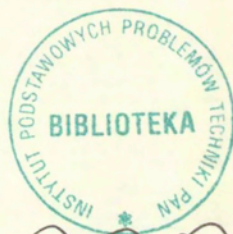


Janusz Grzędziński

NIELINIOWY FLATTER SAMOŁOTU
JAKO BIFURKACJA HOPFA
W UKŁADZIE DYNAMICZNYM
O WIELU STOPNIACH SWOBODY
Z PAMIĘCIĄ

PRACA HABILITACYJNA

2/1997



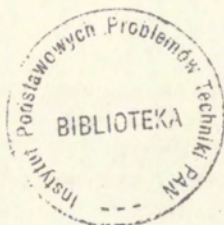
P. 269

WARSZAWA 1997

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 lutego 1997r.

recenzent - Prof. dr hab. Miron Nowak



56556



P r a c a h a b i l i t a c y j n a

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark. wyd. 5,0 Ark. druk. 6,0

Oddano do drukarni w lutym 1997

ATOS Poligrafia-Reklama, Warszawa, Stawki 14

NIELINIOWY FLATTER SAMOŁOTU JAKO BIFURKACJA HOPFA W UKŁADZIE DYNAMICZNYM O WIELU STOPNIACH SWOBODY Z PAMIĘCIĄ

Streszczenie

W pracy przedstawiono nową metodę lokalnej analizy stabilności układów aeroelastycznych z pamięcią. Przykładem takiego układu jest odkształcalny samolot w przepływie poddźwiękowym. Na skutek oddziaływania śladu wirowego powstałego za samolotem w chwilach wcześniejszych, działające na samolot niestacjonarne siły aerodynamiczne zależą od historii ruchu. Z tego powodu operator aerodynamiczny, wiążący niestacjonarne siły aerodynamiczne z odkształceniami konstrukcji samolotu, ma postać całki spłotu. W konsekwencji równanie opisujące zaburzenie ustalonego, prostoliniowego lotu samolotu jest równaniem różniczkowo-całkowym. Istnieje pewna krytyczna wartość prędkości lotu, zwana krytyczną prędkością flutteru, powyżej której ruch ustalony staje się niestabilny. W nieliniowym układzie aeroelastycznym zjawisko flutteru odpowiada niestabilności znanej jako bifurkacja Hopfa, powodującej powstanie drgań o ograniczonej amplitudzie. Drgania te dążą asymptotycznie do cyklu granicznego, należącego do pewnej dwuwymiarowej podprzestrzeni zwanej rozmaiłością centralną. W rezultacie, bez względu na liczbę fizycznych stopni swobody samolotu, jego asymptotyczny ruch w otoczeniu punktu bifurkacji jest w pełni opisywany układem dwóch równań różniczkowych zwyczajnych o symetrii obrotowej. Prezentowana metoda pozwala badać układ aeroelastyczny na rozmaiłości centralnej oraz podaje ogólny algorytm otrzymania tych równań, bazujący na szeregach potęgowych. Znając w punkcie bifurkacji pochodne macierzy transmitancji względem prędkości lotu i częstości drgań, można uwzględnić dowolną liczbę wyrazów szeregów aproksymujących równania na rozmaiłości centralnej. Nie ma także formalnego ograniczenia na liczbę stopni swobody użytych do opisu konstrukcji samolotu. Za pomocą prawie tożsamościowej transformacji zmiennych układ równań na rozmaiłości centralnej został sprowadzony do znanej formy normalnej Poincaré dla bifurkacji Hopfa, opisującej oprócz klasycznej również bifurkacje zdegenerowane. Praca zawiera wyniki przykładowych obliczeń cykli granicznych dla prostego modelu cienkiego profilu o dwóch stopniach swobody, zamocowanego na nieliniowych sprężynach, oraz dla szybowców z nieliniowymi charakterystykami w układach sterowania. Wyniki obliczeń porównano z wynikami otrzymanymi metodą linearyzacji harmonicznej, a w przypadku profilu również z wynikami numerycznego całkowania równań ruchu.

NONLINEAR AIRCRAFT FLUTTER AS THE HOPF BIFURCATION
IN A MULTI-DEGREE OF FREEDOM DYNAMICAL SYSTEM
EXHIBITING HEREDITY

Summary

A new method is presented of local stability analysis of aeroelastic systems exhibiting heredity. An example of such a system is a flexible aircraft in a subsonic flow. The unsteady aerodynamic forces acting on an aircraft depend on the history of motion due to the influence of the shedding of the vortex wake behind an aircraft at earlier instants of time. Therefore, the aerodynamic operator relating the unsteady aerodynamic forces to deflections of an aircraft structure is of the form of the convolution integral. Consequently, the equation of disturbed, steady, rectilinear flight is of the form of an integro-differential equation. There exists the critical value of flight velocity, called critical flutter velocity, above which the steady motion becomes unstable. In a nonlinear aeroelastic system the flutter phenomenon corresponds to the instability known as the Hopf bifurcation, resulting in finite amplitude oscillations. These oscillations tend asymptotically to the limit cycle in a certain two dimensional attracting subspace called center manifold. Consequently, an asymptotic motion of an aircraft in the neighborhood of bifurcation point is fully described by the set of two nonlinear ordinary differential equations of the first order having phase-shift symmetry, despite the number of physical degrees of freedom of an aircraft. The method presented allows for the restriction of an aeroelastic system to the center manifold, and gives the general algorithm for deriving such a system of two differential equations in terms of the power series expansions. Approximation of the center manifold equations can be obtained up to the desired order provided that derivatives of matrix transfer function of the aeroelastic system are known at the bifurcation point with respect to the flight velocity and frequency of oscillations. There is also no formal restriction on the number of degrees of freedom used for the description of the aircraft structure. By using the near-identity transformation the center manifold equations were brought to the well-known Poincaré normal form for the Hopf bifurcation, thus describing classical, and degenerate bifurcations as well. The results of sample limit cycle calculations are included concerning the simple model of a thin, two-dimensional airfoil with nonlinear springs, and also gliders with nonlinear control systems. The results of calculations were compared with those of harmonic balance method, and for the airfoil also with those of numerical integration of the equations of motion.

1. Wstęp

Flutter są to niepożądane i często groźne w skutkach drgania samowzbudne, które mogą powstać jako konsekwencja odkształcalności konstrukcji samolotu. W czasie lotu samolot nie zachowuje się jak bryła sztywna, lecz ulega deformacji pod wpływem niestacjonarnych sił aerodynamicznych. Zmienia się tym samym pole przepływu powietrza wokół powierzchni samolotu, co z kolei powoduje zmianę sił aerodynamicznych, które tę deformację wywołały. Zjawisko flutteru jest konsekwencją wzajemnego oddziaływania niestacjonarnych sił aerodynamicznych, sił sprężystych wywołanych odkształceniami oraz sił bezwładności (obecność sił tłumienia nie jest warunkiem koniecznym wystąpienia flutteru). W przestrzeni parametrów opisujących powyższy układ sił istnieją obszary – ich wyznaczenie jest podstawowym zadaniem analizy flutterowej – pozwalające na przekazywanie energii od strumienia powietrza opływającego samolot do jego sprężystej konstrukcji. Wprowadzone w takim obszarze zaburzenie zewnętrzne, w postaci np. podmuchu powietrza, może wywołać samowzbudne drgania o narastającej amplitudzie, której wartość z reguły szybko przekracza wartość graniczną, dopuszczalną przez materiał użyty do budowy konstrukcji. W efekcie samolot może w krótkim czasie ulec nawet całkowitemu zniszczeniu. Jest rzeczą oczywistą, że samolot dopuszczony do eksploatacji musi być całkowicie zabezpieczony przed flutterem. Z tego powodu badania flutterowe muszą być rozpoczęte we wczesnej fazie projektowania, aby jeszcze przed zbudowaniem prototypów istniała możliwość wprowadzania niezbędnych zmian konstrukcyjnych, zapobiegających wystąpieniu tego niekorzystnego zjawiska.

Flutter jest tylko jednym ze zjawisk aeroelastycznych wywołanych odkształcalnością konstrukcji. Wszystkie są związane z lotnictwem od samych jego początków. Dzisiaj wiadomo, że samolot braci Wright nie zostałby pierwszą latającą konstrukcją cięższą od powietrza, gdyby nie właśnie aeroelastyczność statyczna (a dokładniej zjawisko dywergencji skrętnej). Ona była przyczyną połamania skrzydeł konkurencyjnego samolotu Langley'a, w czasie pierwszego lotu, zaledwie kilka dni przed sukcesem braci Wright [1]. Samolot braci Wright był dwupłatem mającym większą sztywność, niż wyposażony w dwa niezależne i wiotkie skrzydła samolot Langley'a. Konstruktorzy bardzo szybko zauważyli, że samolot nie może być zbyt elastyczny i dlatego dopiero większa prędkość osiągana przez samoloty z okresu I Wojny Światowej (a tym samym większe siły aerodynamiczne) spowodowała częstsze pojawianie się drgań typu flutterowego.

Flutter jest zjawiskiem bardziej skomplikowanym niż dywergencja i do jego usunięcia nie zawsze wystarczała zwykła konstruktorska intuicja i doświadczenie, zalecające budowanie

sztynniejszych konstrukcji. Rozpoczęto więc intensywne badania nad flutterem, głównie w Anglii i Stanach Zjednoczonych, w wyniku których powstało kilka znaczących prac – jednak właściwie tylko praca Theodorsena [2] uważana jest obecnie za pionierską. Theodorsen zbudował prosty liniowy model obliczania niestacjonarnych sił aerodynamicznych dla drgającego harmonicznie i ze stałą amplitudą cienkiego profilu, umieszczonego w przepływie nieściśliwym, oraz podał uproszczoną metodę wyznaczania krytycznej prędkości lotu samolotu, zwanej krytyczną prędkością flutteru, przy której taki ruch był możliwy. Powyżej tej prędkości następowała utrata stabilności lotu poziomego, natomiast zakres prędkości niższych był uważany za bezpieczny. Pomimo, iż model aerodynamiczny Theodorsena liczy sobie obecnie ponad pół wieku, jest on nadal często wykorzystywany dla samolotów (szybowców) o smukłych powierzchniach nośnych w ramach tzw. teorii pasowej, gdy traktowanie opływu każdego przekroju powierzchni nośnej jako płaskiego jest uzasadnione. Ponadto, rozwiązanie Theodorsena jest jednym z niewielu rozwiązań niestacjonarnej aerodynamiki, danym w postaci analitycznej (choć za pomocą funkcji specjalnych), co pozwala na w miarę proste jego uogólnienie na przypadek drgań harmonicznych o rosnącej lub malejącej amplitudzie. Taki model drgań bywa używany do badania ruchu samolotu w otoczeniu krytycznej prędkości flutteru.

Dzisiaj wiadomo, że do analizy flutteru współczesnych samolotów niezbędne są daleko bardziej złożone modele aerodynamiczne i strukturalne. Do ich opisu potrzebna jest dość duża liczba współrzędnych uogólnionych (od setek do tysięcy), co wymaga zaangażowania komputerów o dużej mocy obliczeniowej oraz dużego nakładu pracy programistycznej. Dlatego rzadko rezygnuje się z podstawowego założenia upraszczającego analizę flutteru – pełnej linearyzacji zagadnienia.

W układzie aeroelastycznym nie dającym się opisać za pomocą modelu liniowego występują nowe jakościowo zjawiska, z których tylko ruch drgający o asymptotycznie ograniczonej amplitudzie (cykl graniczny) jest przedmiotem zainteresowania niniejszej pracy. Jest ona poświęcona metodzie służącej do obliczania amplitudy i częstości cyklu granicznego w otoczeniu krytycznej prędkości flutteru, dla samolotów poddźwiękowych o dużej liczbie stopni swobody.

Samolot w locie poziomym jest typowym układem dynamicznym zależnym od parametru, którego rolę odgrywa tutaj prędkość. Z teorii takich układów wiadomo [3], że decydujące znaczenie dla wystąpienia jakościowych zmian w rozwiązaniach mają wartości własne pewnego operatora zlinearyzowanych równań ruchu. Jeżeli dla pewnej wartości parametru zerują się części rzeczywiste wartości własnych, wówczas w przestrzeni fazowej układu pojawiają się

punkty osobliwe, w których następuje rozdwajanie (bifurkacja) rozwiązań. Z tego punktu widzenia flutter jest bifurkacją typu Hopfa [4], ponieważ dla prędkości krytycznej istnieje para urojonych sprzężonych wartości własnych, generujących dodatkowe (oprócz stacjonarnego) rozwiązanie okresowe, dążące asymptotycznie do cyklu granicznego. Fakt ten zmusza do innego spojrzenia na prędkość krytyczną flutteru. W ujęciu liniowym, po jej przekroczeniu następowała utrata stateczności rozwiązania stacjonarnego, prowadząca do nieograniczonego wzrostu amplitudy drgań. W ujęciu nieliniowym, nowe rozwiązanie okresowe jest ograniczone i albo stabilne w bezpośredniej bliskości punktu bifurkacji, jeżeli występuje powyżej prędkości flutteru, albo niestabilne, jeżeli wystąpi poniżej [5]. Ma to daleko idące konsekwencje praktyczne, ponieważ oznacza, że zakres prędkości mniejszych od prędkości flutteru może nie być zakresem w pełni bezpiecznym. Wnioskiem z analizy liniowej jest zanikanie drgań w tym obszarze prędkości, bez względu na wielkość zaburzenia początkowego (model liniowy nie pozwala na wyznaczenie obszaru przyciągania dla stabilnego rozwiązania stacjonarnego). Analiza nieliniowa wskazuje, że jeżeli istnieje niestabilny cykl graniczny, wówczas asymptotyczne zanikanie drgań jest możliwe tylko dla tych zaburzeń, które w chwili początkowej nie przekroczyły wartości amplitudy cyklu. Tłumaczy to występowanie flutteru poniżej prędkości wyznaczonej z modelu liniowego i wskazuje na duże znaczenie analizy nieliniowej.

