

Maria Marks

**PODSTAWOWE POJĘCIA
MECHANIKI ZNISZCZENIA**

33/49



P. 269

WARSZAWA 1979

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 29 czerwca 1979 r.

Zarejestrowana pod nr 33/1979

Praca wykonana w ramach Problemu Węzłowego 05.12
"Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych
i budowlanych", gr.temat.10



57204



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 190 egz. Ark.wyd. 1,9. Ark.druk. 2,75

Oddano do drukarni w lipcu 1979 r.

Nr zamówienia 435/0/79

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Maria Marks

Pracownia Pól Odształceń

PODSTAWOWE POJĘCIA MECHANIKI ZNISZCZENIA

1. Wstęp

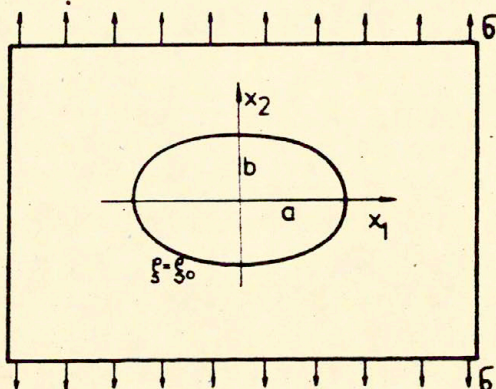
Konstrukcja może ulec zniszczeniu nie tylko w wyniku przekroczenia ograniczeń wytrzymałościowych ale również na skutek propagacji defektów istniejących w materiale. Pęknięcia spowodowane defektami stały się przyczyną wielu wypadków, które wymieniają w swoich pracach m.in. Knott [7], Wnuk [12], Freudenthal [2]. Mechanika zniszczenia obejmuje badanie i poznawanie związków między strukturą materiału, a jego właściwościami, w szczególności wytrzymałością, o której decydują nie tylko własności fizyczne materiału ale również ilość i konfiguracja szczelin zawartych w ciele.

Celem niniejszego opracowania jest omówienie podstawowych kryteriów i wielkości stosowanych w mechanice zniszczenia. Przedstawione rozwiązania dotyczą pęknięcia ciał kruchych oraz quasi - kruchych, w których obszar plastyczny w otoczeniu rysy jest mały w porównaniu z długością szczeliny. Wprowadzono szereg podstawowych pojęć jak np. współczynnik intensywności naprężeń lub współczynnik wyzwalaania energii. Przedstawiono hipotezę Griffitha, określającą przy jakim obciążeniu ciała zawierającego szczelinę nastąpi jej dalsze pęknięcie. Omówiono również nowsze uzupełnienia tej hipotezy, dotyczące kierunku rozprzestrzeniania się szczeliny oraz modyfikacje dotyczące quasi - kruchego pęknięcia.

2. Koncentracja naprężeń wokół otworu eliptycznego.

Zagadnienie koncentracji naprężeń wokół otworu eliptycznego w nieskończonej tarczy przedstawiono na podstawie rozwiązania Inglisa [7], [11],

Rozpatrzmy nieograniczoną tarczę sprężystą z otworem eliptycznym poddaną równomiernemu rozciąganiu obciążeniem w kierunku osi x_2 /rys. 1/.



rys. 1.

Zagadnienie sprowadza się do rozwiązania równania biharmonicznego

$$\nabla_1^4 F = 0,$$

z następującymi warunkami brzegowymi

$$\bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma} \quad , \quad \bar{\sigma}_{44} = \bar{\sigma}_{44} = 0 \quad \text{przy } x_2 \rightarrow \pm \infty$$

/2,1/ oraz

$$\bar{\sigma}_{33} = \bar{\sigma}_{33} = 0 \quad \text{na brzegu elipsy tzn. przy } \xi = \xi_0$$

tutaj F jest funkcją Airgo. $\nabla_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$, ∂_1, ∂_2 są

pochodnymi odpowiednio po x_1, x_2 , natomiast ξ, η są współrzędnymi eliptycznymi, które z układem kartezjańskim x_1, x_2 powiązany jest w następujący sposób

$$\begin{aligned} x_1 &= c \operatorname{cosh} \xi \operatorname{cos} \eta, \\ /2.2/ \quad x_2 &= c \operatorname{sinh} \xi \operatorname{sin} \eta. \end{aligned}$$

Przez eliminację η można uzyskać równanie

$$\frac{x_1^2}{c^2 \operatorname{cosh}^2 \xi} + \frac{x_2^2}{c^2 \operatorname{sinh}^2 \xi} = 1,$$

gdzie c jest stałą, określającą położenie ogniska elipsy. Gdy $\xi = \xi_0$ /rys.1/ jest to równanie elipsy o półosiach $a = c \operatorname{cosh} \xi_0$ i $b = c \operatorname{sinh} \xi_0$. W przypadku gdy $\xi_0 \rightarrow 0$ elipsa staje się szczeliną o długości $2c = 2a$, gdy $a = b$ elipsa staje się kołem.

Składowe naprężenia wyrażone są przez funkcję Airgo F następująco

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta} = (-\partial_\alpha \partial_\beta + \delta_{\alpha\beta} \nabla_i^2) F \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Funkcji F poszukujemy stosując metody funkcji zmiennej zespolonej. Z twierdzenia Goursata, wynika że funkcję biharmoniczną wyrazić można za pomocą dwóch funkcji analitycznych w postaci

$$/2.3./ \quad F = \operatorname{Re} [\bar{Z} \varrho(z) + \chi(z)] \quad Z = x_1 + i x_2, \quad \bar{Z} = x_1 - i x_2.$$

Funkcje $\varrho(z)$ i $\chi(z)$ podobnie jak funkcję F nazywamy funkcjami naprężeń lub potencjałami zespolonymi.

Składowe naprężenia można wyznaczyć z następujących związków

$$\begin{aligned} /2.4./ \quad \bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} &= \nabla_1^2 F = 2\varrho'(z) + 2\bar{\varrho}'(\bar{z}) = 4 \operatorname{Re} [\varrho'(z)] \\ \bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{11} + 2i \bar{\sigma}_{12} &= \partial_1^2 F - \partial_2^2 F - 2i \partial_1 \partial_2 F = 2[\bar{Z} \varrho'' + \chi''] \end{aligned}$$

do określenia których wykorzystano zależności

$$F(z) + \bar{F}(\bar{z}) = 2 \operatorname{Re} [F(z)],$$

$$2F = \bar{z} \psi(z) + \chi(z) + \bar{z} \bar{\psi}(\bar{z}) + \bar{\chi}(\bar{z}),$$

$$\partial_1^2 (2F) = 2\psi'(z) + \bar{z}\psi''(z) + \chi''(z) + 2\bar{\psi}'(\bar{z}) + z\bar{\psi}''(\bar{z}) + \bar{\chi}''(\bar{z}),$$

$$\partial_2^2 (2F) = 2\psi'(z) - \bar{z}\psi''(z) - \chi''(z) + 2\bar{\psi}'(\bar{z}) - z\bar{\psi}''(\bar{z}) - \bar{\chi}''(\bar{z}).$$

Ze związków /2.4./ wynika, że

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4 \operatorname{Re} [\psi'(z)],$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} = 2 \operatorname{Re} [\bar{z}\psi'' + \chi''],$$

$$\sigma_{12} = \operatorname{Im} [\bar{z}\psi'' + \chi''].$$

Po uwzględnieniu związków Hooke'a i scałkowaniu można wprowadzić zależność określającą wektor zespolony przemieszczenia, który ma postać

$$2\mu(u_1 + i u_2) = \frac{\partial\mu + \alpha}{\mu + \alpha} \psi(z) - z\bar{\psi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z}).$$

Wprowadzając zmienną zespoloną $z = \xi + i\eta$ równanie /2.2/ można przedstawić w następujący sposób

$$Z = c \cosh \gamma.$$

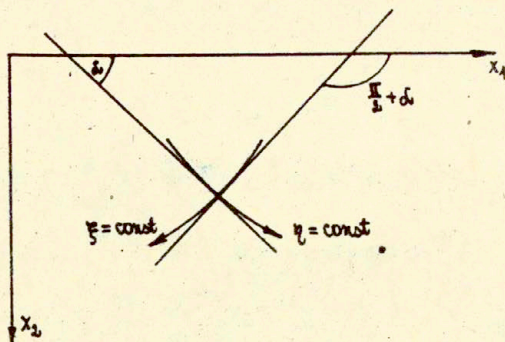
Składowe tensora naprężenia w układzie ξ, η można wyrazić w postaci

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\alpha + \sigma_{12} \sin 2\alpha,$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\alpha - \sigma_{12} \sin 2\alpha,$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin 2\alpha + \sigma_{12} \cos 2\alpha,$$

gdzie δ jest kątem między styczną do krzywej $\eta = \text{const}$ i osią x_1 /rys.2/



rys.2

Z zależności /2.4/ i /2.5/ wynikają związki:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} &= \sigma_{11} + \sigma_{22} \\ /2.6/ \quad \sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\xi\xi} + 2i\sigma_{\xi\eta} &= e^{2i\delta} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) \end{aligned}$$

gdzie [11] :

$$e^{2i\delta} = \frac{\sin h \eta}{\sin h \xi}$$

Z równań /2.4/ i /2.6/ otrzymano

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} &= 4 \operatorname{Re} [\psi'(z)] \\ /2.7/ \quad \sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\xi\xi} + 2i\sigma_{\xi\eta} &= 2e^{2i\delta} [\bar{z}\psi''(z) + \alpha''(z)]. \end{aligned}$$

