0 \underline{\sigma} \left(1 - \operatorname{tg} \psi \frac{J}{\sqrt{1 - J^2}} \right) + \sqrt{2} \underline{\sigma} \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1 - J^2}} \quad ,$$

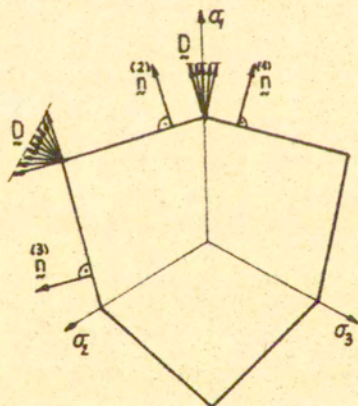
gdzie $\psi = 1/3 \arccos(J) - \beta = 1/3 \pi - \beta$.

Z równania tego wynika, że \underline{n} jest normalną do boku sześciokąta, który jest przekrojem powierzchni Coulomba-Mohra płaszczyzną dewiatorową (Rys. 8). Aby się o tym przekonać obliczymy zgodnie z równaniem (2.2), wartość $\cos(3\varphi_0) = J_0$.

*) Nie dotyczy to warunku Lade i Matsuoki oraz innych warunków dla ośrodków sypkich, gdzie stała C_0 występująca w równaniu (5.3a) jest równa zero, gdyż założenie stowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego prowadzi tu do sprzecznego z doświadczeniem wyniku zerowej dysypacji. Sprzeczność tą można ominąć zakładając niestowarzyszone prawa płynięcia, które będą przedmiotem rozważań dalszej części pracy.

TABELA 5. - Normalne \bar{n} do powierzchni granicznych

$D = \lambda (1/3 C_1 \underline{1} + \underline{n})$	
Kryterium	Dewiator \underline{n}
Huber - Mises	$\underline{n} = \sigma' / (3 \gamma_0)$
Tresca	$J^2 = 1, \underline{n} = \overset{(1)}{\bar{n}}, \overset{(1)}{n_{1,1}} = 1/\sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
	$J = 1, \underline{n} = a \overset{(1)}{\bar{n}} + (1-a) \overset{(2)}{\bar{n}}, \overset{(2)}{n_{1,1}} = 1/\sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$
	$J = -1, \underline{n} = a \overset{(2)}{\bar{n}} + (1-a) \overset{(3)}{\bar{n}}, \overset{(3)}{n_{1,1}} = 1/\sqrt{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$
Drucker-Prager	$\underline{n} = \sigma' / (3 \zeta_0)$
Coulomb - Mohr	$J^2 = 1, \underline{n} = \overset{(2)}{\bar{n}}$
	$J = 1, \underline{n} = a \overset{(1)}{\bar{n}} + (1-a) \overset{(2)}{\bar{n}}$
	$J = -1, \underline{n} = a \overset{(2)}{\bar{n}} + (1-a) \overset{(3)}{\bar{n}}$
$\overset{(1)}{\bar{n}}, \overset{(2)}{\bar{n}}, \overset{(3)}{\bar{n}}$ określone są równaniami (6.6), (6.7), (6.8)	



Rys. B - Normalne do boków sześciokąta Coulomba - Mohra

Dla dewiatora \underline{n} mamy :

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \text{II} &= 1/2 \lambda^2 \underline{n} \cdot \underline{n} = 1/6 \lambda^2 [P^2 + 9(P')^2 (1 - J^2)], \\ \text{III} &= 1/3 \lambda^3 (\underline{n} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} = \frac{\lambda^3}{27 \sqrt{2}} [P^3 J + 9 P^2 P' (1 - J^2) \\ &\quad - 27 P (P')^2 J (1 - J^2) - 27 (P')^3 (1 - J^2)^2]. \end{aligned}$$

Po podstawieniu do tych równań : $\alpha = 1$, $P = \cos \psi$,
 $P' = \sin \psi / (3 \sqrt{1 - J^2})$ z równania (2.2) otrzymamy
 $J_0 = \cos 3\beta$, a więc \underline{n} jest normalną do boku sześciokąta.

Zbadamy teraz dewiator \underline{n} określony wzorem (6.2) w punkcie osobliwym gdzie $J = 1$. Gdy w równaniu (6.2) przyjmiemy :
 $P = \cos \beta$, $P' = - \sin \beta / (3 \sqrt{1/\alpha^2 - J^2})$, w równaniach (6.5) pojawiają się wówczas wyrażenia :

$$w_1 = \frac{1 - J^2}{1/\alpha^2 - J^2} \quad \text{oraz} \quad w_2 = \frac{1 - J^2}{\sqrt{1/\alpha^2 - J^2}} ,$$

których granice w punkcie $\alpha = 1$, $J = 1$ są równe :
 $\lim w_1 = a$, $\lim w_2 = 0$, gdzie $0 < a < 1$ w zależności od drogi na płaszczyźnie $\alpha - J$, którą dążymy do punktu $(\alpha = 1$, $J = 1)$. Niejednoznaczność granicy w_2 jest przyczyną nieokreśloności kierunku dewiatora \underline{n} .

Równania (6.5) można teraz zapisać w następującej postaci :

$$\begin{aligned} \text{II} &= 1/6 \lambda (\cos^2 \beta + a \sin^2 \beta) , \\ \text{III} &= \frac{\lambda}{27 \sqrt{2}} (\cos^3 \beta - 3a \cos \beta \sin^2 \beta) , \end{aligned}$$

a więc $J_0 = 4/p^3 \cos^3 \beta - 3/p^2 \cos \beta$,

gdzie $p = \sqrt{6 \text{ II}}$. Rozwiązując to równanie względem $\sqrt{\text{III}}$ otrzymujemy równanie prostej na płaszczyźnie oktaedrycznej :

$$\sqrt{|1|} = \frac{\cos\beta}{\cos(1/3 \arccos J_D)} = \cos\beta / \cos\beta_D .$$

Równanie to zachowuje swoją ważność tylko w przedziale $|\phi| < \beta$, co oznacza, że koniec normalnej \tilde{n} porusza się po prostej prostopadłej do jednego z kierunków głównych. Uzyskane wyniki pozwalają zapisać dewiator \tilde{n} jako kombinację normalnych $\tilde{n}^{(1)}$ i $\tilde{n}^{(2)}$ do dwóch boków sześciokąta Coulomba-Mohra (por. Rys. B) :

$$\tilde{n} = a \tilde{n}^{(1)} + (1-a) \tilde{n}^{(2)} , \quad \text{gdzie } 0 < a < 1 .$$

Normalne $\tilde{n}^{(1)}$ i $\tilde{n}^{(2)}$ można uzyskać z równania (6.4) podstawiając:

$$\begin{aligned} \tilde{n}^{(1)} &= \tilde{n} (\psi = \psi_1) , & \psi_1 &= 1/3 \arccos J - \beta , \\ \tilde{n}^{(2)} &= \tilde{n} (\psi = \psi_2) , & \psi_2 &= 1/3 \arccos J + \beta , \quad \text{lub} \end{aligned}$$

$$(6.6) \quad \tilde{n}^{(1)} = 2/\sqrt{3} \sum_{i=1}^3 n_i^{(1)} \tilde{s}_i \otimes \tilde{s}_i ,$$

gdzie \tilde{s}_i są jednostkowymi wektorami głównymi tensora $\tilde{\sigma}$ a wartości główne $n_i^{(1)}$ są równe :

$$n_1^{(1)} = \cos\beta , \quad n_2^{(1)} = -\cos(\pi/3 - \beta) , \quad n_3^{(1)} = -\cos(\pi/3 + \beta) ,$$

$$(6.7) \quad \tilde{n}^{(2)} = 2/\sqrt{3} \sum_{i=1}^3 n_i^{(2)} \tilde{s}_i \otimes \tilde{s}_i ,$$

$$n_1^{(2)} = \cos\beta , \quad n_2^{(2)} = -\cos(\pi/3 + \beta) , \quad n_3^{(2)} = -\cos(\pi/3 - \beta) .$$

W drugim narożu sześciokąta Coulomba-Mohra (dla $J = -1$) po dokonaniu analogicznych przekształceń otrzymamy :

$$\tilde{n} = a \tilde{n}^{(2)} + (1-a) \tilde{n}^{(3)} ,$$

gdzie $\tilde{n}^{(3)}$ jest normalną do boku sześciokąta (Rys. B) ;

$$(6.8) \quad \tilde{n}^{(3)} = 2/\sqrt{3} \sum_{i=1}^3 n_i^{(3)} \tilde{s}_i \otimes \tilde{s}_i ,$$

$$\tilde{n}_1^{(3)} = -\cos(\pi/3 + \beta) , \quad \tilde{n}_2^{(3)} = \cos \beta , \quad \tilde{n}_3^{(3)} = -\cos(\pi/3 - \beta) .$$

Ostatecznie dewiator \tilde{D}' dla warunku Coulomba-Mohra można określić następująco :

$$\tilde{D}' = \dot{\lambda} \tilde{n} , \quad \text{gdy } J^2 = 1$$

$$\tilde{D}' = \dot{\lambda} [a \tilde{n}^{(1)} + (1-a) \tilde{n}^{(2)}] , \quad \text{gdy } J = 1$$

$$\tilde{D}' = \dot{\lambda} [a \tilde{n}^{(1)} + (1-a) \tilde{n}^{(3)}] , \quad \text{gdy } J = -1 ,$$

$\tilde{n}^{(1)}$, $\tilde{n}^{(2)}$, $\tilde{n}^{(3)}$ opisane są przy pomocy równań (6.4), (6.6), (6.7), (6.8) .

7. Moc dysypowana

Moc dysypowana w procesie deformacji ciała idealnie plastycznego określona jest równaniem :

$$= \sigma D .$$

Wstawiając do tego równania związki (6.1) i (6.2) po uwzględnieniu warunku (5.3a) otrzymamy :

$$= C_0 \dot{\lambda} , \quad \text{a stąd}$$

po eliminacji $\dot{\lambda}$ przy pomocy relacji (6.1) i (6.5) :

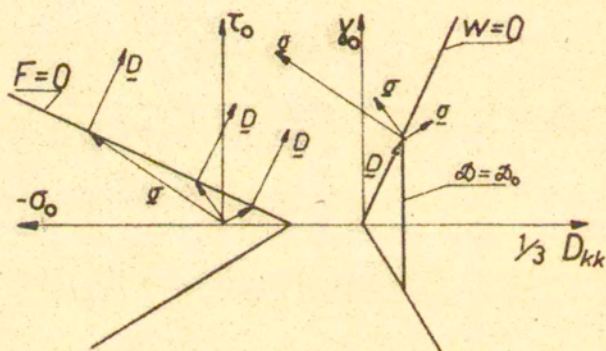
$$(7.1) \quad \dot{D} = 3 C_0 \Pi(J_0) \dot{\gamma}_0 ,$$

gdzie $\Pi(J_0)$ jest funkcją kształtu przekroju powierzchni dysypacji płaszczyzną dewiatorową. Postać warunku (5.3a), który ogranicza się tylko do stożkowych powierzchni granicznych powoduje, że powierzchnia stałej dysypacji jest figurą płaską, lub krzywą płaską (gdy $C_1 = 0$) ograniczona pewnym stożkiem w przestrzeni prędkości odkształceń :

$$(7.2) \quad w = D_{kk} - 3 C_1 \Pi(J_0) \gamma_0 = 0 .$$

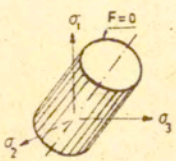
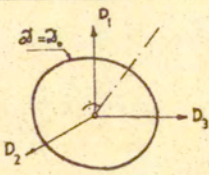
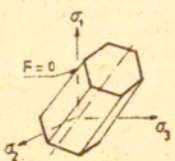
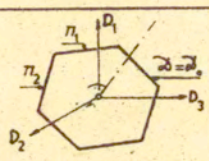
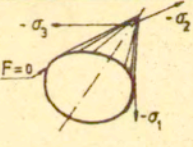
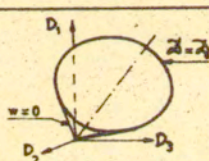
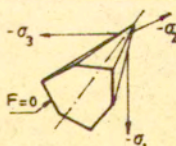
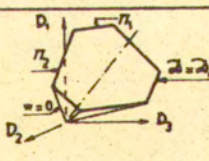
Ograniczenie to wynika z faktu, że kierunek normalnej do powierzchni stożkowej jest stały w płaszczyźnie zawierającej oś stożka (Rys. 9).

Postać równania dysypacji i równania więzów (7.1) i (7.2) pozostaje niezmienna dla tych kryteriów stanu granicznego wymienionych w Tabeli 1, którym odpowiadają stożkowe i cylindryczne powierzchnie graniczne, różnią się natomiast równania określające funkcje kształtu $\Pi(J_0)$. Dla klasycznych kryteriów równania tej funkcji podane są w Tabeli 6.



Rys. 9 - Kierunki tensorów naprężenia i prędkości deformacji w przestrzeni naprężeń i prędkości odkształceń.

TABELA 6 - Funkcje kształtu powierzchni stałej dysypacji

$\bar{\omega} = 3 C_0 \pi(I_D) \gamma_0$, $w = D_{sk} - 3 C_1 \pi(I_D) \gamma_0 = 0$	
Huber-Mises	 <p style="text-align: center;">$F = J_2 - k^2 = 0$</p>  <p style="text-align: center;">$\pi = 1$</p>
Tresca	 <p style="text-align: center;">$F = \tau_{max} - k = 0$</p>  <p style="text-align: center;"> $0 \leq I_D \leq 1$, $\pi_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \psi_0$ $-1 \leq I_D \leq 0$, $\pi_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\psi_0 - 60^\circ)$ </p>
Drucker-Prager	 <p style="text-align: center;">$F = \sqrt{J_2} - a + b I_1$</p>  <p style="text-align: center;">$\pi = 1$</p>
Coulomb-Mohr	 <p style="text-align: center;">$F = \tau_n - c + \text{tg } \phi \sigma_n$</p>  <p style="text-align: center;"> $\cos 3\beta \leq I_D \leq 1$, $\pi_1 = \frac{\cos \psi_0}{\cos \beta}$ $-1 \leq I_D \leq \cos 3\beta$, $\pi_2 = \frac{\cos(\psi_0 - 60^\circ)}{\cos(60^\circ - \beta)}$ </p>

Chcąc uzyskać dualność opisu relacji $\tilde{\sigma} - \tilde{D}$ wyrazimy tensor naprężenia wzorem :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{D}}$$

Ponieważ na tensor \tilde{D} nałożone są ograniczenia ($w = 0$, równ. 7.2) to zależność ta musi być zapisana w nieco odmiennej postaci :

$$(7.3) \quad \tilde{\sigma} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \tilde{D}} + \mu \frac{\partial w}{\partial \tilde{D}}$$

gdzie μ jest mnożnikiem Lagrange'a.

