Tadeusz Klecha

FALE POWIERZCHNIOWE W NIEJEDNORODNEJ PÓŁPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ

12/1998

WARSZAWA 1998

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 15 grudnia 1998 r.

IPPT PAN

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 1,0 Ark. druk. 1,25
Oddano do drukarni w grudniu 1998r.

ATOS Poligrafia-Reklama, W-wa, ul. Jana Kazimierza 35/37

Tadeusz Klecha
ul. Widok 16
31 - 564 Kraków

Fale powierzchniowe w niejednorodnej półprzestrzeni sprężystej

Streszczenie

W pracy pokazano, że problem fal powierzchniowych w niejednorodnej półprzestrzeni sprężystej sformułowany przez J. Ignaczaka (1963, 1971) (por. [1] [2]) oparty na naprężeniowym opisie klasycznej elastodynamiki sprowadza się do znalezienia dwuwymiarowego wektoroweg pola spełniającego równanie różniczkowe

$$L[\boldsymbol{\alpha}_r] := \mathbf{P}_0\, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}_r + \mathbf{P}_1\, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_r + \mathbf{P}_2\, \boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$$

wraz z warunkami: $\boldsymbol{\alpha}_r(0) = \boldsymbol{\alpha}_r(\infty) = 0$, $\boldsymbol{\alpha}_r \in C^2[0,\infty) \times C^2[0,\infty)$.

Macierze $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ są określone wzorami (1.8) - (1.10) w przypadku izotropowym, zaś wzorem (2.22) w przypadku anizotropowym. Ponadto w pracy badamy własności operatora różniczkowego $L[\boldsymbol{\alpha}]$.

Słowa kluczowe:

półprzestrzeń sprężysta, naprężeniowe fale powierzchniowe, nieliniowy i uogólniony problem własny.

§ 1. Sformułowanie problemu

W 1971 J. Ignaczak (por. [2]) pokazał, że zagadnienie propagacji fal powierzchniowych w pewnej niejednorodnej, izotropowej półprzestrzeni sprężystej może być zredukowane do następującego problemu własnego: znaleźć dodatnią liczbę λ oraz rzeczywiste, symetryczne pole tensorowe:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(x_2), \qquad (\alpha_{ij} \in C^2[0,\infty); \;\; i,j = 1,2)$$

spełniające równanie

$$\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\alpha} - \lambda \mathbf{B}\, \boldsymbol{\alpha} = 0 \tag{1.1}$$

oraz warunki

$$\alpha_{22}(0) = \alpha_{12}(0) = \alpha_{22}(\infty) = \alpha_{12}(\infty) = \alpha_{11}(\infty) = 0 \tag{1.2}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\alpha}(x_2) := \begin{bmatrix} \alpha_{11}(x_2) \\ \alpha_{22}(x_2) \\ \alpha_{12}(x_2) \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

$$\mathbf{A}(s) := \begin{bmatrix} \dfrac{s^2}{\varrho} & 0 & \dfrac{s}{\varrho}D \\ 0 & -D\dfrac{1}{\varrho}D & sD\dfrac{1}{\varrho} \\ -sD\dfrac{1}{\varrho} & -\dfrac{s}{\varrho}D & -D\dfrac{1}{\varrho}D + \dfrac{s^2}{\varrho}D \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} \dfrac{1-\nu}{2\mu} & \dfrac{-\nu}{2\mu} & 0 \\ \dfrac{-\nu}{2\mu} & \dfrac{1-\nu}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\mu} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Tutaj $\boldsymbol{\alpha}$ określa amplitudę tensora naprężenia, a symbol D występujący w macierzy $\mathbf{A}$ oznacza różniczkowanie względem x_2. Ponadto s jest liczbą falową oraz $\varrho = \varrho(x_2)$, $\mu = \mu(x_2)$ i $\nu = \nu(x_2)$ oznaczają kolejno gęstość ośrodka, moduł ścinania i współczynnik Poissona $(0 \leqslant x_2 < +\infty)$.

Sformułowanie problemu (1.1)–(1.2) opiera się na czysto naprężeniowym opisie klasycznej elastodynamiki[(1)].

---

(1) Problem (1.1)–(1.2) może być analizowany, gdy $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}]^T \in \left(L^2(0,\infty)\right)^3$ oraz gdy operatory $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \left(L^2(0,\infty)\right)^3$. Aby problem (1.1)–(1.2) był dobrze postawiony musi być spełniony warunek

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}) = \Big\{ (\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}) \in \left(C^2[0,\infty)\right)^3, \left(\left(L^2(0,\infty)\right)^3\right);$$
$$-\Big[\frac{\alpha_{11} - \nu\alpha_{\bar\mu\bar\mu}}{2\mu}\Big]^{**} + \frac{s^2(\alpha_{11} - \nu\alpha_{\bar\mu\bar\mu})}{2\mu} - s\Big[\frac{\alpha_{12}}{\mu}\Big]^{*} = 0, \ \ \bar\mu = 1,2 \Big\}$$

Zwyczajne równanie różniczkowe 2-ego rzędu jest równoważne płaskiemu warunkowi nierozdzielności.

W niniejszej pracy pokażemy, że problem (1.1)–(1.5) można sprowadzić do następującego problemu: znaleźć 2-wymiarowe wektorowe pole

$$\boldsymbol{\alpha}_r = \boldsymbol{\alpha}(x_2) = [\alpha_{22}, \alpha_{12}]^T \quad \text{dla} \quad x_2 \geqslant 0$$

takie, że

$$\mathbf{P}_0\, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}_r + \mathbf{P}_1\, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_r + \mathbf{P}_2\, \boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}; \quad \forall x_2 \geqslant 0 \tag{1.6}$$

oraz

$$\boldsymbol{\alpha}_r(0) = \boldsymbol{\alpha}_r(\infty) = 0,$$

gdzie

$$\boldsymbol{\alpha}_r \in C^2[0,\infty) \times C^2[0,\infty) \tag{1.7}$$

$$\Big(\boldsymbol{\alpha}_r \in L^2(0,\infty) \times L^2(0,\infty)\Big)$$

Macierze $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ w równaniu (1.6) są określone wzorami

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{\dot{\varrho}}{\varrho} & \dfrac{-s(2s^2\mu - \lambda\varrho)}{2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho} \\[2ex] \dfrac{s(-2s^2\mu + \lambda\varrho)}{\varrho\lambda(1-\nu)} & -\dfrac{\dot{\varrho}}{\varrho} + \dfrac{2s^2[-\dot{\mu}(1-\nu)\varrho - \dot{\nu}\varrho\mu - \mu(1-\nu)\dot{\varrho}]}{\varrho[2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho](1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{-\lambda\varrho}{2\mu}\left[\dfrac{\lambda(1-2\nu)\varrho - 2s^2\mu(1-\nu)}{2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho}\right] & \dfrac{s\dot{\varrho}}{\varrho} \\[2ex] \dfrac{s(2s^2\dot{\nu}\mu - \lambda\dot{\nu}\varrho - 2s^2\dot{\mu}\nu - \lambda\dot{\varrho}\nu - \lambda\nu\dot{\varrho})}{[2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho](1-\nu)} & \dfrac{(s^2\mu - \lambda\varrho)[2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho]}{\lambda\varrho\mu(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Punktem wyjścia naszych rozważań (por. [2]) jest układ

$$\begin{aligned} \varrho^{-1}(s^2\alpha_{11} + s\dot{\alpha}_{12}) - \lambda(2\mu)^{-1}(\alpha_{11} - \nu\alpha_{\mu\mu}) &= 0 \\ -\left[\varrho^{-1}(\dot{\alpha}_{22} - s\alpha_{12})\right]^{\cdot} - \lambda(2\mu)^{-1}(\alpha_{22} - \nu\alpha_{\mu\mu}) &= 0 \\ -\left[\varrho^{-1}(\dot{\alpha}_{12} + s\alpha_{11})\right]^{\cdot} - s\varrho^{-1}(\dot{\alpha}_{22} - s\alpha_{12}) - \lambda(2\mu)^{-1}2\alpha_{12} &= 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

spełniający warunek

$$\alpha_{22}(0) = \alpha_{12}(0) = \alpha_{22}(\infty) = \alpha_{12}(\infty) = 0 \tag{1.12}$$