Uwzględniając zadane warunki brzegowe /2.1/ oraz okresowość funkcji η zmieniającej się od 0 do 2π , Inglis wyznaczył potencjały zespolone w następującej postaci

$$/2.8/ \quad 4\psi(z) = \sigma_c [(1 + e^{2\xi_0}) \sin h \eta - e^{2\xi_0} \cos h \eta],$$

$$4 \alpha(z) = -\sigma c^2 \left[(\cosh 2\xi_0 - \cosh \Pi) \eta + \frac{1}{2} e^{2\xi_0} - \cosh(\eta - \xi_0 - i \frac{\Pi}{2}) \right].$$

Na brzegu otworu $\bar{\sigma}_{\xi_0} = 0$, zatem z równania /2.7/ można otrzymać

$$\bar{\sigma}_{\eta} |_{\xi=\xi_0} = 4 \operatorname{Re} [\varrho'(z)] |_{\xi=\xi_0},$$

$$\begin{aligned} 4 \varrho'(z) &= \sigma c \left[(1 + e^{2\xi_0}) \cosh \eta - e^{2\xi_0} \sinh \eta \right] \frac{d\eta}{dz} = \sigma c \left[(1 + e^{2\xi_0}) \cosh \eta - \right. \\ &\quad \left. - e^{2\xi_0} \sinh \eta \right] \frac{1}{c \sinh \eta} = \sigma \left[(1 + e^{2\xi_0}) \operatorname{ctg} \eta - e^{2\xi_0} \right] = \\ &= \sigma \left[(1 + e^{2\xi_0}) \frac{e^{\xi+i\eta} + e^{\xi-i\eta}}{e^{\xi+i\eta} - e^{\xi-i\eta}} - e^{2\xi_0} \right] = \sigma \left\{ -e^{2\xi_0} + \right. \\ &\quad \left. + (1 + e^{2\xi_0}) \frac{[(e^{\xi} + e^{-\xi}) \cos \eta + i(e^{\xi} - e^{-\xi}) \sin \eta][(e^{\xi} - e^{-\xi}) \cos \eta - i(e^{\xi} + e^{-\xi}) \sin \eta]}{[(e^{\xi} - e^{-\xi}) \cos \eta + i(e^{\xi} + e^{-\xi}) \sin \eta][(e^{\xi} - e^{-\xi}) \cos \eta - i(e^{\xi} + e^{-\xi}) \sin \eta]} \right\} \\ &= \sigma \left\{ \frac{(1 + e^{2\xi_0}) [(e^{2\xi} - e^{-2\xi}) \cos^2 \eta + (e^{2\xi} - e^{-2\xi}) \sin^2 \eta + i(\dots)]}{(e^{2\xi} + e^{-2\xi} - 2) \cos^2 \eta + (e^{2\xi} + e^{-2\xi} + 2) \sin^2 \eta} - e^{2\xi_0} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\eta} |_{\xi=\xi_0} &= \sigma \left\{ (1 + e^{2\xi_0}) \frac{\sinh 2\xi_0}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta} - e^{2\xi_0} \right\} = \\ &= \sigma \left\{ \frac{\sinh 2\xi_0 + e^{2\xi_0} \sinh 2\xi_0 - e^{2\xi_0} \cosh 2\xi_0 + e^{2\xi_0} \cos 2\eta}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta} \right\} = \\ &= \sigma \left(\frac{\sinh 2\xi_0 - 1 + e^{2\xi_0} \cos 2\eta}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta} \right). \end{aligned}$$

Składowa $\sigma_{\eta\eta}$ osiąga maksymalną wartość na końcu dużej osi elipsy czyli przy $\eta = 0$ lub $\eta = \pi$, wtedy $\cos 2\eta = 1$ oraz $\sigma_{\eta\eta}(\eta = \frac{0}{\pi}) = \sigma_{22}$

$$\sigma_{\eta\eta}(\eta = \frac{0}{\pi}) \equiv \sigma_{22} = \left(\frac{\sinh(2\xi_0) - 1 + e^{2\xi_0}}{\cosh(2\xi_0) - 1} \right) \sigma.$$

Wykorzystując zależności: $c^2 = a^2 - b^2$, $a = c \cosh \xi_0$,
 $b = c \sinh \xi_0$ oraz $\sinh(2\xi_0) = 2ab : c^2$, $\cosh(2\xi_0) = (a^2 + b^2) : c^2$
 otrzymujemy

$$\sigma_{\eta\eta}(\eta = \frac{0}{\pi}) \equiv \sigma_{22} = \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right).$$

Uwzględniając wzór na promień krzywizny krzywej opisanej równaniem parametrycznym $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$

$$\rho = \frac{(x_1'^2 + x_2'^2)^{3/2}}{x_1' x_2'' - x_1'' x_2'}$$

otrzymano promień krzywizny elipsy w następującej postaci

$$\rho = \frac{\sqrt{a^2 \sin^4 t + b^2 \cos^4 t}^3}{ab}$$

Przy $x_2 = 0$, $x_1 = a$ tzn. przy $\sin t = 0$, $\cos t = 1$, $\rho = \frac{b^2}{a}$

/2,9/
$$\sigma_{\eta\eta} = \sigma \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right).$$

Rozwiązanie Inglisa posłużyło Griffithowi do określenia stanu naprężenia i przemieszczenia wokół szczeliny. Przyjął on, że prostoliniowa szczelina o długości $2a$ stanowi graniczny przypadek ciągu elipsy o półosiach a, b gdy b zmierza do zera. Szczelina taka zajmująca np. odcinek

$$x_2 = 0, \quad -a \leq x_1 \leq a$$

jest nazwana szczeliną Griffitha.

3. Naprężenia wokół szczelin: Rozwiązanie Westergaarda

W rozwiązaniu Inglisa stan naprężeń wokół eliptycznego otworu był wyznaczony za pomocą potencjałów zespolonych. Natomiast Westergaard w celu określenia naprężeń wokół szczeliny wprowadził szczególnego typu funkcję zespoloną. Funkcja Westergaarda $\mathcal{U}(z)$ jest funkcją harmoniczną związaną z funkcją naprężeń Airyego Φ w następujący sposób

$$/3,1/ \quad \Phi = \operatorname{Re} \bar{\mathcal{U}}(z) + \chi_2 \operatorname{Im} \bar{\mathcal{U}}(z)$$

gdzie $\mathcal{U}'(z)$, $\mathcal{U}''(z)$, $\bar{\mathcal{U}}(z)$, $\bar{\mathcal{U}}'(z)$ oznaczają odpowiednio pierwszą i drugą pochodną $\mathcal{U}(z)$ oraz pojedynczą i podwójną całkę względem z . Przy tak przyjętej funkcji Φ składowe naprężenia mają następującą postać

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = \operatorname{Re} \mathcal{U}(z) - \chi_2 \operatorname{Im} \mathcal{U}'(z),$$

$$/3,2/ \quad \bar{\sigma}_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \operatorname{Re} \mathcal{U}(z) + \chi_2 \operatorname{Im} \mathcal{U}'(z),$$

$$\bar{\sigma}_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -\chi_2 \operatorname{Re} \mathcal{U}'(z),$$

natomiast składowe przemieszczenia określone są następująco

$$/3,3/ \quad u_1 = \frac{1+\nu}{E} \left\{ \frac{\chi-1}{2} \operatorname{Re} \bar{\mathcal{U}}(z) - \chi_2 \operatorname{Im} \mathcal{U}(z) \right\},$$

$$u_2 = \frac{1+\nu}{E} \left\{ \frac{\chi+1}{2} \operatorname{Im} \bar{\mathcal{U}}(z) - \chi_2 \operatorname{Re} \mathcal{U}(z) \right\},$$

$$\chi = \begin{cases} 3-4\nu & \text{płaski stan odkształcenia} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{płaski stan naprężenia} \end{cases}$$

Pochodne funkcji Φ oblicza się korzystając z warunków Cauchy - Riemanna :

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \operatorname{Im} \varphi}{\partial x_1} = -\frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial x_2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dz}.$$

Rozwiązanie Westergaarda ma tę własność, że wzdłuż linii $x_2 = 0$ zachodzi: $\sigma_{12} = 0$ i $\sigma_{22} = \bar{\sigma}_{11}$.

Rozpatrzmy szczelinę pasmową, $|x_1| < a$, $x_2 = 0$, $-\infty < x_3 < \infty$, która w płaszczyźnie x_1, x_2 ma postać odcinka o dowolnej długości $2a$. Rozpatrzmy 3 typy odkształcenia szczelin zależne od sposobu obciążenia ciała [7], [10]

typ I - występuje obciążenie rozciągające symetryczne w stosunku do osi symetrii szczeliny; odpowiadające sobie punkty na przeciwległych krawędziach szczeliny przemieszczają się względem siebie w kierunku x_2 /rys.3/;

typ II - występuje obciążenie ścinające $\bar{\sigma}_{21} = \tau$; krawędzie szczeliny ślizgają się po sobie w kierunku osi x_1 /rys.4/;

typ III - obciążenie ścinające $\bar{\sigma}_{23} = q$, powierzchnie szczeliny ślizgają się po sobie w kierunku osi x_3 /rys.5/.