W analizie flutteru samolotu co najmniej w trzech przypadkach nie można zastosować pełnej linearyzacji. Pierwszym jest okolicydźwiękowy zakres prędkości lotu, drugim oscylacje z dużymi kątami natarcia, a trzecim obecność nieliniowych charakterystyk w układach napędu lotek i sterów. Własność ściśliwości powietrza opływającego samolot oraz wynikająca z niej skończona prędkość rozchodzenia się małych zaburzeń (prędkość dźwięku) sprawiają, że jeżeli prędkość samolotu jest bliska tej charakterystycznej prędkości, wówczas w przepływie pojawiają się fale uderzeniowe. Zarówno obecność tych fal jak i ich położenie, zależne od deformacji samolotu, a także jednoczesne istnienie w przepływie obszarów pod- i naddźwiękowych, powodują nieliniową zależność wektora sił aerodynamicznych od współrzędnych uogólnionych. Zjawisko jest na tyle skomplikowane, że jedyną efektywną metodą dającą się do niego zastosować jest bezpośrednie całkowanie numeryczne układu niestacjonarnych równań Eulera lub Naviera-Stokesa [6], jednocześnie z całkowaniem numerycznym równań ruchu w czasie. Zbadanie zakresu okolicydźwiękowego jest obecnie jednym z głównych zadań aeroelastyczności [7], ponieważ właśnie tam występuje lokalne minimum prędkości krytycznej flutteru. Z kolei przy dużych kątach natarcia pojawia się często oderwanie strug powietrza od powierzchni nośnych

samolotu, a w konsekwencji niestacjonarne siły aerodynamiczne również nie są liniową funkcją współrzędnych uogólnionych.

Liniowego modelu nie można także użyć do opisu układu napędowego lotek i sterów, jeżeli występują w nim luzy, tarcie, lub sama charakterystyka sprężysta układu jest istotnie nieliniowa. Bezpośrednie całkowanie numeryczne równań ruchu samolotu i w tym przypadku pozwala na wyznaczenie cyklu granicznego, ale bywa rzadko stosowane ze względu na dużą pracochłonność. W zamian za to, bardzo szeroko stosowana jest metoda linearyzacji harmonicznej [8]. Polega ona na zastąpieniu nieliniowej charakterystyki sprężystej pierwszym wyrazem jej rozwinięcia w szereg Fouriera. Jeżeli w układzie sterowania występuje tylko jedna taka charakterystyka, wówczas dla założonej amplitudy drgań można wyznaczyć odpowiadającą jej zastępczą stałą wartość sztywności i rozwiązać odpowiadające jej liniowe równanie flatteru. Powtarzanie tego procesu dla różnych amplitud daje w wyniku zależność w funkcji prędkości lotu. Większa liczba nieliniowych charakterystyk znacznie komplikuje obliczenia, ponieważ wzajemny stosunek amplitud w punktach przyłożenia napędów nie jest na wstępie znany, a wynika dopiero z obliczonej postaci flatteru. Z tego powodu konieczne jest zastosowanie procesu iteracyjnego. Dobre rezultaty daje tu metoda kontynuacji [9] wraz z dostępnym pakietem procedur numerycznych, opracowanych dla dowolnych układów nieliniowych równań algebraicznych. Metoda linearyzacji harmonicznej wprowadza dwa istotne założenia poraszczające. Pierwszym jest przyjęcie czysto harmonicznego ruchu, co jak wiadomo, nie zawsze jest spełnione dla drgań nieliniowych. Po drugie, nieliniowa charakterystyka sprężysta jest zastąpiona w obliczeniach wartością średnią dla jednego okresu drgań. Pomimo szerokiego rozpowszechnienia metody linearyzacji harmonicznej, wpływ powyższych założeń na zakres stosowalności metody nie jest w ogólności znany.

Analiza flatteru w gruncie rzeczy polega na badaniu stabilności stacjonarnego rozwiązania równań ruchu, jakim jest lot poziomy samolotu. Interesująca jest odpowiedź na pytanie, co się stanie z samolotem, jeżeli w pewnej chwili początkowej jego ruch zostanie zaburzony. Nie jest przy tym istotny sam przebieg trajektorii w czasie od momentu zaburzenia, ale jej stan asymptotyczny po czasie dostatecznie długim. Stąd właśnie wynika ogromna pracochłonność metod numerycznych całkujących równania ruchu w czasie, a tym bardziej niecelowość stosowania w analizie nieliniowego flatteru przybliżonych metod wyznaczania rozwiązań w funkcji czasu (np. metod małego parametru), których zresztą sama realizacja praktyczna dla układów o dużej liczbie stopni swobody stoi pod znakiem zapytania.

Analiza jakościowa układów dynamicznych dysponuje narzędziem szczególnie przydatnym do badania nieliniowego flatteru samolotu, chociaż wcześniej do tego celu nie

wykorzystywanym, a mianowicie twierdzeniem o rozmaitości centralnej. Twierdzenie to bywa często formułowane bardzo ogólnie, a jego zasadniczą treścią jest skończenie wymiarowy opis asymptotycznych stanów układów dynamicznych o dużej (nawet nieskończonej) liczbie stopni swobody. W zastosowaniach do bifurkacji Hopfa twierdzenie to przedstawia np. praca Marsdena i McCracken [10]. Z twierdzenia o rozmaitości centralnej wynika, że asymptotyczne rozwiązanie okresowe (cykl graniczny) należy do pewnej skończonej wymiarowej podprzestrzeni, zwanej rozmaitością centralną, której wymiar w przypadku bifurkacji Hopfa jest równy dwa. Oznacza to, że drgania samolotu w czasie flatteru są opisane za pomocą tylko dwóch współrzędnych uogólnionych, niezależnie od liczby stopni swobody konstrukcji. Problem polega tylko na znalezieniu tych dwóch kluczowych współrzędnych, które są tworem abstrakcyjnym i nie pokrywają się ze współrzędnymi fizycznymi użytymi do budowy równań ruchu. Wiadomo również, że jest możliwe zrzutowanie nieliniowego równania flatteru na dwuwymiarową rozmaitość centralną, a następnie wyznaczenie rozwiązań okresowych (cyklu granicznego) z otrzymanego układu dwóch równań. Procedura ta nosi nazwę redukcji na rozmaitość centralną i stanowi główną część pracy. Redukcja na rozmaitość centralną nie wprowadza żadnych założeń upraszczających – wszystkie asymptotyczne własności wyjściowego układu aeroelastycznego są zachowane w zredukowanym układzie równań. Co więcej, układ ten jest nieliniowym układem dwóch równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu (o stałych współczynnikach), czyli znacznie prostszym od układu wyjściowego. Istnienie rozmaitości centralnej zostało dowiedzione w pewnym skończonym otoczeniu punktu bifurkacji, stąd też analiza ruchu układu oparta o to twierdzenie ma charakter lokalny.

Znacznym utrudnieniem w praktycznym wykorzystaniu metody redukcji na rozmaitość centralną do badania nieliniowego flatteru samolotu jest obecność pamięci przy prędkościach poddźwiękowych. Za lecącym samolotem rozciąga się strefa zaburzonego przepływu powietrza, zwana śladem wirowym, która wpływa na wielkość niestacjonarnych sił aerodynamicznych działających na samolot. Ponieważ prędkość rozchodzenia się zaburzeń w powietrzu jest w rozpatrywanym przypadku większa od prędkości samolotu, więc w danej chwili czasu siły aerodynamiczne zależą od stanu śladu wirowego we wszystkich chwilach wcześniejszych. Z kolei ślad wirowy jest generowany w sposób ciągły przez sam samolot, czyli w efekcie wektor niestacjonarnych sił aerodynamicznych zależy również w sposób ciągły od historii ruchu. Matematyczną konsekwencją tego zjawiska jest postać równań ruchu samolotu. Nie są one równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, ale równaniami różniczkowo-całkowymi z opóźnieniem. W szczególnym przypadku, gdy model aerodynamiczny zakłada nieskończonej

długości ślad wirowy, jak to ma miejsce np. w modelu Theodorsena, opóźnienie jest również nieskończone, a całka w równaniach ruchu jest całką niewłaściwą. Teoria bifurkacji dla równań różniczkowo-całkowych jest słabiej rozwinięta niż teoria dla równań różniczkowych zwyczajnych. W szczególności, brak jest w literaturze metod, które nadawałyby się do bezpośredniego wykorzystania w analizie flatteru samolotu. Z drugiej strony, zjawiska aeroelastyczne niezależne od historii ruchu (np. flatter płyt i powłok czy też ponaddzwiękowy flatter samolotu), opisywane równaniami zwyczajnymi, często można spotkać w charakterze przykładów obliczeniowych w pracach poświęconych różnym od aeroelastycznych aspektom bifurkacji [11–13].

Twierdzenie Hopfa [4] o istnieniu rozwiązań okresowych dla pewnego typu równań różniczkowych zwyczajnych zostało uogólnione na przypadek równań różniczkowo-całkowych dopiero w roku 1977 [14]. Jednak nie przyspieszyło to rozwoju uniwersalnych metod obliczeniowych, i do dnia dzisiejszego znanych jest zaledwie kilka prac noszących znamiona ogólności (to znaczy nie związanych ściśle z postacią jądra operatora całkowego oraz innych funkcji występujących w układzie równań). Spośród nich niewątpliwie najważniejszą jest praca [15], w której efektywnie zastosowano twierdzenie o rozmaitości centralnej oraz wykorzystano jako narzędzie szeregi potęgowe wielu zmiennych. Wprawdzie wynikiem tych działań było uwzględnienie w sposób analityczny tylko pierwszego nieliniowego wyrazu w przykładowym układzie dwóch równań różniczkowo-całkowych, jednak sama metoda nie stawia ograniczeń na liczbę wyrazów szeregu, a ponadto po rezygnacji z podejścia czysto analitycznego na korzyść metod komputerowych może być rozszerzona na dowolną liczbę równań z całkami typu splotowego. Takie rozszerzenie stanowi treść niniejszej pracy, a jej oryginalną częścią jest ogólny algorytm redukcji na rozmaitość centralną, niezależny od liczby równań i od postaci jądra w całce splotu. Próbę uwzględnienia pięciu wyrazów nieliniowych zawiera praca [16], jednak sposób jej realizacji praktycznie uniemożliwia wyjście poza tę granicę, a także nie pozwala na konstrukcję efektywnego algorytmu obliczeniowego dla układów o wielu stopniach swobody.

Metoda wyznaczania parametrów cyklu granicznego w oparciu o twierdzenie o rozmaitości centralnej, zastosowana do układu aeroelastycznego o N stopniach swobody, składa się z następujących etapów:

- zastąpienia pierwotnego układu N równań flatteru drugiego rzędu układem $2N$ nieliniowych równań różniczkowo-całkowych pierwszego rzędu, ponieważ metody teorii bifurkacji zostały opracowane dla takich właśnie równań;

- wyznaczenia punktu bifurkacji (krytycznej prędkości flatteru) za pomocą rozwiązania w pełni zlinearyzowanego równania flatteru (jest to klasyczna analiza liniowa);

- tzw. rozłożenia (unfolding) układu dynamicznego poprzez dołączenie parametru bifurkacyjnego (prędkości lotu) do zbioru zmiennych niezależnych (współrzędnych uogólnionych) – zwiększa to o jeden liczbę równań, ale pozwala na badanie układu w skończonym przedziale zmienności prędkości lotu;

- zrzutowania (redukcji) układu równań flatteru na rozmaitość centralną za pomocą nieliniowej transformacji zmiennych, przekształcającej pierwotny układ $2N+1$ równań różniczkowo-całkowych na układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu;

- sprowadzenia równań zwyczajnych na rozmaitości centralnej do tzw. postaci normalnej Poincaré, której prostota w przypadku bifurkacji Hopfa leży w symetrii obrotowej;

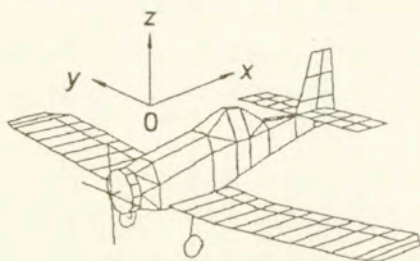
- wyznaczenia amplitudy i częstości cyklu granicznego dla zadanej prędkości lotu.

Jeżeli wszystkie nieliniowe funkcje występujące w równaniach zostaną rozwinięte w szeregi potęgowe Taylora wielu zmiennych, to amplituda i częstość cyklu granicznego są wyznaczone przez rzeczywiste dodatnie pierwiastki pewnych wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

Niewątpliwą zaletą szeregów potęgowych jest to, że pozwoliły na skonstruowanie w miarę ogólnego algorytmu redukcji na rozmaitość centralną – są one, jak dotychczas, jedynym efektywnym narzędziem obliczeniowym w rozpatrywanym zagadnieniu. Z drugiej strony, oczywistą wadą szeregów potęgowych jest ich lokalny zakres stosowalności. Co więcej, nie można tutaj mówić o promieniu zbieżności – wiadomo, że szeregi potęgowe występujące w zagadnieniach bifurkacji są szeregami asymptotycznymi i często bywają rozbieżne [5].