Z pierwszego równania układu (1.11) wyznaczamy α_{11} otrzymując

$$\alpha_{11} = \frac{-2s\mu}{2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho}\dot{\alpha}_{12} - \frac{\lambda\nu\varrho}{2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho}\alpha_{22} \tag{1.13}$$

i po zróżniczkowaniu względem x_2 dostajemy

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{11} = &\left(\frac{-2s\mu}{2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho}\right)^{\cdot}\dot{\alpha}_{12} + \left(\frac{-2s\mu}{2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho}\right)^{\cdot\cdot}\alpha_{12} + \\ &+ \left(\frac{-2\nu\varrho}{2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho}\right)^{\cdot}\alpha_{22} + \left(\frac{-2\nu\varrho}{2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho}\right)\dot{\alpha}_{22}\end{aligned} \tag{1.14}$$

Po podstawieniu (1.13) i (1.14) do drugiego i trzeciego równania (1.11) otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\ddot{\alpha}_{22} - \frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\dot{\alpha}_{22} - \frac{s(2s^2\mu - \lambda\varrho)}{2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho}\dot{\alpha}_{12} + \\ &- \frac{\lambda\varrho}{2\mu}\left[\frac{\lambda(1-2\nu)\varrho - 2s^2\mu(1-\nu)}{2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho}\right]\alpha_{22} + \frac{s\dot{\varrho}}{\varrho}\alpha_{12} = 0\end{aligned} \tag{1.15}$$

oraz

$$\begin{aligned}&\ddot{\alpha}_{12} + \left[\frac{-\dot{\varrho}}{\varrho} + \frac{2s^2[-\dot{\mu}(1-\nu)\varrho - \dot{\nu}\varrho\mu + \mu(1-\nu)\dot{\varrho}]}{\varrho[2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho](1-\nu)}\right.\dot{\alpha}_{12} + \\ &+ \frac{s(-2s^2\mu + \lambda\varrho)}{\lambda\varrho(1-\nu)}\dot{\alpha}_{22} + \frac{(s^2\mu - \lambda\varrho)[2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho]}{\lambda\varrho\mu(1-\nu)}\alpha_{12} + \\ &+ \frac{s(2s^2\dot{\nu}\mu - \lambda\dot{\nu}\varrho - 2s^2\dot{\mu}\nu + \lambda\dot{\varrho}\nu - \lambda\nu^2\dot{\varrho})}{[2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho](1-\nu)}\alpha_{22} = 0\end{aligned} \tag{1.16}$$

Równanie (1.15) i (1.16) można zapisać w postaci

$$\mathbf{P_0}\,\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{P_1}\,\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{P_2}\,\boldsymbol{\alpha} = 0^{(2)} \tag{1.17}$$

gdzie $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ i $\mathbf{P}_2$ są określone wzorami (1.8)-(1.10).

---

(2) α_r spełnia warunek nierozdzielości powstały po wstawieniu

$$\alpha_{11} = \frac{-2s\mu}{2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho}\dot{\alpha}_{12} - \frac{\lambda\nu\varrho}{2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho}\alpha_{22}$$

(por. wzór (1.13)) do wzoru

$$-\left[\frac{\alpha 11(1-\nu) - \nu\alpha_{22}}{2\mu}\right]^{\cdot\cdot} + \frac{s^2[\alpha_{22}(1-\nu) - \nu\alpha_{11}]}{2\mu} - s\left[\frac{\alpha_{22}}{\mu}\right]^{\cdot} = 0.$$

Plaski warunek nierozdzielności przyjmuje tutaj postać

$$\begin{aligned}&\left[\frac{(1-\nu)s}{2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho}\dot{\alpha}_{12} + \frac{\lambda\nu(1-\nu)\varrho}{2\mu(2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho)}\alpha_{22} + \frac{(1-\nu)\nu}{4\mu^2}\alpha_{22}\right]^{\cdot\cdot} + \\ &+ \frac{s^2(1-\nu)}{2\mu}\alpha_{22} + \frac{s^3\nu}{2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho}\dot{\alpha}_{12} + \frac{\varrho\nu^2 s^2\lambda}{2\mu[2s^2\mu - \lambda(1-\nu)\varrho]}\alpha_{22} - s\left[\frac{\alpha_{12}}{\mu}\right]^{\cdot} = 0\end{aligned}$$

A więc badanie problemu własnego (1.1)–(1.5) sprowadza się do analizy równania (1.17) z warunkami brzegowymi

$$\alpha_r(0) = \alpha_r(\infty) = 0 \tag{1.18}$$

Przy pomocy podstawienia

$$\alpha_r = \mathbf{U}\,\hat{\alpha}. \tag{1.19}$$

gdzie $\mathbf{U}$ jest jakimkolwiek rozwiązaniem równania macierzowego

$$\dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2}\mathbf{P}_1\,\mathbf{U} = 0, \qquad \det \mathbf{U} \neq 0. \tag{1.20}$$

(por [3], s. 118) można równanie

$$\ddot{\alpha}_r = -\mathbf{P}_1\,\dot{\alpha}_r - \mathbf{P}_2\,\alpha_r, \quad \alpha_r(0) = \alpha_r(\infty) = 0 \tag{1.21}$$

sprowadzić do postaci

$$\ddot{\hat{\alpha}} + \tilde{\mathbf{P}}_2\hat{\alpha} = 0 \tag{1.22}$$

gdzie

$$\hat{\alpha}(0) = \left(\mathbf{U}^{-1}\,\alpha_r\right)(0) = 0, \quad \hat{\alpha}(\infty) = \left(\mathbf{U}^{-1}\,\alpha_r\right)(\infty) = 0 \tag{1.23}$$

§ 2. Fale powierzchniowe w anizotropowej, niejednorodnej półprzestrzeni sprężystej

Rozważmy dwuwymiarowe naprężenie równania ruchu dla niejednorodnej anizotropowej półprzestrzeni (por. J. Ignaczak [4])

$$2\kappa_{ijkl}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = [\varrho^{-1}(x)\tau_{ik,k}(x,t)]_{,j} + [\varrho^{-1}(x)\tau_{ikk,}(x,t)]_{,i} \tag{2.1}$$

gdzie $\tau_{kl} = \tau_{kl}(x,t)$, $(i,j,k,l = 1,2)$, $x = (x_1, x_2)$ jest poszukiwanym polem naprężeń.

Tensor κ_{ijkl} jest zadanym 4-wskaźnikowym polem tensorowym, spełniającym warunki:

symetria : $$\kappa_{ijkl} = \kappa_{jikl} = \kappa_{ijlk} = \kappa_{lkij} \tag{2.2}$$

silna eliptyczność : $$\kappa_{ijkl}\ a_i\, b_k\, a_j\, b_l > 0 \ \text{ dla dowolnych wektorów } \mathbf{a} \text{ i } \mathbf{b}, \tag{2.3}$$

oraz $\varrho(x)$ oznacza gęstość ośrodka.

Zakładamy, że funkcje $\kappa_{ijkl}(x)$, $\varrho(x)$ $(i,j,k,l = 1,2)$ zależą od x_2 i są ograniczonymi funkcjami klasy $C^2[0,\infty)$.