Równanie powyższe pozwala określić jedynie dewiator tensora naprężenia, gdyż ze względu na kształt powierzchni dysypacji wielkość ciśnienia średniego σ_0 może być przyjęta z pewną dowolnością ($\sigma_0 < C_0 / C_1$). Jak łatwo sprawdzić właśnie średnie ciśnienie odgrywa w równaniu (7.3) rolę mnożnika Lagrange'a, co pozwala zapisać je w postaci :

$$(7.4) \quad \tilde{\sigma} = \sigma_0 \mathbb{1} + 3(C_0 - C_1 \sigma_0) \tilde{N}$$

gdzie $\tilde{N} = \partial(\Pi(J_D) \chi_0) / \partial \tilde{D}$ - jest normalną do krzywej ograniczającej powierzchnię stałej dysypacji w płaszczyźnie dewiatorowej. Dla dowolnej powierzchni ograniczającej (7.2) tensor \tilde{N} wyraża się wzorem :

$$(7.5) \quad \tilde{N} = \Pi' \tilde{D}' / \chi_0 + 3\Pi'' (\sqrt{2} \tilde{D}'' / \chi_0^2 - J_D \tilde{D}' / \chi_0)$$

gdzie $\Pi' = \partial \Pi / \partial J_D$ oraz $\tilde{D}'' = \tilde{D}' \tilde{D}' - \chi_0 \mathbb{1}$ - analogicznie jak dla normalnej \tilde{n} (6.2). W Tabeli 7 podano równania określające normalną \tilde{N} dla każdego z klasycznych kryteriów stanu granicznego.

TABELA 7.- Normalna \tilde{N} do powierzchni stałej dysypacji

$\sigma = \sigma_0 \tilde{1} + 3(C_0 - C_1 \sigma_0) \tilde{N}$	
Kryterium	Dewiator \tilde{N}
Huber - Mises	$\tilde{N} = \tilde{D}' / (3 \gamma_0)$
Tresca	$0 < J_D < 1, \quad \tilde{N} = \begin{matrix} (1) \\ \tilde{N} \end{matrix}, \quad N_{1,1} = \sqrt{2/3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ $-1 < J_D < 0, \quad \tilde{N} = \begin{matrix} (2) \\ \tilde{N} \end{matrix}, \quad N_{1,1} = \sqrt{2/3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ $J_D = 0, \quad \tilde{N} = a \begin{matrix} (1) \\ \tilde{N} \end{matrix} + (1-a) \begin{matrix} (2) \\ \tilde{N} \end{matrix}$
Drucker - Prager	$\tilde{N} = \tilde{D}' / (3 \gamma_0)$
Coulomb - Mohr	$\cos 3\beta < J_D < 1, \quad \tilde{N} = \begin{matrix} (1) \\ \tilde{N} \end{matrix}, \quad N_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \beta} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ $-1 < J_D < \cos 3\beta, \quad \tilde{N} = \begin{matrix} (2) \\ \tilde{N} \end{matrix}, \quad N_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos(\pi/3 - \beta)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ $J_D = \cos 3\beta, \quad \tilde{N} = a \begin{matrix} (1) \\ \tilde{N} \end{matrix} + (1-a) \begin{matrix} (2) \\ \tilde{N} \end{matrix}$

Obecnie wyznaczmy dewiator $\underline{\underline{N}}$ dla kryterium Coulomba - Mohra. Dla tego kryterium funkcja kształtu powierzchni stałej dysypacji jest następująca (Tab.6) :

$$\Pi(J_D) = \Pi_1 = \cos \varphi_0 / \cos \beta, \quad \text{gdy } \cos 3\beta < J_D < 1, \quad \text{oraz}$$

$$\Pi(J_D) = \Pi_2 = \cos(\varphi_0 - \pi/3) / \cos(\pi/3 - \beta), \quad \text{gdy } -1 < J_D < \cos \beta.$$

Wykorzystując analogie wzorów (7.5) i (6.2) na podstawie (6.5) można zapisać :

$$\underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{N}} = 3[\Pi^2 + 9(\Pi')^2(1 - J_D^2)],$$

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}}) \cdot \underline{\underline{N}} = 3\sqrt{2} [\Pi^2 J_D + 9\Pi^2 \Pi' (1 - J_D) - 27\Pi (\Pi')^2 J_D (1 - J_D^2) - J_D^2] - 27(\Pi')^2 (1 - J_D^2)^2] \end{aligned}$$

(7.6)

oraz

$$J = \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{(\underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}}) \cdot \underline{\underline{N}}}{(\underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{N}})^{3/2}}$$

Wstawiając do tych wzorów $\Pi = \Pi_1$ i $\Pi = \Pi_2$ otrzymamy

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial D'} = \frac{\gamma_0}{\cos \beta}, \quad \frac{\partial (\underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{N}})}{\partial D'} = 3/\cos \beta, \quad J(\underline{\underline{N}}) = 1, \quad \text{oraz}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial D'} = \frac{\gamma_0}{\cos \beta}, \quad \frac{\partial (\underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{N}})}{\partial D'} = 3/\cos^2(\pi/3 - \beta), \quad J(\underline{\underline{N}}) = -1,$$

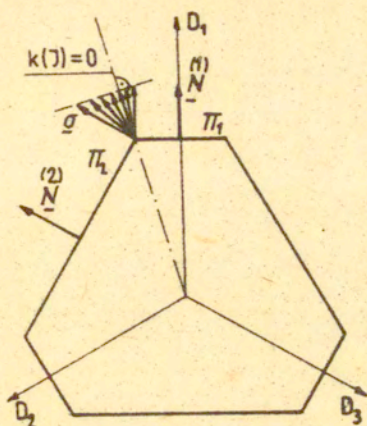
a więc $\underline{\underline{N}}^{(1)}$ i $\underline{\underline{N}}^{(2)}$ są normalne do sześciokątą stałej dysypacji, rys.10.

Normalne $\underline{\underline{N}}^{(1)}$ i $\underline{\underline{N}}^{(2)}$ można też wyrazić za pomocą następujących formuł :

$$(7.7) \quad \underline{\underline{N}}^{(1)} = \sqrt{2} / \cos \beta \sum_{i=1}^3 N_i^{(1)} e_i \otimes e_i,$$

gdzie e_i są jednostkowymi wektorami głównymi tensora $\underline{\underline{D}}$,

$$a \quad N_1^{(1)} = 1, \quad N_2^{(1)} = -1/2, \quad N_3^{(1)} = -1/2,$$



Rys.10 - Normalne do sześciokąta stałej dysypacji:

$$(7.8) \quad \tilde{N} = \sqrt{2} / \cos(\pi/3 - \beta) \sum_{i=1}^3 N_i \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i, \\ N_1 = 1/2, \quad N_2 = 1/2, \quad N_3 = -1.$$

Odrębnego potraktowania wymaga określenie dewiatora \tilde{N} w punkcie przecięcia powierzchni π_1 i π_2 tzn. w wierzchołku krzywej stałej dysypacji. W tym punkcie pięć składowych dewiatora \underline{D} musi spełnić dodatkowy warunek $J_D = \cos 3\beta$. Warunek ten będzie traktowany jako więzy nałożone na tensor \underline{D} i w związku z tym równanie (7.4)₂ zapiszemy w postaci :

$$(7.9) \quad \tilde{N} = \frac{\partial \pi_1 \gamma_0}{\partial D} - \mu_1 \frac{\partial k(J_D)}{\partial D}, \quad \text{lub}$$

$$(7.9) \text{ c.d.} \quad \tilde{N} = \frac{\partial \Pi_1 \gamma_0}{\partial D'} + \mu_2 \frac{\partial k(J_D)}{\partial D'}$$

gdzie $k(J_D) = J_D - \cos 3\beta = 0$, jest równaniem więzów a μ_1 i μ_2 są dodatnimi mnożnikami Lagrange'a. Znak " - " w pierwszym z równań (7.9) wynika ze zwrotu normalnej do płaszczyzny $k(J_D) = 0$, Rys. 10.

Oznaczając $\partial k / \partial D' = \tilde{M}$ równania (7.9) zapiszemy w dogodniejszej postaci :

$$(7.10) \quad \tilde{N} = \overset{(1)}{\tilde{N}} - \mu_1 \tilde{M}, \quad \text{lub}$$

$$\tilde{N} = \overset{(2)}{\tilde{N}} + \mu_2 \tilde{M},$$

$$\text{a stąd} \quad \tilde{M} = \left(\overset{(1)}{\tilde{N}} - \overset{(2)}{\tilde{N}} \right) / (\mu_1 + \mu_2).$$

Jak łatwo sprawdzić równania te są w naszym przypadku spełnione ze względu na zachodzącą równość :

$$\frac{\partial}{\partial D'} [\gamma_0 (\Pi_1 - \Pi_2)] = (\mu_1 + \mu_2) \frac{\partial k}{\partial D'},$$

wynikającą z faktu, że związek $k(J_D) = 0$ jest rozwiązaniem układu równań :

$$\partial_0 = 3 C_0 \Pi_1(J_D) \gamma_0,$$

$$\partial_0 = 3 C_0 \Pi_2(J_D) \gamma_0,$$

ważnym dla dowolnego ∂_0 . Powyższy układ równań wyraża warunek równej dysypacji na obu odcinkach krzywej.

Na podstawie (7.10) możemy zapisać :

$$\tilde{N} = 1/2 \left[\overset{(1)}{\tilde{N}} + \overset{(2)}{\tilde{N}} + (\mu_1 - \mu_2) \tilde{M} \right] \quad \text{lub}$$

$$\tilde{N} = a \overset{(1)}{\tilde{N}} + (1-a) \overset{(2)}{\tilde{N}},$$

gdzie $a = \mu_2 / (\mu_1 + \mu_2)$, $0 < a < 1$.

Ostatecznie tensor naprężenia w przypadku warunku Coulomba - Mohra wyraża się wzorem :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_0 \underline{\underline{1}} + 3(C_0 - C_1 \sigma_0) \underline{\underline{N}} ,$$

gdzie :

$$\underline{\underline{N}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} (1) \\ \underline{\underline{N}} \end{pmatrix} , & \text{gdy } \cos 3\beta < J_0 < 1 , \\ \begin{pmatrix} (2) \\ \underline{\underline{N}} \end{pmatrix} , & \text{gdy } -1 < J_0 < \cos 3\beta , \\ a \begin{pmatrix} (1) \\ \underline{\underline{N}} \end{pmatrix} + (1-a) \begin{pmatrix} (2) \\ \underline{\underline{N}} \end{pmatrix} , & \text{gdy } J_0 = \cos 3\beta , \end{cases}$$

a dewiatory $\begin{pmatrix} (1) \\ \underline{\underline{N}} \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} (2) \\ \underline{\underline{N}} \end{pmatrix}$ określone są wzorami (7.7) i (7.8).

IV RÓWNANIA KONSTITUTYWNE DLA MATERIAŁÓW Z TARCIEM WEWNĘTRZNYM

Materiały z tarciem wewnętrznym ze względu na swą złożoną wewnętrzną strukturę (np. beton, skały) charakteryzują się zwykle nieliniowym i niesprężystym zachowaniem, co zdecydowanie utrudnia przejrzysty opis zjawisk zachodzących w procesie obciążania materiału. Z tego też względu brak jest w chwili obecnej powszchnie akceptowanego modelu matematycznego wyrażającego związek pomiędzy strumieniem naprężenia i prędkością odkształceń dla materiałów takich jak beton. W zależności od celu badań i specyfiki zagadnienia stosuje się bardzo różne modele od liniowo-sprężystego i sprężysto-kruchego poczynając na na sprężysto-plastycznych i lepko-plastycznych kończąc. Przegląd modeli konstytutywnych betonu można znaleźć w pracy W.F. CHEN'a [18].

Podjęty w ostatnich latach szeroki program badawczy betonu w wielu ośrodkach europejskich i amerykańskich [15,19,20] umożliwi z pewnością stworzenie w najbliższych latach względnie dokładnego modelu tego ważnego materiału konstrukcyjnego.

W niniejszej pracy skupimy się na równaniach przyrostowych ciała sprężysto-plastycznego o niestowarzyszonym prawie płynięcia.

Niestowarzyszone prawa płynięcia plastycznego, których ogólną postać podali w latach 60-tych MRÓZ [21],[22] i MANDEL [23], stosowane były do opisu zachowania skały i gruntu przez RUDNICKIEGO i RICE'a [24], metalu przez GURSON'a [25], betonu przez BAŻANTA [26] i piasku przez LADE i DUNCAN'a [1]. Na ogół stwierdza się, że prawa tego typu pozwalają wierniej niż prawa stowarzyszone opisać zachowanie materiału, gdyż stosowanie tych ostatnich prowadzi zwykle do zawyżonych oszacowań wzrostu objętości podczas deformacji plastycznej w stosunku do wielkości obserwowanych eksperymentalnie.

B. Warunek plastyczności

Jako warunek plastyczności dla materiałów z tarciami wewnętrznym może być wykorzystany po pewnych modyfikacjach warunek stanu granicznego przedstawiony w rozdziale II p. 4. Modyfikacje te polegać muszą na pewnej zmianie kształtu powierzchni plastyczności w płaszczyźnie $\tau_0 = \sigma_0$, gdyż powierzchnia ta musi być zamknięta, dopuszczającą powstanie odkształceń nieodwracalnych przy ścisaniu hydrostatycznym na co wskazują np. wyniki badań doświadczalnych betonu [15,27]. Pierwotna powierzchnia plastyczności podczas procesu obciążenia zmienia się przechodząc w nowe powierzchnie plastyczności, których obwiednia jest powierzchnią zniszczenia materiału. Zmiana kształtu i położenia powierzchni plastyczności opisana być musi odpowiednim prawem ewolucji, możliwie wiernie odtwarzającym rzeczywiste zachowanie materiału. W chwili obecnej brak jest dostatecznej ilości badań doświadczalnych w trójosiowych stanach naprężenia dla złożonych dróg obciążeń, które umożliwiłyby utworzenie odpowiednio precyzyjnego modelu dla ma-

teriałów z tarciem wewnętrznym. Jednym z najlepiej przebadanych materiałów jest z pewnością beton, lecz i w tym przypadku istniejące testy zostały przeprowadzone dla szczególnych, łatwych do zrealizowania ścieżek obciążenia. Istniejące w tej chwili modele jak np. propozycja BAŽANTA [26], MRDZA, NORRISA, i ZIENKIEWICZA [28], FARDISA, ALIBE i TASOULASA [29] upraszczają z konieczności kształt i kinematykę aktualnej powierzchni plastyczności.