2. Równanie flatteru samolotu

Ponieważ analiza flatterowa jest badaniem stabilności lotu poziomego samolotu ze stałą prędkością U , więc wygodnie jest jako układ odniesienia wybrać prostokątny układ współrzędnych, poruszający się z tą samą prędkością. Zwykle przyjmuje się, że kierunek prędkości pokrywa się z kierunkiem osi Ox , lecz sama oś jest zwrócona w kierunku przeciwnym



Rys. 2.1

Przemieszczenia punktów konstrukcji samolotu, powstałe jako wynik zaburzenia lotu ustalonego, opisuje się za pomocą funkcji wektorowej $u(r,t)$ promienia wodzącego r i czasu t . Wynika stąd, że w ruchu ustalonym $\dot{u} = 0$. Położenie punktów konstrukcji odkształconej określa funkcja wektorowa $r + u(r,t)$. W analizie flatterowej rozpatruje się małe zaburzenia ruchu ustalonego, spełniające związki

$$|u| \ll b, \quad |\dot{u}| \ll U,$$

gdzie b jest charakterystycznym wymiarem liniowym samolotu (np. połową cięciwy u nasady skrzydła). Przy tych założeniach równanie ruchu odkształcalnego samolotu można zapisać w postaci odniesionego do jednostki objętości równania równowagi sił masowych, sprężystych i aerodynamicznych:

$$(2.1) \quad \mu(r)\ddot{u} + Ku = f_A(u, t),$$

gdzie $\mu(r)$ oznacza funkcję gęstości masowej konstrukcji, funkcja wektorowa f_A opisuje niestacjonarne siły aerodynamiczne, natomiast K jest różniczkowym operatorem sił sprężystych. W klasycznej analizie flatterowej, wykorzystującej liniową teorię sprężystości, operator K jest liniowy i symetryczny. W prezentowanej tu analizie nieliniowej zakłada się, że operator K jest sumą operatora liniowego i pewnego operatora, wynikającego z nieliniowych charakterystyk w układzie sterowania samolotu. Operator aerodynamiczny f_A jest liniowy względem wektora przemieszczeń u .

Równanie (2.1) w odniesieniu do całego samolotu ma jedynie znaczenie symboliczne. Konstrukcja samolotu o nieskończonej liczbie stopni swobody jest na tyle skomplikowana, że nie można dla niej nawet podać jawnej postaci operatora K . Można to zrobić oddzielnie dla elementów składowych samolotu, modelowanych np. za pomocą sprężystych belek, co bywa czasami stosowane w uproszczonej analizie flatterowej [17]. Generalnie równania ruchu buduje się od razu dla skończonych wymiarowych modeli konstrukcji. Liczba stopni swobody potrzebna do zadowalającego opisu dynamiki odkształcalnego samolotu zależy oczywiście od stopnia złożoności strukturalnego i masowego modelu, jednak nawet dla najprostszego płatowca, jakim jest klasyczny szybowiec, nie może być znacznie mniejsza od dwustu. Nie jest to dużo, ale trzeba mieć na uwadze, że wyznaczanie krytycznej prędkości flatteru jest procesem iteracyjnym, wymagającym wielokrotnego rozwiązywania równań ruchu. Z tego powodu regułą w analizie flatterowej jest dalsze zmniejszenie liczby stopni swobody poprzez tzw. współrzędne modalne.

Samolot traktowany jako ciało sztywne ma sześć stopni swobody. Dla małych przemieszczeń (w porównaniu z liniowym wymiarem charakterystycznym b) można je utożsamiać z elementarnymi przemieszczeniami liniowymi oraz elementarnymi obrotami wokół osi układu współrzędnych $Oxyz$. Czasami zbiór tych globalnych „sztywnych” stopni swobody musi być uzupełniony, jeżeli konstrukcja samolotu dopuszcza przemieszczanie pewnych elementów względem siebie. Opis modalny konstrukcji zakłada, że funkcja wektorowa $u(r,t)$ w czasie ruchu samolotu pod działaniem sił aerodynamicznych może być z zadowalającą dokładnością aproksymowana za pomocą kombinacji liniowej n_R wspomnianych przemieszczeń sztywnych $\psi_j^{(s)}(r)$ oraz skończonej liczby n_E postaci drgań własnych $\varphi_j^{(s)}(r)$:

$$(2.2a) \quad u(r,t) = \sum_{j=1}^{n_R} p_j(t) \psi_j^{(s)}(r) + \sum_{j=n_R+1}^{n_R+n_E} q_{j-n_R}(t) \varphi_{j-n_R}^{(s)}(r),$$

gdzie funkcje $p_j(t)$ i $q_j(t)$ są nowymi – modalnymi – współrzędnymi uogólnionymi. Dla zwięzłości zapisu, wzór (2.2a) wygodnie jest przedstawić jako jedną sumę

$$(2.2b) \quad u(r,t) = \sum_{j=1}^N q_j(t) \varphi_j^{(s)}(r)$$

pamiętając, że pierwsze n_R wyrazów odpowiada przemieszczeniom sztywnym ($N = n_R + n_E$). Ponieważ układ jest swobodny, więc rozkład (2.2a) wektora przemieszczeń na sumę

przemieszczeń sztywnych $\psi_j^{(s)}$ i postaci elastycznych $\varphi_j^{(s)}$ nie jest jednoznaczny. Różne rozkłady generują różne postacie równań ruchu. Samo zagadnienie budowy równań ruchu swobodnego samolotu we współrzędnych modalnych jest obszerne i wykracza daleko poza zakres zainteresowania niniejszej pracy. W dalszym ciągu będą wykorzystane wyniki prac [18] i [19], pozwalające na zapis równań ruchu w prostej postaci, a jednocześnie zawierające przejrzysty schemat dyskretyzacji modelu masowego i sztywnościowego samolotu. W modelu skończenie wymiarowym funkcje wektorowe $u(r,t)$ oraz $\varphi_j^{(s)}(r)$ przybierają postać M -wymiarowych wektorów liczbowych $\varphi_j^{(s)}$ z przestrzeni euklidesowej. Każdy element tych wektorów ma fizyczną interpretację przemieszczenia (liniowego lub kąтового) w ściśle określonym punkcie konstrukcji samolotu.

Wektory $\varphi_j^{(s)}$ wyznacza się przy braku sił aerodynamicznych i tłumienia konstrukcyjnego oraz przy pełnej linearyzacji operatora sił sprężystych, jako rozwiązanie zagadnienia własnego:

$$(2.3) \quad \omega_j^2 \mathbf{M} \varphi_j^{(s)} = \mathbf{K} \varphi_j^{(s)},$$

gdzie ω_j oznacza częstość kołową drgań własnych. Ze względu na obecność postaci sztywnych, pierwszych n_R częstości jest równe zero, co wymaga zastosowania odpowiedniej procedury numerycznej do rozwiązania zagadnienia (2.3). Elementy macierzy masowej \mathbf{M} i sztywnościowej \mathbf{K} (o wymiarach $M \times M$) zależą od sposobu dyskretyzacji ciągłego rozkładu masy oraz od modelu sztywnościowego konstrukcji. Dla samolotów o smukłych elementach można z powodzeniem stosować model belkowy [20], w którym każdy element jest zastępowany odcinkiem prostoliniowej belki o ciągłym rozkładzie parametrów masowych i sztywnościowych. W przypadku konstrukcji bardziej skomplikowanej wykorzystuje się jako narzędzie systemy obliczeniowe oparte o metodę elementów skończonych. Jeden z najszerzej chyba stosowanych systemów, NASTRAN, zawiera obecnie moduł do obliczeń flutterowych, pozwalający nawet na optymalizowanie projektowanego samolotu pod kątem spełnienia wymagań aeroelastycznych przy minimalnym ciężarze konstrukcji [21] (w ramach modelu liniowego).

Wektory własne zagadnienia (2.3) spełniają warunek ortogonalności:

$$(2.4) \quad \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I},$$

gdzie I jest macierzą jednostkową o wymiarze $N \times N$, natomiast przez Φ oznaczono prostokątną macierz o wymiarach $M \times N$ ($N \leq M$), której kolumny są utworzone przez M -wymiarowe wektory $\Phi_j^{(s)}$ ($j = 1, \dots, N$). Spełnienie warunku (2.4) oznacza ortogonalizację postaci sztywnych, przez co tracą one swoją interpretację fizyczną elementarnych przemieszczeń i obrotów względem prostokątnego układu współrzędnych. Z warunku ortogonalności wektorów własnych wynika, że:

$$(2.5) \quad \Phi^T K \Phi = K_{\omega},$$

gdzie K_{ω} jest diagonalną macierzą o wymiarze $N \times N$ zbudowaną z kwadratów częstości drgań własnych ω_j . Macierz ta jest osobliwa, ponieważ jej n_r elementów diagonalnych jest równych zero.

W M -wymiarowej przestrzeni euklidesowej układ M wektorów $\Phi_j^{(s)}$ ($j = 1, \dots, M$) jest układem zupełnym i stanowi bazę przestrzeni. Gdyby przyjąć, że liczba postaci drgań własnych jest równa liczbie stopni swobody ($N = M$), wówczas wprowadzenie nowych zmiennych $q(t)$ za pomocą związku

$$(2.6) \quad u(t) = \Phi q(t)$$

byłoby tylko przekształceniem formalnym. Istotą metody współrzędnych modalnych jest założenie, że ich liczba N , wystarczająca do aproksymacji wektora $u(t)$, jest mniejsza od liczby stopni swobody M . Z praktyki obliczeniowej flatteru liniowego wynika, że zadowalającą dokładność wyników dla typowych samolotów uzyskuje się przy uwzględnieniu około dwudziestu postaci drgań własnych o najniższych częstościach. Co więcej, istotny wkład do postaci flatteru wnosi na ogół mniejsza ich liczba (jednak wskazanie tych najważniejszych przed wykonaniem obliczeń nie jest sprawą prostą). W analizie nieliniowej również zakłada się, że jest dopuszczalna transformacja zmiennych w postaci (2.6) dla $N < M$.

Przy braku tłumienia wektor współrzędnych modalnych $q(t)$ spełnia równanie ruchu [22]:

$$(2.7) \quad \ddot{q}(t) + K_{\omega} q(t) + k(q) = f_A(q),$$

w którym $k(q)$ jest nieliniową funkcją wektora współrzędnych, natomiast $f_A(q)$ jest wektorem aerodynamicznych sił uogólnionych. W dalszej części pracy założono, że konstrukcja samolotu jest nieliniowa tylko w skończonej liczbie m punktów. Niech f_{ξ} oznacza m -wymiarowy wektor

sił uogólnionych, którego każda składowa jest funkcją potęgową odpowiedniej składowej wektora przemieszczeń uogólnionych δ :

$$(2.8) \quad \mathbf{f}_\delta = \sum_{j \geq 2} \mathbf{K}_j \delta^j,$$

gdzie \mathbf{K}_j są diagonalnymi macierzami znanych współczynników. Symbol δ^j oznacza, że każda z jego składowych jest podniesiona do potęgi j niezależnie od pozostałych. W praktycznych obliczeniach suma (2.8) jest wielomianem aproksymacyjnym o skończonej liczbie wyrazów. W szczególności wektor \mathbf{f}_δ może zawierać jako składowe momenty obrotowe działające w nieliniowych sprężynach modelujących układ sterowania samolotu. Odpowiadające im składowe wektora δ będą miały wówczas interpretację kątów obrotu powierzchni sterowych w punktach przyłożenia napędu. Z drugiej strony, zależność (2.8) może także opisywać ciągle nieliniowe charakterystyki strukturalne, zdyskretyzowane w odpowiedni sposób.

Dla danej struktury samolotu zawsze można wyznaczyć prostokątną macierz \mathbf{R} o wymiarach $m \times M$, wiążącą m -wymiarowy wektor przemieszczeń δ z M -wymiarowym wektorem fizycznych współrzędnych \mathbf{u} :

$$(2.9) \quad \delta = \mathbf{R} \mathbf{u}.$$

Na podstawie zależności (2.6), (2.8) i (2.9) można przedstawić wektor nieliniowych sprężystych sił uogólnionych $\mathbf{k}(\mathbf{q})$ w jawnej postaci:

$$(2.10) \quad \mathbf{k}(\mathbf{q}) = (\mathbf{R}\Phi)^T \mathbf{f}_\delta = (\mathbf{R}\Phi)^T \sum_{j \geq 2} \mathbf{K}_j (\mathbf{R}\Phi \mathbf{q})^j.$$

Jak już wspomniano we wstępie, celem pracy jest wyznaczenie krytycznej prędkości flutteru dla równania (2.7), a także amplitudy i częstości cyklu granicznego w bezpośrednim otoczeniu punktu utraty stateczności.