W półprzestrzeni sprężystej:

$$U = \left\{(x_1,x_2):\ \ x_2 \geqslant 0,\ \ -\infty < x_1 < +\infty\right\} \tag{2.4}$$

poszukujemy rozwiązania $\tau_{kl}(x,t)$ równania (2.1) w postaci

$$\begin{aligned} \tau_{11}(x,t) &= \alpha_{11}(x_2)\exp[i(sx_1 - t\sqrt{\lambda})] \\ \tau_{22}(x,t) &= \alpha_{22}(x_2)\exp[i(sx_1 - t\sqrt{\lambda})] \\ \tau_{12}(x,t) &= i\alpha_{12}(x_2)\exp[i(sx_1 - t\sqrt{\lambda})] \quad \text{dla } \ t \in [0,\infty), \end{aligned} \tag{2.5}$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$, $s > 0$, $\lambda > 0$, spełniającego warunki

$$\tau_{22}(x_1,0,t) = \tau_{12}(x_1,0,t) = 0 \quad \text{dla } x_1 \in (-\infty,+\infty),\ t \geqslant 0 \tag{2.6}$$

$$\tau_{22}(x_1,0,t) = \tau_{12}(x_1,0,t) = \tau_{21}(x_1,0,t) \quad \text{dla } x_1 \in (-\infty,+\infty),\ t \geqslant 0 \tag{2.7}$$

Po podstawieniu (2.5) do (2.1) i wykorzystaniu warunków (2.6) i (2.7) oraz symetrii tensora τ problem propagacji fali powierzchniowej redukujemy do badania uogólnionego problemu własnego

$$\mathbf{A}(s)\boldsymbol{\alpha} - \lambda\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \ \text{ gdzie } \ \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{22}]^T \tag{2.8}$$

$$\mathbf{A}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2}{\varrho} & \dfrac{s}{\varrho}D & 0 \\ -sD\dfrac{1}{\varrho} & \dfrac{s^2}{\varrho} - D\dfrac{1}{\varrho}D & s\dfrac{1}{\varrho}D \\ 0 & -sD\dfrac{1}{\varrho} & -D\dfrac{1}{\varrho}D \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_4 \\ C_2 & C_3 & C_5 \\ C_4 & C_5 & C_6 \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \kappa_{1111}(x_2), & C_2 &= \kappa_{1112}(x_2), \\ C_3 &= \kappa_{1212}(x_2), & C_4 &= \kappa_{1122}(x_2), \\ C_5 &= \kappa_{1222}(x_2), & C_6 &= \kappa_{2222}(x_2). \\ D &= \frac{d}{dx_2}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Dziedzinami operatorów **A** i **B** są zbiory

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}\mathbf{A} &= \Big\{\boldsymbol{\alpha}:\ \ \boldsymbol{\alpha} \in \left[C^2[0,\infty)\right]^3;\ \ \alpha_{12}(0) = \alpha_{22}(0) = \alpha_{12}(\infty) = \\ &\qquad = \alpha_{11}(\infty) = \alpha_{22}(\infty) = 0\Big\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\operatorname{dom}\mathbf{B} = \left\{\boldsymbol{\alpha}:\ \ \boldsymbol{\alpha} \in \left[C^2[0,\infty)\right]^3\right\}$$

Rozpatrywany przypadek anizotropowości półprzestrzeni zawiera a) izotropię, b) izotropię poprzeczną oraz c) ogólną anizotropię (por. [5], [6]).

Ponieważ $\kappa_{ijkl}(x_2)$ są ograniczonymi funkcjami klasy $C^2[0,\infty)$ więc funkcje $C_1(x_2)$, $C_2(x_2), \dots ,C_6(x_2)$ też są ograniczonymi funkcjami klasy $C^2[0,\infty)$. Podobnie gęstość ośrodka $\varrho(x_2)$ jest także ograniczoną funkcją klasy $C^2[0,\infty)$.

Rozpatrzmy równanie

$$\begin{aligned}
\frac{s^2}{\varrho}\alpha_{11} + \frac{s}{\varrho}D\alpha_{12} &= \lambda\Big(C_1\alpha_{11} + C_2\alpha_{12} + C_4\alpha_{22}\Big) \\
-sD\Big(\frac{1}{\varrho}\alpha_{11}\Big) + \Big(\frac{s^2}{\varrho} - D\frac{1}{\varrho}D\Big)\alpha_{12} - \frac{s}{\varrho}D\alpha_{22} &= \lambda\Big(C_2\alpha_{11} + C_3\alpha_{12} + C_5\alpha_{22}\Big) \qquad (2.12)\\
-sD\Big(\frac{1}{\varrho}\alpha_{11}\Big) - D\frac{1}{\varrho}D\alpha_{22} &= \lambda\Big(C_4\alpha_{11} + C_5\alpha_{12} + C_6\alpha_{22}\Big)
\end{aligned}$$

Wyznaczając z pierwszego równania (2.12) $\alpha_{11}(x_2)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{\lambda\Big(C_2(x_2)\alpha_{12} + C_4(x_2)\alpha_{22}\Big) - \dfrac{s}{\varrho(x_2)}D\alpha_{12}}{\dfrac{s^2}{\varrho(x_2)} - \lambda C_1(x_2)} = \\
&= \frac{\lambda\varrho(x_2)C_2(x_2) - sD}{s^2 - \lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\alpha_{12} + \frac{\lambda\varrho(x_2)C_4(x_2)}{s^2 - \lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\alpha_{22} = \qquad (2.13)\\
&= \frac{\lambda\varrho(x_2)C_2(x_2)}{s^2 - \lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\alpha_{12} - \frac{s}{s^2 - \lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\dot{\alpha}_{12} + \frac{\lambda\varrho(x_2)C_4(x_2)}{s^2 - \lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\alpha_{22}
\end{aligned}$$

a następnie, różniczkując względem x_2 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_{11} &= \left(\frac{\lambda\varrho(x_2)C_2(x_2)}{s^2 - \lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\right)^{\cdot}\alpha_{12} + \frac{\lambda\varrho(x_2)C_2(x_2)}{s^2 - \lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\dot{\alpha}_{12} - \left(\frac{s}{s^2 - \lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\right)^{\cdot}\dot{\alpha}_{12} - \\
&\qquad (2.14)\\
&- \frac{s}{s^2 - \lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\ddot{\alpha}_{12} + \left(\frac{\lambda\varrho(x_2)C_4(x_2)}{s^2 - \lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\right)^{\cdot}\alpha_{22} + \frac{\lambda\varrho(x_2)C_4(x_2)}{s^2 - \lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\dot{\alpha}_{22}
\end{aligned}$$

Podstawiając (2.13) i (2.14) do równania drugiego i trzeciego układu (2.12) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&-s\Bigg(\frac{\lambda\varrho(x_2)C_2(x_2)}{\varrho(x_2)\big(s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)\big)}\alpha_{12}-\frac{s}{\big(s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)\big)\varrho(x_2)}\dot{\alpha}_{12}+\\
&+\frac{\lambda\varrho(x_2)C_4(x_2)}{\varrho(x_2)\big(s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)\big)}\alpha_{22}\Bigg)^{\cdot}+\frac{s^2}{\varrho(x_2)}\alpha_{12}-\Big(\frac{1}{\varrho(x_2)}\dot{\alpha}_{12}\Big)^{\cdot}-\frac{s}{\varrho(x_2)}\dot{\alpha}_{22}=\\
&=\lambda C_2(x_2)\left[\frac{\lambda\varrho(x_2)C_2(x_2)}{s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\alpha_{12}-\frac{s}{s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\dot{\alpha}_{12}+\frac{\lambda\varrho(x_2)C_2(x_2)}{s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\alpha_{22}\right]+\\
&+\lambda C_3(x_2)\alpha_{12}+\lambda C_5(x_2)\alpha_{22}
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
&-s\Big[\Big(\frac{1}{\varrho(x_2)}\Big)^{\cdot}\alpha_{12}+\frac{1}{\varrho(x_2)}\dot{\alpha}_{12}\Big]-\Big(\frac{1}{\varrho(x_2)}\dot{\alpha}_{22}\Big)^{\cdot}=\\
&=\lambda C_2\left[\frac{\lambda\varrho(x_2)C_2(x_2)}{s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\alpha_{12}-\frac{s}{s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\dot{\alpha}_{12}+\frac{\lambda\varrho(x_2)C_2(x_2)}{s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\alpha_{22}\right]+\\
&+\lambda C_5(x_2)\alpha_{12}+\lambda C_6(x_2)\alpha_{22}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