Szczelina przy obciążeniu rozciągającym /typ I/

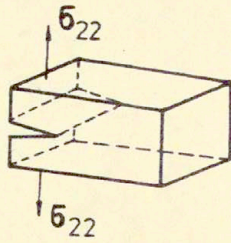
Jako funkcję Westergaarda $\varphi(z)$ należy dobrać taką funkcję przy której $\bar{\sigma}_{22} = 0$ gdy $x_2 = 0$ i $x_1 \leq \pm a$ oraz $\bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}$ gdy x_1 zmierza do \pm nieskończoności. Taką funkcją jest

$$\varphi(z) = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2}}}.$$

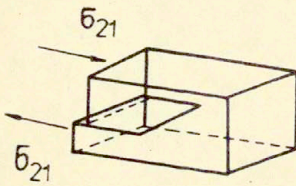
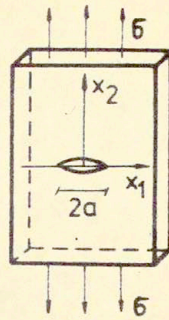
Przy $x_2 = 0$ naprężenie normalne do powierzchni szczeliny /3.2/2 ma postać następującą

$$/3.4/ \quad \bar{\sigma}_{22} = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x_1^2}}},$$

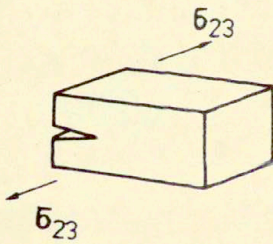
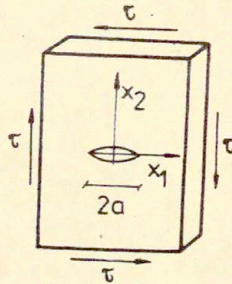
a przemieszczenie w_2 w płaskim stanie odkształcenia, wynikające z zależności /3.3/2 jest określone następująco



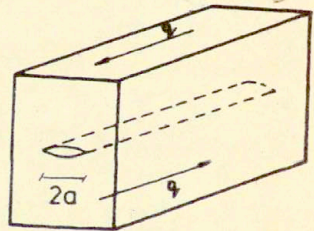
Rys. 3.



Rys. 4.



Rys. 5.



$$u_{22}(x_2=0) = \frac{2(1-\nu^2)\sigma}{E} \sqrt{a^2 - x_1^2}.$$

Ze wzoru /3,4/ wynika, że naprężenie σ_{22} w wierzchołku szczeliny jest nieograniczone co z fizycznego punktu widzenia jest nie do przyjęcia.

Zbadajmy jak przedstawia się rozkład naprężeń w bliskim otoczeniu wierzchołka szczeliny. W tym celu wprowadzono zmienną $\eta = z - a$, $\eta = r e^{i\theta}$ oraz założono, że $\frac{\eta}{a} \ll 1$. Na podstawie równania /3,2/ można wyznaczyć składowe naprężenia σ_{22} , σ_{11} , σ_{12} w pobliżu wierzchołka szczeliny. Aby wyznaczyć składową σ_{22} poszczególne składniki wzoru /3,2/2 wyrażono w zależności od zmiennej η

$$\operatorname{Re} \psi(z) = \operatorname{Re} \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \operatorname{Re} \sigma \sqrt{\frac{(\eta + a)^2}{\eta(\eta + 2a)}} ,$$

$$\operatorname{Im} \psi'(z) = \operatorname{Im} \left[-\frac{\sigma a^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] = \operatorname{Im} (-\sigma) \sqrt{\frac{a^4}{\eta^2(\eta^2 + 6\eta^2 a + 12\eta a^2 + 8a^3)}} .$$

Ze względu na to, że $\frac{\eta}{a} \ll 1$ otrzymujemy

$$\operatorname{Re} \psi(z) = \operatorname{Re} \sigma \sqrt{\frac{a}{2\eta}} = \operatorname{Re} \sigma \sqrt{\frac{a}{2r e^{i\theta}}} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} ,$$

$$\operatorname{Im} \psi'(z) = \operatorname{Im} (-\sigma \sqrt{\frac{a}{8\eta^3}}) = \operatorname{Im} \left(-\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{a}{2(r e^{i\theta})^3}} \right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{a}{2r^3}} \sin \frac{3\theta}{2} ,$$

$$x_2 \operatorname{Im} \psi'(z) = r \sin \theta \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{a}{2r^3}} \sin \frac{3\theta}{2} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} .$$

Składową naprężenia σ_{11} wyznaczamy wykorzystując te same wyrażenia co w σ_{22} , natomiast składową σ_{12} określamy w analogiczny sposób, zatem

$$\sigma_{22} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right),$$

/3,5/
$$\sigma_{11} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right),$$

$$\sigma_{12} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}.$$

Jeśli $\theta \rightarrow 0$ to $x_2 \rightarrow 0$ i

$$\sigma_{22} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}}.$$

Szczelina przy naprężeniu ścinającym /typ II/

Funkcje naprężeń przyjęto w postaci

$$\Phi_{II}(z) = -x_2 \operatorname{Re} \bar{\psi}_{II}(z),$$

gdzie funkcja ψ_{II} musi być tak dobrana, aby $\sigma_{12}=0$ przy $x_2 = 0$ i $x_1 \leq \pm a$ oraz $\sigma_{12} = \tau$ gdy $x_1 \rightarrow \pm \infty$. Składowe naprężenia przyjmują następującą postać

$$\sigma_{11} = 2 \operatorname{Im} \psi_{II}(z) + x_2 \operatorname{Re} \psi_{II}'(z),$$

$$\sigma_{22} = -x_2 \operatorname{Re} \psi_{II}'(z),$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} = \operatorname{Re} \psi_{II}(z) - x_2 \operatorname{Im} \psi_{II}'(z)$$

Na podstawie powyższych wzorów widać, że przy $x_2 = 0$ składowa $\sigma_{12}=0$, natomiast σ_{21} może się zerować przy $-a < x_1 < a$ jeśli $\psi_{II}(z)$ jest na tym odcinku urojona. Zatem przyjmujemy funkcję ψ_{II} w następującej postaci

$$\psi_{II}(z) = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2}}}.$$

Składowe naprężenia w pobliżu wierzchołka szczeliny w układzie współrzędnych biegunowych określone są następującymi wzorami

$$\sigma_{11} = -\tau \sqrt{\frac{a}{2\pi r}} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta \right) \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_{12} = \tau \sqrt{\frac{a}{2\pi r}} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right) \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_{22} = \tau \sqrt{\frac{a}{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta$$

Jeśli $\theta \rightarrow 0$ to $x_2 \rightarrow 0$ i

$$\sigma_{11} = \tau \sqrt{\frac{a}{2\pi r}}$$

Szczelina w antypłaskim stanie odkształcenia /typ III/

W antypłaskim stanie odkształcenia jedyną składową przemieszczenia różną od zera jest składowa w_3 . Podstawiając związki konstytutywne

$$\frac{\partial w_3}{\partial x_1} = \frac{\sigma_{12}}{\mu} \quad , \quad \frac{\partial w_3}{\partial x_2} = \frac{\sigma_{22}}{\mu}$$

do trzeciego równania równowagi /jedynego równania nierównego tożsamościowo zero/

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

otrzymano

$$\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_2^2} = 0$$

Równanie to spełnia funkcja w_3 w następującej postaci

$$w_3 = \frac{1}{\mu} I_{III} \mathcal{U}_{III}(z)$$

stad

$$\sigma_{12} = I_{III} \mathcal{U}'_{III}(z) \quad , \quad \sigma_{22} = \operatorname{Re} \mathcal{U}'_{III}(z)$$

Ponieważ w nieskończoności $\sigma_{2b} = q$, a w obszarze szczeliny $\sigma_{2b} = 0$ zatem przyjęto funkcję ψ_{III}' w następującej postaci

$$\psi_{III}'(z) = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2}}}$$

Składowe naprężenia i przemieszczenie w pobliżu wierzchołka szczeliny określone są wzorami

$$\sigma_{1b} = -q \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\theta}{2},$$

$$\sigma_{2b} = q \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2},$$

$$u_b = 2 \frac{q}{\mu} \sqrt{\frac{ra}{2}} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Jeśli $\theta \rightarrow 0$ to

$$\sigma_{2b} = q \sqrt{\frac{a}{2r}}.$$

Rozpatrzenie tych trzech przypadków szczególnych umożliwi drogą superpozycji wyznaczenie wielu ważnych rozwiązań dotyczących ciał ze szczelinami prostoliniowymi przy złożonych warunkach brzegowych.

4. Współczynnik intensywności naprężenia

We wszystkich schematach deformacji szczeliny rozpatrywanych w poprzednim rozdziale przy $x_2 = 0$ i x_1 dążącym do wierzchołka szczeliny odpowiednie naprężenia σ_{11} , w schemacie pierwszym, σ_{12} , w schemacie drugim i σ_{2b} w schemacie trzecim osiągały wartość nieskończoną.

Rozpatrzmy pierwszy typ odkształcenia szczeliny. Naprężenie normalne do powierzchni szczeliny przy $x_2 = 0$ określone jest następującym wzorem

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x_1^2}}}$$

Przy $x_1 \rightarrow a$ naprężenie σ_{22} zmierza do nieskończoności.