Ponieważ układ aeroelastyczny jest nieliniowy, ogólna postać drgań cyklu granicznego nie jest znana. W szczególności nie wiadomo, czy często stosowane w analizie lokalnej założenie ruchu harmonicznego jest w rozpatrywanym przypadku uzasadnione. Z tego powodu wektor niestacjonarnych sił aerodynamicznych powinien być zapisany w postaci ogólnej, słusznej dla ruchu dowolnego. Wiadomo, że taką postacią jest całka spłotu [23]:

$$(2.11) \quad \mathbf{f}_A(\mathbf{q}) = \frac{\rho U^2}{2} \int_{-\infty}^0 \mathbf{G}_A(-\tau) \mathbf{q}(t + \frac{b}{U} \tau) d\tau,$$

gdzie U i ρ oznaczają odpowiednio prędkość przepływu oraz gęstość powietrza, natomiast b jest liniowym wymiarem charakterystycznym. Elementami macierzy G_A są funkcje odpowiedzi układu na impulsowe zmiany współrzędnych uogólnionych q . W efekcie równanie ruchu (2.7) jest równaniem różniczkowo-całkowym typu splotowego. Macierz G_A daje się stosunkowo łatwo wyznaczyć tylko w prostszych przypadkach, np. dla pojedynczego cienkiego profilu [24]. W zastosowaniach praktycznych z reguły oblicza się bezpośrednio elementy wektora $f_A(q)$, bez wyznaczania macierzy G_A , co i tak jest zagadnieniem na tyle skomplikowanym, że wymaga znacznego ograniczenia klasy dopuszczalnych ruchów.

W klasycznej liniowej analizie flatteru zakłada się ruch oscylacyjny w postaci:

$$(2.12) \quad q(t) = \hat{q} e^{st},$$

gdzie zespolony wykładnik

$$(2.13) \quad s = \gamma + i\omega,$$

opisuje częstość kołową ω i współczynnik tłumienia γ . Dla takiego ruchu wektor sił aerodynamicznych jest liniową funkcją współrzędnych uogólnionych

$$(2.14) \quad f_A(q) = A(s; U) \hat{q} e^{st},$$

gdzie macierz

$$(2.15) \quad A(s; U) = \frac{\rho U^2}{2} \int_0^{\infty} G_A(\tau) e^{-\frac{sb}{U}\tau} d\tau$$

jest macierzą transmitancji układu, nazywaną w zagadnieniach aeroelastyczności macierzą aerodynamiczną. Jedynym przypadkiem, w którym jest możliwe otrzymanie wyrażeń analitycznych (zawierających jednak funkcje specjalne) dla elementów macierzy transmitancji jest cienki profil w przepływie nieściśliwym [2]. Bardziej złożone modele, zarówno pod względem aerodynamicznym jak i geometrycznym, wymagają użycia metod numerycznych. W chwili obecnej znanych jest wiele metod bezpośredniego obliczania elementów macierzy transmitancji, głównie dla ruchu czysto harmonicznego ($\gamma = 0$) [25]. Jak się wkrótce okaże, zaletą prezentowanej metody redukcji na rozmaitość centralną jest możliwość ich wykorzystania bez żadnych modyfikacji, pomimo braku założenia o harmonicznosci ruchu.

Własności macierzy transmitancji zależą od przyjętego modelu aerodynamicznego i w skrajnym przypadku, dla dwuwymiarowego modelu Theodorsena z nieskończonym śladem

wirowym, reprezentacja całkowa i macierzy transmitancji (2.15) istnieje tylko dla $\gamma > 0$ (ze względu na obecność punktu rozgałęzienia w początku układu, dla $s = 0$). Z tego powodu, aby móc w dalszym ciągu posługiwać się zapisem (2.15), przekształcenie Laplace'a definiujące macierz transmitancji trzeba traktować w sensie dystrybucyjnym [54] (ta sama uwaga dotyczy reprezentacji całkowej splotu (2.11)).

Lokalna teoria bifurkacji układów dynamicznych [26] dotyczy równań pierwszego rzędu. Równanie flatteru (2.7) może być do takiej postaci łatwo sprowadzone za pomocą $2N$ -wymiarowego wektora nowych zmiennych $y(t)$:

$$(2.16) \quad y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}.$$

Równanie flatteru pierwszego rzędu jest następujące:

$$(2.17) \quad \dot{y}(t) = D_U y(t) + \int_{-\infty}^0 G_U(-\ominus; U) y(t + \ominus) d\ominus + f_U(y),$$

gdzie kwadratowe macierze o wymiarze $2N$, D_U , G_U , oraz wyraz nieliniowy $f_U(y)$ są dane wzorami:

$$D_U = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad G_U(-\ominus; U) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\rho U^3}{2b} G_A(-\frac{U}{b} \ominus) & 0 \end{bmatrix}, \quad f_U(y) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -k(q) \end{Bmatrix}.$$

Jak łatwo sprawdzić, dla ruchu oscylacyjnego w postaci (2.12), zlinearyzowane równanie flatteru drugiego rzędu przybiera postać następującą:

$$(2.18) \quad (A(s; U) - K_\omega) \hat{q} = s^2 \hat{q}.$$

Równanie to ma niezerowe rozwiązanie, gdy

$$\det(A(s; U) - K_\omega - s^2 I) = 0.$$

Utrata stabilności ma miejsce wtedy, gdy współczynnik tłumienia jest równy zeru ($\gamma = 0$), czyli kwadrat jednej z wartości s zerującej wyznacznik przyjmuje wartość rzeczywistą ujemną

$$(2.19) \quad s^2 = -\omega_0^2.$$

Prędkość $U = U_0$ odpowiadająca temu warunkowi jest krytyczną prędkością flatteru.

Z drugiej strony, krytyczny punkt bifurkacji dla równania pierwszego rzędu (2.17) jest wyznaczony przez rozwiązanie równania zlinearyzowanego, tzn. dla $f_U(y) = 0$. W dalszej części pracy będzie pokazane, że również w przypadku występowania całki splotu w liniowej części równania, rozwiązanie ma postać wykładniczą:

$$y(t) = \hat{y} e^{st},$$

gdzie s jest dane przez (2.13). Zlinearyzowane równanie flatteru pierwszego rzędu jest następujące:

$$(2.20) \quad \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}(s; U) - \mathbf{K}_\omega & \vdots & 0 \end{bmatrix} \hat{y} = s \hat{y}$$

i ma niezerowe rozwiązanie, gdy

$$\det \left(\begin{bmatrix} 0 & \vdots & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}(s; U) - \mathbf{K}_\omega & \vdots & 0 \end{bmatrix} - s \mathbf{I} \right) = 0.$$

Z porównania równań (2.18) i (2.20) wynika, że w punkcie krytycznym zerowej wartości wyznacznika zlinearyzowanego równania flatteru pierwszego rzędu odpowiada para sprzężonych, urojonych wartości $s = \pm i\omega_0$.

Liniowe równanie (2.20) można także otrzymać na drodze czysto formalnej za pomocą transformacji Laplace'a, która przekształca całkę splotu w równaniu (2.17) na iloczyn dwóch funkcji. Dla równania nieliniowego istnieją dwa sposoby podejścia: albo zastosowanie przekształcenia Laplace'a i analiza nowego równania w dziedzinie częstości, albo zachowanie niezmienionej postaci równania i poszukiwanie rozwiązania w dziedzinie czasu. Zaletą sposobu pierwszego jest eliminacja z równania operatora całkowego, jednak kosztem poważnych trudności związanych z transformacją wyrazu nieliniowego. Z drugiej strony, umiejscowienie problemu w dziedzinie czasu zmusza wprawdzie do wejścia na nie do końca jeszcze zbadane pole analizy stabilności rozwiązań równań różniczkowo-całkowych, ale za to pozostawia wyraz nieliniowy w pierwotnej, względnie prostej postaci. Trudno w obecnej chwili przesądzać, która z tych metod jest bardziej efektywna. Prezentowana praca wykorzystuje drugą z nich, jednak również pierwsza jest obecna w literaturze [27] (co prawda, jeszcze nie w zastosowaniach do badania flatteru).

Teoria bifurkacji nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych zajmuje się układem równań pierwszego rzędu

$$\dot{x}(t) = v(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

zależnym od parametru μ i opisującym ruch w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^n . Zakłada się, że układ ten ma asymptotycznie stabilne rozwiązanie stacjonarne $x = 0$, to znaczy, że istnieje takie otoczenie warunku początkowego $0 < |x(0)| < \varepsilon$, że dla wszystkich $x(0)$ z tego otoczenia:

1° trajektoria $x(t)$ spełnia warunek $|x(t)| < \varepsilon$ dla $t > 0$,

2° $|x(t)| \rightarrow 0$ dla $t \rightarrow \infty$.

Problemem do rozwiązania jest odpowiedź na pytanie, co się będzie działo w otoczeniu punktu $x = 0$ (to znaczy lokalnie), jeżeli wartość parametru μ ulegnie zmianie. Ponieważ

$$v(0, \mu) = 0$$

dla wszystkich μ , więc równanie można zapisać w postaci:

$$\dot{x}(t) = L_\mu x + f(x, \mu),$$

gdzie $L_\mu = D_x v(0, \mu)$ jest kwadratową macierzą charakterystyczną z elementami

$$(L_\mu)_{ij} = \frac{\partial v_i(0, \mu)}{\partial x_j},$$

natomiast nieliniowa funkcja wektorowa f spełnia warunki:

$$f(0, \mu) = 0, \quad D_x f(0, \mu) = 0.$$

Podstawowe znaczenie dla badania stabilności rozwiązania stacjonarnego $x = 0$ ma twierdzenie Hartmana-Grobmana [28]. Stanowi ono, że jeżeli wszystkie wartości własne macierzy charakterystycznej L_μ układu zlinearyzowanego leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej, tzn.

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n,$$

wówczas istnieje pewna ciągła transformacja zmiennych (będąca ponadto homeomorfizmem, to znaczy, że również transformacja odwrotna do niej jest ciągła), która sprowadza lokalnie układ nieliniowy do układu liniowego. Wynika stąd, że jeżeli rozwiązanie stacjonarne zlinearyzowanego układu równań jest asymptotycznie stabilne, to również własność tę ma rozwiązanie stacjonarne pełnego układu nieliniowego. Z twierdzenia Hartmana-Grobmana

wynika również, że każda jakościowa zmiana w zachowaniu nieliniowego układu dynamicznego jest wskazywana przez zerowe części rzeczywiste wartości własnych macierzy charakterystycznej L_μ układu zlinearyzowanego. Uogólnienie twierdzenia Hartmana-Grobmana na przypadek równań różniczkowo-całkowych nie jest sprawą trywialną. Wprowadzie rolę macierzy charakterystycznej gra teraz liniowy operator \mathcal{L}_0 , który dla równania flatteru (2.17) jest następujący:

$$\mathcal{L}_0 y(t) = D_U y(t) + \int_{-\infty}^0 G_U(-\Theta; U) y(t + \Theta) d\Theta,$$

jednak nie można dla niego w zwykły sposób sformułować zagadnienia na wartości własne $\mathcal{L}_0 \varphi = \lambda \varphi$. Jest tak dlatego, że operator \mathcal{L}_0 nie działa w jednej przestrzeni – przekształca pewną przestrzeń funkcyjną w przestrzeń euklidesową. Problem ten został rozwiązany najpierw dla równań różniczkowych z opóźnionym argumentem [29, 30], a następnie dla równań różniczkowo-całkowych [15, 31, 32]. Punktem wyjścia było potraktowanie czasu t jako parametru, natomiast równania jako transformacji w przestrzeni C^- funkcji ciągłych argumentu Θ , określonych na przedziale $-\infty < \Theta \leq 0$. Najważniejszy rezultat, który otrzymano głównie w oparciu o własności operatora przesunięcia $y(\Theta) \rightarrow y(t + \Theta)$, to dowód, że równanie różniczkowo-całkowe (2.17) jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego równania

$$(2.21) \quad \frac{dy_t(\Theta)}{dt} = \mathcal{L}_U y_t(\Theta) + \mathcal{R}_U y_t(\Theta)$$

dla jednej funkcji argumentu Θ (wskaźnik t oznacza przesunięcie argumentu):

$$y_t(\Theta) = y(t + \Theta).$$

Operator części liniowej \mathcal{L}_U równania (2.21) jest zdefiniowany następująco:

$$(2.22) \quad \mathcal{L}_U \varphi(\Theta) = \begin{cases} \frac{d\varphi(\Theta)}{d\Theta}, & \text{dla } -\infty < \Theta < 0, \\ D_U \varphi(0) + \int_{-\infty}^0 G_U(-\tau; U) \varphi(\tau) d\tau, & \text{dla } \Theta = 0, \end{cases}$$

natomiast operator \mathcal{R}_U części nieliniowej jest dany wzorem:

$$(2.23) \quad \mathcal{R}_U y_t(\Theta) = \begin{cases} 0, & \text{dla } -\infty < \Theta < 0, \\ f_U(y_t(0)), & \text{dla } \Theta = 0. \end{cases}$$

Dla $-\infty < \Theta < 0$ równanie (2.21) daje znany związek

$$\frac{d\mathbf{y}(t+\Theta)}{dt} = \frac{d\mathbf{y}(t+\Theta)}{d\Theta},$$

a dla $\Theta = 0$ równanie (2.17).

Można teraz bez kłopotu sformułować zagadnienie na wartości własne

$$(2.24) \quad \mathcal{L}_U \Phi = \lambda \Phi.$$

Postać funkcji własnych wynika z postaci zagadnienia w przedziale $-\infty < \Theta < 0$:

$$(2.25) \quad \frac{d\Phi(\Theta)}{d\Theta} = \lambda \Phi(\Theta) \quad \Rightarrow \quad \Phi(\Theta) = \Phi(0)e^{\lambda\Theta},$$

gdzie wartości własne λ i wektory $\Phi(0)$ są rozwiązaniem zagadnienia dla $\Theta = 0$ w przestrzeni euklidesowej:

$$(2.26) \quad D_U \Phi(0) + \left(\int_{-\infty}^0 G_U(-\tau; U) e^{\lambda\tau} d\tau \right) \Phi(0) = \lambda \Phi(0).$$

Jak łatwo sprawdzić, równania (2.20) i (2.26) są identyczne. Zatem flatter nieliniowy jest bifurkacją typu Hopfa, ponieważ odpowiada mu para sprzężonych, urojonych wartości własnych operatora \mathcal{L}_U części liniowej równania (2.21) [5]. Pomimo pozornego podobieństwa, zagadnienie (2.26) nie jest algebraicznym zagadnieniem na wartości własne, ponieważ λ występuje także pod znakiem całki. W ogólności może istnieć nieskończenie wiele wartości i wektorów własnych zagadnienia (2.24), co jest konsekwencją zależności sił aerodynamicznych od historii ruchu.