W dalszej części tej pracy interesować nas będą wyłącznie obciążenia rosnące monotonicznie. Założymy, iż dostatecznie dokładny opis takich procesów uzyskamy stosując model izotropowego wzmocnienia materiału. W takim przypadku kształt i rozmiary powierzchni plastyczności zależą będą od jednego skalar- nego parametru związanego z historią obciążenia.

Równanie powierzchni plastyczności zapiszemy uogólniając związek (5.1) w postaci :

$$(8.1) \quad F(\underline{\sigma}) = C_1 P(J) \gamma_0 + C_2 \gamma_0^2 + f(\sigma_0) = 0 \quad ,$$

gdzie C_1 , C_2 są stałymi, $f(\sigma_0)$ funkcją zależną od średniego naprężenia, opisującą kształt powierzchni plastyczności w płaszczyźnie $\gamma_0 - \sigma_0$.

Postać funkcji $f(\sigma_0)$ powinna być dobrana na podstawie danych doświadczalnych. Dla betonu np. wyniki eksperymentów SCHICKERTA i WINKLERA [15], oraz LAUNAY, GACHON i POITEVIN'a [27] pozwalają przyjąć:

$$(8.2) \quad f(\sigma_0) = (C_0 - \sigma_0) \sqrt{\frac{m + \sigma_0 - C_0}{m - \sigma_0 + C_0}} \quad ,$$

gdzie C_0 i m są stałymi. Zmieniając wartość parametru m od pewnej stałej m_0 do $m \rightarrow \infty$ otrzymamy rodzinę krzy-

wych zamkniętych w płaszczyźnie $\tau_0 - \sigma_0$ przechodzących w powierzchnię zniszczenia gdy $m \rightarrow \infty$. Wielkość m_0 odpowiada pierwszej powierzchni plastyczności i może być np. dla betonu przyjęta: $m_0 = 0.25 f_c$, gdzie f_c jest naprężeniem niszczącym przy jednoosiowym ściskaniu. Kształt krzywych otrzymanych przez przecięcie powierzchni plastyczności płaszczyzną $\tau_0 - \sigma_0$, dla różnych wartości parametru m przedstawia Rys.11.

9. Funkcja potencjału plastycznego. Równania konstytutywne

Funkcje potencjału plastycznego przyjmiemy w postaci zbliżonej do warunku plastyczności (8.1):

$$(9.1) \quad \mathcal{G}(\underline{\sigma}) = B_1 P_0(J) \tau_0 + B_2 \tau_0^2 + g(\sigma_0) = 0,$$

gdzie, analogicznie jak w równaniu (8.1), $B_1, B_2 = \text{const.}$ a $g(\sigma_0)$ jest funkcją średniego naprężenia σ_0 . Szczegółowej postaci funkcji $g(\sigma_0)$ nie będziemy tu zakładać gdyż na podstawie obecnie dostępnych danych doświadczalnych niezwykle trudno byłoby zweryfikować to założenie.

Przyjęta zgodnie z równaniem (9.1) funkcja potencjału pozwala zapisać związki między przyrostami naprężenia i deformacji w następującej postaci:

$$(9.2) \quad \underline{\tilde{D}} = \underline{\tilde{D}}^e + \underline{\tilde{D}}^p = \underline{\tilde{E}} \underline{\tilde{\sigma}} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \underline{\sigma}} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \frac{\Delta \underline{\sigma}}{h} \right),$$

gdzie $\underline{\tilde{E}}$ oznacza tensor stałych sprężystych, h jest skalarą funkcją zależną od historii obciążenia, a $\underline{\tilde{\sigma}}$ oznacza obiektywny przyrost naprężenia. Stosując oznaczenia wprowadzone przez RUDNICKIEGO i RICEA [24] oraz RANIECKIEGO i BRUHNSA [30], równaniu (9.2) nadamy nieco odmienną formę:

$$(9.3) \quad \underline{D} = \underline{\varepsilon} \frac{\Delta}{\underline{\sigma}} + \alpha / h \mu^0 (\mu^0 \cdot \frac{\Delta}{\underline{\sigma}}) ,$$

gdzie :

$$\mu^0 = \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{\sigma}' / r_0 + \eta^0 \underline{\varepsilon} + \beta \underline{1} ,$$

$$\mu^* = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{\sigma}' / r_0 + \eta^* \underline{\varepsilon} + \mu \underline{1} ,$$

$$\underline{\varepsilon} = r_0 \partial J / \partial \underline{\sigma} = \sqrt{2} \underline{\sigma}' / r_0 - J \underline{\sigma}' / r_0 ,$$

$$\eta^0 = 3P'_0 / (P_0 + 2B_2 r_0 / B_1) ,$$

(9.4)

$$\eta^* = 3P'_1 / (P_1 + 2C_2 r_0 / C_1) ,$$

$$P'_0 = \partial P_0 / \partial J , \quad P'_1 = \partial P_1 / \partial J ,$$

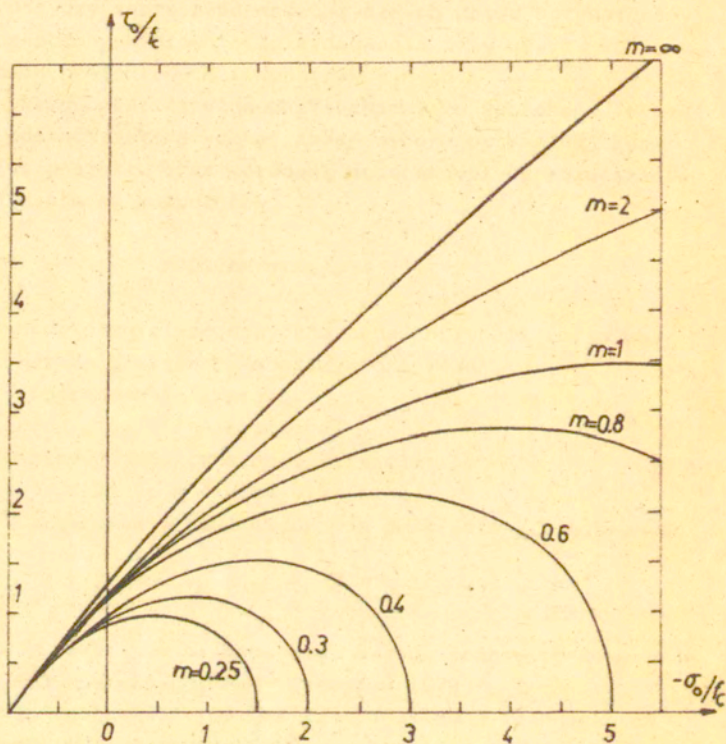
$$\beta = \frac{\partial g / \partial \sigma_0}{P_0 B_1 + 2 B_2 r_0} ,$$

$$\mu = \frac{\partial f / \partial \sigma_0}{P C_1 + 2 C_2 r_0} ,$$

oraz $\alpha = 1$ gdy $\mu^0 \cdot \frac{\Delta}{\underline{\sigma}} > 0$ i $F(\underline{\sigma}) = 0$,

$\alpha = 0$ gdy $\mu^0 \cdot \frac{\Delta}{\underline{\sigma}} < 0$ lub $F(\underline{\sigma}) < 0$.

Występująca w równaniach (9.4) funkcja η^0 określa kąt w płaszczyźnie dewiatorowej o jaki kierunek przyrostu deformacji odchyła się od kierunku dewiatora naprężenia. Jest ona bardzo kłopotliwa do wyznaczenia z danych doświadczalnych na co przykładem może być pokazana na Rys. 12 zależność pomiędzy kątem nachylenia wektora przyrostu odkształceń w płaszczyźnie dewiatorowej φ_0 a stanem naprężenia. Zależność ta została określona dla betonu na podstawie badań KUPFERA [13], TASUJI i in. [14], SCHICKERTA i WINKLERA [15]. Analiza tych wykresów nie pozwala sprecyzować żadnej konkretnej zależności pomiędzy



Rys.11 - Powierzchnie plastyczności

kątem φ_0 a stanem naprężenia, stąd też zwykle zakłada się, że kierunek przyrostu deformacji pokrywa się z kierunkiem dwiatora naprężenia (por. [24,26]) tzn $\eta^0 = 0$, wynik ten uzyskamy przyjmując $P_0(J) = 1$.

Równania (9.3) można rozwiązać względem $\underline{\underline{\Delta}}$ uzyskując:

$$(9.5) \quad \underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{D}} - \alpha_1/H \underline{\underline{\Lambda}}^0 (\underline{\underline{\Lambda}}' \cdot \underline{\underline{D}}) ,$$

gdzie $\underline{\underline{L}}$ jest tensorem stałych sprężystych,

$$H = h + \mu^* \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^0 ,$$

$$\underline{\underline{\Lambda}}' = \mu^* \cdot \underline{\underline{L}} ,$$

$$\underline{\underline{\Lambda}}^0 = \underline{\underline{L}} \cdot \mu^0 ,$$

Przyjmując $L_{ijkl} = G(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda \delta_{ij}\delta_{kl}$

gdzie G i λ są stałymi Lamé'go otrzymamy:

$$(9.6) \quad \begin{aligned} H &= h + 6G + 9\mu\beta K , \\ \underline{\underline{\Lambda}}^0 &= 2G \underline{\underline{\sigma}} / \tau_0 + 3\beta K \underline{\underline{1}} , \\ \underline{\underline{\Lambda}}' &= 2G(\underline{\underline{\sigma}} / \tau_0 + \eta^* \underline{\underline{\varepsilon}}) + 3\mu K \underline{\underline{1}} , \end{aligned}$$

gdzie K oznacza moduł ściśliwości.

W następnym rozdziale interesować nas będzie szczególnie jednoosiowy stan naprężenia, dla którego równania (9.5) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Delta}}_{11} &= 0 , \quad \underline{\underline{\Delta}}_{22} = 0 , \quad \underline{\underline{\Delta}}_{33} = E_t D_{33} , \\ \underline{\underline{\Delta}}_{12} &= 0 , \quad \underline{\underline{\Delta}}_{13} = 2G D_{13} , \quad \underline{\underline{\Delta}}_{23} = 2G D_{23} , \end{aligned}$$

z których wynika: $D_{11} = D_{22} = -\chi D_{33}$, gdzie:

$$(9.7) \quad \begin{aligned} E_t &= E / (1 + \mu_{33}^0 \mu_{33}^* E/h) , \\ \chi &= (\nu - E/h \mu_{11}^0 \mu_{33}^*) E_t / E , \end{aligned}$$

$$\mu_{11}^0 = 1/\sqrt{2} + \beta , \quad \mu_{33}^0 = -\sqrt{2} + \beta , \quad \mu_{33}^* = -\sqrt{2} + \mu ,$$

ν - oznacza współczynnik Poissona, E - moduł Younga.

Ponieważ funkcje χ oraz E_c dają się łatwo wyznaczyć doświadczalnie podczas jednoosiowego ściskania to na ich podstawie można określić zależność β od stanu naprężenia oraz $\mu_{33} \cdot E/h$. Jeden z nieznanymi parametrów tzn. E/h lub μ musi być więc wyznaczony z innych danych lub przyjęty hipotetycznie. Np. współczynnik μ obliczyć można z równania (9.4) gdy znane jest prawo ewolucji powierzchni plastyczności.

10. Funkcje materiałowe dla betonu

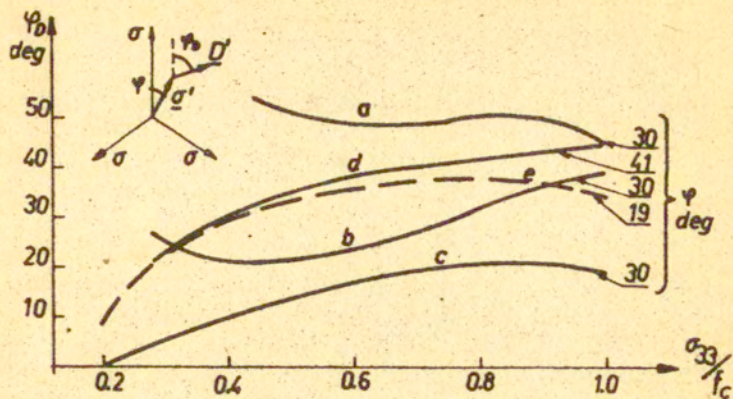
Określimy teraz funkcje β , E/h , μ w zależności od stanu naprężenia podczas jednoosiowego ściskania próbek betonowych. Rys. 13(a,b,c) przedstawia wykresy zależności $\beta(x)$, gdzie $x = -\sigma_{33}/f_c$ wyznaczone na podstawie danych eksperymentalnych dla czterech różnych typów betonu, dane te pochodzą ze wspomnianych już prac: Kupfera, Tasuji i in., Schickerta i Winklera. Krzywe te aproksymować można równaniem:

$$\beta = a - b \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - cx + 1},$$

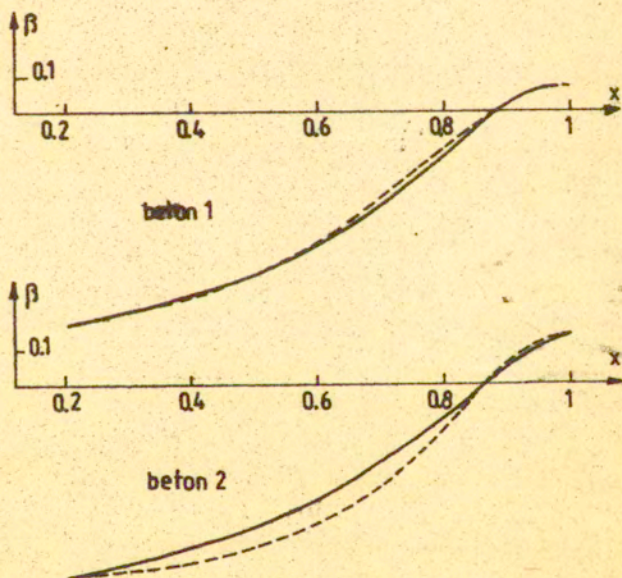
gdzie a , b , c są stałymi.

Linie przerywane na Rys. 13 pokazują zależności $\beta(x)$ wyliczone w/g tego równania. Jakkolwiek proponowana tu zależność nie jest z pewnością idealna to oddaje ona lepiej zachowanie materiału niż np. używana przez FARDISA, ALIBE i TASSOULASA [29] liniowa aproksymacja z punktem zerowym przy $x = 0.9$.