Wprowadźmy definicję Irwina określającą współczynnik intensywności naprężeń K , który jest granicą do której dąży iloczyn rozprężenia σ_{22} i $\sqrt{2\pi(x_1 - a)}$ gdy odległość od wierzchołka szczeliny jest bliska zeru, czyli:

$$K = \lim_{x_1 \rightarrow a} \sigma_{22}(x_1, 0) \sqrt{2\pi(x_1 - a)}$$

Wielkość K przyjmuje wartość skończoną i równą

$$K \equiv K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

Zależy ona od rozmiarów i konfiguracji szczeliny oraz od wartości przyłożonego obciążenia. Wszystkie wielkości fizyczne istotne w teorii szczelin można wyrazić poprzez współczynnik intensywności naprężeń. Pole naprężeń w bliskim otoczeniu wierzchołka szczeliny opisane wzorem /3,5/ można przedstawić następująco

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta\right),$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta\right),$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta.$$

Współczynniki intensywności naprężenia w pozostałych schematach deformacji szczeliny zdefiniowano następująco

$$K_{II} = \lim_{x_1 \rightarrow a} \sigma_{12}(x_1, 0) \sqrt{2\pi(x_1 - a)},$$

$$K_{III} = \lim_{x_1 \rightarrow a} \sigma_{22}(x_1, 0) \sqrt{2\pi(x_1 - a)}.$$

Wykorzystując rozwiązania odpowiednich zagadnień brzegowych przedstawionych w rozdziale 3 otrzymano

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a},$$

$$K_{III} = q \sqrt{\pi a}.$$

Wyznaczone powyżej współczynniki K_I , K_{II} , K_{III} dotycząły szczelin usytuowanych centralnie w nieskończonej tarczy.

Wyznaczenie współczynników intensywności naprężeń w przypadku elementów o skończonych wymiarach jest znacznie bardziej skomplikowane. W wielu przypadkach mogą one być otrzymane drogą odpowiedniej modyfikacji za pomocą funkcji algebraicznych lub trygonometrycznych rozwiązań tarcz nieskończonych. W przypadku rozciąganej tarczy o szerokości W ze szczeliną o długości $2a$ usytuowaną centralnie współczynnik K_I można wyznaczyć za pomocą wzoru [6], [7]:

$$K = \left[W \operatorname{tg} \left(\frac{\pi a}{W} \right) \right]^{1/2}.$$

Rozwijając $\sqrt{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi a}{W} \right)}$ w szereg otrzymano

$$K = \sigma W^{1/2} \left[\frac{\pi a}{W} + \frac{\pi^3 a^3}{3W^3} + \dots \right]^{1/2} =$$

$$= \sigma \sqrt{\pi a} \left(1 + \frac{\pi^2 a^2}{3W^2} + \dots \right)^{1/2} =$$

$$= \sigma \sqrt{\pi a} \left(1 + \frac{\pi^2 a^2}{6W^2} + \dots \right).$$

W przypadku nieskończonego ciała, tzn. gdy $\frac{a}{W} \rightarrow 0$ $K = \sigma \sqrt{\pi a}$.

5. Teoria Griffitha

W 1921 r. Griffith [5] sformułował kryterium energetyczne na podstawie którego określił związek między wytrzymałością ciała stałego, jego modułem sprężystości E oraz jednostkową energią powierzchniową γ . Istotnym założeniem dodatkowym wprowadzonym przez Griffitha było przyjęcie że istnieją tzw. koncentratory naprężeń, w postaci małych pęknięć, występujących w każdym ciele makroskopowo jednorodnym.

Zanim przytoczymy ściśle rozważania energetyczne Griffitha, traktujące ciało stałe jako kontinuum izotropowe, pokażemy że przyjęcie istnienia defektu szczeliny o długości $2a$, pozwala uzupełnić rozważania molekularne.

Z rozważań molekularnych przedstawionych w pracach [3], [7] wynika, że zależność między naprężeniem $\bar{\sigma} = F / (d_0)^2$ a odkształceniem $\epsilon = (d - d_0) / d_0$ można przedstawić za pomocą następującego wykresu /rys.6/. Tutaj F oznacza siłę potrzebną do zmiany odległości między atomami siatki krystalicznej materiału, d - odległość między atomami, d_0 - odległość między atomami odpowiadająca minimum energii /rys.7./ Wykres pokazany na /rys.6./ można aproksymować wzorem

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{\max} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{d - d_0}{d_0} \right).$$

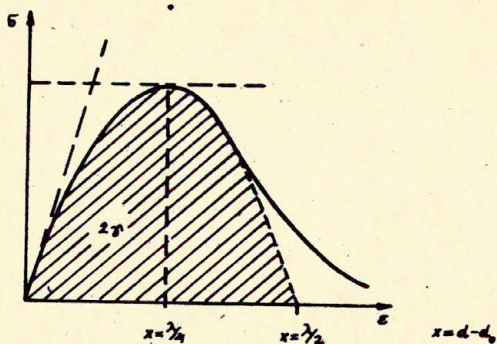
Energia odpowiadająca odkształceniu $\frac{\epsilon}{2}$ może być uznana za całkowitą energię aż do zniszczenia

$$/5,1/ \quad U = \int_0^{\frac{\epsilon}{2}} \bar{\sigma} d\epsilon = \frac{2}{\pi} \bar{\sigma}_{\max} = 2\gamma$$

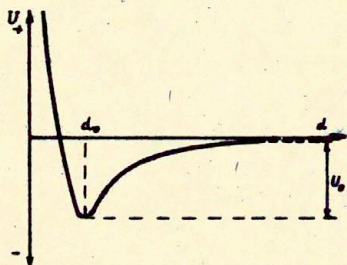
Energia ta jest równa podwójnej wartości jednostkowej energii powierzchniowej.

W przypadku małych przemieszczeń

$$/5,2/ \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{\max} \frac{\pi}{2} \frac{d - d_0}{d_0} = E \frac{d - d_0}{d_0},$$



rys.6.



rys.7.

i podstawiając λ wyznaczone ze wzoru /5,2/ do równania /5,1/ otrzymano zależność określającą wytrzymałość idealną ciała krystalicznego na rozciąganie

$$/5,3/ \quad \sigma_{max} = \sqrt{\frac{E\gamma}{d_0}}$$

Z rozwiązania Inglisa /rozd.2/ wynika, że przy wierzchołkach elipsy występuje koncentracja naprężeń, określona następującą zależnością

$$\sigma_{22} = \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right),$$

gdzie ρ jest promieniem krzywizny. Przy przejściu do tzw. szczeliny Griffitha mała oś elipsy zdąży do zera a ρ przyjmuje wartość d_0 określającą odległość międzyatomową w idealnej sieci krystalicznej, wtedy $2\sqrt{\frac{a}{d_0}} \gg 1$

$$/5.4/ \quad \sigma_{22} = 2\sqrt{\frac{a}{d_0}} \sigma.$$

Przyjmując $\sigma_{22} = \sigma_{max}$ z równań /5.3/ i /5.4/ otrzymujemy następującą zależność

$$/5.5/ \quad 2\sigma\sqrt{\frac{a}{d_0}} = \sqrt{\frac{E\gamma}{d_0}},$$

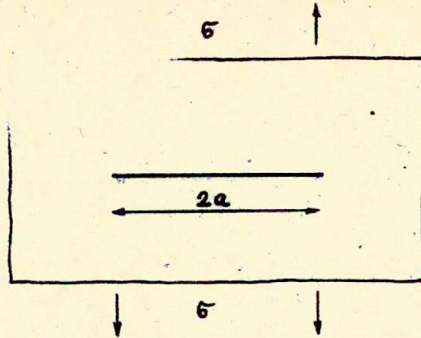
z której można określić naprężenie niszczące

$$/5.6/ \quad \sigma_F = \sqrt{\frac{E\gamma}{4a}}.$$

Lewa strona równania /5.5/ wynika z rozwiązania Inglisa opartego na założeniach liniowej teorii sprężystości, natomiast prawa strona wynika z sinusoidalnej krzywej określającej zależność między naprężeniem a odkształceniem w zakresie międzyatomowych oddziaływań. Wzór /5.6/ wykazuje dość dobrą zgodność z doświadczeniem. Różni się od wyrażenia na naprężenie niszczące wyznaczone przez Griffitha stałym współczynnikiem.

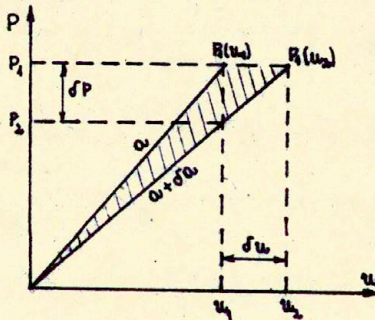
Griffith sformułował kryterium energetyczne, w którym rozważane są całkowite zmiany energii w ciele zawierającym szczelinę przy wzroście jej długości. Każdemu przyrostowi długości szczeliny towarzyszy zmniejszenie całkowitej energii.

Rozważmy zmiany energii, które występują w nieskończonej tarczy rozciąganej naprężeniem σ /rys.8./ przy infinitezmalnym wzroście długości szczeliny. Wraz ze wzrostem długości szczeliny powstaje nowa jej powierzchnia. Energia potrzebna do wytworzenia nowej powierzchni jest równa podwójnej energii γ pomnożonej przez nowo powstałą powierzchnię.



rys.8.