Lima [14] pokazał, że jeżeli istnieje para sprzężonych urojonych wartości własnych operatora \mathcal{L}_U , to równanie typu (2.21) ma rodzinę jednoznacznych rozwiązań okresowych w klasie funkcji ciągłych w przedziale $-\infty < \Theta \leq 0$. Warto teraz zwrócić uwagę na fakt, że obie strony równania (2.21) są funkcjami ciągłymi w całym przedziale $-\infty < \Theta \leq 0$, natomiast każdy ze składników prawej strony z osobna jest nieciągły w punkcie $\Theta = 0$. Oznacza to, że wynikiem działania operatora liniowego \mathcal{L}_U na funkcję ciągłą w przedziale $\Theta \in (-\infty, 0]$ może być funkcja nieciągła w zerze, czyli inaczej mówiąc, operator \mathcal{L}_U ma działanie rozszerzające poza przestrzeń C^+ . Jednak zagadnienie własne (2.24) w klasie funkcji nieciągłych w punkcie $\Theta = 0$ ma niejednoznaczne rozwiązanie (co jest bezpośrednio widoczne ze wzorów (2.25) i (2.26)).

3. Krótki przegląd metod rozwiązywania nieliniowego równania flatteru

Celem przeglądu jest krótkie przedstawienie metod stosowanych do rozwiązywania nieliniowego, różniczkowo-całkowego równania flatteru samolotu, poruszającego się w przepływie poddźwiękowym. Z tego powodu pominięto całkowicie metody badania nieliniowych układów aeroelastycznych opisywanych równaniami innego typu (dającymi się z reguły sprowadzić do układu nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu). Dobrym przeglądem problematyki związanej z tymi układami jest książka [55], która z kolei całkowicie pomija problemy związane z układami aeroelastycznymi zależnymi od historii ruchu. Jedyne we wstępie do rozdziału poświęconego drganiom samowzbudnym umieszczonych w przepływie ciał odkształcalnych znajduje się krótka wzmianka, że nawet w najprostszym przypadku małych zaburzeń nielepkiego potencjalnego przepływu, siły aerodynamiczne wywołane obecnością ciała są związane z jego ruchem poprzez całość spłotu, co ogranicza metody rozwiązania do numerycznego całkowania różniczkowo-całkowych równań ruchu lub linearyzacji harmonicznej. Do dnia dzisiejszego sytuacja w tej dziedzinie niewiele się zmieniła.

Metody rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych (lub funkcyjnych) należą do jednej z czterech grup: rozwiązania dokładne, numeryczne, przybliżone (uśrednione, małych zaburzeń) i asymptotyczne. Ze względu na skomplikowany sposób obliczania niestacjonarnych sił aerodynamicznych nie istnieją dokładne rozwiązania równań opisujących układy aeroelastyczne. Co więcej, siły aerodynamiczne są z reguły znane tylko w postaci zbioru liczb, będących wynikiem numerycznego rozwiązywania równania całkowego dla rozkładu ciśnienia na powierzchniach nośnych samolotu. Rozwiązania numeryczne, polegające na całkowaniu równań ruchu względem czasu, z powodu dużej pracochłonności są stosowane na ogół dla najprostszych układów o małej liczbie stopni swobody (np. [40, 46]) i rzadko są używane do badania układów bardziej skomplikowanych (np. [56]).

Najczęściej do rozwiązywania nieliniowego równania flatteru wykorzystywana jest metoda linearyzacji harmonicznej [8]. Polega ona na zastąpieniu nieliniowej charakterystyki, np. momentu obrotowego M w funkcji kąta wychylenia steru δ , przez zależność liniową

$$M(\delta) = \operatorname{Re} \left(\tilde{M} \delta_0 e^{i\omega t} \right),$$

przy założeniu ruchu harmonicznego

$$\delta = \delta_0 \cos(\omega t).$$

Stała zespolona \tilde{M} jest pierwszym współczynnikiem rozwinięcia momentu w szereg Fouriera, podzielonym przez amplitudę oscylacji δ_0 :

$$\tilde{M} = \frac{2}{T\delta_0} \int_0^T M(\delta_0 \cos(\omega t)) e^{-i\omega t} dt .$$

Po wstawieniu tej zależności do równania flatteru otrzymuje się zastępcze równanie liniowe, słuszne dla amplitudy δ_0 . Metoda linearyzacji harmonicznej jest od dawna stosowana zarówno w przypadku występowania nieliniowości strukturalnych, jak i aerodynamicznych (np. [57, 58]). Obliczając wartości \tilde{M} dla różnych wartości amplitud można określić funkcję $\tilde{M} = \tilde{M}(\delta_0)$, która bywa w literaturze nazywana funkcją opisującą. Metodę linearyzacji harmonicznej można stosować, jeżeli nieliniowe charakterystyki występują w izolowanych punktach konstrukcji. Jednak większa liczba nieliniowości stwarza pewne problemy, ponieważ zastępcze liniowe równanie flatteru można otrzymać tylko przy założeniu dla wszystkich funkcji nieliniowych konkretnych wartości amplitud, a te nie są znane przed rozwiązaniem równania. Problem ten można rozwiązać budując odpowiedni schemat iteracyjny dla równania flatteru (np. [59]), albo wykorzystując istniejący pakiet procedur realizujący tzw. metodę kontynuacji [9] rozwiązywania układu nieliniowych równań algebraicznych (a takim jest równanie flatteru zapisane dla ruchu harmonicznego). Mankamentem metody linearyzacji harmonicznej jest założenie o harmoniczności ruchu. Wprawdzie istnieje możliwość uwzględnienia większej liczby wyrazów szeregu Fouriera w celu polepszenia dokładności, ale prowadzi to do skomplikowanych równań i nie jest stosowane w badaniu układów aeroelastycznych [27].

Metody asymptotycznej analizy stabilności nie były dotychczas wykorzystywane do wyznaczania cykli granicznych w układach aeroelastycznych opisywanych równaniami różniczkowo-całkowymi. Co więcej, wyniki analizy układów dynamicznych oraz metody znane z teorii bifurkacji nie przeniknęły jeszcze na grunt aeroelastyczności. Wydaje się jednak, że w najbliższych latach sytuacja ta może ulec zmianie. Pojawiły się już pierwsze prace zwracające uwagę na fakt, że układy aeroelastyczne są układami dynamicznymi i w związku z tym można przewidzieć wiele zjawisk wywołanych nieliniowościami, a także jakościowo je zinterpretować [60, 61].

Analiza nieliniowych układów aeroelastycznych z pamięcią jest jeszcze obszarem mało zbadanym, a pierwsze opublikowane wyniki niniejszej pracy [36, 48] są w ogóle pierwszymi, w których przedstawiono efektywną metodę badania stabilności oraz zmniejszenia liczby stopni swobody poprzez redukcję równania różniczkowo-całkowego na rozmaitość centralną.

4. Redukcja równania flatteru na rozmaitość centralną

Równanie flatteru (2.21) opisuje przekształcenie w siebie przestrzeni C^- ciągłych funkcji argumentu \ominus , określonych na przedziale $\ominus \in (-\infty, 0]$. Jeżeli dla pewnej wartości parametru U zbiór wartości własnych operatora \mathcal{L}_U (2.22) składa się z trzech podzbiorów, w których $\text{Re}(\lambda) < 0$, $\text{Re}(\lambda) = 0$ i $\text{Re}(\lambda) > 0$ [33], wówczas przestrzeń fazowa jest sumą prostą trzech podprzestrzeni (rozmaitości), nazywanych odpowiednio stabilną W^s , centralną W^c i niestabilną W^u

$$(4.1) \quad C^- = W^s \oplus W^c \oplus W^u.$$

Podprzestrzenie W^s , W^c i W^u mają jeden punkt wspólny $y = 0$. Rozmaitość centralna ma kilka ważnych własności [34]. Przede wszystkim jest skończona wymiarowa i styczna w punkcie $y = 0$ do podprzestrzeni rozpiętej przez układ tych wektorów własnych operatora \mathcal{L}_U , dla których $\text{Re}(\lambda) = 0$. Ponadto jest niezmiennicza (inwariantna), co oznacza, że jeżeli warunek początkowy $y_0(\ominus) \in W^c$, to również cała trajektoria $y_t(\ominus) \in W^c$. Rozmaitość centralna W^c jest lokalnie przyciągająca, co oznacza, że istnieje pewne otoczenie M punktu $y = 0$ takie, że jeżeli warunek początkowy $y_0(\ominus) \in M$ oraz $y_t(\ominus) \in M$ dla wszystkich $t \geq 0$, to trajektoria $y_t(\ominus)$ dąży do W^c , gdy $t \rightarrow \infty$. Definicja własności lokalnego przyciągania nie wymaga, by rozmaitość niestabilna była pusta, a także nie wymaga, by wszystkie możliwe warunki początkowe spełniały założenie lokalnego przyciągania. Wynika stąd, że trajektorie z warunkami początkowymi $y_0(\ominus) \in M$ i $y_0(\ominus) \in W^s \oplus W^c \oplus W^u$ mogą opuścić w skończonym czasie obszar M i tym samym nie spełnić wspomnianego założenia. Zatem z samej definicji własność lokalnego przyciągania rozmaitości centralnej dotyczy tylko trajektorii leżących dostatecznie blisko punktu $y = 0$ w całej przyszłości. W przypadku bifurkacji Hopfa, rozmaitość centralna jest dwuwymiarowa – pozostałe rozmaitości mogą dla rozpatrywanego przypadku równania różniczkowo-całkowego być nieskończenie wymiarowe. Z twierdzenia o rozmaitości centralnej wynika więc, że jeżeli rozmaitość niestabilna jest pusta, wówczas dla $t \rightarrow \infty$ wszystkie trajektorie, będące w chwili początkowej dostatecznie blisko punktu $y = 0$, dążą do rozmaitości centralnej. Zatem asymptotyczny stan układu można wyznaczyć za pomocą analizy ruchu tylko w obrębie skończonej wymiarowej rozmaitości centralnej, zamiast badać asymptotykę rozwiązań pełnego równania (2.21). Co więcej, wiadomo że ruch na

rozmaitości centralnej odzwierciedla wszystkie asymptotyczne własności rozwiązań pełnego równania. Wynika stąd, że cykl graniczny dla równania flatteru jest opisywany za pomocą tylko dwóch równań. Procedura otrzymania nisko wymiarowego układu równań opisujących ruch asymptotyczny układu nosi nazwę redukcji na rozmaitość centralną.

Metoda redukcji na rozmaitość centralną jest bardzo użytecznym narzędziem analizy stabilności rozwiązań, pomimo iż sama rozmaitość centralna może być niejednoznaczna. Inaczej mówiąc, może istnieć nieskończenie wiele różnych rozmaitości centralnych. W dodatku lokalna teoria bifurkacji nie pozwala na określenie wielkości obszaru przyciągania rozmaitości centralnej, ponieważ zależy on od położenia sąsiednich punktów krytycznych. Problem niejednoznaczności rozmaitości centralnej wymaga paru słów komentarza.

Niech wektor $z(t)$ będzie wektorem współrzędnych uogólnionych na rozmaitości centralnej W^c . Ponieważ przestrzeń fazowa jest sumą prostą trzech rozmaitości (4.1), więc zawsze można przedstawić trajektorię w postaci sumy dwóch składników, z których pierwszy należy do rozmaitości centralnej W^c i jest funkcją argumentu \ominus i wektora $z(t)$, natomiast pozostały $w(\ominus, t) \in W^s \oplus W^u$ jest funkcją argumentu \ominus oraz czasu t . Wyznaczenie rozmaitości centralnej polega na znalezieniu zależności $w(\ominus, t) = w(\ominus, z(t))$. Niejednoznaczność rozmaitości centralnej polega na tym, że istnieje nieskończenie wiele funkcji $w(\ominus, z(t))$, ale wszystkie mają takie same rozwinięcia w szereg Taylora względem z [35], i w tym sensie są równoważne asymptotycznie. Jeżeli zatem funkcja w jest wyznaczona z dokładnością do pewnej innej funkcji (addytywnie), to funkcja ta w punkcie $z = 0$ musi mieć wszystkie pochodne względem z równe zero. Niejednoznaczność rozmaitości centralnej nie stanowi istotnego problemu, ponieważ każda z możliwych zawiera ten sam ruch asymptotyczny. Jeżeli natomiast funkcja w jest analityczna względem z , to rozmaitość centralna jest wyznaczona w sposób jednoznaczny. W przeciwnym przypadku, jeżeli istnieje rozwinięcie funkcji w w szereg względem z , to szereg ten może być rozbieżny.