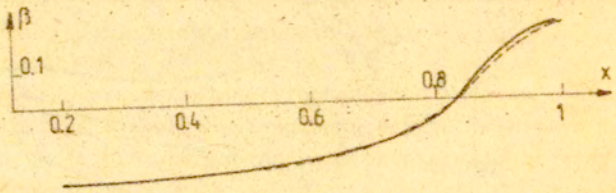
Funkcję $\mu(x)$ można wyznaczyć z przyjętego równania ewolucji powierzchni plastyczności. Jeżeli przyjmiemy proponowane w p. 8 równania (8.1) i (8.2) to dla betonu o parametrach analogicznych jak w p. 5 otrzymamy krzywą przedstawioną na Rys. 13c



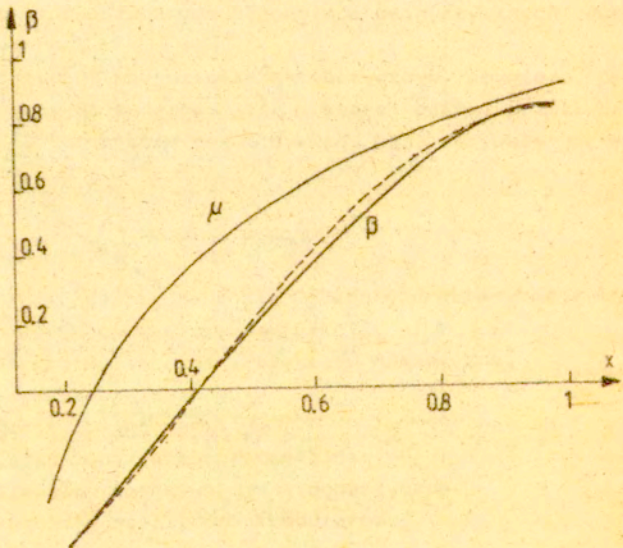
Rys.12 - Zależność $\varphi_0(x)$ dla różnych betonów.



Rys.13a - Funkcja $\beta(x)$ dla betonu Kupfera



Rys. 13b - Funkcja $\beta(x)$ dla betonu Tasuji, Nilsona i Slate.



Rys. 13c - Funkcje $\beta(x)$ dla betonu Schickerta i Winklera.
Funkcja $\mu(x)$ w/g równ. (8.2)

Krzywa ta swym kształtem najbardziej przypomina krzywą $\beta(x)$ obserwowaną w badaniach Schickerta i Winklera, a ponieważ kształty tych krzywych cechować musi pewna analogia, przynajmniej w pierwszym okresie deformacji plastycznej, to zaproponowane równanie ewolucji powierzchni plastyczności może być wykorzystane tylko dla materiałów o własnościach zbliżonych do betonu Schickerta i Winklera. Dla wiernego opisu wyników innych badań betonu zastosować można formułę :

$$\mu = \beta + a x + b ,$$

która zapewni zbieżność współczynników β i μ na początku deformacji plastycznej.

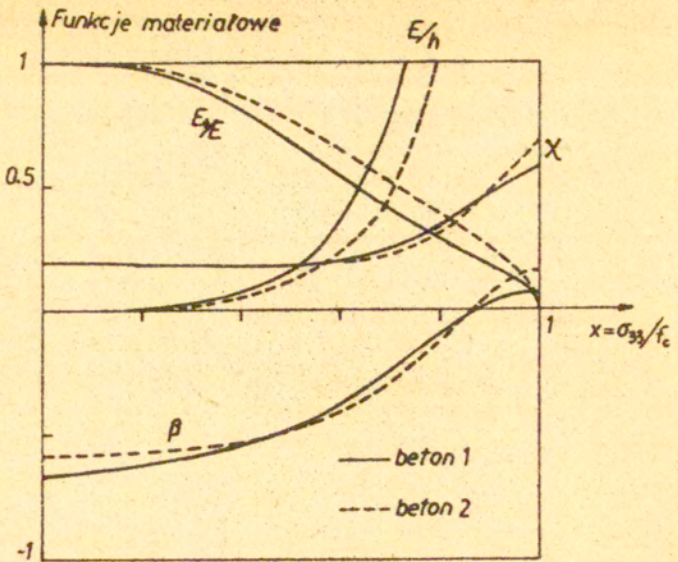
Względny moduł wzmocnienia E/h będzie można już określić bezpośrednio z równań (9.7), jeżeli znana jest zależność $E_c(x)$. Wymaga to użycia wzoru aproksymującego wyniki badań doświadczalnych. Popularny, szeroko stosowany do opisu zależności $\sigma - \epsilon$ dla betonu wzór Saenz'a [14,18,19] nie może spełnić tego zadania, gdyż wynika z niego np. wzrost modułu stycznego E_c wraz ze wzrostem naprężeń ściskających dla betonów badanych przez Tasuji oraz Schickerta i Winklera. Dlatego też lepiej związek $\sigma - \epsilon$ oddaje równanie :

$$\epsilon = f_c/E [x + (\epsilon_u E/f_c - 1)(1 - \sqrt{1 - x^2})],$$

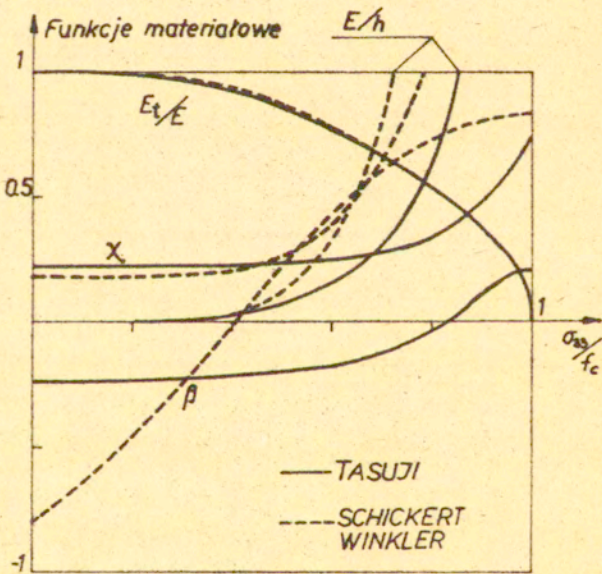
gdzie ϵ_u jest odkształceniem podłużnym obserwowanym podczas zniszczenia próbki betonowej. Równanie to po zróżniczkowaniu daje :

$$\frac{E_c}{E} = \left[1 + 2 x^2 \frac{(\epsilon_u E/f_c - 1)}{\sqrt{1 - x^2}} \right]^{-1} .$$

Funkcje β , μ , χ , E_c/E oraz E/h wyznaczone dla betonu



Rys.14 - Funkcje materiałowe dla betonu Kupfera



Rys.15 - Funkcje materiałowe dla betonu Tasuji i in. oraz Schickerta i Winklera

badanego przez Kupfera, Tasuji oraz Schickerta i Winklera przedstawione są na Rys. 14 i Rys.15 .

V BIFURKACJA W MATERIAŁACH Z TARCIEM WEWNĘTRZNYM

Ogólne kryteria równowagi i jednoznaczności rozwiązania dla ciał sprężysto-plastycznych opisanych równaniami konstytutywnymi typu przyrostowego zostały podane przez HILLA [31] w końcu lat 50-tych. Warunki te obejmowały ciała o stowarzyszonych prawach płynięcia plastycznego.

Dla materiałów z tarcie wewnętrznym opisanych równaniami z niestowarzyszonymi prawami płynięcia, warunek ten należało zastąpić innym, uwzględniającym różnice kierunków normalnej do powierzchni plastyczności i tensora przyrostów plastycznej części deformacji. Pierwszy z takich warunków dla małych deformacji i jednorodnych procesów odkształceń został sformułowany w roku 1966 przez MROZA [22], ogólne kryterium obejmujące skończone deformacje zostało podane w roku 1979 przez RANIECKIEGO [30,32]. Kryterium to uogólnia ciało porównawcze Hilla dla niestowarzyszonych praw płynięcia wprowadzając rodzinę jedno-parametrowych liniowych ciał porównawczych, pozwalających określić dolną granicę naprężeń krytycznych. Granica górna określana jest poprzez rozwiązanie problemu dla innego liniowego ciała, równoważnego rzeczywistemu sprężysto-plastycznemu ciału w obciążeniu.

Kryterium Ranieckiego stosowane było przy rozwiązywaniu problemów brzegowych przez BRUHNSA i RANIECKIEGO [33] do szacowania obciążeń krytycznych ściskanych próbek walcowych, przez TVERGARDA [34] do analizy rozciąganych próbek metalowych, KLEIBERA [35], który analizował powstawanie "szyjki" podczas

prób rozciągania, ostatnio stosowali je FATNASSI, TOMITA
i SHINDO [36] w analizując rozciągane płyty metalowe.

11. Ogólne kryterium bifurkacji dla materiałów z niestowarzyszonymi prawami płynięcia plastycznego

Wprowadzimy zaproponowany przez RANIECKIEGO i BRUHNSA [30] liniowe względem przyrostów odkształcenia ciała porównawcze, określone przez następujące równania konstytutywne :

$$(11.1) \quad \underline{\dot{\sigma}} = \underline{L} \underline{D} - \frac{1}{4Hr} (\underline{\Lambda}^0 + r \underline{\Lambda}^1) (\underline{\Lambda}^0 + r \underline{\Lambda}^1) \cdot \underline{D}$$

gdzie r jest dodatnim parametrem.

Równaniu temu można nadać odmienną postać wykorzystując zależność między strumieniem naprężenia a przyrostem naprężeń nominalnych :

$$(11.2) \quad \underline{\dot{S}} = \underline{\dot{\sigma}} + \underline{\mathcal{L}} \underline{v}^T$$

gdzie : $\underline{\dot{S}}$ - jest niesymetrycznym tensorem przyrostu naprężeń nominalnych, $\underline{\mathcal{L}}$ - symetryczną funkcją tensorową zależną od tensora naprężenia i wyboru strumienia naprężenia (por. [30]), \underline{v} - jest gradientem pola prędkości v tzn. $v_i = \partial v_i / \partial x_j$.

Dla pochodnej Oldroyda tensora naprężenia Kirchhoffa związek (11.2) przyjmie postać :

$$(11.3) \quad \underline{\dot{S}} = \underline{\dot{\sigma}} + \underline{\sigma} \underline{v}_T \quad , \quad \text{tzn.} \quad \mathcal{L}_{,ijk} = \sigma_{ij} \delta_{ik}$$

Tak więc jeżeli w równaniu (11.1) jako strumień naprężenia przyjmiemy konwekcyjną pochodną (Oldroyda) tensora Kirchhoffa to równanie to przyjmie postać następującą :

$$(11.4) \quad \underline{\dot{S}} = \underline{L} \underline{D} - \frac{1}{4Hr} (\underline{\Lambda}^0 + r \underline{\Lambda}^1) (\underline{\Lambda}^0 + r \underline{\Lambda}^1) \cdot \underline{D} + \underline{\sigma} \underline{v}_T$$

Dla tak określonego ciała porównawczego zbudujemy funkcjonał:

$$(11.5) \quad R_L(\underline{v}) = \int_{\Omega} [W_L(\underline{D}) + 1/2 \underline{v}^T \underline{L} \underline{v}] d\Omega,$$

$$\text{gdzie } W_L(\underline{D}) = \frac{1}{2} \underline{D} \cdot \underline{L} \underline{D} - \frac{1}{8Hr} [(\underline{\Lambda}^* + r\underline{\Lambda}^*) \cdot \underline{D}]^2,$$

a Ω oznacza obszar zajmowany przez ciało. Jest to uproszczona postać (pominęto siły odśrodkowe i obciążenie śledzące) ogólnego funkcjonału rozpatrywanego w pracy PANIECKIEGO i BRUHNSA [30].

Można udowodnić [30,33], że dodatnia wartość funkcjonału R_L gwarantuje jednoznaczność rozwiązania dla ciała sprężysto-plastycznego. Pole prędkości dla którego $R_L = 0$ daje dolną granicę naprężeń krytycznych dla ciała rzeczywistego. Dokładność oszacowania tej granicy zależy od doboru parametru r , który może być funkcją zależną od położenia punktu.

12. Kryterium bifurkacji dla ściskanego pręta

W dalszej części pracy zajmować się będziemy ważnym z praktycznego punktu widzenia przypadkiem bifurkacji ściskanego pręta z materiału sprężysto-plastycznego nie podlegającego stwarższonym prawom płynięcia. Pręt taki stanowi model wielu elementów konstrukcyjnych jak słupy betonowe lub kolumny wykonane z materiałów skalnych.

Problem określenia naprężeń krytycznych dla kolumny niesprężystej (przy pewnych założeniach upraszczających, dotyczących kształtu kolumny oraz przybliżonego rozwiązania zagadnienia na wartości własne) został rozwiązany przez HILLA i SEWELLA [37]. W niniejszej pracy nie będziemy korzystać z tych założeń, a je-

dyne ograniczenia dotyczyć będą adekwatności założonego pola prędkości do rodzaju rozwiązywanego problemu. Dla zagadnienia bifurkacji ściskanej kolumny pole takie zaproponował PEARSON [38] analizując stateczność sprężystego pręta.