W dalszym ciągu redukujemy równania (2.15)–(2.16) do pewnego równania macierzowego drugiego rzędu na niewiadomy wektor $[\alpha_{22},\alpha_{12}]^T$. W tym celu równanie (2.15) przekształcamy do postaci

$$
\begin{aligned}
&-\Big(\frac{s\lambda\varrho(x_2)C_2(x_2)}{s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\Big)^{\cdot}\alpha_{12}-\frac{s\lambda\varrho(x_2)C_2(x_2)}{s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\dot{\alpha}_{12}+\Bigg(\frac{s^2}{\big(s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)\big)\varrho(x_2)}\Bigg)^{\cdot}\dot{\alpha}_{12}+\\
&\frac{s^2}{\big(s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)\big)\varrho(x_2)}\Bigg)\ddot{\alpha}_{12}-\Big(\frac{s\lambda\varrho(x_2)C_2(x_2)}{s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\Big)^{\cdot}\alpha_{22}-\frac{s\lambda\varrho(x_2)C_2(x_2)}{s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\dot{\alpha}_{22}+\\
&+\frac{s^2}{\varrho(x_2)}\alpha_{12}-\Big(\frac{1}{\varrho(x_2)}\Big)^{\cdot}\dot{\alpha}_{12}-\frac{s}{\varrho(x_2)}\ddot{\alpha}_{22}=\frac{s^2\varrho(x_2)C_2^2(x_2)}{s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\alpha_{12}-\\
&-\frac{s\lambda C_2(x_2)}{s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\dot{\alpha}_{12}+\frac{\lambda^2\varrho(x_2)C_2(x_2)C_4(x_2)}{s^2-\lambda\varrho(x_2)C_1(x_2)}\alpha_{22}+\lambda C_3(x_2)\alpha_{12}+\lambda C_5(x_2)\alpha_{22}
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Zaś równanie (2.16) zapisujemy jako

$$
\begin{gathered}
-s\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\cdot}\alpha_{12}-\frac{s}{\varrho}\dot{\alpha}_{22}-\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\cdot}\dot{\alpha}_{22}--\frac{1}{\varrho}\ddot{\alpha}_{22}= \\
\frac{\lambda^2\varrho C_2C_4}{s^2-\lambda\varrho C_1}\alpha_{12}-\frac{\lambda sC_4}{s^2-\lambda\varrho C_1}\dot{\alpha}_{12}+\frac{\lambda^2\varrho C_4^2}{s^2-\lambda\varrho C_1}\alpha_{22}+\lambda C_5\alpha_{12}+\lambda C_6\alpha_{22}
\end{gathered}
\tag{2.18}
$$

Po uporządkowaniu równania (2.17) oraz (2.18) przyjmą postać

$$
\begin{gathered}
\left[\frac{s^2}{\left(s^2-\lambda\varrho C_1\right)\varrho}-\frac{1}{\varrho}\right]\ddot{\alpha}_{12}+\left[-\frac{s\lambda C_2}{s^2-\lambda\varrho C_1}+\left(\frac{s^2}{\left(s^2-\lambda\varrho C_1\right)\varrho}\right)^{\cdot}-\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\cdot}+\frac{s\lambda C_2}{s^2-\lambda\varrho C_1}\right]\dot{\alpha}_{12}+ \\
+\left[-\left(\frac{s\lambda C_2}{s^2-\lambda\varrho C_1}\right)^{\cdot}+\frac{s^2}{\varrho}-\frac{\lambda^2\varrho C_2^2}{s^2-\lambda\varrho C_1}-\lambda C_3\right]\alpha_{12}+ \\
+\left[-\frac{s\lambda\varrho C_4}{\left(s^2-\lambda\varrho C_1\right)\varrho}-\frac{1}{\varrho}\right]\dot{\alpha}_{22}+\left[-\frac{s\lambda\varrho C_4}{\left(s^2-\lambda\varrho C_1\right)\varrho}-\frac{\lambda^2\varrho c_2C_4}{s^2-\lambda\varrho C_1}-\lambda C_5\right]\alpha_{22}=0
\end{gathered}
\tag{2.19}
$$

oraz

$$
\begin{gathered}
\left[-\frac{s}{\varrho}+\frac{s\lambda C_4}{s^2-\lambda\varrho C_1}\right]\dot{\alpha}_{12}+\left[-s\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\cdot}-\frac{\lambda^2\varrho C_2C_4}{s^2-\lambda\varrho C_1}-\lambda C_5\right]\alpha_{12}+ \\
-\frac{1}{\varrho}\ddot{\alpha}_{22}+\left[-\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\cdot}\right]\dot{\alpha}_{22}+\left[\frac{-\lambda^2\varrho C_4^2}{s^2-\lambda\varrho C_1}-\lambda C_6\right]\alpha_{22}=0
\end{gathered}
\tag{2.20}
$$

Wynika stąd, że układ (2.19)–(2.20) można zapisać w postaci

$$
\begin{bmatrix}
-\dfrac{1}{\varrho} & 0 \\
0 & \dfrac{s^2}{\left(s^2-\lambda\varrho C_1\right)\varrho}-\dfrac{1}{\varrho}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\alpha_{22}\\ \alpha_{12}\end{bmatrix}^{\cdot\cdot}+
\tag{2.21}
$$

$$
\begin{bmatrix}
-\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\cdot} & -\dfrac{s}{\varrho}+\dfrac{s\lambda C_4}{s^2-\lambda\varrho C_1} \\
-\dfrac{s\lambda\varrho C_4}{\varrho\left(s^2-\lambda\varrho C_1\right)}-\dfrac{1}{\varrho} & -\dfrac{s\lambda C_2}{s^2-\lambda\varrho C_1}+\left(\dfrac{s^2}{\left(s^2-\lambda\varrho C_1\right)\varrho}\right)^{\cdot}-\left(\dfrac{1}{\varrho}\right)^{\cdot}+\dfrac{s\lambda C_2}{s^2-\lambda\varrho C_1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\alpha_{22}\\ \alpha_{12}\end{bmatrix}^{\cdot}+
$$