Następny problem związany z rozmaitością centralną dotyczy jej rozwinięcia (unfolding) względem parametru U . W punkcie krytycznym prędkość przyjmuje wartość $U = U_0$, której odpowiada para urojonych sprzężonych wartości własnych operatora \mathcal{L}_U (2.22), warunkujących istnienie rozmaitości centralnej. Amplituda oscylacji (cyklu granicznego) w tym punkcie jest jeszcze równa zero i rośnie dopiero wraz z oddalaniem się prędkości od wartości krytycznej. Jednak dla prędkości różnych od krytycznej $U \neq U_0$ znika para urojonych wartości własnych i rozmaitość centralna przestaje istnieć. Standardowy sposób rozwiązania tego

problemu polega na rozwinięciu w szeregi Taylora w otoczeniu punktu $U = U_0$ wszystkich występujących w równaniu funkcji prędkości oraz potraktowaniu prędkości jako dodatkowej zmiennej, a nie jako parametru.

Zamiast samej prędkości, jako dodatkową zmienną wygodnie jest wybrać różnicę

$$(4.2) \quad u = U - U_0,$$

i uzupełnić równanie flatteru (2.21) równaniem $\dot{u} = 0$. Punkt bifurkacji odpowiada teraz wartości $u = 0$. Pełny, $2N+1$ -wymiarowy wektor nowych współrzędnych uogólnionych jest następujący:

$$(4.3) \quad \mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \\ u \end{Bmatrix}$$

i spełnia równanie

$$(4.4) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{D} \mathbf{x}(t) + \int_{-\infty}^0 \mathbf{G}(-\ominus; u) \mathbf{x}(t + \ominus) d\ominus + \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

w którym kwadratowe macierze stopnia $2N+1$ \mathbf{D} , \mathbf{G} oraz wyraz nieliniowy $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ są dane wzorami:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{K}_\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(-\ominus; u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho(U_0 + u)^3}{2b} \mathbf{G}_A(-\frac{U_0 + u}{b} \ominus) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\mathbf{k}(\mathbf{q}) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Ponieważ macierz $\mathbf{G}(-\ominus; u)$ zawiera teraz jako argument zmienną niezależną u zamiast parametru bifurkacyjnego U , operator całkowy w równaniu (4.4) nie jest już liniowy względem wektora zmiennych \mathbf{x} . Zastąpienie macierzy \mathbf{G} w równaniu (4.4) przez rozwinięcie w szereg Taylora w otoczeniu punktu $u = 0$

$$(4.5) \quad \mathbf{G}(-\ominus; u) = \mathbf{G}(-\ominus; 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{d^j \mathbf{G}(-\ominus; 0)}{du^j} u^j$$

daje w otoczeniu punktu bifurkacji następujące równanie różniczkowo-całkowe:

$$(4.6) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{D}\mathbf{x}(t) + \int_{-\infty}^0 \mathbf{G}(-\ominus; 0)\mathbf{x}(t + \ominus) d\ominus + \mathbf{h}(\mathbf{x}),$$

w którym całka splotu jest już funkcją liniową zmiennych \mathbf{x} , a wyraz nieliniowy $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ jest równy

$$(4.7) \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{\eta \geq 2} \frac{1}{(\eta-1)!} \int_{-\infty}^0 \frac{d^{\eta-1} \mathbf{G}(-\ominus; 0)}{d\mu^{\eta-1}} \mathbf{x}^{\eta}(t + \ominus) d\ominus.$$

Wprowadzono tu oznaczenie $\mathbf{x}^{\eta} = \{x_1^{\eta_1} \cdot x_2^{\eta_2} \cdots x_{2N+1}^{\eta_{2N+1}}\}$, w którym wykładniki spełniają związki:

$$\eta = \eta_{2N+1} + 1 \quad (x_{2N+1} = u), \quad \sum_{j=1}^{2N} \eta_j = 1.$$

Równanie (4.6) ma swój uogólniony odpowiednik w przestrzeni C^{-}

$$(4.8) \quad \frac{d\mathbf{x}_t(\ominus)}{dt} = \mathcal{L}\mathbf{x}_t(\ominus) + \mathcal{R}\mathbf{x}_t(\ominus),$$

w którym operator części liniowej \mathcal{L} jest zdefiniowany następująco:

$$(4.9) \quad \mathcal{L}\varphi(\ominus) = \begin{cases} \frac{d\varphi(\ominus)}{d\ominus}, & \text{dla } -\infty < \ominus < 0 \\ \mathbf{D}\varphi(0) + \int_{-\infty}^0 \mathbf{G}(-\tau; 0)\varphi(\tau) d\tau, & \text{dla } \ominus = 0 \end{cases}$$

natomiast operator \mathcal{R} części nieliniowej jest dany wzorem:

$$(4.10) \quad \mathcal{R}\mathbf{x}_t(\ominus) = \begin{cases} 0, & \text{dla } -\infty < \ominus < 0 \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}_t(0)), & \text{dla } \ominus = 0 \end{cases}.$$

Spektrum operatora \mathcal{L} zawiera teraz o jedną więcej wartość własną z zerową częścią rzeczywistą. Stąd też rozmaitość centralna dla równania (4.8) jest trójwymiarowa, ale za to istnieje w skończonym otoczeniu prędkości krytycznej. Tak więc dopiero równanie (4.8) można zredukować na rozmaitość centralną, w celu wyznaczenia cyklu granicznego w otoczeniu punktu bifurkacji.

Z przestrzenią C^- sprzężona jest przestrzeń C^+ ciągłych funkcji argumentu \ominus , określonych na przedziale $\ominus \in [0, +\infty)$. Operator sprzężony \mathcal{L}^* jest zdefiniowany w standardowy sposób

$$\langle \mathbf{x}^*, \mathcal{L} \mathbf{x} \rangle = \langle \mathcal{L}^* \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle.$$

za pomocą formy dwuliniowej [15], nazywanej czasami iloczynem zewnętrznym:

$$(4.11) \quad \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle - \int_{-\infty}^0 \int_0^{\eta} \bar{\mathbf{x}}^{*T}(\xi - \eta) G(-\eta; u) \mathbf{x}(\xi) d\xi d\eta,$$

w którym $\mathbf{x}(\xi) \in C^-$, $\mathbf{x}^*(\eta) \in C^+$, natomiast

$$\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle = \bar{\mathbf{x}}^{*T}(0) \mathbf{x}(0).$$

jest iloczynem skalarnym w przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^{2N+1} .

Wartości własne i wektory własne zagadnień:

$$(4.12) \quad \mathcal{L} \varphi = \lambda \varphi, \quad \mathcal{L}^* \psi = \lambda^* \psi$$

spełniają związki:

$$(4.13) \quad \lambda^* = \bar{\lambda}, \quad \langle \psi_k, \varphi_l \rangle = \delta_{kl},$$

gdzie δ_{kl} jest symbolem Kroneckera. Jak już wspomniano, postać wektorów własnych wynika bezpośrednio z postaci operatora \mathcal{L} (dla $-\infty < \ominus < 0$)

$$(4.14) \quad \varphi(\ominus) = \varphi_0 e^{\lambda \ominus}, \quad \psi(\ominus) = \psi_0 e^{\lambda^* \ominus}.$$

Jak łatwo sprawdzić, $\langle \psi_k, \varphi_l \rangle = 0$ dla $k \neq l$, bez względu na wartość iloczynu skalarnego $\bar{\psi}^T(0) \varphi(0)$ w przestrzeni \mathbb{R}^{2N+1} , natomiast dla $k = l$ jest prawdziwa zależność

$$(4.15) \quad \bar{\psi}^T(0) \left(I - \frac{d}{ds} A(s; U_0) \right)_{s=\lambda_k} \varphi(0) = 1,$$

gdzie jedyny niezerowy blok macierzy

$$(4.16) \quad A(s; U_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A}(s; U_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jest macierzą transmitancji $\mathbf{A}(s; U)$ daną wzorem (2.15) i obliczoną dla $U = U_0$.

Ponieważ rozmaiłość centralna jest w punkcie $\mathbf{x} = 0$ styczna do trójwymiarowej podprzestrzeni liniowej rozpiętej na wektorach własnych $\boldsymbol{\varphi}_j$ pierwszego z zagadnień (4.12), odpowiadających bifurkacyjnym wartościom własnym, więc jest wygodnie wprowadzić na rozmaiłości centralnej m -wymiarowy ($m = 3$) wektor $\mathbf{z}(t)$ nowych współrzędnych w sposób następujący:

$$(4.17) \quad \mathbf{x}_t(\ominus) = \sum_{j=1}^m z_j(t) \boldsymbol{\varphi}_j(\ominus) + \mathbf{w}(\ominus, t),$$

gdzie nieznaną funkcją $\mathbf{w}(\ominus, t)$ spełnia warunki wynikające ze wspomnianej styczności rozmaiłości centralnej do układu wektorów $\boldsymbol{\varphi}_j$

$$(4.18) \quad \mathbf{w}(\ominus, 0) = 0, \quad \frac{d\mathbf{w}(\ominus, 0)}{dz} = 0,$$

oraz warunek wynikający z niezmienniczości

$$(4.19) \quad \mathbf{w}(\ominus, t) = \mathbf{w}(\ominus, \mathbf{z}(t)).$$

W punkcie krytycznym bifurkacji $\mathbf{z}(t) = 0$.

Redukcja układu aeroelastycznego na rozmaiłość centralną polega na zbudowaniu operatora rzutowania P o następujących własnościach:

$$(4.20) \quad \begin{aligned} P \mathbf{x}_t(\ominus) &= \mathbf{z}(t), \\ P \mathbf{w}^t(\ominus, \mathbf{z}(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Konstrukcja operatora P jest natychmiastowa, jeżeli założyć, że współrzędne \mathbf{z} spełniają równości

$$(4.21) \quad z_j(t) = \langle \boldsymbol{\psi}_j(\ominus), \mathbf{x}_t(\ominus) \rangle, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie $\boldsymbol{\psi}_j$ są wektorami własnymi drugiego z zagadnień (4.12). Wynika stąd, że

$$(4.22) \quad \langle \psi_j(\ominus), w(\ominus, z(t)) \rangle = 0, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, m.$$

Operacja rzutowania ma postać:

$$(4.23) \quad \langle \psi_j(\ominus), \dot{x}_t(\ominus) \rangle = \langle \psi_j(\ominus), \mathcal{L}x_t(\ominus) + \mathcal{R}x_t(\ominus) \rangle, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, m.$$

Wprowadzie przy definiowaniu operatora sprzężonego \mathcal{L}^* za pomocą iloczynu zewnętrznego (4.11) wystarczyło założenie, że działa on na funkcje z przestrzeni C^- i C^+ , to jednak teraz trzeba dopuścić w charakterze argumentów również funkcje nieciągłe (ale ograniczone) w punkcie $\ominus = 0$. Bez tego uzupełnienia nie byłaby prawdziwa równość:

$$\langle \psi_j(\ominus), \mathcal{L}x_t(\ominus) + \mathcal{R}x_t(\ominus) \rangle = \langle \psi_j(\ominus), \mathcal{L}x_t(\ominus) \rangle + \langle \psi_j(\ominus), \mathcal{R}x_t(\ominus) \rangle.$$

Po wykorzystaniu związków (4.17), (4.21), (4.22) oraz równości (dla $j = 1, 2, \dots, m$):

$$\langle \psi_j(\ominus), \dot{x}_t(\ominus) \rangle = \dot{z}_j(t),$$

$$\langle \psi_j(\ominus), \mathcal{L}x_t(\ominus) \rangle = \lambda_j z_j(t),$$

$$\langle \psi_j(\ominus), \mathcal{R}x_t(\ominus) \rangle = \bar{\Psi}_j^T(0) h_0(z, w),$$

równanie (4.23) przekształca się do postaci

$$(4.24) \quad \dot{z} = \Lambda z + \bar{\Psi}^T(0) h_0(z, w),$$

gdzie Λ oznacza diagonalną macierz złożoną z wartości własnych $i\omega_0, -i\omega_0, 0$, a macierz $\bar{\Psi}$ jest zbudowana z odpowiadających im wektorów własnych ψ_j ($j = 1, 2, \dots, m$). Nie jest to jeszcze ostateczna postać równania na rozmaności centralnej, ponieważ jego prawa strona zawiera nieznaną funkcję $w(0, z)$ jako jeden z argumentów funkcji h_0 :

$$(4.25) \quad h_0(z, w) = h(x_t(0)) = h\left(\sum_{j=1}^m z_j(t) \varphi_j(0) + w(0, z)\right),$$

gdzie funkcja wektorowa h jest zdefiniowana wzorem (4.7).

Funkcja wektorowa $w(\Theta, z(t))$, o wymiarze $2N+1$, odgrywa kluczową rolę, ponieważ wyznacza rozmaitość centralną. Równanie różniczkowo-całkowe dla funkcji w otrzymuje się po wstawieniu do równania (4.8) założonej postaci rozwiązania (4.17):

$$(4.26) \quad \dot{w} - \mathcal{L}w = \begin{cases} -\sum_{j=1}^m \bar{\psi}_j^T(0) h_0(z, w) \varphi_j(\Theta), & \text{dla } -\infty < \Theta < 0, \\ -\sum_{j=1}^m \bar{\psi}_j^T(0) h_0(z, w) \varphi_j(0) + h_0(z, w), & \text{dla } \Theta = 0. \end{cases}$$

Znając funkcję $w(\Theta, z(t))$ można wyznaczyć funkcję wektorową $h_0(z, w)$, a tym samym w sposób jawny wyznaczyć wyraz nieliniowy po prawej stronie równania (4.24), które tym samym staje się poszukiwanym, zredukowanym na rozmaitość centralną równaniem flatteru (4.8). Równanie na rozmaitości centralnej jest już równaniem różniczkowym zwyczajnym, niezależnym od argumentu Θ , podczas gdy równanie dla funkcji w pozostaje równaniem różniczkowo-całkowym. W dalszym ciągu będzie poszukiwane tylko asymptotyczne rozwiązanie równania (4.26), co oznacza ich niezależność od warunków początkowych (w przeciwnym przypadku trzeba by w chwili początkowej zadać funkcję w w całym przedziale określoności $\Theta \in (-\infty, 0]$ i w zasadzie procedura wyznaczania funkcji w byłaby równoważna rozwiązaniu pierwotnego układu nieliniowych równań różniczkowo-całkowych). Ponieważ funkcja w spełnia warunek ortogonalności (4.22), więc również prawa strona równania (4.24) musi być ortogonalna do układu wektorów ψ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) (4.14), w sensie iloczynu zewnętrznego (4.11). Jak łatwo sprawdzić, jest tak zawsze.

