Grzegorz T. Kolecki
Pracownia Modelowania Systemów
Komputerowego Wspomagania
ORT IPPT PAN Warszawa

MATEMATYCZNY MODEL KAMERY

1. Wstęp

W trakcie prac w dziedzinie wizji komputerowej i rozpoznawania obrazów istotna jest umiejętność zlokalizowania w przestrzeni obserwowanego obiektu. W tym celu należy zbudować matematyczny model kamery, który odpowie na pytanie : Jaki punkt w płaszczyźnie przedmiotowej odpowiada danemu punktowi w płaszczyźnie obrazowej układu optycznego, czyli np. pewnemu "zapalonemu" pikslowi ?

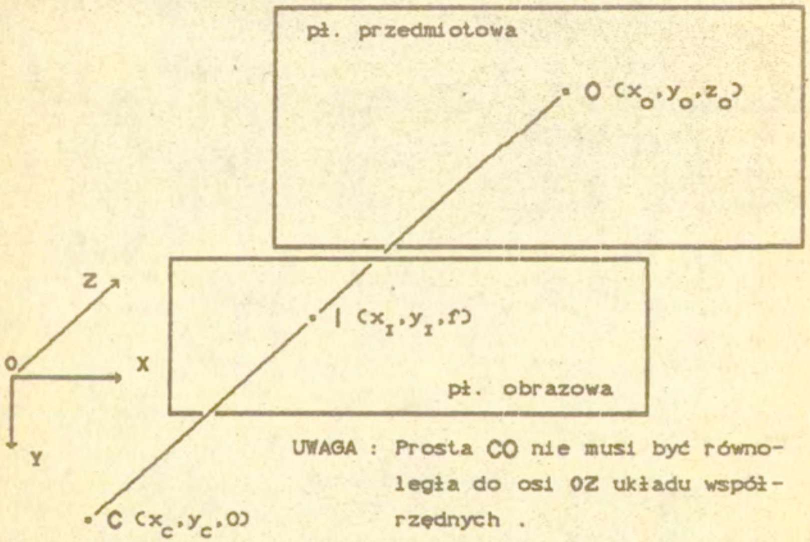
W opracowaniu omawiany jest model kamery otworkowej, gdyż okazuje się, że nawet tak prosty model jest wystarczający dla celów wizji maszynowej [1],[2].

2. Model kamery.

Kamera otworkowa (camera obscura) jest najprostszym przyrządem optycznym składającym się ze skrzynki z małym otworkiem w jednej ściance. Na przeciwległej ściance można obserwować obraz świata zewnętrznego. Jest to ten sam typ kamery, którego używano do pierwszych eksperymentów w dziedzinie fotografii. W wyidealizowanym przypadku, gdy otworek jest bardzo mały i nie uwzględnia się efektów dyfrakcyjnych, kamera ta posiada nieskończoną głębię ostrości, a obraz w niej otrzymywany wolny jest od zniekształceń.

Klasyczny model kamery otworkowej zakłada, że otworek odpowiadający środkowi obiektywu rzeczywistej kamery znajduje się pomiędzy płaszczyznami przedmiotową i obrazową. Wygodniej jest jednak użyć zmodyfikowanego modelu, w którym otworek (nazywany dalej środkiem kamery) znajduje się za płaszczyzną obrazową kamery. Ma to tę zaletę, że można korzystać z tego samego układu współrzędnych na obu płaszczyznach bez zbędnych komplikacji ze znakami, tzn. wektor o danym zwrocie odwzorowywany jest wówczas w wektor o zwrocie zgodnym a nie, jak to jest w modelu niezmodyfikowanym, w wektor o zwrocie przeciwnym.

Układ geometryczny modelu przedstawiony jest na rysunku :



UWAGA : Prosta CO nie musi być równoległa do osi OZ układu współrzędnych .

Środek kamery leży w punkcie $C(x_c, y_c, 0)$ w płaszczyźnie OXY układu współrzędnych. Płaszczyzna obrazowa leży w odległości f od środka kamery, przy czym parametr f odpowiada ogniskowej obiektywu używanego w rzeczywistej kamerze gdy jest on ustawiony na nieskończoność, a płaszczyzna przedmiotowa leży w odległości z_o od środka C. Punkt $O(x_o, y_o, z_o)$ jest odwzorowywany w punkt $I(x_I, y_I, f)$.

Należy znaleźć parametry x_c, y_c, z_o i f modelu.