Stan naprężenia w ściskanej kolumnie określony jest równaniami :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0 \quad , \quad \sigma_{33} = -\sigma \quad ,$$

dla ciała izotropowego warunki te powodują powstanie związków między składowymi tensora prędkości odkształceń :

$$(12.1) \quad D_{11} = D_{22} = -\chi D_{33} \quad ,$$

gdzie χ jest funkcją zależną od stanu naprężenia (por. równ. (9.7)). Uwzględniając ten związek wyliczymy teraz wyrażenie podcałkowe występujące w równaniu (11.5), dzieląc je na trzy czynniki :

$$(12.2) \quad W^{\infty}(\underline{D}) = \frac{1}{2} \underline{D} \cdot \underline{L} \underline{D} = \frac{1}{2} E \left[1 + 2 \frac{(\chi - \nu)^2}{1 - \nu - 2\nu^2} \right] D_{33}^2$$

$$(12.3) \quad \frac{1}{8Hr} [(\underline{\Lambda}^0 + r \underline{\Lambda}^*) \cdot \underline{D}]^2 = \frac{G^2 D_{33}^2}{8 H r} (\Gamma + r \Phi)^2 \quad ,$$

gdzie

$$\Gamma = -2\sqrt{2} (1+\chi) + 3\beta K/G (1-2\chi) \quad ,$$

$$\Phi = -2\sqrt{2} (1+\chi) + 3\mu K/G (1-2\chi) \quad ,$$

$$(12.4) \quad \underline{V}^T \cdot \underline{\alpha} \underline{V}^T = V_{1j} \alpha_{jkl} V_{3k} = -\sigma V_{13} V_{33} \quad .$$

Maksymalizując (w celu otrzymania najlepszego oszacowania) wartość wyrażenia (12.3) względem parametru r otrzymamy :

$$\text{Max} \left(\frac{1}{8Hr} [(\underline{\Lambda}^0 + r \underline{\Lambda}^*) \cdot \underline{D}]^2 \right) = \frac{G^2 D_{33}^2}{2 H} \Gamma \Phi \quad ,$$

co pozwala zapisać funkcjonal R_L (11.5) w następującej postaci :

$$(12.5) \quad R_L = \frac{1}{2} \int [E_c D_{33}^2 + 4G(D_{15}^2 + D_{23}^2) + \sigma_{33} V_{i3} V_{i3}] d$$

gdzie E_c oznacza moduł dla ciała porównawczego określony równaniem :

$$(12.6) \quad E_c = E \left[1 + 2 \frac{(\chi_c - \gamma)^2}{1 - \gamma - 2\gamma^2} \right] - \frac{G2}{H} \Gamma \Phi$$

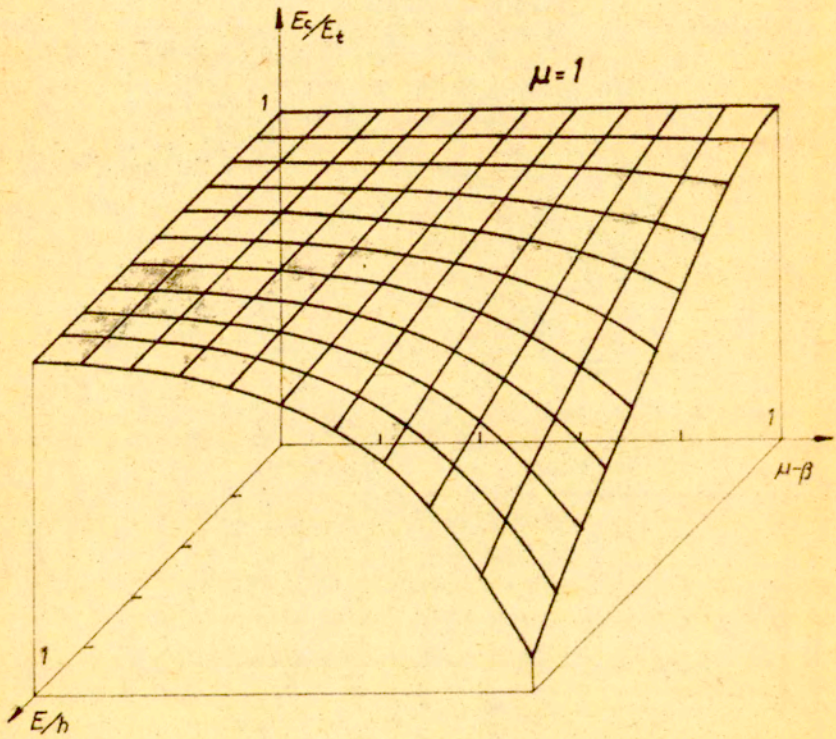
W równaniu tym χ_c oznacza stosunek przyrostu deformacji poprzecznej do podłużnej w pręcie (równ. (12.1)) dla ciała porównawczego :

$$(12.7) \quad \chi_c = \frac{2\lambda + (\Lambda_{11}^* \Lambda_{33}^* + \Lambda_{11}^* \Lambda_{33}^*)/H}{4(G + \lambda - \Lambda_{11}^* \Lambda_{11}^*/H)}$$

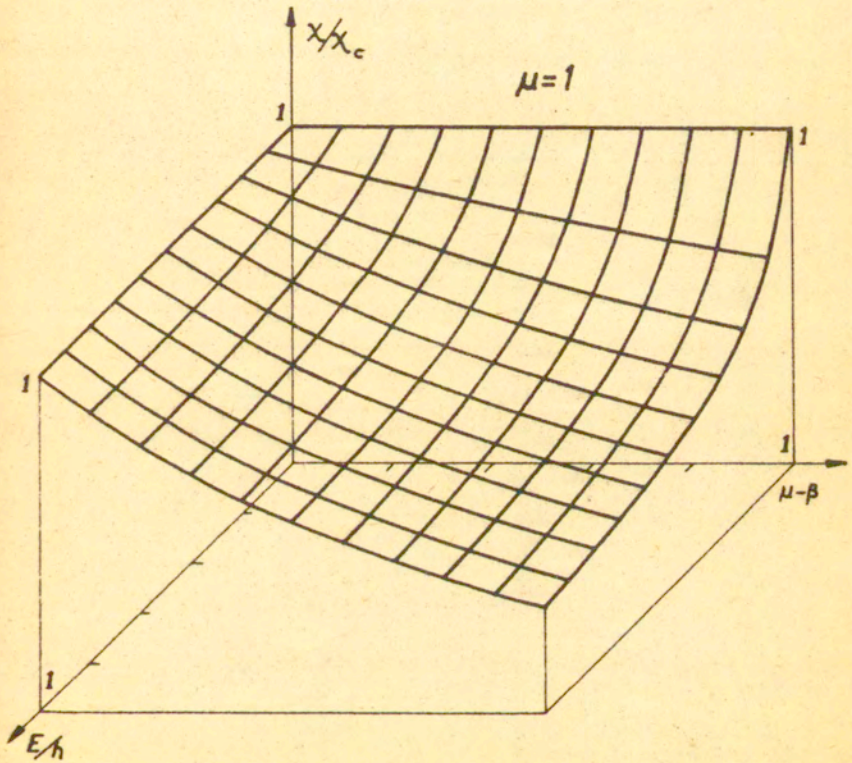
gdzie G i λ są stałymi sprężystymi Lamego.

Rysunki 16 i 17 pokazują zależności między modułami dla ciała porównawczego i rzeczywistego w zależności od stopnia "niestowarzyszoneści" prawa przyjęcia określonego różnicą parametrów μ i β oraz w zależności od względnego modułu wzmocnienia E/h . Ciekawa jest tu mniejszość modułu E_c od E , i przeciwnie, większość współczynnika χ_c od χ , co charakteryzuje ciało porównawcze jako bardziej podatne niż odpowiadające mu ciało sprężysto-plastyczne. Dla stowarzyszonych praw przyjęcia, gdy $\beta = \mu$ otrzymujemy równość modułów, co wiąże się z równoważnością ciała porównawczego i sprężysto-plastycznego w obciążeniu dla praw tego typu. Ogólny dowód tych nierówności można znaleźć w dodatku zamieszczonym na końcu pracy.

Wykorzystamy teraz równanie (12.5) do określenia dolnej



Rys. 16 - Stosunek modułu dla ciała porównawczego E_c do modułu stycznego ciała rzedzywistego E_s .



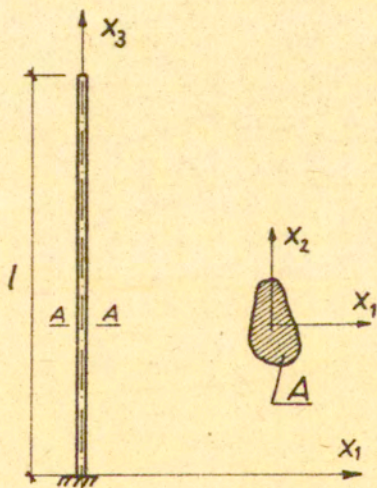
Rys. 17 - Stosunek współczynnika χ dla ciała rzeczywistego do χ_c dla ciała porównawczego

granicy naprężeń krytycznych w ściskany słupie.

Założymy układ współrzędnych zgodnie z Rys.18, w którym równania pola prędkości PEARSONA [38] określone są następująco:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= u(z) = \chi/2 (x_1^2 - x_2^2)/l^2 u''(z), \\
 (12.8) \quad v_2 &= \chi x_1 x_2 / l^2 u''(z), \\
 v_3 &= -x_1 / l u'(z),
 \end{aligned}$$

gdzie χ jest wektorem prędkości punktów kolumny, x_1, x_2, x_3 - współrzędnymi zgodnie z Rys. 18, l - długością kolumny, $z = x_3/l$ - bezwymiarową współrzędną mierzoną wzdłuż osi kolumny, $u(z)$ - funkcją określającą prędkość punktów leżących na osi.



Rys. 18 - Układ współrzędnych związany z kolumną

Dla określenia dolnej granicy naprężeń krytycznych we wzorach (12.8) należy przyjąć $\chi = \chi_c$.

Podstawiając równania pola (12.8) do warunku jednoznaczności $R_L > 0$ (12.5) otrzymamy :

$$(12.9) \quad R_L = (E_c - \sigma) A / (2 I^2) \int_0^1 (i_1^2 / I^2 (u^{(1)})^2 + \\ + \gamma (u^{(1)})^2 - [(u^{(1)})^2 - \xi u^3 u^{(1)}] \sigma / (E_c - \sigma)) dz,$$

gdzie A jest polem przekroju poprzecznego kolumny, $u^1 = du/dz$,

$$\gamma = \frac{\chi_c^2 j_o^4 (G - \sigma)}{4 I^4 (E - \sigma)}$$

$$(12.10) \quad \xi = \chi_c (i_2^2 - i_1^2) / I^2,$$

$$i_1^2 = 1/A \int_A x_1^2 dA, \quad i_2^2 = 1/A \int_A x_2^2 dA,$$

$$j_o^4 = 1/A \int_A (x_1^2 + x_2^2)^2 dA.$$

Wyrażenie oznaczone przez γ można interpretować jako wpływ odkształceń postaciowych na odkształcenie osi pręta, a ξ pozwala uwzględnić nierówność sztywności zginania pręta względem prostopadłych do siebie osi.

Warunek stacjonarności funkcjonału R_L prowadzi do następującego równania różniczkowego :

$$(12.11) \quad \psi u^{(4)} - u^{(1)} - \omega u = \text{const.},$$

z warunkami brzegowymi :

$$u(0) = 0, \quad u^1(0) = 0, \quad u^{(1)(0)} = 0,$$

$$(12.12) \quad \gamma u^{(1)(1)} + \xi / (E_c / \sigma - 1) u^1(1) = 0,$$

$$u^{(1)(1)} - \psi u^{(4)}(1) = 0,$$

gdzie :

$$(12.13) \quad \psi = \gamma / [1_1^2 / 1^2 - \xi / (E_c / \sigma - 1)] ,$$

$$\omega = [1_1^2 / 1^2 (E_c / \sigma - 1) - \xi]^{-1} ,$$

Rozwiązaniem równania (12.11) jest funkcja :

$$u(z) = U_1 \sin(qz) + U_2 [1 - \cos(qz)] + U_3 \operatorname{sh}(pz) + U_4 [1 - \operatorname{ch}(pz)]$$

gdzie $U_1 \dots U_4 = \text{const.}$,

$$p^2 = \frac{\sqrt{1 + 4\omega\psi} + 1}{2\psi} ,$$

$$q^2 = \frac{\sqrt{1 + 4\omega\psi} - 1}{2\psi} ,$$

a spełnienie warunków brzegowych (12.12) jest związane z równaniem :

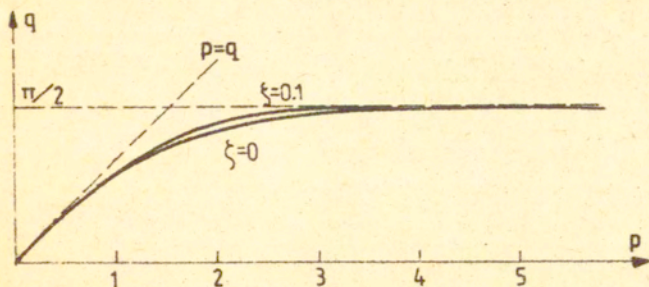
$$(12.14) \quad \frac{\operatorname{th}(p)}{p(1/p^2 - \xi/2)^2} = \frac{\operatorname{tg}(q)}{q(1/q^2 + \xi/2)^2}$$

Rozwiązanie tego równania w postaci krzywej na płaszczyźnie $p - q$ przedstawia Rys. 19. Na Rys. 20 przedstawiono to rozwiązanie na płaszczyźnie $\psi - \sigma$ co pozwoliło porównać je z przybliżonym rozwiązaniem HILLA i SEWELLA [37] określonym przez formułę :

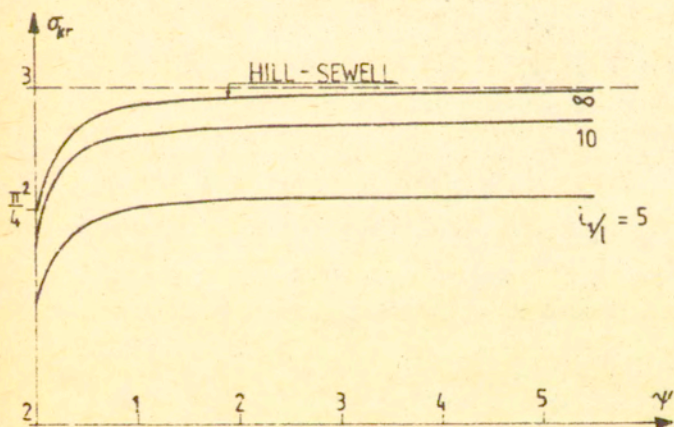
$$\frac{\sigma}{E_c} = \frac{\Pi^2}{4} \frac{1_1^2}{1^2} \frac{1 + 3\alpha}{1 + n^2/4} ,$$

gdzie $\alpha = [12/\pi^2 - 1]^{1/2} \psi$.

Jak widać dla mniejszych sekcyjności ($1/1_1 < 100$) formula ta daje wyniki wyraźnie odbiegające od rozwiązania dokładnego



Rys.19 - Rozwiązanie równania (12.14) na płaszczyźnie $p - q$



Rys.20 - Rozwiązanie równania (12.14) na płaszczyźnie $\psi - \sigma$

które daje równanie (12.14). Formułę tą można jednak uogólnić tak aby zamiast naprężenia krytycznego pozwalała obliczać parametr ω określony związkami (12.13)₂, uogólniona postać wzoru Hilla i Sewella przedstawia się wtedy następująco :

$$(12.15) \quad \omega = \frac{\pi^2}{4} \frac{1 + 3\alpha}{1 + \frac{\pi^2}{4} \alpha}$$

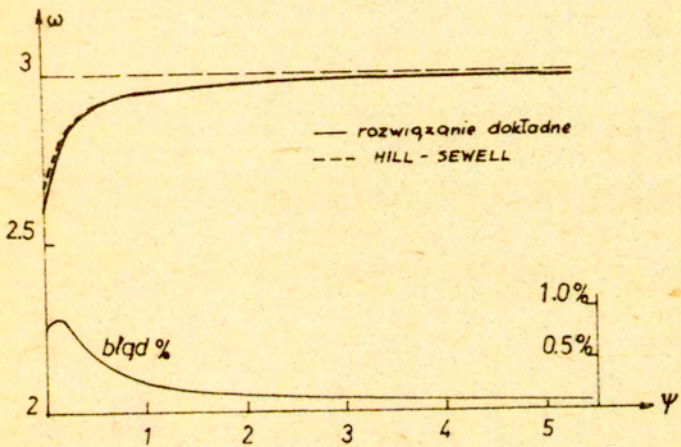
dając już wyniki niewiele różniące się od rozwiązania dokładnego, co obrazuje wykres na Rys. 21 gdzie pokazany jest także rozkład błędów (wyrażony w procentach), który nie przekracza teraz 1% .