Niech b oznacza prawą stronę równania (4.26). Na podstawie wzoru (4.11) definiującego iloczyn zewnętrzny, oraz drugiej z własności (4.13) można napisać:

$$(4.27) \quad \langle \psi_k, b \rangle = -\sum_{j=1}^m \bar{\psi}_j^T(0) h_0(z, w) \langle \psi_k, \varphi_j \rangle + \bar{\psi}_k^T(0) h_0(z, w) = 0,$$

dla dowolnego $k = 1, 2, \dots, m$.

5. Algorytm redukcji na rozmaitość centralną – aproksymacja potęgowa

Z punktu widzenia zastosowań praktycznych potrzebny jest efektywny algorytm pozwalający rozwiązać równanie (4.26), a tym samym wyznaczyć funkcję $w(\ominus, z(t))$ i za jej pomocą otrzymać jawną postać równania na rozmaitości centralnej (4.24). Niestety, prostota zapisu równania (4.26) jest tylko pozorna. Po pierwsze, funkcja w nie zależy od czasu w sposób jawny, ale poprzez współrzędne z . Zatem do obliczenia pochodnej czasowej \dot{w} potrzebna jest znajomość pochodnej \dot{z} i z tego powodu równania (4.24) i (4.26) nie są niezależne. Dodatkowo występuje sprzężenie tych równań poprzez prawe strony. Po drugie, równanie (4.26) jest równaniem w przestrzeni funkcyjnej C^- i w tej przestrzeni musi być znalezione rozwiązanie, a dopiero potem można podstawić $\ominus = 0$ i wyznaczyć funkcję wektorową $h_0(z, w)$.

W pracy zastosowano metodę rozwinięć w szeregi potęgowe wielu zmiennych, powszechnie stosowaną w teorii bifurkacji. Do równań różniczkowo-całkowych była już ona stosowana, ale w dość ograniczonym zakresie [15]. Po pierwsze, analizowane w pracy [15] równanie (o dwóch stopniach swobody) było na tyle proste, że pozwalało na wyprowadzenie wszystkich zależności w postaci analitycznej. Po drugie, za cel postawiono sobie tylko obliczenie pierwszego nieliniowego wyrazu (drugiego rzędu). W tym przypadku nie było potrzebne rozwijanie (unfolding) względem parametru bifurkacyjnego (4.2) i wystarczyło podstawić $\mu = 0$. Ponadto, proces obliczeniowy przebiegał jeszcze poza punktami rezonansowymi (więcej szczegółów w dalszej części rozdziału) i nie występował problem zapewnienia ortogonalności rozwiązania do układu wektorów ψ_j ($j = 1, 2, \dots, m$).

Rozwiązanie równania (4.25) będzie poszukiwane w postaci szeregu potęgowego względem zmiennych z , ze współczynnikami w postaci macierzy funkcyjnych od argumentu \ominus . Na mocy związków (4.18), szereg ten musi zaczynać się od wyrazu rzędu drugiego

$$(5.1) \quad w(\ominus, z) = \sum_{\mu \geq 2} \frac{1}{\mu!} W_{\mu}(\ominus) z^{\mu}(t),$$

gdzie symbol z^{μ} oznacza

$$z^{\mu} = \left\{ z_1^{\mu_1} \cdot z_2^{\mu_2} \dots z_m^{\mu_m} \right\}, \quad \sum_{j=1}^m \mu_j = \mu, \quad \mu_j \geq 0.$$

Liczba składowych wektora z^μ rośnie bardzo szybko ze wzrostem liczby wyrazów szeregu i jest równa liczbie $c_{\mu,m}$ m -składnikowych kompozycji liczby μ

$$(5.2) \quad c_{\mu,m} = \binom{m+\mu-1}{\mu-1}.$$

Prostokątne macierze $W_\mu(\ominus)$ są zbudowane z $2N+1$ -wymiarowych wektorów $w_{\mu k}(\ominus)$

$$(5.3) \quad W_\mu(\ominus) = [\dots \vdots w_{\mu k}(\ominus) \vdots \dots],$$

gdzie $k = 1, 2, \dots, c_{\mu,m}$. Po wstawieniu szeregu (5.1) do wzoru (4.17) otrzymuje się zwartą postać rozwinięcia na rozmaitości centralnej

$$(5.4) \quad \mathbf{x}(t + \ominus) = \sum_{\mu \geq 1} \frac{1}{\mu!} W_\mu(\ominus) z^\mu(t),$$

w którym pierwszy współczynnik jest macierzą zbudowaną z m wektorów własnych pierwszego z zagadnień (4.12):

$$(5.5) \quad W_1(\ominus) = [\varphi_1(\ominus) \vdots \dots \vdots \varphi_k(\ominus) \vdots \dots \vdots \varphi_m(\ominus)].$$

Założono, że istnieje rozwinięcie potęgowe funkcji nieliniowej $f(\mathbf{x})$ w równaniu flatteru (4.4):

$$(5.6) \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{\nu \geq 2} \frac{1}{\nu!} F_\nu \mathbf{x}^\nu,$$

gdzie $\mathbf{x}^\nu = \{x_1^{\nu_1} \cdot x_2^{\nu_2} \dots x_{2N+1}^{\nu_{2N+1}}\}$, $\sum_{j=1}^{2N+1} \nu_j = \nu$, $\nu_j \geq 0$. Pozwala to na zapisanie funkcji

nieliniowej $h_0(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ (4.25) w postaci jednego szeregu

$$(5.7) \quad h_0(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \sum_{\nu \geq 2} \frac{1}{\nu!} H_{0\nu} \mathbf{z}^\nu,$$

którego wyrazy, jak się za chwilę okaże, muszą być wyznaczane na przemian ze współczynnikami $W_\mu(\ominus)$, tak że nie ma potrzeby poszukiwania analitycznej postaci współczynników $H_{0\nu}$.

Można teraz przekształcić równanie (4.26) do postaci szeregów potęgowych. Różniczkowanie funkcji względem czasu daje wyrażenie

$$\dot{w} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial w}{\partial z_j} \dot{z}_j,$$

w którym pochodne \dot{z}_j na rozności centralnej można zastąpić związkiem (4.24):

$$\dot{w} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial w}{\partial z_j} z_j + \sum_{j=1}^m \left(\bar{\psi}_j^T(0) h_0(z) \right) \frac{\partial w}{\partial z_j}.$$

Po różniczkowaniu szeregu (5.1) względem \dot{z}_j można otrzymać pochodne cząstkowe funkcji w w zależności od zmiennych z :

$$\frac{\partial w}{\partial z_j} = \sum_{\mu \geq 2} \frac{\mu_j}{\mu!} W_{\mu}(\ominus) z^{\mu - \delta_j},$$

gdzie symbol $z^{\mu - \delta_j}$ ma następujące znaczenie:

$$z^{\mu - \delta_j} = \left\{ z_1^{\mu_1} \dots z_{j-1}^{\mu_{j-1}} \cdot z_j^{\mu_j - 1} \cdot z_{j+1}^{\mu_{j+1}} \dots z_m^{\mu_m} \right\}.$$

Po wykorzystaniu powyższych związków otrzymuje się ostatecznie wyrażenie na pochodną czasową funkcji w w postaci szeregu

$$\dot{w} = \sum_{\mu \geq 2} \frac{1}{\mu!} W_{\mu}(\ominus) \Lambda_{\mu} z^{\mu} + \sum_{j=1}^m \left(\bar{\psi}_j^T(0) h_0(z) \right) \frac{\partial}{\partial z_j} \sum_{\mu \geq 2} \frac{1}{\mu!} W_{\mu}(\ominus) z^{\mu},$$

w którym elementy diagonalnej macierzy Λ_{μ} są dane wzorem

$$\left(\Lambda_{\mu} \right)_{kk} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu_j^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, c_{\mu, m}.$$

Liczby $\mu_j^{(k)}$ odpowiadają k -tej kompozycji liczby μ (k -tej składowej wektora z^{μ}). Można teraz szeregi dla \dot{w} i h_0 (5.7) wstawić do równania (4.26) i otrzymać równanie dla funkcji w w postaci szeregów potęgowych

$$(5.8) \quad \sum_{\mu \geq 2} \frac{1}{\mu!} \left(W_{\mu}(\ominus) \Lambda_{\mu} - \mathcal{L} W_{\mu}(\ominus) \right) z^{\mu} = \begin{cases} 0, & \text{dla } -\infty < \ominus < 0, \\ \sum_{\mu \geq 2} \frac{1}{\mu!} H_0_{\mu} z^{\mu}, & \text{dla } \ominus = 0, \end{cases}$$

w którym pierwszy szereg po prawej stronie jest następujący:

$$(5.9) \quad \sum_{\mu \geq 2} \frac{1}{\mu!} \mathbf{R}_\mu(\ominus) \mathbf{z}^\mu = - \sum_{j=1}^m \left(\bar{\mathbf{w}}_j^T(0) \mathbf{h}_0(\mathbf{z}) \right) \frac{\partial}{\partial z_j} \sum_{\nu \geq 1} \frac{1}{\nu!} \mathbf{W}_\nu(\ominus) \mathbf{z}^\nu.$$

Przekształcenia w powyższym wzorze nie zostały celowo doprowadzone do końca, ponieważ prowadzą do bardzo skomplikowanych wyrażeń, praktycznie bezużytecznych już dla $\mu \geq 3$. Obliczenia i tak muszą być przeprowadzone z pomocą komputera, a z punktu widzenia algorytmizacji obliczeń, wygodniej jest operacje na szeregach (różniczkowanie, mnożenie itp.) przeprowadzać bezpośrednio, zamiast korzystać z cząstkowych wyników analitycznych.

Z porównania wskaźników współczynników $\mathbf{W}_\mu(\ominus)$, występujących po obu stronach równania (5.8) w wyrazach tego samego rzędu wynika, że wskaźniki po stronie prawej są zawsze mniejsze od wskaźnika po stronie lewej. W związku z tym, układ można rozwiązywać w sposób rekurencyjny, kolejno dla $\mu = 1, 2, \dots$, aż do dowolnie wybranego wykładnika. W pierwszym kroku, dla $\mu = 2$, po prawej stronie występuje znana macierz $\mathbf{W}_1(\ominus)$ (5.5), zbudowana z wektorów własnych operatora \mathcal{L} . Podobnie pierwszy współczynnik \mathbf{H}_{02} szeregu (5.7) zależy tylko od $\mathbf{W}_1(0)$.

W każdym kroku algorytmu trzeba rozwiązać równanie macierzowe dla macierzy funkcyjnej $\mathbf{W}_\mu(\ominus)$:

$$(5.10) \quad \mathbf{W}_\mu(\ominus) \Lambda_\mu - \mathcal{L} \mathbf{W}_\mu(\ominus) = \mathbf{R}_\mu(\ominus) + \begin{cases} 0, & \text{dla } -\infty < \ominus < 0, \\ \mathbf{H}_{0\mu}, & \text{dla } \ominus = 0. \end{cases}$$

Równanie to można zapisać oddzielnie dla każdej z kolumn macierzy $\mathbf{W}_\mu(\ominus)$:

$$(5.11) \quad \sigma_k \mathbf{w}_{\mu k}(\ominus) - \mathcal{L} \mathbf{w}_{\mu k}(\ominus) = \mathbf{r}_{\mu k}(\ominus) + \begin{cases} 0, & \text{dla } -\infty < \ominus < 0, \\ \mathbf{h}_{0\mu k}, & \text{dla } \ominus = 0, \end{cases}$$

gdzie $k = 1, 2, \dots, c_{\mu, m}$ numeruje kolejne kolumny macierzy (kompozycje μ). Inaczej mówiąc, dla każdego k równanie (5.11) odpowiada innej kompozycji liczby μ . Zatem w celu wyznaczenia jednej macierzy $\mathbf{W}_\mu(\ominus)$ trzeba rozwiązać $c_{\mu, m}$ równań typu (5.11). Liczba σ_k jest równa

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu_j^{(k)},$$

gdzie liczby $\mu_j^{(k)}$ są potęgami współrzędnych z_j w k -tej kompozycji μ .