Aby wyznaczyć energię potencjalną wyzwoloną podczas rozciągania tarczy ze szczeliną zakładamy, że w ciele zawierającym szczelinę o długości zarówno $2a$, jak i $2(a+\delta a)$ zależności między obciążeniem a odpowiadającym mu przemieszczeniem [7] są zależnościami liniowymi, przedstawionymi na rys.9. Ciało zawierające dłuższą szczelinę jest słabsze.



rys.9.

Przy ustalonym przemieszczeniu $u_1 = \text{const}$ przyrost szczeliny z a do $a + \delta a$ wywołuje zmniejszenie zgromadzonej energii odkształcenia ciała z $\frac{1}{2} P_1 u_1$ do $\frac{1}{2} P_2 u_1$, ponieważ temu samemu przemieszczeniu u_1 w słabszym ciele przyporządkowane jest mniejsze obciążenie P_2 , stąd mniejsza energia odkształcenia. Zatem przy ustalonym przemieszczeniu wzrost długości szczeliny powoduje wyzwolenie nagromadzonej energii odkształcenia równej $\frac{1}{2} (P_1 - P_2) u_1$ oraz przyrost energii powierzchniowej.

Natomiast przy ustalonym obciążeniu $P = P_1 = \text{const}$ ciało słabsze doznaje większego przemieszczenia i nagromadzona energia odkształcenia w ciele zawierającym szczelinę o długości $(a + \delta a)$ jest większa $(\frac{1}{2} P_1 u_2)$ niż w ciele zawierającym szczelinę o długości a $(\frac{1}{2} P_1 u_1)$. Zauważmy, że ustalone obciążenie porusza się wzdłuż $(u_2 - u_1)$, zatem wykonuje pracę równą $P_1 (u_2 - u_1)$. Wobec tego energia potencjalna ulega zmniejszeniu

$$P_1 (u_2 - u_1) - \frac{1}{2} P_1 (u_2 - u_1) = \frac{1}{2} P_1 (u_2 - u_1).$$

Wartości tej odpowiada na rys.9 obszar zakreskowany.

Reasumując, przy ustalonym przemieszczeniu energia odkształcenia ulega zmniejszeniu o wartość $\frac{1}{2} (P_1 - P_2) u_1$ gdy długość szczeliny wzrasta z a do $(a + \delta a)$, natomiast przy ustalonym obciążeniu energia potencjalna ulega zmniejszeniu o wartość $\frac{1}{2} P_1 (u_2 - u_1)$.

Jeśli zdefiniujemy $(P_1 - P_2)$ jako δP , $(u_2 - u_1)$ jako δu oraz przyjmiemy że $\delta a \rightarrow 0$ można łatwo wykazać, że: przy nieskończenie małym rozciąganiu ciała ze szczeliną zmniejszenie zgromadzonej energii odkształcenia w ciele przy ustalonym przemieszczeniu jest identyczne ze zmniejszeniem energii potencjalnej przy stałym obciążeniu.

Griffith stwierdził, że aby szczelina powiększyła swoją długość potrzebna jest energia, która jest różnicą między energią wyzwoloną podczas rozciągania szczeliny i energią potrzebną do wytworzenia nowej powierzchni. Metoda Griffitha

obliczenia wyzwolonej energii jest dość skomplikowana ponieważ całkowanie iloczynu naprężenia i odkształcenia odbywa się po całej nieskończonej tarczy gdyż rozważane są zmiany energii w całym ciele. Griffith wykazał, że dla nieskończonej tarczy zawierającej szczelinę w przypadku przemieszczeniowych warunków brzegowych, energia odkształcania ma postać

$$U = -\frac{1}{2} \frac{\sigma^2 \pi a^2}{E} \quad \text{w płaskim stanie naprężenia}$$

oraz
$$U = -\frac{1}{2} \frac{\sigma^2 \pi a^2}{E} (1-\nu^2) \quad \text{--- --- odkształcenia.}$$

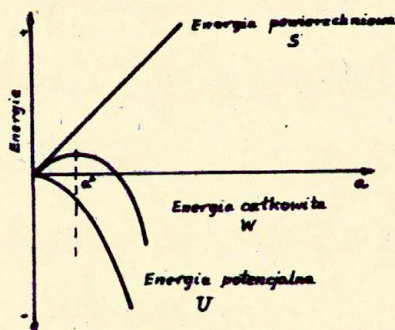
W związku z tym:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = -\frac{\sigma^2 \pi a}{E}$$

oraz
$$\frac{\partial U}{\partial a} = -\frac{\sigma^2 \pi a}{E} (1-\nu^2).$$

W przypadku ustalonego obciążenia te same wartości $\frac{\partial U}{\partial a}$ określają zmniejszenie potencjalnej energii podczas wzrostu długości szczeliny o infinytezymalną wielkość da .

Kryterium Griffitha określające zniszczenie ciała zawierającego szczelinę o długości $2a$ można przedstawić na rys.10.



rys. 10.

Całkowita energia W np. w płaskim stanie naprężenia określona jest następująco

$$W = U + S = -\frac{1}{2} \frac{\pi \sigma^2 a^3}{E} + 2\gamma a.$$

Maksimum energii całkowitej określone jest przez warunek

$$\frac{\partial W}{\partial a} = 0, \text{ czyli:}$$

$$/5,5/ \quad \frac{\sigma^2 \pi a}{E} = 2\gamma.$$

Z równania /5,5/ wynikają naprężenia niszczące

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} \quad \text{w płaskim stanie naprężenia, oraz}$$

/5,6/

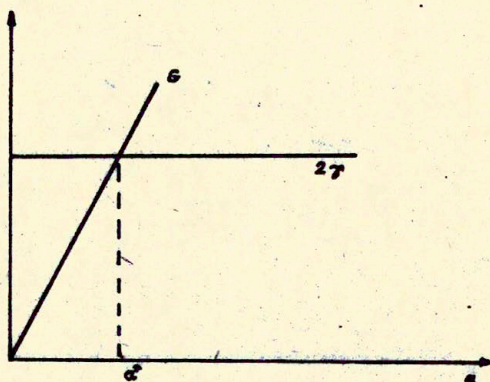
$$\sigma_F = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)a}} \quad \text{w płaskim stanie odkształcenia.}$$

Teoria Griffitha uzyskała dużą popularność chociaż dotyczyła ona tylko zmian energii podczas wzrostu szczeliny, nie uwzględniając procesu zniszczenia zachodzącego przy jej wierzchołku. Dotyczy ona początkowego i końcowego stanu nie opisując procesu zniszczenia na długości a_0 . Warunek Griffitha jest tylko warunkiem koniecznym zniszczenia, który może ale nie musi być wystarczający.

6. Współczynnik wyzwalańia energii.

Współczynnik wyzwalańia energii odkształcenia /potencjalnej/definiujemy jako dodatnią wartość $\frac{\partial U}{\partial a}$. W przypadku ustalonego przemieszczenia U jest energią odkształcenia, a w przypadku ustalonego obciążenia U jest energią potencjalną. Współczynnik wyzwalańia energii odkształcenia /potencjalnej/definiowany jest przy jednostkowej grubości i oznaczany symbolem G .

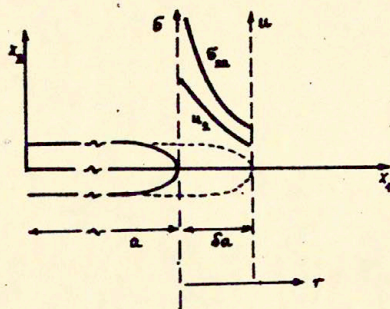
Warunek Griffitha /5,5/ przedstawiony w poprzednim rozdziale jest zależnością opisującą równość współczynnika wyzwalań energii potencjalnej $-\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)$ z podwójną wartością jednostkowej energii powierzchniowej /rys.11./



rys.11.

Irwin wykazał, że współczynnik wyzwalań energii odkształcenia /potencjalnej/ może być wyznaczony na podstawie rozważań dotyczących pola naprężeń i przemieszczeń w bezpośrednim sąsiedztwie wierzchołka szczeliny. Zatem zbyteczny jest rachunek Griffitha, który wymagał całkowania iloczynu $\sigma_{ij} \delta_{ij}$ po obszarze nieskończonym.

Aby obliczyć współczynnik wyzwalań energii należy wyznaczyć energię wyzwoloną podczas wzrostu długości szczeliny z $2a_0$ do $2(a_0 + \delta a_0)$. Jeśli $\delta a_0 \rightarrow 0$ to wyzwolona energia potencjalna w ciele przy stałym obciążeniu jest równa wyzwolonej energii odkształcenia przy stałym przemieszczeniu. Na rysunku 12 przedstawiony jest rozkład naprężeń przy wierzchołku szczeliny o długości a_0 i przemieszczeń przy wierzchołku o długości $a_0 + \delta a_0$.



rys.12.