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{-\lambda^2\varrho C_4^2}{s^2-\lambda\varrho C_1}-\lambda C_6 & -s\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\cdot}-\dfrac{\lambda^2\varrho C_2C_4}{s^2-\lambda\varrho C_1}-\lambda C_5 \\
-\dfrac{s\lambda C_4}{s^2-\lambda\varrho C_1}-\dfrac{\lambda^2\varrho C_2C_4}{s^2-\lambda\varrho C_1}-\lambda C_5 & -\left(\frac{s\lambda C_2}{s^2-\lambda\varrho C_1}\right)^{\cdot}+\dfrac{s^2}{\varrho}-\dfrac{\lambda^2\varrho C_2^2}{s^2-\lambda\varrho C_1}-\lambda C_3
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\alpha_{22}\\ \alpha_{12}\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}
$$

lub w postaci

$$\mathbf{P}_0\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_r + \mathbf{P}_1\dot{\boldsymbol{\alpha}}_r + \mathbf{P}_2\boldsymbol{\alpha}_r = 0 \quad \Big(\det \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varrho} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda C_1}{s^2 - \lambda\varrho C_1} \end{bmatrix} \neq 0\Big) \tag{2.22}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\alpha}_r = \left[\alpha_{22}, \alpha_{12}\right]^T, \tag{2.23}$$

$$\mathbf{P}_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} & s - \frac{\lambda s C_4 \varrho}{s^2 - \lambda\varrho C_1} \\ \frac{s^2 - \lambda\varrho C_1}{\lambda C_1}\Big(-\frac{s\lambda C_4}{s^2 - \lambda\varrho C_1} - \frac{1}{\varrho}\Big) & \begin{array}{c} \frac{s^2 - \lambda\varrho C_1}{\lambda C_1}\Big[-\frac{s\lambda C_1}{s^2 - \lambda\varrho C_1} + \\ +\Big(\frac{s^2}{\left(s^2 - \lambda\varrho C_1\right)\varrho}\Big)^{\cdot} - \left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\cdot} + \frac{\lambda s C_2}{s^2 - \lambda\varrho C_1}\Big] \end{array} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-\lambda^2\varrho C_4^2}{s^2 - \lambda\varrho C_1} - \lambda C_6 & -s\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\cdot} - \frac{\lambda^2\varrho C_2 C_4}{s^2 - \lambda\varrho C_1} - \lambda C_5 \\ -\frac{s\lambda C_4}{s^2 - \lambda\varrho C_1} - \frac{\lambda^2\varrho C_2 C_4}{s^2 - \lambda\varrho C_1} - \lambda C_5 & -\left(\frac{s\lambda C_2}{s^2 - \lambda\varrho C_1}\right)^{\cdot} + \frac{s^2}{\varrho} - \frac{\lambda^2\varrho C_2^2}{s^2 - \lambda\varrho C_1} - \lambda C_3 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

A więc badanie problemu (2.8)–(2.11) sprowadza się, podobnie jak w ośrodku niejednorodnym izotropowym do badania problemu

$$\mathbf{P}_0\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_r + \mathbf{P}_1\dot{\boldsymbol{\alpha}}_r + \mathbf{P}_2\boldsymbol{\alpha}_r = 0, \quad \boldsymbol{\alpha}_r(0) = \boldsymbol{\alpha}_r(\infty) = 0, \quad \boldsymbol{\alpha}_r = \begin{bmatrix} \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}$$

z warunkiem zgodności

$$-\left(C_1\alpha_{11} + C_2\alpha_{12} + C_3\alpha_{22}\right)^{\cdot\cdot} - s\left(C_2\alpha_{11} + C_3\alpha_{12} + C_5\alpha_{22}\right)^{\cdot} + s^2\left(C_4\alpha_{11} + C_5\alpha_{12} + C_6\alpha_{22}\right) \tag{2.27}$$

gdzie

$$\alpha_{11} = \frac{\lambda\varrho C_2}{s^2 - \lambda\varrho C_1}\alpha_{12} - \frac{1}{s^2 - \lambda\varrho C_1}\dot{\alpha}_{12} + \frac{\lambda\varrho C_4}{s^2 - \lambda\varrho C_1}\alpha_{22}. \tag{2.28}$$

Ponadto problem ten jest równoważny problemowi:

$$\ddot{\alpha}_r = -\mathrm{P}_1\dot{\alpha}_r - \mathrm{P}_2\alpha_r, \quad \alpha_r(0) = \alpha_r(\infty) = 0, \tag{2.29}$$

z dołączonymi równaniami (2.27)–(2.28), który przy pomocy podstawienia $\alpha_r = \mathrm{U}\widehat{\alpha}$, (gdzie U jest dowolnym rozwiązaniem równania macierzowego $\mathrm{U}' + \frac{1}{2}\mathrm{P}_1\mathrm{U} = 0$, $\det \mathrm{U} \neq 0$ (por. [3], s. 218)) można sprowadzić do postaci

$$\ddot{\widehat{\alpha}} + \widetilde{\mathrm{P}}_2\widehat{\alpha} = 0, \quad \widehat{\alpha}(0) = \left(\mathrm{U}^{-1}\alpha\right)(0) = 0, \quad \widehat{\alpha}(\infty) = \left(\mathrm{U}^{-1}\alpha\right)(\infty) = 0 \tag{2.30}$$

§ 3. Własności operatora $L[\alpha_r]$: $\mathrm{P}_0\ddot{\alpha}_r + \mathrm{P}_1\dot{\alpha}_r + \mathrm{P}_2\alpha_r$ opisującego problem propagacji fal powierzchniowych w niejednorodnej półprzestrzeni sprężystej

Analiza problemu przedłużalności rozwiązań do $+\infty$ równania

$$L[\alpha_r]: \ \mathrm{P}_0\ddot{\alpha}_r + \mathrm{P}_1\dot{\alpha}_r + \mathrm{P}_2\alpha_r = 0 \quad (\cdot = \frac{d}{dx}) \tag{3.1}$$

lub równoważnego równania

$$\ddot{\alpha}_r = -\widetilde{\mathrm{P}}_1\alpha_r + \widetilde{\mathrm{P}}_2\alpha_r \tag{3.2}$$

gdzie

$$\widetilde{\mathrm{P}}_1 = \mathrm{P}_0^{-1}\mathrm{P}_1, \quad \widetilde{\mathrm{P}}_2 = \mathrm{P}_0^{-1}\mathrm{P}_2$$

opiera się na twierdzeniu o istnieniu i przedłużalności do $+\infty$ rozwiązań(por. [7], s. 19)[(3)]

[(3)](J.L. Schwartz; *Analiza* t. II, str. 19, Warszawa, PWN, 1977)

Twierdzenie o istnieniu i przedłużalności do $+\infty$ rozwiązań dla równań dynamiki

$$m\frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \vec{F}\left(t, \vec{M}, \frac{d\vec{M}}{dt}\right) \tag{i}$$

gdzie $\vec{M} \in E^3$, E^3 – trójwymiarowa przestrzeń Euklidesa.

Niech masa $m = 1$, $\vec{y} = \vec{M}$, $(\dot{=} \frac{d}{dt})$. Równanie (i) zapiszemy w postaci równoważnej

$$\begin{cases} \dot{\vec{y}} = \vec{z} \\ \dot{\vec{z}} = \vec{F}(t, \vec{y}, \vec{z}) \end{cases} \tag{ii}$$

Zapiszmy równanie (3.2) w postaci

$$
\begin{cases}
\ddot{\alpha}_{22} = & \dfrac{\dot{\varrho}}{\varrho}\dot{\alpha}_{22} - \Big(s - \dfrac{\lambda s\varrho C_4}{s^2 - \lambda\varrho C_1} - \Big(\dfrac{\lambda^2\varrho^2 C_4^2}{s^2 - \lambda\varrho C_1} + \lambda\varrho C_6\Big)\alpha_{22} - \\
& -\Big(s\dfrac{\dot{\varrho}}{\varrho} + \dfrac{\lambda^2\varrho^2 C_2 C_4}{s^2 - \lambda\varrho C_1} + \lambda\varrho C_5\Big)\Big)\alpha_{12} \\
\ddot{\alpha}_{12} = & -\Big[\dfrac{s^2 - \lambda\varrho C_1}{\lambda C_1}\Big(-\dfrac{s\lambda C_4}{s^2 - \lambda\varrho C_1} - \dfrac{s}{\varrho}\Big)\Big]\dot{\alpha}22 - \Big[\dfrac{s^2 - \lambda\varrho C_1}{\lambda C_1}\Big(-\dfrac{s\lambda C_2}{s^2 - \lambda\varrho C_1} + \\
& +\Big(\dfrac{s^2}{\big(s^2 - \lambda\varrho C_1\big)\varrho}\Big)^{\cdot} - \Big(\dfrac{1}{\varrho}\Big)^{\cdot} + \dfrac{s\lambda C_2}{s^2 - \lambda\varrho C_1}\Big)\Big]\dot{\alpha}_{12} - \\
& -\Big[\dfrac{s^2 - \lambda\varrho C_1}{\lambda C_1}\Big(-\dfrac{s\lambda C_4}{s^2 - \lambda\varrho C_1} - \dfrac{\lambda^2\varrho C_2 C_4}{s^2 - \lambda\varrho C_1} - \lambda C_5\Big)\Big]\alpha_{22} - \\
& -\Big[\dfrac{s^2 - \lambda\varrho C_1}{\lambda C_1}\Big(-s\Big(\dfrac{\lambda C_2}{s^2 - \lambda\varrho C_1}\Big)^{\cdot} + \dfrac{s^2}{\varrho} - \dfrac{\lambda^2\varrho C_2^2}{s^2 - \lambda\varrho C_1} - \lambda C_3\Big)\Big]\alpha_{12}
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