Jeżeli we wzorach (12.9), (12.10), (12.13) zamienimy oznaczenia z E_c na E_t oraz χ_c na χ to otrzymane rozwiązanie będzie górnym oszacowaniem naprężeń krytycznych w kolumnie . Wstawienie modułu stycznego do powyższych wzorów wynika z założenia, że kolumna jest aktywnie obciążona a więc powinny być spełnione równania :

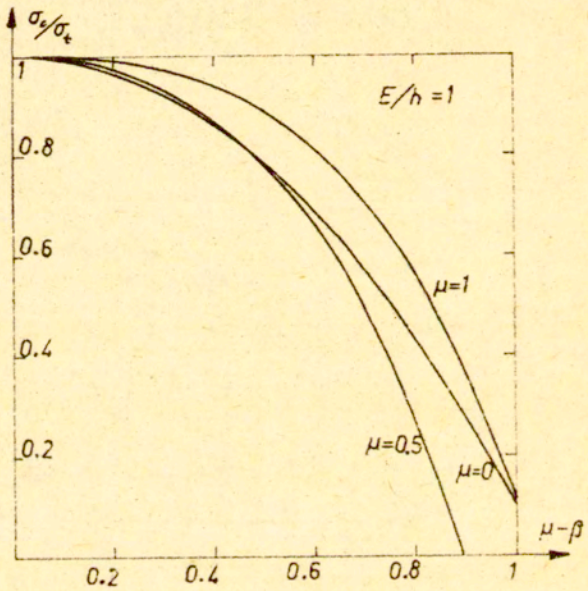
$$\sigma_{33} < \sigma_{p1} \quad \text{oraz} \quad D_{33} < 0 .$$

Spełnienie pierwszego z tych warunków zależy od wymiarów geometrycznych kolumny (głównie stosunku l/i_1), a warunek drugi dla ściskanych prętów jest zawsze spełniony co wykazał SHANLEY [39] analizując uproszczony model słupa jak również badając eksperymentalnie wyboczenie prętów aluminiowych (por. również HUTCHINSON [40]).

Rysunki 22,23,24 obrazują zależność między górnym i dolnym oszacowaniem naprężeń krytycznych w słupie o przekroju okrągłym i smukłości $l/i_1=10$, a parametrami μ , β , E/h . Ponieważ rozpiętość tych oszacowań silnie zależy od stopnia "niestowarzyszonosci" prawa plastycznego płynięcia, pożądane jest precyzyjne określenie różnicy współczynników μ i β .



Rys. 21 - Rozwiązanie równania (12.14) na płaszczyźnie $\psi - \omega$ i porównanie z uogólnionym wzorem Hilla i Sewella



Rys. 22 - Stosunek górnego i dolnego oszacowania naprężeń krytycznych w ściskanym słupie

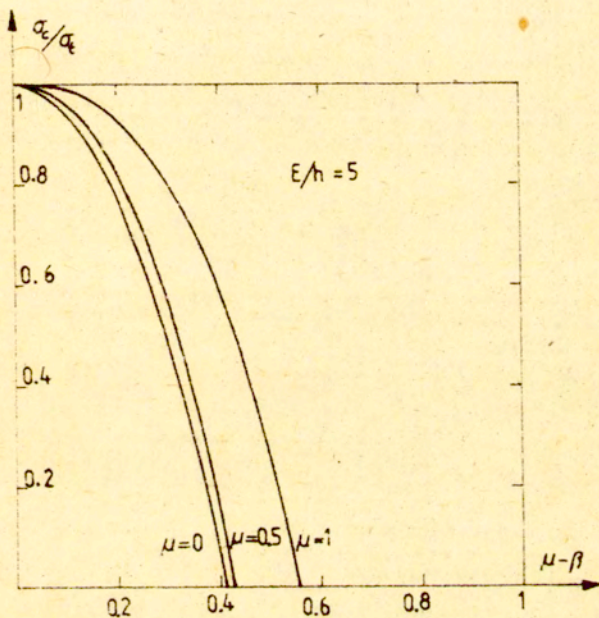


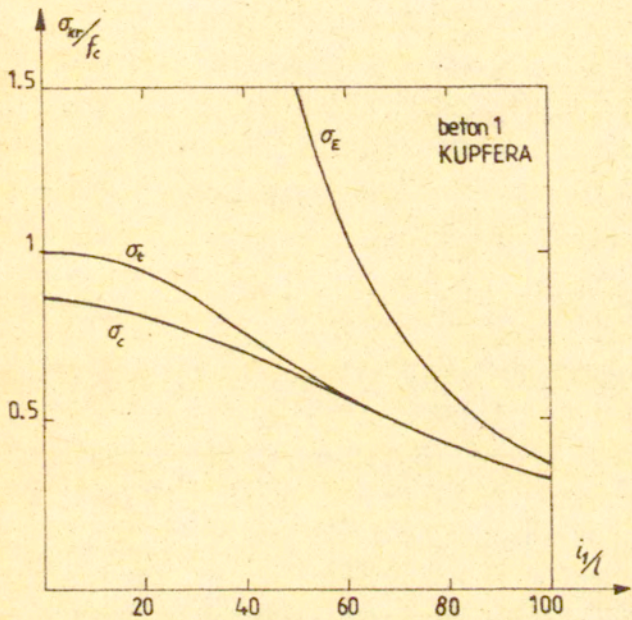
Fig. 22 - Stosunek górnego i dolnego oszacowania naprężeń krytycznych w ściskanym słupie

13. Naprężenia krytyczne w słupie betonowym

Dla zilustrowania przedstawionych w poprzednim punkcie rozważań przedstawimy obecnie przykład wyznaczania naprężeń w słupie betonowym o schemacie statycznym przedstawionym na Rys. 18. Charakterystyka betonu w analizowanym słupie będzie zgodna z tym, który opisany został w p. (5.1) a funkcje materiałowe przyjęte zostały dla betonu Kupfera (beton I) w/g p. 10. Dla tych danych określono moduły ciała porównawczego zgodnie z formułami (12.6), (12.7) a następnie ze względu na nieliniowość problemu metodą bisekcji obliczono wartości naprężeń krytycznych dla ciała porównawczego (granica dolna) i ciała rzeczywistego (granica górna) korzystając ze wzorów (12.13) i (12.15). Wyniki tych obliczeń przedstawiono na wykresie (Rys.25), który obrazuje zależność oszacowanych naprężeń krytycznych od smukłości kolumny, a także dla porównania krzywą Eulera dla materiału liniowo-sprężystego. Wykres ten bardzo wyraźnie wskazuje różnice między sprężystym i sprężysto-plastycznym materiałem oraz niestowarzyszonym i stowarzyszonym prawem płynięcia plastycznego. W Dodatku II podano szczegółowe wyniki dotyczące czterech analizowanych w p. 10 typów betonu, mogą być one bezpośrednio wykorzystane przy projektowaniu kolumn betonowych z betonu o charakterystykach zbliżonych od tych, które określono w p.10.

VI PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W pracy przedstawiono szereg zagadnień związanych ze stanami krytycznymi w materiałach z tarcie wewnętrznym. Omówiono zarówno warunki stanu granicznego, równania konstytutywne służące do opisu tego typu materiałów jak i kryteria bifurkacji konstruk-



Rys. 24 - Zależność między górną i dolną granicą naprężeń krytycznych a smukłością kolumny

cji wykonanych z tego typu materiałów.

W rozdziale drugim przeanalizowano klasyczne a także najnowsze warunki stanu granicznego używane dla ośrodków z tarcie wewnętrznym. Porównanie tych warunków z danymi doświadczalnymi wykazało niedostateczne dopasowanie kształtu przekroju dziewięciokątnego powierzchni granicznych do opisu stanu granicznego takich materiałów jak beton, piasek, glina. W związku z tym przedstawiono nową funkcję kształtu tego przekroju a także zaproponowano uniwersalne kryterium stanu granicznego, które zastosowano do opisu zniszczenia betonu oraz stanu granicznego piasku, uzyskując bardzo dobrą zgodność kryteriów z danymi doświadczalnymi.

W rozdziale trzecim uniwersalna forma zaproponowanego kryterium została wykorzystana do określenia funkcji mocy dysypowanej odpowiadających powszechnie stosowanym, klasycznym warunkom stanu granicznego. Szereg trudności związanych z osobliwościami powierzchni granicznych takich warunków jak kryterium Coulomba - Mohra i Tresca i zostało ~~zostało~~ ominiętych w tym podejściu dzięki przejściom granicznym.

Rozdział czwarty poświęcony jest równaniom konstytutywnym stosowanym dla materiałów o niestowarzyszonych prawach przniecia. Ogólna forma tych równań w której wykorzystuje się funkcje plastyczności i potencjał plastyczny zbliżony w formie do warunku stanu granicznego opisanego w rozdziale drugim, została następnie uproszczona pod kątem zastosowania tych równań do opisu stanu jednokierunkowego sciskania w kolumnie. Dla tej uproszczonej formy równań wyznaczono odpowiednie funkcje materiałowe na podstawie danych eksperymentalnych dla czterech różnych typów betonu.

W rozdziale piątym omówiono ogólny warunek jednoznaczności

rozwiązania dla materiałów z niestowarzyszonymi prawami płynięcia plastycznego zaproponowany w r. 1979 przez B. Ranieckiego a następnie warunek ten adaptowano w celu stworzenia kryterium bifurkacji dla ściskanego pręta. Kryterium to zostało wykorzystane do przeanalizowania zagadnienia wyboczenia ściskanej kolumny przy czym uzyskane rozwiązanie obejmuje niekoniecznie smukłe pręty. Rozwiązanie to porównano następnie z rozwiązaniem przybliżonym Hilla i Sewella dla smukłych prętów z materiału o stowarzyszonym prawie płynięcia. Porównanie takie wykazuje niebezpieczeństwo wyboczenia pręta przy znacznie niższym poziomie naprężeń niż w wypadku materiału o stowarzyszonym prawie płynięcia. Różnica między górnym i dolnym oszacowaniem naprężeń krytycznych rośnie wraz ze stopniem "niestowarzyszoności" prawa tzn. wraz z wartością odchylenia kierunku przyrostu deformacji plastycznej od normalnej do powierzchni plastyczności mierzonym różnicą współczynników: $\mu - \beta$. Szereg szczegółowych przykładów rozwiązanych dla betonowych słupów wykonanych z materiałów różnych typów (podanych w Dodatku II) wykazuje, iż dolna granica naprężeń krytycznych może być niższa o kilkanaście procent od górnego oszacowania tych naprężeń, co ma istotne znaczenie przy projektowaniu konstrukcji.

Dodatek I podaje ogólny dowód mniejszości modułów ciała porównawczego zaproponowanego przez B. Ranieckiego [30],[32] w stosunku do odpowiadającego mu ciała rzeczywistego, sprężysto-plastycznego, co umożliwi interpretacje zaproponowanego ciała porównawczego, jako hiposprężystego, o mniejszej sztywności niż sprężysto-plastyczne w obciążeniu.

SPIS OZNACZEŃ

1. Duże litery Yacińskie

- A - pole przekroju poprzecznego kolumny
- A_0, A_1, A_2 - funkcje występujące w ogólnym warunku stanu granicznego (4.1)
- B_1, B_2 - parametry funkcji potencjału plastycznego (9.1)
- C_0, C_1, C_2 - parametry funkcji plastyczności oraz warunków stanu granicznego (5.1), (5.3), (8.1)
- \underline{D} - tensor prędkości odkształceń
- \underline{D}' - dewiator prędkości odkształceń
- \underline{D}'' - drugi dewiator prędkości odkształceń określony równaniem (7.5)
- ω - funkcja mocy dysypowanej (7.3)
- $\underline{\epsilon}$ - tensor stałych sprężystych (9.2)
- E - moduł Younga
- E_c - moduł styczny (9.7)
- E_c - moduł ciała porównawczego (12.6)
- F - funkcja plastyczności (8.1)
- G - funkcja potencjału plastycznego (9.1)
- G - moduł ścinania (stała Lamé'go)
- H - moduł wzmocnienia (9.5)
- I_1 - pierwszy niezmiennik tensora naprężenia (2.1)
- II, III - niezmienniki tensora prędkości odkształceń (2.2)
- J_1, J_2, J_3 - niezmienniki dewiatora naprężenia (2.1)
- J_D - niezmiennik dewiatora prędkości odkształceń (2.2)
- K - moduł ściśliwości
- $\underline{\zeta}$ - tensor stałych sprężystych (9.5)
- $\underline{\zeta}$ - tensor zależny od stanu naprężenia i od wyboru strumienia naprężenia (11.2)
- \underline{M} - tensor określony równaniami (7.10)

\tilde{N}	-	normalna do powierzchni stałej dysypacji (7.4)
\tilde{N}_1	(1)	
\tilde{N}_2	(2)	
\tilde{N}_3	(3)	
$\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3$	-	normalne do sześciokąta dysypacji dla warunku Coulomba - Mohra
$P(J), P_1(J), P_0$	-	funkcja kształtu przekroju dewiatorowego (3.3), (3.4), (9.1)
$R_L(y)$	-	funkcjonał określający jednoznaczność rozwiązania (11.5)
$\dot{\tilde{S}}$	-	przyrost naprężeń nominalnych
$U_1 \dots U_n$	-	stałe całkowania w funkcji ugięcia pręta (12.11)
\tilde{V}	-	gradient pola prędkości (11.2)
W_L, W^E	-	funkcje podcałkowe w równaniu (11.5) i (12.2)

2. Małe litery łacińskie

a	-	w rozdziale III stała z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$
a, b, c, d	-	parametry w funkcjach aproksymujących w rozdz. II i IV
ξ	-	dewiator naprężenia określony wzorem (9.4) ₃
\tilde{e}_1	-	wektor główny tensora prędkości odkształceń
$f(\sigma_0)$	-	funkcja określająca kształt powierzchni plastyczności (8.1), (8.2)
f_{c1}, f_{c2}, f_{c3} f_{cc1}, f_{vt}	-	naprężenia niszczące próbki betonowe w dwu i trójosiowym stanie naprężenia (Tab. 2)
$g(\sigma_0)$	-	funkcja określająca kształt powierzchni potencjału plastycznego (9.1)
h	-	w rozdz. II współrzędna walcowa w przestrzeni naprężeń, w rozdz. IV i V moduł wzmocnienia
h_0	-	współrzędna walcowa w przestrzeni prędkości odkształceń
i_1, i_2	-	promienie bezwładności (12.10)
j_0	-	charakterystyka geometryczna przekroju kolumny równ. (12.10)
l	-	długość kolumny
m, m_0	-	parametry wzmocnienia (8.2)
\tilde{n}	-	normalna w płaszczyźnie dewiatorowej do powierzchni granicznej (6.1)