Z rozwiązania Westergaarda wynika, że

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}$$

i w płaskim stanie odkształcenia

$$u_2(x_2=0) = 2(1-\nu^2) \frac{\sigma}{E} \sqrt{(a+\delta a)^2 - x_1^2}.$$

Wprowadzając zmienną $r = x_1 - a$ otrzymujemy

$$/6.1/ \quad \sigma_{22} = \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}},$$

$$/6.2/ \quad u_2 = 2(1-\nu^2) \frac{\sigma}{E} \sqrt{2a(\delta a - r)}.$$

Aby wyznaczyć współczynnik wyzwalaenia energii sprężystej Irwin [6] rozpatrzył pracę wykonaną podczas zamykania szczeliny o długości $2(a+\delta a)$ do jej pierwotnej długości $2a$. Praca ta może być wyrażona jako

$$G \delta a = \int_0^{\delta a} \sigma_{22} u_2 dr.$$

Wykorzystując rozwiązanie Westergaarda /6,1/ i /6,2/ otrzymano

$$/6,3/ \quad G \delta a = \lambda (1-\nu^2) \frac{\sigma}{E} \int_0^{\delta a} \sqrt{\frac{\delta a - r'}{r'}} dr'.$$

Dokonując podstawienia $r' = \delta a \sin^2 \nu$ obliczono całkę i wyrażenie /6,3/ przedstawiono w postaci

$$/6,4/ \quad G \delta a = \frac{\sigma^2 \pi a}{E} (1-\nu^2) \delta a.$$

Wykorzystując definicję współczynnika intensywności naprężeń $K = \sigma \sqrt{\pi a}$ wyrażenie /6,4/ można przedstawić następująco

$$/6,5/ \quad G = \frac{K^2}{E} (1-\nu^2).$$

W płaskim stanie naprężenia współczynnik wyzwala energii sprężystej określony jest zależnością

$$/6,6/ \quad G = \frac{K^2}{E}.$$

Wielkość G określona wzorami /6,5/ i /6,6/ zależy od współczynnika intensywności naprężeń K, który określa przemieszczenia i naprężenia w pobliżu wierzchołka szczeliny.

Rozpatrzmy jeszcze szczelinę o długości $2a$ usytuowaną w nieskończonym ciele, podlegającą obciążeniu rozciągającemu /typ I/ ścinającemu /typ II/ i antypłaskiemu obciążeniu ścinającemu /typ III/. Przy wierzchołku szczeliny występują zatem lokalne naprężenia σ_{11} , σ_{12} i σ_{22} . Są one określone przez odpowiednie współczynniki intensywności naprężeń K_I , K_{II} , K_{III} . Współczynniki wyzwala energii odkształcenia /potencjalnej/. Irwin utożsamia z pracą potrzebną do zamknięcia szczeliny o długości $\lambda(a + \delta a)$ do jej pierwotnej długości $2a$, zatem:

$$G = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\delta a} \int_0^{\delta a} (\sigma_{12} u_2 + \sigma_{12} u_1 + \sigma_{22} u_2) dr'.$$

Obliczając całkę analogicznie jak w wyrażeniu /6,3/ i zakładając płaski stan odkształcenia w przypadkach I i II otrzymano

$$/6,7/ \quad EG = (1-\nu^2) K_I^2 + (1-\nu^2) K_E^2 + (1+\nu) K_{II}^2 .$$

Natomiast w płaskim stanie naprężenia

$$/6,8/ \quad EG = K_I^2 + K_E^2 + (1+\nu) K_{II}^2 .$$

Wyrażenia /6,5/, /6,6/, /6,7/ i /6,8/ określające współczynniki wyzwalań energii sprężystej wyznaczone są przez współczynniki intensywności naprężeń, które są znane i stabilizowane dla różnych kształtów i układów obciążeń. Uzyskane zależności są szczególnie ważne w przypadkach, w których doświadczalne wyznaczenie G było by trudne lub niemożliwe.

Powróćmy jeszcze do kryterium zniszczenia Griffitha. Wielkość $G da$ lub $\frac{K^2}{E} da$ jest energią ciała o grubości jednostkowej, która jest pochłaniana podczas ruchu szczeliny o da . Na podstawie teorii Griffitha wielkość ta musi przewyższać pracę potrzebną do oddzielenia dwóch powierzchni, 2γ .

Kryterium Griffitha w płaskim stanie odkształcenia ma postać

$$G_{\text{min}} da = \frac{K_{\text{min}}^2}{E} (1-\nu^2) da = 2\gamma da .$$

Podstawiając $K = \sigma \sqrt{\pi a}$ i nadając wartości σ przy zniszczeniu symbol σ_F otrzymujemy równanie

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)a}} ,$$

które jest identyczne jak zależność /5,6/.

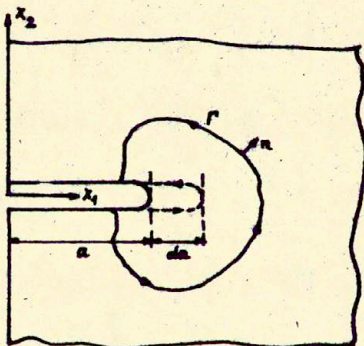
7. Całka Rice'a

W przypadku liniowej teorii sprężystości wprowadzona została miara odporności materiału na zniszczenie - współczynnik wyzwalań energii G . Natomiast w przypadku nieliniowej teorii sprężystości Rice wprowadził analogiczną miarę J , która wyraża zmianę energii potencjalnej gdy szczelina zwiększa swoją długość o odcinek da . Całka Rice'a zdefiniowana jest następująco

$$/7.1/ \quad J = \int_{\Gamma} \left[W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right],$$

tutaj Γ jest krzywą otaczającą wierzchołek szczeliny przebiegającą w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara tzn. od dolnej do górnej powierzchni szczeliny /rys.13/, ds jest długością elementarnego łuku wzdłuż krzywej Γ , $T = \sigma_{ij} n_j$ jest wektorem sił działających na krzywej Γ w kierunku wektora normalnego n , W jest gęstością energii sprężystej zdefiniowaną następująco

$$W = W(\epsilon_{mn}) = \int_0^{\epsilon_{mn}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}.$$



rys.13.

W pracy [8] Rice wykazał, że J jest równoważne zmianie energii potencjalnej, gdy szczelina ulega wydłużeniu o da , czyli

$$J = - \frac{dU}{da}.$$

Całka Rice'a jest niezależna od wyboru krzywej całkowania, aby to udowodnić rozważmy zamkniętą krzywą Γ^* otaczającą obszar A^* . Po zastosowaniu twierdzenia Greena otrzymano

$$\begin{aligned} /7,2/ \quad \int_{\Gamma^*} [W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds] &= \int_{\Gamma^*} [W n_1 ds - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds] = \\ &= \int_{A^*} \left[\frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) \right] dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Z definicji gęstości energii sprężystej mamy

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1},$$

wykorzystując symetryczność tensora naprężeń i równania równowagi drugi wyraz funkcji podcałkowej można wyrazić następująco

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1}.$$

Całka powierzchniowa w równaniu /7,2/ zeruje się tożsamościowo, zatem

$$\int_{\Gamma^*} [W dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds] = 0.$$

Rozważmy dwie krzywe Γ_1 i Γ_2 otaczające wierzchołek szczeliny takie jak krzywa Γ na rys.13. Niech trajektoria, którą rozpatrujemy przebiega wzdłuż krzywej Γ_1 w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wzdłuż górnej powierzchni szczeliny do punktu gdzie krzywa Γ_2 przecina powierzchnię szczeliny dalej wzdłuż Γ_2 w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara i wzdłuż dolnej powierzchni szczeliny do punktu przecięcia z Γ_1 . Opisana trajektoria stanowi zamknięty kontur, po

którym całka z $\int_{\Gamma_i} W dx_1 - \Gamma_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds$ zeruje się. Całka wzdłuż opisanych części powierzchni górnej i dolnej szczeliny zeruje się tożsamościowo, zatem suma całek wzdłuż krzywej Γ_1 i Γ_2 jest równa zero. Zgodnie z definicją /7,1/ otrzymujemy $J_1 - J_2 = 0$, stąd wynika, że wartość całki Rice'a nie zależy od drogi całkowania.

W przypadku liniowej teorii sprężystości całka Rice'a pokrywa się ze współczynnikiem wyzwalańa energii G.

Całka Rice'a wprowadzona jest również w przypadkach niesprężystych. W przypadku quasi - kruchego pęknięcia tzn wówczas gdy rozmiar strefy plastycznej jest mały w porównaniu z długością szczeliny i szerokością próbki, całkę Rice'a obliczamy wprowadzając kontur Γ położony w całości w obszarze sprężystym poza strefą plastyczną.

Obliczenia numeryczne [12] w przypadku materiałów sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem potęgowym opisane deformacyjną teorią plastyczności wykazują przydatność całki Rice'a do obliczeń w zakresie niesprężystym.

Pomiar wartości całki Rice'a dokonany na niewielkich próbkach laboratoryjnych np. przez Begley'a i Landesa [12] potwierdza przypuszczenie, że całka ta zachowuje swoje znaczenie fizyczne również w obecności znacznych odkształceń plastycznych poprzedzających zniszczenie. Warunkiem jednak na to aby całka Rice'a mogła być poprawnie interpretowana jako "współczynnik wyzwalańa energii" jest niewystępowanie odciążenia w strefie plastycznej wokół szczeliny.