i wprowadzamy oznaczenie

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \\
b &= -\Big(s - \frac{\lambda s\varrho C_4}{s^2 - \lambda\varrho C_1}\Big) \\
c &= -\Big(\frac{\lambda^2\varrho^2 C_4^2}{s^2 - \lambda\varrho C_1} + \lambda\varrho C_6\Big) \\
d &= -\Big(s\frac{\dot{\varrho}}{\varrho} + \frac{\lambda^2\varrho^2 C_2 C_4}{s^2 - \lambda\varrho C_1} + \lambda\varrho C_5\Big) \\
e &= -\Big[\frac{s^2 - \lambda\varrho C_1}{\lambda C_1}\Big(-\frac{s\lambda C_4}{s^2 - \lambda\varrho C_1} - \frac{s}{\varrho}\Big)\Big] \\
f &= -\Big[\frac{s^2 - \lambda\varrho C_1}{\lambda C_1}\Big(-\frac{s\lambda C_2}{s^2 - \lambda\varrho C_1} + \Big(\frac{s^2}{\big(s^2 - \lambda\varrho C_1\big)\varrho}\Big)^{\cdot} - \Big(\frac{1}{\varrho}\Big)^{\cdot} + \frac{s\lambda C_2}{s^2 - \lambda\varrho C_1}\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

Jeżeli siła $\vec{F}$ będzie funkcją lokalnie spełniającą warunek Lipschitza względem $\big(\vec{M}, \vec{v} = \frac{d\vec{M}}{dt}\big)$ i oszacowanie

$$\|\vec{F}(t, \vec{M}, \vec{v})\| \leqslant \alpha\|\vec{M} - \vec{M}_0\| + \beta\|\vec{V} - \vec{V}_0\| + \gamma, \tag{iii}$$

gdzie norma jest naturalną normą trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, zaś stałe α, β, $\gamma \geqslant 0$.

Wtedy istnieje trajektoria $(\vec{M}(t), \vec{v}(A))$ spełniająca warunek początkowy $(\vec{M}_0, \vec{v}_0)$ dla $t = 0$, przedłużalna do $+\infty$.

$$\begin{aligned} g &= -\Big[\frac{s^2-\lambda\varrho C_1}{\lambda C_1}\Big(-\frac{s\lambda C_4}{s^2-\lambda\varrho C_1}-\frac{\lambda^2\varrho C_2C_4}{s^2-\lambda\varrho C_1}-\lambda C_5\Big)\Big] \\ h &= -\Big[\frac{s^2-\lambda\varrho C_1}{\lambda C_1}\Big(-\Big(\frac{s\lambda C_2}{s^2-\lambda\varrho C_1}\Big)^{\cdot}+\frac{s^2}{\varrho}-\frac{\lambda^2\varrho C_2^2}{s^2-\lambda\varrho C_1}-\lambda C_4\Big)\Big] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Wtedy układ (3.3) przyjmie postać

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_{22} = & a\dot{\alpha}_{22}+b\dot{\alpha}_{12}+c\alpha_{22}+d\alpha_{12} \\ \ddot{\alpha}_{12} = & e\dot{\alpha}_{22}+f\dot{\alpha}_{12}+g\alpha_{22}+h\alpha_{12} \end{cases} \tag{3.5}$$

lub postać

$$\frac{d^2\vec{M}}{dx_2^2}=\vec{F}\Big(x_2,\vec{M},\frac{d\vec{M}}{dx_2}\Big) \tag{3.6}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{M}}{dx_2^2} &= \big(\ddot{\alpha}_{22},\ddot{\alpha}_{12}\big) \\ \vec{F}\Big(x_2,\vec{M},\frac{d\vec{M}}{dx_2}\Big) &:= \big(a\dot{\alpha}_{22}+b\dot{\alpha}_{12}+c\alpha_{22}+d\alpha_{12},\ e\dot{\alpha}_{22}+f\dot{\alpha}_{12}+g\alpha_{22}+h\alpha_{12}\big) \end{aligned}$$

Możemy zatem do analizy rozwiązań równania (3.6) zastosować wyniki z [7] (por. s. 21). Najpierw zauważmy, że

$$\begin{aligned} \Big\|\vec{F}\Big(x_2,\vec{M},\frac{d\vec{M}}{dx_2}\Big)\Big\|^2 &= \Big(\vec{F}\Big(x_2,\vec{M},\frac{d\vec{M}}{dx_2}\Big)\circ\vec{F}\Big(x_2,\vec{M},\frac{d\vec{M}}{dx_2}\Big)\Big)=\big(a\dot{\alpha}_{22}+b\dot{\alpha}_{12}+ \\ &+c\alpha_{22}+d\alpha_{12},\ e\dot{\alpha}_{22}+f\dot{\alpha}_{12}++g\alpha_{22}+h\alpha_{12}\big)\circ\big(a\dot{\alpha}_{22}+ \\ &+b\dot{\alpha}_{12}+c\alpha_{22}+d\alpha_{12},\ e\dot{\alpha}_{22}+f\dot{\alpha}_{12}+g\alpha_{22}+h\alpha_{12}\big)= \\ &=\big(a\dot{\alpha}_{22}+b\dot{\alpha}_{12}+c\alpha_{22}+d\alpha_{12}\big)^2+\big(e\dot{\alpha}_{22}+f\dot{\alpha}_{12}+g\alpha_{22}+h\alpha_{12}\big)^2= \\ &=\Big[\big(a^2+e^2\big)\dot{\alpha}_{22}^2+\big(b^2+f^2\big)\dot{\alpha}_{12}^2+\big(c^2+g^2\big)\alpha_{22}^2+ \\ &+\big(d^2+h^2\big)\alpha_{12}^2+\big(2ab+2ef\big)\dot{\alpha}_{22}\dot{\alpha}_{12}+\big(2ec+2eg\big)\dot{\alpha}_{22}\alpha_{22}+ \\ &+\big(2cd+2eh\big)\dot{\alpha}_{22}\alpha_{12}+\big(2bc+2fg\big)\dot{\alpha}_{12}\alpha_{22}+\big(2bd+2fh\big)\dot{\alpha}_{12}\alpha_{12}+ \\ &+\big(2cd+2gh\big)\alpha_{22}\alpha_{12}\Big] \end{aligned} \tag{3.7}$$