- $\tilde{n}^{(1)}, \tilde{n}^{(2)}, \tilde{n}^{(3)}$ - normalne na płaszczyźnie dewiatorowej do sześciokąta Coulomba - Mohra
 p, q - parametry równania (12.14)
 r, r_D - w rozdz. II współrzędne walcowe w przestrzeni naprężeń i prędkości odkształceń
 r - w rozdz. V parametr w równaniach konstytutywnych ciała porównawczego (11.1)
 \tilde{s}_1 - wektor główny tensora naprężenia
 t - parametr pomocniczy w równaniu (3.6)
 $u(z)$ - funkcja prędkości ugięcia kolumny
 \tilde{v}, v_1, v_2, v_3 - pole prędkości
 w - równanie więzów (7.2)
 w_1, w_2 - funkcje określające kierunek normalnej do sześciokąta Coulomba - Mohra (str. 27)
 $x = \sigma/f_c$ - parametr określający stan naprężeń w kolumnie
 x_1, x_2, x_3 - współrzędne kartezjańskie
 $z = x_3/l$ - bezwymiarowa współrzędna mierzona wzdłuż osi kolumny

3. Duże litery greckie

- $\tilde{\Lambda}^o, \tilde{\Lambda}^*$ - tensory określone równaniami (9.5), (9.6)
 Γ, Φ - funkcje zależne od stanu naprężenia (12.3)
 Π, Π_1, Π_2 - funkcje kształtu powierzchni stałej dycypacji
 Ω - obszar zajmowany przez ciało

4. Małe litery greckie

- α - w rozdz. II i III parametr funkcji kształtu
 α, α_i - w rozdz. IV parametry w równaniach konstytutywnych (9.3), (9.5)
 β - w rozdz. II i III parametr funkcji kształtu, w rozdz. IV i V współczynnik dylatacji (9.4)

- γ - współczynnik określający wpływ odkształceń postaciowych na ugięcie kolumny (12.10)
- γ_0 - oktaedryczna prędkość odkształceń postaciowych
- $\delta_{ij}, \underline{1}$ - delta Kroneckera
- ϵ, ϵ_0 - odkształcenia podłużne w kolumnie
- ξ - współczynnik określający wpływ kształtu przekroju poprzecznego kolumny na naprężenia krytyczne
- η^0, η^* - funkcje zależne od stanu naprężenia określające odchylenie kierunku przyrostu deformacji plastycznej od kierunku dewiatora naprężenia (9.4)
- θ, λ - charakterystyki przekroju dewiatorowego powierzchni granicznej (3.1), (3.2)
- λ - stała Lamé'go
- λ - stała określająca prędkość deformacji ciała idealnie plastycznego
- μ - współczynnik "tarcia wewnętrznego" (9.4)
- μ^0, μ^* - normalne do powierzchni potencjału plastycznego i powierzchni plastyczności (9.4)
- μ_1, μ_2 - mnożniki Lagrange'a
- ν - współczynnik Poissona
- ρ - promień w płaszczyźnie dewiatorowej (str. 27)
- σ - tensor naprężenia
- σ^0 - dewiator naprężenia
- σ'' - drugi dewiator naprężenia (6.2)
- σ_0 - naprężenie średnie
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - naprężenia główne
- $\lambda \sigma^0$ - strumień naprężenia
- τ_0 - oktaedryczne naprężenie styczne
- φ, φ_0 - kąty na płaszczyźnie dewiatorowej w przestrzeni naprężeń i prędkości deformacji
- ϕ - kat tarcia wewnętrznego
- χ, χ_0 - współczynniki rozszerzalności poprzecznej dla ciała sprężysto-plastycznego i porównawczego

LITERATURA

1. P.V. LADE, J.M. DUNCAN, Elastoplastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil, J.Geo.Eng.Div.,proc.ASCE, Vol 101, No GT10, Oct.1975
2. H. MATSUOKA, On the Significance on the >>Spatial Mobilized Plane<<, Soils and Foundations, Vol.16, No 1, Mar. 1976
3. G. GUDEHUS, Elastoplastische Stoffgeichungen fur Trockenem Sand, Ingenieur Archiv, B.42, H.3, 1973
4. L.L. MILLS, R.M. ZIMMERMAN, Compressive Strength of Plain Concrete Under Multiaxial Loading Conditions, J.ACI, Vol.67, No.10, Oct. 1970
5. K.J. WILLAM, E.P. WARNKE, Constitutive Model for the Tri-axial Behaviour of Concrete, Int. Ass. Bridge Str. Eng. Colloquium Concr. Str. Sub. Triax. Stress, Bergamo, May 17-19, 1974
6. N.S OTTOSEN, A Failure Criterion for Concrete, J.Eng.Mech. Div.,Proc.ASCE, Vol.103, No. EM4, Aug. 1877
7. P.V. LADE, Three-Parameter Failure Criterion for Concrete, J.Eng.Mech.Div.,Proc. ASCE, Vol.108, No. EM5, Oct. 1982
8. J. PODGÓRSKI, General Failure Criterion for Isotropic Media, J.Eng.Mech.,Proc. ASCE, Vol.111, No. EM2, Feb. 1985, Dgólny warunek stanu granicznego dla materiałów izotropowych; Prace IPPT PAN, 17/1983
9. M.O FARUQUE, C.J. CHANG, A New Cap Model for Failure and Yielding of Pressure Sensitive Materials, J.Eng.Mech, Proc. ASCE, (w druku)
10. K. NEWMAN, J.B. NEWMAN, Failure Theories and Design Criteria for Plain Concrete, Structure, Solid Mechanics and Engineering Design, M. TENI ed., Wiley-Interscience, London, 1971
11. B. PAUL, Macroscopic Criteria for Plastic Flow and Brittle Fracture, Fracture. An Advanced Treatise, H. LIEBOWITZ ed., Vol.II, Academic Press, New York and London, 1968
12. E. ANDENAES, K. GERSTLE, H.-Y. KO, Responce of Mortar and Concrete to Biaxial Compression, J.Eng.Mech.Div.,Proc.ASCE, Vol. 103, No.EM4, Aug. 1977
13. H. KUPFER, Das Verhalten des Betons Unter Merachsiger Kurzzeitbelastung Unter Besonderer Berucksichtigung der Zweiachsigen Beauspruchung, Deutsch. Auss. Stahlbet., H 229, 1973
14. E. TASUJI, F.O. SLATE, A.E. NILSON, Stress-Strain responce and Fracture of Concrete in Biaxial Loading, J.ACI, Vol.75, No. 7, July 1978
15. G. SCHICKERT, H. WINKLER, Results of Test Concerning to Multiaxial Compressive Stress, Deutsch. Auss. Stahlbet.

H. 277, Berlin, 1977

16. G.E. GREEN, A.W. BISHOP, A Note on the Drained Strength of Sand Under Generalized Strain Conditions, *Geotechnique*, Vol. XIX, No. 1, Mar. 1969
17. J. PODGÓRSKI, Limit State Condition and the Disipation Function for Isotropic Materials, *Arch. Mech.*, Vol. 36, No. 3, 1984
18. W.F. CHEN, *Plasticity in Reinforced Concrete*, McGraw-Hill, New York 1982
19. S. DEI POLI, Microfessurazione, leggi costitutive e condizioni on rottura del calcestruzzo in stati di tensione mono e pluriassiali, Politecnico di Milano, Italcementi 1978
20. K.H. GERSTLE i in. ,Bhavior of Concrete Under Multiaxial Stress States, *J.Eng.Mech.Div.,Proc.ASCE*, Vol. 106, No.EM6, Dec. 1980
21. Z. MRÓZ, Non-Associated Flow Laws in Plasticity, *J. de Mechanique*, Vol.2 , 1963 , str.21-42
22. Z. MRÓZ, On Forms of Constitutive Laws for Elastic-Plastic Solids, *Arch. Mech.Stos.*, Vol. 18, No. 3, 1966
23. J. MANDEL, Rheology and Soil Mechanics, *Proc. IUTAM Symp.*, Grenoble, 1-8 April 1964
24. J.W. RUDNICKI, J.R. RICE, Condition for the Localization of Deformation in Pressure Sensitive Dilatant Materials, *J. Mech.Phys.Solids*, Vol. 23, 1975
25. A.E. GURSON, Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth : Part I - Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media, *Trans. ASME, Ser.H*, Vol.99, No.2, 1977
26. Z.P. BAŻANT, S.-S. KIM, Plastic - Fracturing Theory for Concrete, *J.Eng.Mech.Div.,Proc.ASCE*, Vol. 105, No. Em4, June 1979
27. P. LAUNAY, H. GACHON, P. POITEVIN, Deformation et Resistance Ultime du Beton sous Etreinte Triaxiale, *Ann. L'Ins. Tech. Bat. Trav. Pub.*, No.269, Mai 1970
28. Z. MRÓZ, V.A. NORRIS, D.C. ZIENKIEWICZ, Application of an Anisotropic Hardening Model for Soils and its Application to Cyclic Loading, *Int.J.Num.Anal.Meth.Geomech.* Vol.2,1978
29. M.N. FARDIS, B. ALIBE, J.L. TASSOULAS, Monotonic and cyclic Constitutive laws for Concrete, *J.Eng.Mech.,Proc.ASCE*, Vol. 109, No. 2, April 1983
30. B. RANIECKI, D.T. BRUHNS, Bounds to Bifurcation Stress in Solids with Non-Associated Flow Law at Finite Strain, *J.Mech.Phys.Solids*, Vol. 29, No. 2, 1981

31. R. HILL, A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids, J.Mech.Phys.Solids, Vol. 6, p.236, 1958
32. B. RANIECKI, Uniqueness Criteria in Solids with Non-Associated Plastic Flow Laws at Finite Deformations, Bull.Acad. Polon.Sci. ser. sci. techn., Vol.27, No. 8-9, 1979
33. O.T. BRUHNS, B. RANIECKI, Ein Schrankenverfahren bei Verzweigungsproblemen inelastischer Formänderungen, ZAMM 62, T 111-113, 1982
34. V. TVVRGARD, Influence of Void Nucleation on Ductile Shear Fracture at a Free Surface, J.Mech.Phys.Solids, Vol.30, No. 6, 1982
35. M. KLEIBER, Numerical Study on Necking-Type Bifurcations in Void-Containing Elastic-Plastic Material, Int.J.Solids Struct., Vol. 20, No. 3, 1984
36. A. FATNASSI, Y. TOMITA, A. SCHINDO, Bifurcation Behaviour of Non-Uniformly Stressed Solids with the Non-Associated Flow Law, Trans. JSME, 1985 (w druku)
37. R. HILL, M.J. SEWELL, A General Theory of Inelastic Column Failure - I, J.Mech.Phys.Solids, Vol. 8, p. 105, 1960
38. C.E. PEARSON, General Theory of Elastic Stability, Quart. Appl. Math. Vol. 14, p.133, 1956
39. F.R. SHANLEY, Inelastic Column Theory, J.Aero.Sci., Vol. 14, No.5, May 1947
40. J.W. HUTCHINSON, Plastic Buckling, Adv.Appl.Mech., Vol. 14, p.67, Academic Press, New York 1974
41. P.V. LADE, J.M. DUNCAN, Cubical Triaxial Tests on Cohesionless Soil, J.Soil Mech.Found.Div.ASCE, Vol.99, No.SM10, Oct.1973
42. H.-Y. KO, F.R. SCOTT, Deformation of Sand at Failure, J. Soil Mech.Found.Div,ASCE, Vol. 94, No. SM4, July 1968
43. D.S. PROCTER, L. BARDEN, Correspondence on Green and Bishop: A Note..., Geotechnique, Vol.XIX, No. 3, 1969
44. P.V. LADE, H.M. MUSANTE, Three-Dimensional Behavior of Remolded Clay, J.Geo. Eng.Div.ASCE, Vol.104, No. GT2, Feb. 1978
45. T. SHIBATA, D. KARUBE, Influence of the Variation of the Intermediate Principal Stress and the Mechanical Properties of Normally Consolidated Clays, Proc.6-th Int. Conf. Soil Mech.Found.Eng., Montreal, 1965, Vol.1, Univ. Toronto Press

DODATEK I

Dowód nierówności między modułami ciała porównawczego a modułami ciała sprężysto - plastycznego z niestowarzyszonym prawem płynięcia.

Rozpatrzmy hiposprężyste, ciało porównawcze określone równaniami konstytutywnymi :

$$(d.1) \quad \tilde{\sigma} = \tilde{L} \cdot \tilde{D} - (\tilde{\Lambda}^0 + r\tilde{\Lambda}^*) (\tilde{\Lambda}^0 + r\tilde{\Lambda}^*) \cdot \tilde{D} / (4Hr),$$

lub też w postaci odwróconej :

$$(d.2) \quad \tilde{D} = \tilde{E} \cdot \tilde{\sigma} - (\tilde{\mu}^0 + r\tilde{\mu}^*) (\tilde{\mu}^0 + r\tilde{\mu}^*) \cdot \tilde{\sigma} / h_c,$$

gdzie

$$h_c = r(4h + 2\tilde{\Lambda}^0\tilde{\mu}^0 - \tilde{\Lambda}^0\tilde{\mu}^0/r - r\tilde{\Lambda}^0\tilde{\mu}^0) = 4rh_c^*.$$

Zapiszemy przyrost naprężeń przy pomocy związku :

$$(d.3) \quad \tilde{\sigma}^{\cdot} = \tilde{\sigma}^{\cdot} \tilde{n},$$

który pozwala wyrazić rzut części plastycznej prędkości odkształcenia na kierunek przyrostu naprężenia :

$$(d.4) \quad \tilde{D}^{\cdot} \cdot \tilde{n} = \tilde{\sigma}^{\cdot} / E_c,$$

$$\text{gdzie} \quad E_c = 4h_c^* r / [(\tilde{\mu}^0 + r\tilde{\mu}^*) \cdot \tilde{n}]^2 = 4h_c^* / \pi,$$

$$\pi = (N_0 + r N_r)^2 / r,$$

$$N_0 = \tilde{\mu}^0 \cdot \tilde{n}, \quad N_r = \tilde{\mu}^* \cdot \tilde{n}.$$

W podobny sposób można wyliczyć wartości "modułu stycznego" dla ciała sprężysto - plastycznego :

$$(d.5) \quad E_t = h / (N_0 N_r).$$

Dla ciała porównawczego określonego równaniami (d.1) i (d.2)

mamy:

$$(d.6) \quad E_c < E_e \quad ,$$

aby udowodnić tą nierówność zapiszemy ją wykorzystując równania (d.4) i (d.5) w dogodniejszej postaci :

$$(d.7) \quad 4 h_{c^*} / \pi \ell < h / (N_0 N_e) \quad .$$

Lewą stronę tej nierówności, która jest jednoparametrową rodziną modułów, zastąpimy maksymalnym modułem E_c , co pozwoli udowodnić nierówność dla wszystkich pozostałych wartości E_c .