Z geometrii układu widać, że :

$$\frac{x_o - x_c}{x_I - x_c} = \frac{y_o - y_c}{y_I - y_c} = \frac{z_o}{f} \qquad (1)$$

czyli :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{f}{z_o} x_o + \left(1 - \dfrac{f}{z_o}\right) x_c \\ y_I = \dfrac{f}{z_o} y_o + \left(1 - \dfrac{f}{z_o}\right) y_c \end{cases} \qquad (2)$$

$$\text{lub :} \quad \begin{cases} x_o = \dfrac{z_o}{f} x_I + \left(1 - \dfrac{z_o}{f}\right) x_c \\ y_o = \dfrac{z_o}{f} y_I + \left(1 - \dfrac{z_o}{f}\right) x_c \end{cases} \qquad (3)$$

Dokonuje się pomiarów położeń dwóch punktów O_1 i O_2 otrzymując :

$$\begin{cases} x_{Ii} = \dfrac{f}{z_o} x_{oi} + \left(1 - \dfrac{f}{z_o}\right) x_c \\ y_{Ii} = \dfrac{f}{z_o} y_{oi} + \left(1 - \dfrac{f}{z_o}\right) y_c \end{cases} \quad i = 1,2 \qquad (4)$$

Stąd, jeśli :

$$\Delta x_o = x_{o1} - x_{o2} \qquad \Delta y_o = y_{o1} - y_{o2}$$
$$\Delta x_I = x_{I1} - x_{I2} \qquad \Delta y_I = y_{I1} - y_{I2}$$

to :

$$\frac{\Delta x_I}{\Delta x_o} = \frac{f}{z_o} = \frac{\Delta y_I}{\Delta y_o} = \beta = \text{powiększenie poprzeczne układu}$$

W ten sposób z obserwacji i pomiarów współrzędnych dwóch punktów można wyznaczyć β. Mając powiększenie poprzeczne przy odległości z_o płaszczyzny przedmiotowej od płaszczyzny, w której leży środek soczewki :

$$\frac{f}{z_o} = \beta_1 \tag{5}$$

zwiększa się odległość pomiędzy wymienionymi płaszczyznami o Δz (tzn. do $z_o+\Delta z$) otrzymując :

$$\frac{f}{z_o + \Delta z} = \beta_2 \, . \tag{6}$$

Znając z pomiarów obie wartości β_i można rozwiązać układ równań i otrzymać :

$$z_o = \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \Delta z \tag{7}$$

$$f = \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \Delta z \tag{8}$$

Stąd już można wyliczyć współrzędne x_c, y_c środka kamery, przy czym wystarczą do tego współrzędne tylko jednego punktu obserwowanego :

$$x_c = \frac{x_I - \beta x_o}{1 - \beta} \tag{9}$$

$$y_c = \frac{y_I - \beta y_o}{1 - \beta} \tag{10}$$

Ponieważ zazwyczaj dysponuje się współrzędnymi nie dwóch lecz wielu punktów, można szukać wartości x_c, y_c jako średnich z wielu pomiarów.

3. Uwagi

Należy zwrócić uwagę na założenie, że zmiana odległości przedmiotowej o Δz nie powoduje nieostrości obrazu I punktu O. W praktyce spełnienie tego warunku może być kłopotliwe jeśli uwzględnić fakt, że Δz musi być na tyle duże, aby zmiana powiększenia poprzecznego układu była wystarczająco wyraźna. Zatem również szukając β warto wykonać kilka "zdjęć" i uśrednić wyniki.

Powyższe rozumowanie zawierało w sobie także założenie, że odwzorowanie płaszczyzny przedmiotowej w obrazową jest idealne tzn., że nie wnosi żadnych zniekształceń. W przypadku zaobserwowania zniekształceń można je uwzględnić zapisując wzory (2),(3) w postaci :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{f}{z_o} x_o + \left(1 - \dfrac{f}{z_o} \right) x_c + \Xi_x(x_o,y_o) \\ y_I = \dfrac{f}{z_o} y_o + \left(1 - \dfrac{f}{z_o} \right) y_c + \Xi_y(x_o,y_o) \end{cases} \qquad (11)$$

$$\text{lub :} \quad \begin{cases} x_o = \dfrac{z_o}{f} x_I + \left(1 - \dfrac{z_o}{f} \right) x_c + \zeta_x(x_I,y_I) \\ y_o = \dfrac{z_o}{f} y_I + \left(1 - \dfrac{z_o}{f} \right) x_c + \zeta_y(x_I,y_I) \end{cases} \qquad (12)$$

gdzie funkcje Ξ_i, ζ_i (i = x, y) są pewnymi wielomianami stopnia czwartego [2] odpowiadającymi za aberracje, zaś ich współczynniki muszą zostać ustalone przez numeryczną aproksymację na podstawie danych z pomiarów.

W ten sposób dysponuje się modelem, który w jednoznaczny sposób wiąże ze sobą punkty obserwowane i ich obrazy w płaszczyźnie detektora - po znalezieniu wszystkich współczynników w nim występujących wzory (2),(3) lub (11),(12) dają transformacje w żądanym kierunku.

LITERATURA

1. F.Ozunger, S.-J. Tsai,*Design and Implementation of a Binocular-Vision System for Locating Footholds of a Multi-Legged Walking Robot*,IEEE Trans. on Ind. Electr. IE-32, 1, 1985.

2. S.-J. Tsai, *An Experimental Study of a Binocular Vision System for Rough Terrain Locomotion of a Hexapod Walking Robot*, praca doktorska, Ohio State University, Columbus, OH, USA, June 1983.