Stąd uzyskujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} \Big\|\vec{F}\Big(x_2,\vec{M},\frac{d\vec{M}}{dx_2}\Big)\Big\|^2 &= \Big(\vec{F}\Big(x_2,\vec{M},\frac{d\vec{M}}{dx_2}\Big),\ \vec{F}\Big(x_2,\vec{M},\frac{d\vec{M}}{dx_2}\Big)\Big)\leqslant\Big[\big(a^2+e^2\big)\dot{\alpha}_{22}^2+ \\ &+\big(b^2+f^2\big)\dot{\alpha}_{12}^2+\big(c^2+g^2\big)\alpha_{22}^2+\big(d^2+h^2\big)\alpha_{12}^2+ \\ &+\big(|ab|+|ef|\big)\big(\dot{\alpha}_{22}^2+\dot{\alpha}_{12}^2\big)+\big(|ac|+|eg|\big)\big(\dot{\alpha}_{22}^2+\alpha_{22}^2\big)+ \\ &+\big(|ad|+|eh|\big)\big(\dot{\alpha}_{22}^2+\alpha_{12}^2\big)+\big(|bc|+|fg|\big)\big(\dot{\alpha}_{12}^2+\alpha_{22}^2\big)+ \\ &\big(|bd|+|fh|\big)\big(\dot{\alpha}_{12}^2+\alpha_{12}^2\big)+\big(|cd|+|gh|\big)\big(\alpha_{22}^2+\alpha_{12}^2\big). \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(a^2 + e^2|ab| + |ef| + |ac| + |eg| + |ad| + |eh|\Big)\dot{\alpha}_{22}^2 + \\
&+ \Big(b^2 + f^2|ab| + |ef| + |bc| + |fg| + |bd| + |fh|\Big)\dot{\alpha}_{12}^2 + \\
&+ \Big(c^2 + g^2|ac| + |eg| + |bc| + |fg| + |cd| + |gh|\Big)\alpha_{22}^2 + \\
&+ \Big(d^2 + h^2|ad| + |eh| + |bd| + |fh| + |cd| + |gh|\Big)\alpha_{12}^2
\end{aligned}
$$

Niech

$$
\begin{aligned}
A(x_2,\lambda,s) &= \Big(a^2 + e^2 + |ab| + |ef| + |ac| + |eg| + |ad| + |eh|\Big) \\
B(x_2,\lambda,s) &= \Big(b^2 + f^2 + |ab| + |ef| + |bc| + |fg| + |bd| + |fh|\Big) \\
C(x_2,\lambda,s) &= \Big(c^2 + g^2 + |ac| + |eg| + |bc| + |fg| + |cd| + |gh|\Big) \\
D(x_2,\lambda,s) &= \Big(d^2 + h^2 + |ab| + |eh| + |bd| + |fh| + |cd| + |gh|\Big)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Z założenia, że $\varrho, C_1, C_2, \ldots, C_6$ są ograniczonymi funkcjami klasy $C^2[0,\infty)$ oraz z postaci A, B, C, D wynika, że dla ustalonych (s,λ) mamy

$$
\begin{aligned}
A(x_2,\lambda,s) &\leqslant \bar{A}(\lambda,s) \\
B(x_2,\lambda,s) &\leqslant \bar{B}(\lambda,s) \\
C(x_2,\lambda,s) &\leqslant \bar{C}(\lambda,s) \\
D(x_2,\lambda,s) &\leqslant \bar{D}(\lambda,s)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
\left\|\vec{F}\Big(x_2,\vec{M},\frac{d\vec{M}}{dx_2}\Big)\right\|^2 &\leqslant \bar{A}\dot{\alpha}_{22}^2 + \bar{B}\dot{\alpha}_{12}^2 + \bar{C}\alpha_{22}^2 + \bar{D}\alpha_{12}^2 \leqslant \\
&\leqslant \max_{\substack{\lambda\in[0,\lambda_0] \\ s\in(0,\infty)}}\Big(\bar{A},\bar{B}\Big)\Big(\dot{\alpha}_{22}^2 + \dot{\alpha}_{12}^2\Big) + \max_{\substack{\lambda\in[0,\lambda_0] \\ s\in(0,\infty)}}\Big(\bar{C},\bar{D}\Big)\Big(\alpha_{22}^2 + \alpha_{12}^2\Big),
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

gdzie $\lambda_0 > 0$

Niech $\max\Big(\bar{A},\bar{B}\Big) = k_1$, $\max\Big(\bar{C},\bar{D}\Big) = k_2$.
Wtedy nierówność (3.11) można zapisać w postaci

$$
\left\|\vec{F}\Big(x_2,\vec{M},\frac{d\vec{M}}{dx_2}\Big)\right\|^2 \leqslant k_1\left\|\dot{\vec{M}}\right\|^2 + k_2\left\|\vec{M}\right\|^2 \tag{3.12}
$$

stąd

$$
\left\|\vec{F}\Big(x_2,\vec{M},\frac{d\vec{M}}{dx_2}\Big)\right\| \leqslant \sqrt{k_1\left\|\dot{\vec{M}}\right\|^2 + k_2\left\|\vec{M}\right\|^2} \leqslant \sqrt{k_1}\left\|\dot{\vec{M}}\right\| + \sqrt{k_2}\left\|\vec{M}\right\|.
$$

A więc norma wektora $\left\|\vec{F}\Big(x_2,\vec{M},\dot{\vec{M}}\Big)\right\|$ spełnia warunek (iii) gdzie $\gamma = 0$ (por. str. 13).

Podobnie można wykazać, że funkcja $\vec{F}$ jest funkcją spełniającą warunek Lipschitza względem $\left(\vec{M}, \dot{\vec{M}}\right)$. W tym celu obliczamy wyrażenie

$$\begin{aligned}\left\|\vec{F}\left(x_2, \vec{M}', \dot{\vec{M}}'\right) - \vec{F}\left(x_2, \vec{M}'', \dot{\vec{M}}''\right)\right\|^2 &= \left\|a\left(\dot{\alpha}'_{22} - \dot{\alpha}''_{22}\right) + b\left(\dot{\alpha}'_{12} - \dot{\alpha}''_{12}\right) + c\left(\alpha'_{22} - \alpha''_{22}\right) + \right.\\ &\quad + d\left(\alpha'_{12} - \alpha''_{12}\right) + e\left(\dot{\alpha}'_{22} - \dot{\alpha}''_{22}\right) + f\left(\dot{\alpha}'_{12} - \dot{\alpha}''_{12}\right) + \\ &\quad \left. + g\left(\alpha'_{22} - \alpha''_{22}\right) + h\left(\alpha'_{12} - \alpha''_{12}\right)\right\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \bar{A}\left(\dot{\alpha}'_{22} - \dot{\alpha}''_{22}\right)^2 + \bar{B}\left(\dot{\alpha}'_{12} - \dot{\alpha}''_{12}\right)^2 + \bar{C}\left(\alpha'_{22} - \alpha''_{22}\right)^2 + \\ &\quad + \bar{D}\left(\alpha'_{12} - \alpha''_{12}\right)^2 \leqslant \\ &\leqslant \max\left(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\right)\left[\left(\dot{\alpha}'_{22} - \dot{\alpha}''_{22}\right)^2 + \left(\dot{\alpha}'_{12} - \dot{\alpha}''_{12}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\alpha'_{22} - \alpha''_{22}\right)^2 + \left(\alpha'_{12} - \alpha''_{12}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{3.13}$$

Niech

$$\max_{\substack{\lambda \in [0, \lambda_0] \\ s \in (0, \infty)}} \left[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\right] = k, \tag{3.14}$$

wtedy

$$\begin{aligned}&\left\|\vec{F}\left(x_2, \vec{M}', \dot{\vec{M}}'\right) - \vec{F}\left(x_2, \vec{M}'', \dot{\vec{M}}''\right)\right\|^2 \leqslant \\ &\quad \leqslant \sqrt{k}\sqrt{\left(\dot{\alpha}'_{22} - \dot{\alpha}''_{22}\right)^2 + \left(\dot{\alpha}'_{12} - \dot{\alpha}''_{12}\right)^2 + \left(\alpha'_{22} - \alpha''_{22}\right)^2 + \left(\alpha'_{12} - \alpha''_{12}\right)^2} \leqslant \\ &\quad \leqslant \sqrt{k}\sqrt{\left\|\dot{\vec{M}}' - \dot{\vec{M}}''\right\|^2 + \left\|\vec{M}' - \vec{M}''\right\|^2} \\ &\quad \leqslant \sqrt{k}\left(\left\|\dot{\vec{M}}' - \dot{\vec{M}}''\right\| + \left\|\vec{M}' - \vec{M}''\right\|\right)\end{aligned} \tag{3.15}$$

Z twierdzenia o istnieniu i przedłużalności do $+\infty$ rozwiązania (por. notka 3 lub por. [7], s. 19), wynika, że trajektoria punktu $\left(\vec{M}(x_2), \dot{\vec{M}}(x_2)\right)$ (gdy $x_2 = x_2^0$, $\vec{M} = \vec{M}_0$, $\dot{\vec{M}} = \dot{\vec{M}}_0$) może być przedłużona do $x_2 = +\infty$ (w szczególności może być $x_2^0 = 0$).