Maksymalna wartość h_{c^*} jest równa :

$$(d.7) \quad h_{c^*} \max = h - 0.5 L_0 L_e [1 - L_{0e} / (L_0 L_e)] ,$$

gdzie $L_0^2 = \underline{\Lambda}^0 \cdot \underline{\mu}^0 = \underline{\mu}^0 \cdot (\underline{L} \underline{u}^0) \quad ,$

$$L_e^2 = \underline{\Lambda}^e \cdot \underline{\mu}^e = \underline{\mu}^e \cdot (\underline{L} \underline{u}^e) \quad .$$

Ponieważ L_0 i L_e są modułami wektorów $\underline{\mu}^0$ i $\underline{\mu}^e$ w przestrzeni o metryce \underline{L} a $L_{0e} / (L_0 L_e) = \cos(\underline{\mu}^0, \underline{\mu}^e)$

więc

$$h_{c^*} \leq h \quad .$$

$$(d.9)$$

Obliczymy teraz minimalną wartość mianownika lewej strony nierówności (d.7) :

$$\pi \ell_{\min} = 2 (N_e N_0 + |N_e N_0|) \quad , \text{ tak więc}$$

$$(d.10) \quad \pi \ell_{\min} \geq 4 N_0 N_e$$

Na mocy dowiedzionych nierówności (d.9) i (d.10) prawdziwa jest też nierówność (d.6) .

DODATEK II

Naprężenia krytyczne w słupach betonowych

W tabeli D1 przedstawiono charakterystyczne dane dotyczące betonu badanego przez Kupfera (beton 1 i 2) [13], Tasuji i in. [14], oraz Schickerta i Winklera [15]. Odpowiednie funkcje materiałowe dla tych betonów określono w p.10, rozdz.IV. Tabele D2, D3, D4 i D5 podają wartości górnego i dolnego oszacowania naprężeń krytycznych oraz dla porównania naprężenia wynikające z wzoru Eulera dla pręta sprężystego.

Oznaczenia : $\sigma_C = \sigma_c / f_c$,

$\sigma_T = \sigma_t / f_c$,

$\sigma_E = \sigma_e / f_c$,

gdzie σ_c jest dolną granicą naprężeń krytycznych,

σ_t jest górną granicą naprężeń krytycznych,

σ_e naprężenia krytyczne dla pręta sprężystego.

TABELA D1

Nr.	autor badań	f_c [MPa]	moduł Younga E/f_c	wsp. Poissona ν	max odksz. $\epsilon_u \cdot 1000$
1.	Kupfer	19.2	1540	0.19	-1.87
2.		32.3	1020	0.195	-2.17
3.	Tasuji i in.	34.6	580	0.22	-2.82
4.	Schickert - Winkler	29.1	930	0.18	-2.26

TABELA D 2 - MATERIAL Nr. 1

l1/l	sigmaC	sigmaT	sigmaE
2	0.867683	0.999992	949.949424
4	0.86599	0.999916	237.487356
6	0.863197	0.999626	105.549936
8	0.859337	0.998878	59.371839
10	0.854485	0.997322	37.997977
12	0.849671	0.994484	26.387484
14	0.841988	0.989906	19.386723
16	0.834496	0.983101	14.842960
18	0.826271	0.973732	11.727771
20	0.817375	0.961693	9.499194
22	0.807899	0.947121	7.850822
24	0.797874	0.930351	6.596871
26	0.787361	0.911827	5.621003
28	0.776405	0.892052	4.846681
30	0.765053	0.871437	4.221997
32	0.753334	0.85038	3.710740
34	0.74128	0.82917	3.287022
36	0.728951	0.808022	2.931943
38	0.716331	0.787086	2.631439
40	0.703499	0.766502	2.374874
42	0.690453	0.746315	2.154080
44	0.677254	0.726305	1.962705
46	0.663902	0.707329	1.795744
48	0.650459	0.68836	1.649218
50	0.636925	0.670265	1.519919
52	0.623336	0.652458	1.405231
54	0.609795	0.635109	1.303094
56	0.59623	0.618217	1.211670
58	0.58271	0.601768	1.129947
60	0.569267	0.585732	1.055499
62	0.555916	0.570091	0.988501
64	0.542656	0.554832	0.927683
66	0.529533	0.539955	0.872314
68	0.516548	0.525444	0.821756
70	0.503731	0.511269	0.775469
72	0.491066	0.497414	0.732986
74	0.478569	0.483894	0.693900
76	0.466255	0.47068	0.657860
78	0.45414	0.457771	0.624556
80	0.442223	0.445168	0.592718
82	0.430504	0.432854	0.561110
84	0.418999	0.420815	0.538520
86	0.407707	0.409065	0.513764
88	0.396645	0.397591	0.490674
90	0.385796	0.386391	0.469111
92	0.375175	0.375465	0.448936
94	0.364784	0.36483	0.430036
96	0.354637	0.354484	0.412304
98	0.344734	0.344337	0.395647
100	0.33506	0.334496	0.379980

TABELA D 3 - MATERIAŁ Nr. 2

1171	sigmaD	sigmaT	sigmaE
2	0.909737	0.999992	629.187281
4	0.907816	0.999916	157.296820
6	0.904121	0.999641	69.909698
8	0.899269	0.999924	39.324205
10	0.89315	0.997398	25.167491
12	0.885841	0.994591	17.477424
14	0.877419	0.989922	12.840557
16	0.867989	0.982857	9.831051
18	0.857597	0.972893	7.767744
20	0.846321	0.959831	6.291673
22	0.834221	0.943703	5.199895
24	0.821327	0.924858	4.369356
26	0.807671	0.903786	3.723002
28	0.793297	0.881065	3.210139
30	0.778191	0.857231	2.796388
32	0.762413	0.832741	2.457763
34	0.74601	0.807945	2.177119
36	0.729027	0.783119	1.941936
38	0.71154	0.758461	1.742901
40	0.693626	0.734108	1.572968
42	0.675392	0.710167	1.426729
44	0.656898	0.686668	1.299974
46	0.638268	0.663689	1.189390
48	0.619576	0.641228	1.092339
50	0.600899	0.619301	1.006700
52	0.582314	0.597908	0.930750
54	0.563881	0.577065	0.863083
56	0.545647	0.55674	0.802535
58	0.527657	0.536964	0.748142
60	0.509956	0.517723	0.699097
62	0.492577	0.499001	0.654721
64	0.475548	0.480812	0.614441
66	0.458885	0.463158	0.577766
68	0.442619	0.446022	0.544280
70	0.426781	0.42942	0.513622
72	0.411354	0.413368	0.485484
74	0.3964	0.397835	0.459596
76	0.381889	0.382851	0.435725
78	0.367836	0.368401	0.413667
80	0.354271	0.354485	0.393242
82	0.341179	0.341087	0.374293
84	0.328575	0.328239	0.356682
86	0.316444	0.315895	0.340285
88	0.304787	0.30407	0.324993
90	0.293587	0.292732	0.310710
92	0.28286	0.281898	0.297347
94	0.272591	0.271523	0.284829
96	0.262749	0.26162	0.273085
98	0.253349	0.252159	0.262052
100	0.244347	0.243126	0.251675

TABELA D 4 - MATERIAL Nr. 3

11/1	sigmaC	sigmaT	sigmaE
2	0.952309	0.999992	357.773160
4	0.949745	0.999931	89.443290
6	0.945442	0.999687	39.752573
8	0.939308	0.999046	22.360822
10	0.931358	0.997643	14.310926
12	0.921577	0.994926	9.938143
14	0.910027	0.990196	7.301493
16	0.896767	0.982613	5.590206
18	0.881859	0.971275	4.416953
20	0.865288	0.955559	3.577732
22	0.847069	0.935204	2.956803
24	0.827126	0.91053	2.484536
26	0.805489	0.88221	2.117001
28	0.782204	0.851158	1.825373
30	0.757408	0.81823	1.590103
32	0.731316	0.784187	1.397551
34	0.704231	0.749657	1.237969
36	0.67646	0.715096	1.104238
38	0.648293	0.68087	0.991061
40	0.620033	0.64724	0.894433
42	0.591927	0.614403	0.811277
44	0.564171	0.582542	0.739201
46	0.536964	0.551765	0.676320
48	0.510445	0.522179	0.621134
50	0.484749	0.493858	0.572437
52	0.459969	0.46685	0.529250
54	0.436195	0.441216	0.490773
56	0.413475	0.416954	0.456343
58	0.391853	0.394051	0.425414
60	0.371346	0.37252	0.397526
62	0.351952	0.352303	0.372293
64	0.333656	0.333366	0.349388
66	0.31646	0.315651	0.328534
68	0.300285	0.29911	0.309492
70	0.285133	0.283653	0.292060
72	0.270912	0.269234	0.276060
74	0.257607	0.25576	0.261339
76	0.24514	0.243202	0.247765
78	0.233482	0.231468	0.235222
80	0.222557	0.220512	0.223608
82	0.212318	0.210274	0.212834
84	0.202736	0.200691	0.202819
86	0.193748	0.191719	0.193495
88	0.18531	0.183311	0.184800
90	0.177376	0.175423	0.176679
92	0.169945	0.168022	0.169080
94	0.162941	0.161064	0.161762
96	0.156349	0.154518	0.155283
98	0.150139	0.148354	0.149010
100	0.144279	0.142555	0.143109

TABELA D 5 - MATERIAL Nr. 4

i1/1	sigmaC	sigmaT	sigmaE
2	0.999992	0.999992	511.985728
4	0.999992	0.999977	127.996432
6	0.999992	0.999987	56.887303
8	0.999992	0.999958	31.999108
10	0.999992	0.999897	20.479429
12	0.999992	0.997795	14.221824
14	0.999992	0.99575	10.448688
16	0.999992	0.992455	7.999777
18	0.999992	0.987434	6.320811
20	0.995094	0.980156	5.119857
22	0.961952	0.970131	4.231287
24	0.890953	0.957008	3.555456
26	0.833488	0.940636	3.029501
28	0.799034	0.921135	2.612172
30	0.772942	0.898842	2.275492
32	0.750648	0.874229	1.999944
34	0.73037	0.847847	1.771577
36	0.711189	0.820183	1.580203
38	0.692574	0.79171	1.418243
40	0.674171	0.762779	1.279964
42	0.655785	0.733696	1.160965
44	0.637245	0.70472	1.057822
46	0.618446	0.676018	0.967837
48	0.599327	0.647774	0.888864
50	0.579903	0.620094	0.819177
52	0.560204	0.593071	0.757375
54	0.540276	0.566795	0.702312
56	0.520226	0.541344	0.653043
58	0.50016	0.516747	0.608782
60	0.480217	0.49305	0.568873
62	0.460518	0.470314	0.532764
64	0.441185	0.44854	0.499986
66	0.422325	0.427727	0.470143
68	0.40403	0.407906	0.442894
70	0.386375	0.389046	0.417948
72	0.369408	0.371147	0.395051
74	0.353157	0.354179	0.373985
76	0.337639	0.338127	0.354561
78	0.322884	0.322929	0.336611
80	0.308846	0.308586	0.319991
82	0.295525	0.295036	0.304572
84	0.282921	0.282265	0.290241
86	0.270973	0.270195	0.276899
88	0.259682	0.258812	0.264455
90	0.249001	0.248055	0.252832
92	0.238884	0.237923	0.241959
94	0.229332	0.22834	0.231773
96	0.220299	0.219292	0.222216
98	0.211754	0.210747	0.213239
100	0.203667	0.20266	0.204794

	str.
SPIS TREŚCI	
I WSTĘP	3
1. Treść rozprawy	3
2. Układy współrzędnych, oznaczenia	4
II WARUNEK STANU GRANICZNEGO	7
3. Obraz kryterium na płaszczyźnie oktaedrycznej	9
4. Sformułowanie kryterium stanu granicznego	15
5. Przykłady zastosowań kryterium	
5.1 Kryterium zniszczenia dla betonu	15
5.2 Kryterium stanu granicznego dla piasku	19
III FUNKCJA DYSYPACJI	24
6. Związki konstytutywne dla ciała idealnie plastycznego	24
7. Moc dysypowana	26
IV RÓWNANIA KONSTITUTYWNE DLA MATERIAŁÓW Z TARCIEM WĘWNETRZNYM	37
8. Warunek plastyczności	38
9. Funkcja potencjału plastycznego. Równania konstytutywne	40
10. Funkcje materiałowe dla betonu	44
V BIFURKACJA W MATERIAŁACH Z TARCIEM WĘWNETRZNYM	46
11. Ogólne kryterium bifurkacji dla materiałów z niestowarzyszonymi prętami: płynięcia plastycznego	50
12. Kryterium bifurkacji dla ściśniętego pręta	51
13. Naprężenia krytyczne w skupie betonowym	54
VI PODSUMOWANIE I WNIOSKI	55
SPIS OZNACZEŃ	56
LITERATURA	57
DODATEK I - Dowód nierówności między modułami ciała porównawczego i rzeczywistego	58
DODATEK II - Naprężenia krytyczne w skupie betonowym	77

S t r e s z c z e n i e

W pracy przedstawiono szereg zagadnień związanych ze stanami krytycznymi w ciałach z tarcie wewnętrznym. Omówiono zarówno warunki stanu granicznego, równania konstytutywne służące do opisu tego typu materiałów jak i kryteria bifurkacji konstrukcji wykonanych z tych materiałów.

Analiza klasycznych a także najnowszych warunków stanu granicznego wykazuje niedostateczne dopasowanie tych warunków do opisu stanu granicznego takich materiałów jak beton, piasek i glina. W związku z tym zaproponowano w pracy uniwersalne kryterium stanu granicznego pozwalające uzyskać bardzo dobrą zgodność z danymi doświadczalnymi dotyczącymi betonu oraz piasku.

Uniwersalna forma kryterium posłużyła także do określenia funkcji mocy dysypowanej odpowiadających powszechnie stosowanemu, klasycznemu warunkowi stanu granicznego.

Następna część pracy poświęcona jest równaniom konstytutywnym. Przedstawiono tam przyrostowe równania dla materiałów o niestowarzyszonemu prawie płynięcia plastycznego oraz wyznaczono odpowiednie funkcje materiałowe dla betonu. Zostały one następnie wykorzystane w analizie bifurkacji ściskanego osiowo słupa betonowego. Szereg szczegółowych przykładów rozwiązanych dla słupów wykonanych z różnych typów betonu podaje dolne i górne oszacowanie siły krytycznej. Wyniki te mogą być wykorzystane przy projektowaniu słupów betonowych.