8. Kierunek pęknięcia szczeliny. Hipoteza G.C. Sih'a

Na podstawie hipotezy Griffitha można określić obciążenie, przy którym w ciele zawierającym szczelinę nastąpi jej dalsza propagacja. Teoria Griffitha nie mówi nic o kierunku propagacji. Tym problemem zajmował się G.C.Sih [9] przyjmując hipotezę, że kierunek propagacji szczeliny określony jest minimalną intensywnością energii odkształcenia nagromadzonej

w ośrodku otaczającym front szczeliny. Przez intensywność energii S_{ih} rozumiał iloczyn gęstości energii / tzn. ilość energii nagromadzonej w elemencie o jednostkowej objętości / przez odległość tego elementu od wierzchołka szczeliny. Dla płaskiej szczeliny dowolnie usytuowanej względem kierunku sił zewnętrznych stan naprężeń w bezpośrednim sąsiedztwie szczeliny w układzie współrzędnych r, θ określony jest następująco

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right),$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2},$$

$$/8, 1/ \quad \sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right),$$

$$\sigma_{33} = 2\nu \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - 2\nu \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2},$$

$$\sigma_{13} = - \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2},$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}.$$

Gęstość energii odkształcania, nagromadzoną w elemencie o jednostkowej objętości, można wyrazić wzorem

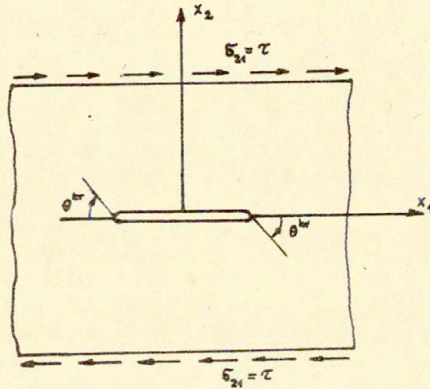
$$U = \frac{1}{2E} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{33} \sigma_{11}) + \frac{1}{2\mu} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2),$$

Hipotezę tę można uogólnić na przypadek dowolnej szczeliny niekoniecznie płaskiej. Wtedy intensywność energii odkształcenia S będzie zależna nie tylko od θ ale również od Ψ .

Prostym przykładem zastosowania hipotezy jest płaski stan odkształcenia ciała zawierającego szczelinę $-\omega < x_1 < \omega$, $x_2 = 0$ $-\infty < x_2 < \infty$, obciążonego na płaszczyznach $x_2 = \pm\infty$ siłami stycznymi $\sigma_{21} = \tau$ [10]. Funkcja S ma postać

$$S = \frac{\tau^2 \omega}{16 \pi \mu} [4(1-\nu)(1-\cos \theta) + (1+\cos \theta)(3 \cos \theta - 1)].$$

Z warunku $\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0$ znajdujemy $\cos \theta_{\text{opt}} = \frac{1-2\nu}{3}$. Kąt θ_{opt} zależy od stałej ν i zmienia się od $-70,5^\circ$ do -90° / rys. 14/



rys. 14.

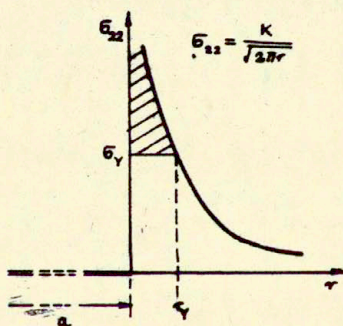
9. Quasi - kruche pękanie

Z quasi - kruchym pękaniem mamy do czynienia wtedy, gdy pęknięcie kruche poprzedzone jest wystąpieniem nieodwracalnych odkształceń w pobliżu wierzchołków szczeliny, w obszarze małym w porównaniu z jej długością. Przedstawimy dwa rozwiązania uwzględniające istnienie stref plastycznych w otoczeniu wierzchołka szczeliny [7] :

- rozwiązanie równowazne sprężystemu ,
- rozwiązanie Dugdale

W pierwszym przypadku zakładamy, że w pobliżu wierzchołka szczeliny / $x_1 = a$ / rozciąga się strefa plastyczna d_Y , wewnątrz której naprężenie normalne σ_{11} jest równe granicy plastyczności σ_Y . Istotą problemu jest znalezienie rozmiaru strefy d_Y , gdy działają na tarczę rozciągające naprężenia σ .

W pierwszym etapie przyjmiemy, że strefa plastyczna wewnątrz której $\sigma_{11} = \sigma_Y$ sięga do punktu r_Y /rys.15/.



rys.15.

Całkowity obszar zawarty pod krzywą $\sigma_{22} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}$ przy $r \in (0, r_Y)$ jest określony następująco

$$/9.1/ \quad \int_0^{r_Y} \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K \sqrt{r_Y}.$$

Ponieważ przy $r = r_Y$

$$\sigma_{22} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r_Y}} = \sigma_Y,$$

to

$$r_Y = \frac{K^2}{2\pi \sigma_Y^2}.$$

Uwzględniając ostatnią zależność otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} K (r_Y)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_Y \sqrt{2\pi r_Y} \sqrt{r_Y} = 2 \sigma_Y r_Y.$$

Obszar poniżej linii $\sigma_{22} = \sigma_Y$ do $r = r_Y$ jest oczywiście równy $\sigma_Y r_Y$ wobec tego zakresowany obszar musi być również równy $\sigma_Y r_Y$.

Zatem strefa plastyczna rozciągająca się przed wierzchołkiem szczeliny wynosi

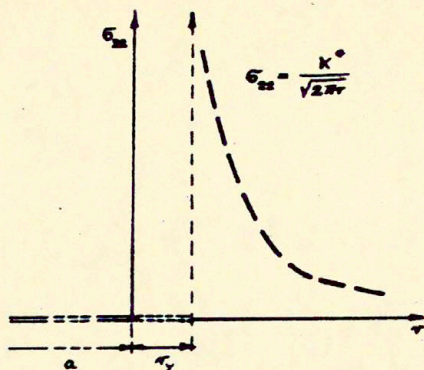
$$/9.2/ \quad d_Y = 2 r_Y = \frac{K^2}{\pi \sigma_Y^2}.$$

Wprowadzenie tak przyjętej strefy plastycznej zmieni pole naprężeń wokół frontu szczeliny, jak również kształt samej szczeliny.

W punkcie a w wierzchołku szczeliny przemieszczenie jest różne od zera i równa się pewnemu "rozwarciu końcowemu" δ /COD/.

Wprowadzamy pojęcie "umownej" szczeliny, której wierzchołek umieszczony jest w punkcie r_Y /rys.16./

$$\sigma_{22} = \frac{K^*}{\sqrt{2\pi r}} \quad \text{gdzie} \quad K^* = \sigma \sqrt{\pi(a+r_Y)}.$$



rys.16.

Natomiast σ określone jest następującym wzorem

$$\sigma = \frac{4}{\pi} \frac{K^2}{E \sigma_Y}$$

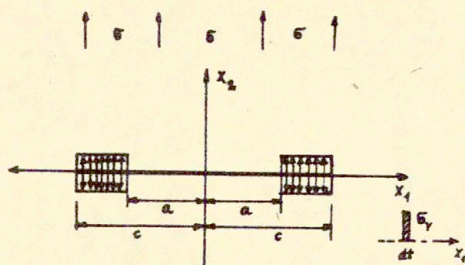
Rozwiązanie Dugdale

W rozwiązaniu Dugdale zakładamy, że w obszarach plastycznych o długości $|c - a|$ małych w porównaniu z długością szczeliny /rys.17/ działają skończone naprężenia równe granicy plastyczności σ_Y .

Związek między σ , a i c znajdziemy z następujących rozważań. Przyjmijmy na początku, że szczelina o długości $2c$ obciążona jest parą sił $\sigma(t) \times dt \times$ jednostkowa grubość, gdzie $x_1 = \pm t$ i $|t| < |c|$. Wykorzystując funkcję naprężeń Westergaarda otrzymujemy naprężenie σ_{xx} w następującej postaci.

/9,3/

$$\sigma_{xx} = \frac{2 \sigma(t) dt}{\pi} \frac{x_1 \sqrt{c^2 - t^2}}{(x_1^2 - t^2) \sqrt{x_1^2 - c^2}}$$



rys.17.

Rozważając obszar bliski strefom plastycznym tzn. przyjmując $x_2 = c + \eta$ gdzie $\eta \ll c$ równanie /9,3/ dla par sił $\bar{\sigma}_y dt$ przyjmuje postać

$$\bar{\sigma}_{22} = 2 \frac{\bar{\sigma}_y}{\pi} \sqrt{\frac{c}{a+\eta}} \frac{dt}{\sqrt{c^2 - t^2}}$$

oraz

$$K = \frac{2 \bar{\sigma}_y}{\sqrt{\pi}} \sqrt{c} \frac{dt}{\sqrt{c^2 - t^2}}$$

całkując tę zależność w granicach $t = 0$, $t = c$ otrzymujemy

$$/9,4/ \quad K = \frac{2 \bar{\sigma}_y}{\sqrt{\pi}} \sqrt{c} \cos^{-1} \left(\frac{a}{c} \right).$$

Jest to zatem współczynnik intensywności naprężeń w przypadku gdy wzdłuż odcinka $|c - a|$ działa obciążenie równoważne granicy plastyczności.