§ 4. Analiza asymptotycznych rozwiązań równania $L[\alpha_r] = 0$

O. Perron w 1913 roku udowodnił twierdzenie (por. [8], s. 254-270)

Rozważmy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$Y_i' = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x) y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.1}$$

w którym funkcje $f_{ij}(x)$ są ciągłe dla $x \geqslant x_0$ oraz istnieje

$$\lim_{x\to+\infty} f_{ij}(x) = a_{ij}$$

Wprowaźmy oznaczenie

$$\mathbf{A}(x) := \left[f_{ij}(x)\right], \qquad \mathbf{A}(\infty) := \left[a_{ij}\right]$$

Jeśli wartości własne macierrzy $\mathbf{A}(\infty)$, to znaczy ciąg liczb $\{\varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_n\}$ spełniających równanie

$$\left|\mathbf{A}(\infty) - \lambda I\right| = 0,$$

taki, że

$$Re(\varrho_1) > Re(\varrho_2) > \dots > Re(\varrho_n)$$

Wtedy układ (4.1) ma n niezależnych rozwiązań

$$Y_1 = Y_{1k},\ Y_2 = Y_{2k},\ \dots,\ Y_n = Y_{nk}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

takich, że

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dot{y}_{jk}}{y_{jk}} = \varrho_k, \qquad k = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Rozpatrzmy przypadek ośrodka niejednorodnego izotropowego gdy gęstość $\varrho = \varrho(x_2)$, moduł Poissona $\nu = \nu(x_2)$ oraz moduł ścinania $\mu = \mu(x_2)$ są ograniczonymi funkcjami klasy $C^2[0, \infty)$. Z założenia tego wynika, że

$$\begin{aligned}
&\lim_{x_2\to+\infty} \dot{\varrho}(x_2) = 0, \quad \lim_{x_2\to+\infty} \ddot{\varrho}(x_2) = 0, \quad \lim_{x_2\to+\infty} \varrho(x_2) = \varrho_\infty,\\
&\lim_{x_2\to+\infty} \dot{\mu}(x_2) = 0, \quad \lim_{x_2\to+\infty} \ddot{\mu}(x_2) = 0, \quad \lim_{x_2\to+\infty} \mu(x_2) = \mu_\infty,\\
&\lim_{x_2\to+\infty} \dot{\nu}(x_2) = 0, \quad \lim_{x_2\to+\infty} \ddot{\nu}(x_2) = 0, \quad \lim_{x_2\to+\infty} \nu(x_2) = \nu_\infty,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Jeżeli układ (1.15) zapiszemy w postaci

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\big(x_2, \lambda, s\big)\mathbf{Y} \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \alpha_{22} \\ \alpha_{12} \\ \dot{\alpha}_{22} \\ \dot{\alpha}_{22} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

to

$$\mathbf{A}\big(\infty; \lambda, s\big) = \lim_{x_2\to+\infty} \mathbf{A}\big(x_2, \lambda, s\big). \tag{4.4}$$

Macierz

$$\mathbf{A}\left(\infty;\lambda,s\right)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34}\\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0\end{bmatrix},$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_{31} &= \frac{-\lambda\varrho_\infty}{2\mu_\infty}\left[\frac{\lambda\left(1-\nu_\infty\right)\varrho_\infty-2s^2\mu_\infty\left(1-\nu_\infty\right)}{2s^2\mu\infty-\lambda\left(1-\nu_\infty\right)\varrho_\infty}\right],\\ a_{34} &= \frac{-s\left(2s^2\mu_\infty-\lambda\varrho_\infty\right)}{2s^2\mu_\infty-\lambda\left(1-\nu_\infty\right)\varrho_\infty},\\ a_{42} &= \frac{\left(s^2\mu_\infty-\lambda\varrho_\infty\right)\left[2s^2\mu_\infty-\lambda\left(1-\nu_\infty\right)\varrho_\infty\right]}{\lambda\varrho_\infty\mu_\infty-\left(1-\nu_\infty\right)},\\ a_{43} &= \frac{s\left(-2s^2\mu_\infty+\varrho_\infty\right)}{\lambda\varrho_\infty\left(1-\nu_\infty\right)}. \end{aligned}$$

Macierz $\mathbf{A}\left(\infty,\lambda,s\right)$ w której $\lambda=C_R^2s^2$ posiada cztery wartości własne

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= s\sqrt{1-\Omega_0\kappa_\infty}\\ \varrho_2 &= s\sqrt{1-\Omega_0}\\ \varrho_3 &= -s\sqrt{1-\Omega_0}\\ \varrho_4 &= -s\sqrt{1-\Omega_0\kappa_\infty} \end{aligned} \tag{4.5}$$

spełniające warunek $Re\varrho_1 > Re\varrho_2 > Re\varrho_3 > Re\varrho_4$.
Tutaj

$$\begin{aligned} Re\varrho_1 &= s\sqrt{1-\Omega_0\kappa_\infty}\\ Re\varrho_2 &= s\sqrt{1-\Omega_0}\\ Re\varrho_3 &= -s\sqrt{1-\Omega_0}\\ Re\varrho_4 &= -s\sqrt{1-\Omega_0\kappa_\infty}, \quad \text{oraz}\\ \Omega_0 &= \frac{C_R^2\varrho_\infty}{\mu_\infty}. \end{aligned}$$

Ponieważ założenia twierdzenia Perrona są spełnione, więc istnieje układ fundamentalny

$$Y_1=Y_{1k},\;\; Y_2=Y_{2k},\;\; Y_3=Y_{3k},\;\; Y_4=Y_{4k},\quad k=1,2,3,4 \tag{4.6}$$

taki, że

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dot{Y}_{jk}}{Y_{jk}} = \varrho_k, \qquad (j,k = 1,2,3,4) \tag{4.7}$$

Literatura

[1] J. Ignaczak, *Rayleigh waves in a nonhomogeneous isotropic elastic semi–space,* AMS, **15**, 3, 341 - 345, 1963.

[2] J. Ignaczak, *Upper and lower bounds on the velocity of surface waves in a nonhomogeneous isotropic elastic semi–space,* Arch. Mech. Stos., **23**, 789 - 800, 1971.

[3] M.A. Naimark, *Linear Differential Operators* , (in russian); Nauka, Moskva 1969.

[4] J. Ignaczak, *A completness problem for stress–equations of motion in linear elasticity theory,* AMS, **15**, 2, 225 - 233, 1963.

[5] S.G. Lechnickij, *Tieoria uprugosti anizotropnowo tiela,* Nauka, Moskva, 1977.

[6] T. Rożnowski, *Naprężeniowe fale powierzchniowe w półprzestrzeni sprężystej transwersarnie izotropowej, niejednorodnej,* (rozp. habilitacyjna) IPPT PAN, Warszawa, 1988.

[7] J.L. Schwartz, *Analiza,* t. II, PWN, Warszawa, 1977.

[8] O. Perron, *Lineare Differentialgleichungen mit realen Variablen* I, Journal für Math. **142**,1913.