Naprężenie rozciągające $\bar{\sigma}$ można tak dobrać aby współczynnik intensywności naprężeń /9,4/ był równy współczynnikowi intensywności naprężeń dla szczeliny o długości $2c$, czyli

$$/9,5/ \quad K = \sigma \sqrt{\pi C}$$

z równości /9,4/ i /9,5/ wynika następujący związek między σ, a, c

$$\sigma \sqrt{\pi C} = \frac{2\sigma_Y}{\sqrt{\pi}} \sqrt{C} \cos^{-1}\left(\frac{a}{C}\right),$$

stąd

$$\frac{a}{C} = \cos\left(\frac{\pi \sigma}{2\sigma_Y}\right).$$

W przypadku gdy $\frac{\sigma}{\sigma_Y}$ jest małe z rozwinięcia funkcji $\cos^{-1}x$ w szereg potęgowy wynika, że

$$\frac{a}{C} \rightarrow 1 - \frac{\pi^2 \sigma^2}{8 \sigma_Y^2} + \dots$$

Wprowadzając oznaczenie $d_Y = C - a$ otrzymujemy

$$\frac{a}{a + d_Y} = \left(1 + \frac{d_Y}{a}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{d_Y}{a} + \dots\right).$$

Przy niewielkich naprężeniach dostajemy zależność określającą wielkość strefy plastycznej w następującej postaci

$$/9,6/ \quad d_Y = \frac{\pi^2 \sigma^2}{8 \sigma_Y^2} a = \frac{\pi K^2}{8 \sigma_Y^2}.$$

Biorąc funkcję Westergaarda odpowiadającą działaniu obciążeń wzdłuż stref plastycznych i zwiększeniu długości szczeliny do $2c$ można wyznaczyć przemieszczenie w_2 przy końcach rzeczywistej szczeliny $x_1 = \pm a$ czyli określić "rozwarście końcowe" δ . To przemieszczenie zostało wyznaczone w pracy [1] i ma następującą postać

$$\delta = \frac{8}{\pi} \frac{\sigma_Y}{E} a \ln \left[\sec \left(\frac{\pi \sigma}{2\sigma_Y} \right) \right].$$

Rozwijając $\ln \sec \left(\frac{\pi \sigma}{2\sigma_Y} \right) = -\ln \left[\cos \left(\frac{\pi \sigma}{2\sigma_Y} \right) \right]$ w szereg potęgowy w przypadku niewielkich naprężeń uzyskujemy uproszczoną zależnością na δ :

$$\delta = \frac{\sigma^2 \pi a}{\sigma_Y E} = \frac{K^2}{\sigma_Y E},$$

którą można powiązać ze współczynnikiem wyzwalań energii / $G = \frac{K^2}{E}$ w płaskim stanie naprężenia/ w następujący sposób

$$G = \sigma_Y \delta.$$

Istotną sprawą jest sformułowanie kryterium zniszczenia w przypadku ciał quasi - kruchych. Hipoteza Griffitha dość dobrze opisuje pękanie w ciałach kruchych. Jednakże w przypadku ciał quasi - kruchych hipoteza ta musi ulec pewnej modyfikacji. Takimi modyfikacjami zajmowali się niezależnie od siebie Irwin i Orwan, w oparciu o wyniki badań doświadczalnych przeprowadzonych na cienkich aluminiowych płytach zawierających w środku szczeliny. Na podstawie przeprowadzonych badań stwierdzono, że naprężenia niszczącego należy poszukiwać w następującej postaci

$$/9,7/ \quad \sigma_F = \sqrt{\frac{E \cdot \text{const}}{\pi a}},$$

gdzie stała "const" jest dużo większa niż energia powierzchniowa γ [7].

W przypadku ciał quasi - kruchych istotne jest, że wielkość strefy plastycznej przy wierzchołkach szczeliny jest dużo mniejsza od długości szczeliny czy szerokości płyty. Zatem uzasadnione jest założenie, że mały obszar plastyczny w okolicach wierzchołka szczeliny nie zmienia zasadniczo pochyleń krzywych obciążenie - przemieszczenie dla ciała ze szczeliną o długości a i $a + \delta a$ przedstawionych na rys.9. Można wówczas do wyznaczenia naprężenia niszczącego stosować metody liniowej teorii sprężystości.

Orwan zmodyfikował związek Griffitha następująco

$$/9,8/ \quad \sigma_F = \sqrt{\frac{E(2\gamma + \gamma_p)}{\pi a}}$$

gdzie γ_p jest dysypacją plastyczną. Doświadczalnie wykazano, że $\gamma_p + 2\gamma$ jest dużo większe od 2γ .

Irwin przyjął zależność między naprężeniem niszczącym a długością szczeliny w materiałach quasi - kruchych według liniowej teorii sprężystości. Jego związek zależy od krytycznej wartości współczynnika wyzwalaenia energii sprężystej/potencjalnej/, przy którym występuje propagacja szczeliny. Wartość G_{kryt} jest wygodnym parametrem do którego włączone są wszystkie dodatkowe warunki dysypacji energii. Wielkość G_{kryt} jest pewną stałą materiałową charakteryzującą odporność materiału na zniszczenie związaną z wielkością K_{kryt} zależnościami /6,5/ i /6,6/ czyli

$$G_{kryt} = \frac{K_{kryt}^2}{E} \quad \text{przy płaskim stanie naprężenia}$$
$$G_{kryt} = \frac{K_{kryt}^2}{E} (1-\nu^2) \quad \text{--- --- okształcenia}$$

Warto zbadać zmodyfikowaną zależność na naprężenie niszczące otrzymane wg liniowej teorii sprężystości po uwzględnieniu stref plastycznych a_Y wyznaczonych z rozwiązań przedstawionych na początku niniejszego rozdziału. Przyjmując wyznaczoną wielkość strefy plastycznej określonej zależnością /9,2/ otrzymujemy, że w przypadku występowania "umownej" szczeliny o długości $2(a+a_Y)$ naprężenie niszczące określone jest wzorem

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{E G_{kryt}}{\pi(a+a_Y)}} = \sqrt{\frac{E G_{kryt}}{\pi(a + \frac{\sigma_F^2 a}{2\sigma_Y^2})}}$$

Wprowadzając wielkość krytycznej intensywności naprężeń w przypadku płaskiego stanu naprężenia otrzymujemy

$$/9,9/ \quad K_{kryt} = \sigma_F \sqrt{\pi a \left(1 + \frac{\sigma_F^2}{2\sigma_Y^2}\right)}$$

Jeśli $\sigma_F \ll \sigma_Y$ wtedy znika wyraz uzupełniający i wzór /9,9/ przyjmuje postać następującą.

$$/9,10/ \quad K_{kryt} = \sigma_F \sqrt{\pi a}$$

Przyjmując rozwiązanie Dugdale'a /8,6/ określające całkowitą długość strefy plastycznej $a_Y = \lambda a_Y$ otrzymujemy współczynnik krytycznej intensywności naprężeń w następującej postaci

$$/9,11/ \quad K_{kryt} = \sigma_F \sqrt{\pi a \left(1 + \frac{\sigma_F^2 \pi^2 a^2}{16 \sigma_Y^2} \right)} .$$

Równania /9,9/, /9,10/, /9,11/ są pewną modyfikacją wzoru Griffitha uwzględniającą istnienie przy wierzchołkach szczelin stref plastycznych, niewielkich w porównaniu z jej długością.

Z oszacowania równań /9,9/, /9,10/ i /9,11/ wynika następujący wniosek. W płaskim stanie naprężenia, można stosować wzór /9,10/ jeśli $\frac{\sigma_F}{\sigma_Y} < 0,4$, gdy $0,4 < \frac{\sigma_F}{\sigma_Y} < 0,8$ powinien być użyty wzór /9,9/ lub lepiej /9,11/. Natomiast w przypadku gdy $\frac{\sigma_F}{\sigma_Y} > 0,8$ we wzorze /9,11/ należy podstawić bardziej dokładną postać K_Y uwzględniającą dalsze wyrazy rozwinięcia w szereg. Jednakże w przypadku dużych wartości $\frac{\sigma_F}{\sigma_Y}$ związki te należy traktować z dużą ostrożnością.

- [1] F.H. BURDEKIN, D.E.W. STONE, The crack opening displacement approach to fracture mechanics in yielding materials, *J Strain Anal*, 1,145,1966.
- [2] A.M. FREUDENTHAL, Teoria zniszczenia, *Praca IPPT*, 51/1974.
- [3] R.P. FEYNMAN, R.B. LEIGHTON, H. SANDS, FEYNMANA wykłady z fizyki t.I, cz.1, PWN Warszawa 1974.
- [4] J.N. GOODIER: Mathematical theory of equilibria cracks /w:/H. LIEBOWITZ ed, *Fracture*, t.II, Academic Press, New York,- London 1968.
- [5] A.A. GRIFFITH, The phenomena of rupture and flow in solids, *Phil. Trans.Roy.Soc.London*, A 221,1920.
- [6] G.R. IRWIN, Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *J.Appl. Mech.* 24,3, 1957.
- [7] J.F. KNOTT, Fundamentals of fracture mechanics, Butterworths, London 1973.
- [8] J.R. RICE, Mathematical analysis in the mechanics of fracture /w:/ H. LIEBOWITZ ed, *Fracture*, t.II, Academic Press, New York and London 1968.
- [9] G.C. SIH, H. LIEBOWITZ, Mathematical theories of brittle fracture, /w:/ H.LIEBOWITZ ed., *Fracture*, t.II, Academic Press, New York - London 1968
- [10] M. SOKOŁOWSKI, Teoria pękania a elastostyka klasyczna. W zb. *Mechanika zniszczenia, teoria i zastosowanie*. *Konf. Jabłonna 1974/PAŃ - Ossolineum 1976*
- [11] S. TIMOSHENKO, J.N. GOODIER, Teoria sprężystości, Arkady, Warszawa 1962.
- [12] M.P. WNUK, Podstawy mechaniki pękania, skrypt Akademii Górniczo-Hutniczej, Kraków 1977