O jednoznaczności rozwiązania decydują wartości własne operatora lewej strony równania (5.11)

$$\mathcal{B} \mathbf{w} = \sigma_k \mathbf{w} - \mathcal{L} \mathbf{w}.$$

Operatory \mathcal{B} i \mathcal{L} mają te same wektory własne. W związku z tym zagadnienie własne dla operatora \mathcal{B} ma postać:

$$\mathcal{B} \boldsymbol{\varphi} = (\sigma_k - \lambda) \boldsymbol{\varphi}.$$

Wynika stąd, że jeżeli dla pewnej k -tej kompozycji i pewnej wartości własnej λ_l ma miejsce równość

$$(5.12) \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu_j^{(k)} - \lambda_l = 0, \quad 1 \leq l \leq m,$$

wówczas istnieje niezerowe rozwiązanie równania jednorodnego

$$\sigma_k \mathbf{w}_h(\ominus) - \mathcal{L} \mathbf{w}_h(\ominus) = 0,$$

które jednak nie wpływa na jednoznaczność rozwiązania pełnego równania, ponieważ nie jest ortogonalne do funkcji ψ_k . Warunek (5.12) nosi w literaturze nazwę warunku rezonansowego.

Równanie (5.11) trzeba rozwiązywać w dwóch etapach. Najpierw rozwiązywane jest równanie różniczkowe względem \ominus w przedziale $\ominus \in (-\infty, 0]$

$$(5.13) \quad \sigma_k \mathbf{w}_{\mu k}(\ominus) - \frac{d}{d\ominus} \mathbf{w}_{\mu k}(\ominus) = \mathbf{r}_{\mu k}(\ominus).$$

Ze związku (5.9) oraz z budowy macierzy $\mathbf{W}_1(\ominus)$ (5.5) wynika, że dla $\mu = 2$ prawa strona tego równania jest kombinacją liniową wektorów własnych mających postać funkcji wykładniczych (2.25). Co więcej, rozwiązanie dla dowolnego μ wchodzi do prawej strony równania dla $\mu + 1$. Wynika stąd, że prawa strona równania (5.11) zawsze jest kombinacją liniową elementarnych wyrazów w postaci:

$$(5.14) \quad \mathbf{r}^{(e)}(\ominus) = \mathbf{r}_0^{(e)} \ominus^p e^{\beta \ominus},$$

gdzie $p \geq 0$, a β jest liczbą urojoną, przyjmującą wartości równe całkowitym wielokrotnościom wartości własnych $\pm i\omega_0$ lub wartość zerową. Wystarczy zatem zbadać szczegółowo tylko uproszczoną postać równania (5.11) z prawą stroną w elementarnej postaci (5.14)

$$(5.15) \quad \sigma_k \mathbf{w}^{(e)}(\ominus) - \frac{d \mathbf{w}^{(e)}(\ominus)}{d\ominus} = \mathbf{r}^{(e)}(\ominus).$$

Szczególne rozwiązanie elementarne $\mathbf{w}^{(e)}(\ominus)$ ma postać następującą

$$(5.16) \quad \mathbf{w}^{(e)}(\ominus) = \begin{cases} \mathbf{r}_0^{(e)} e^{\beta \ominus} \sum_{j=0}^p \frac{p!}{j!(\sigma_k - \beta)^{p-j+1}} \ominus^j, & \text{dla } \sigma_k \neq \beta, \\ -\mathbf{r}_0^{(e)} e^{\beta \ominus} \frac{1}{p+1} \ominus^{p+1}, & \text{dla } \sigma_k = \beta. \end{cases}$$

Ogólne rozwiązanie równania (5.15) jest sumą rozwiązania szczególnego (5.16) oraz rozwiązania

$$\mathbf{w}_h(\ominus) = \mathbf{w}_{h0} e^{\sigma_k \ominus}$$

równania jednorodnego

$$\sigma_k \mathbf{w}_h(\ominus) - \frac{d \mathbf{w}_h(\ominus)}{d\ominus} = 0.$$

Następny etap algorytmu to wyznaczenie wektora \mathbf{w}_{h0} . Ogólne rozwiązanie równania (5.11) jest sumą dwóch wektorów

$$(5.17) \quad \mathbf{w}_{\mu k}(\ominus) = \mathbf{w}_{\mu k}^{(r)}(\ominus) + \mathbf{w}_{h0} e^{\sigma_k \ominus},$$

gdzie $\mathbf{w}_{\mu k}^{(r)}(\ominus)$ jest pełnym rozwiązaniem szczególnym, czyli kombinacją liniową szczególnych rozwiązań elementarnych (5.16). Po wstawieniu sumy (5.17) do równania (5.11) dla $\ominus = 0$, otrzymuje się układ liniowych równań algebraicznych dla składowych wektora \mathbf{w}_{h0} :

$$(5.18) \quad \left(\sigma_k \mathbf{I} - \mathbf{D} - \int_{-\infty}^0 \mathbf{G}(-\tau, 0) e^{\sigma_k \tau} d\tau \right) \mathbf{w}_{h0} = \mathbf{r}_{\mu k}(0) + \mathbf{h}_{0\mu k} - \sigma_k \mathbf{w}_{\mu k}^{(r)}(0) + \mathcal{L} \mathbf{w}_{\mu k}^{(r)}(0).$$

Z postaci operatora \mathcal{L} (4.9) oraz elementarnych rozwiązań (5.16) wynika, że jedynymi miejscami występowania macierzy odpowiedzi impulsowych układu są całki w ostatnim wyrazie po prawej stronie (5.18)

$$J(p, \beta) = \int_{-\infty}^0 \frac{d^r G(-\tau, 0)}{du^r} \tau^p e^{\beta\tau} d\tau,$$

które można przedstawić za pomocą pochodnych macierzy transmitancji (4.16)

$$(5.19) \quad \int_{-\infty}^0 \frac{d^r G(-\tau, 0)}{du^r} \tau^j e^{\beta\tau} d\tau = \frac{\partial^{r+j} A(\beta; U_0)}{\partial U^r \partial \beta^j}.$$

Jest to bardzo istotny rezultat, z którego wynika, że nie ma potrzeby wyznaczania macierzy G odpowiedzi impulsowych układu w postaci jawnej. Ponadto cały wpływ historii ruchu, który w równaniu flatteru był obecny w całości splotu, w otoczeniu punktu bifurkacji (asymptotycznie) redukuje się do pochodnych macierzy transmitancji, która odpowiada ruchowi harmonicznemu. Jak się wkrótce okaże, nie jest to wynik zaskakujący, ponieważ na rozmaitości centralnej drgania cyklu granicznego są harmoniczne, a odstępstwo od tej postaci dla współrzędnych fizycznych wynika z nieliniowości transformacji (5.4).

Układ równań algebraicznych (5.18) ma zawsze rozwiązanie dla wszystkich $\sigma_k \neq \lambda_l$, gdzie λ_l jest dowolną z bifurkacyjnych wartości własnych operatora \mathcal{L} . W przeciwnym wypadku, tzn. dla $\sigma_k = \lambda_l$, macierz układu równań jest osobliwa, a warunkiem istnienia rozwiązania jest ortogonalność prawej strony do układu wektorów ψ_{0j} ($j = 1, 2, \dots, m$) (4.14), w sensie iloczynu skalarnego w przestrzeni \mathbb{R}^{2N+1} . Okazuje się, że warunek ten jest zawsze spełniony, co jednak trzeba wykazać.

Niech wektor $v(\ominus)$ oznacza prawą stronę równania (5.11)

$$(5.20) \quad v(\ominus) = r_{\mu k}(\ominus) + \begin{cases} 0, & \text{dla } -\infty < \ominus < 0, \\ h_{0\mu k}, & \text{dla } \ominus = 0. \end{cases}$$

Przed wszystkim, z warunku ortogonalności (4.27) prawej strony równania (4.26) do układu wektorów własnych operatora \mathcal{L}^* (w sensie iloczynu zewnętrznego (4.11)) wynika, że

$$\langle \psi_j, v \rangle = 0,$$

a także

$$(5.21) \quad \langle \psi_j, \sigma_k w_{\mu k}^{(r)} - \mathcal{L} w_{\mu k}^{(r)} \rangle = 0, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, m.$$

Zatem iloczyn skalarny (ψ_{0j}, v_0) w przestrzeni R^{2N+1} , gdzie $v_0 = v(0)$, można na podstawie

(4.11) zapisać w postaci całki

$$(5.22) \quad (\psi_{0j}, v_0) = \int_{-\infty}^0 \int_0^\eta \psi_j^T(\xi - \eta) G(-\eta; u) v(\xi) d\xi d\eta.$$

Niech wektor b_0 oznacza prawą stronę równania (5.18)

$$b_0 = r_{\mu k}(0) + h_{0\mu k} - \sigma_k w_{\mu k}^{(r)}(0) + \mathcal{L} w_{\mu k}^{(r)}(0).$$

Po uwzględnieniu związków (5.20), (5.21) i (5.22) oraz faktu, że $w_{\mu k}^{(r)}(\ominus)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania (5.11), poszukiwany iloczyn skalarny można przekształcić w sposób następujący:

$$\begin{aligned} (\psi_{0j}, b_0) &= (\psi_{0j}, v_0) - (\psi_{0j}, \sigma_k w_{\mu k}^{(r)}(0) - \mathcal{L} w_{\mu k}^{(r)}(0)) = \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_0^\eta \psi_j^T(\xi - \eta) G(-\eta; u) (\sigma_k w_{\mu k}^{(r)}(\xi) - \mathcal{L} w_{\mu k}^{(r)}(\xi)) d\xi d\eta \\ &\quad - (\psi_{0j}, \sigma_k w_{\mu k}^{(r)}(0) - \mathcal{L} w_{\mu k}^{(r)}(0)) = \\ &= -(\sigma_k w_{\mu k}^{(r)} - \mathcal{L} w_{\mu k}^{(r)}) = 0. \end{aligned}$$

Zatem ostatecznie $(\psi_{0j}, b_0) = 0$, dla $j = 1, 2, \dots, m$, co dowodzi istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania (5.18). Do rozważenia pozostaje jeszcze problem techniczny wyboru właściwego rozwiązania spośród nieskończonej ich liczby, w przypadku $\sigma_k = \lambda_j$.

Rozwiązaniem układu algebraicznych równań liniowych (5.18) jest pewien wektor \tilde{w}_{h0} , który ze względu na osobliwość macierzy układu równań zależy od użytej procedury numerycznej. Bezpośrednie podstawienie tego wektora w miejsce wektora w_{h0} we wzorze (5.17) nie zapewni wymaganej ortogonalności

$$(5.23) \quad \langle \Psi_j, \mathbf{w}_{\mu k} \rangle = 0, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, m.$$

Wiadomo jednak, że jedyną składową wektora $\tilde{\mathbf{w}}_{h0}$ nie spełniającą tego warunku jest wektor własny odpowiadający wartości własnej λ_l , pomnożony przez dowolną stałą α . W związku z tym można napisać

$$\tilde{\mathbf{w}}_{h0} = \mathbf{w}_{h0} + \alpha \varphi_{0l},$$

czyli pełne poszukiwane rozwiązanie (5.17) ma postać:

$$\mathbf{w}_{\mu k}(\ominus) = \mathbf{w}_{\mu k}^{(r)}(\ominus) + \tilde{\mathbf{w}}_{h0} e^{\lambda_l \ominus} - \alpha \varphi_{0l} e^{\lambda_l \ominus}.$$

Ostatni składnik tej sumy nie spełnia warunku (5.23) tylko dla $j = l$, co pozwala na wyznaczenie stałej α :

$$\alpha = \langle \Psi_l, \mathbf{w}_{\mu k}^{(r)}(\ominus) + \tilde{\mathbf{w}}_{h0} e^{\lambda_l \ominus} \rangle.$$

Z dotychczasowych rozważań wynika, że dla obliczenia stałej α będzie potrzebne obliczenie iloczynu skalarnego $\langle \Psi_j, \mathbf{u}^{(k)}(\ominus) \rangle$, w którym

$$\mathbf{u}^{(k)}(\ominus) = \mathbf{u}_0^{(k)} \ominus^k e^{\beta \ominus},$$

dla $k \geq 0$, $\text{Re}(\beta) = 0$.

Dla $k = 0$ wzór (4.11) daje:

$$\langle \Psi_j, \mathbf{u}^{(0)}(\ominus) \rangle = \langle \Psi_{0j}, \mathbf{u}_0^{(0)} \rangle - \bar{\Psi}_0^T \frac{A(\beta) - A(\lambda_j)}{\beta - \lambda_j} \mathbf{u}_0^{(0)},$$

gdzie $A(\beta)$ i $A(\lambda_j)$ są macierzami transmitancji (4.16), odpowiednio dla argumentów $s = \beta$ i $s = \lambda_j$. W szczególnym przypadku, dla $\beta = \lambda_j$:

$$\lim_{\beta \rightarrow \lambda_j} \langle \Psi_j, \mathbf{u}^{(0)}(\ominus) \rangle = \langle \Psi_{0j}, \mathbf{u}_0^{(0)} \rangle - \bar{\Psi}_0^T \frac{dA(\beta)}{d\beta} \mathbf{u}_0^{(0)}.$$

Dla $k \neq 0$, po uwzględnieniu (5.19), otrzymuje się związek

$$\left\langle \psi_j, u^{(k)}(\ominus) \right\rangle = -\frac{d^k}{d\beta^k} \left(\frac{1}{\overline{\psi}_0^T} \frac{A(\beta) - A(\lambda_j)}{\beta - \lambda_j} u_0^{(k)} \right),$$

który pozwala na wyprowadzenie wzoru rekurencyjnego dla $k > 0$

$$\left\langle \psi_j, u^{(k)}(\ominus) \right\rangle = -\frac{1}{\beta - \lambda_j} \left(\frac{1}{\overline{\psi}_0^T} \frac{d^k A(\beta)}{d\beta^k} u_0^{(k)} + k \left\langle \psi_j, u^{(k-1)}(\ominus) \right\rangle \right).$$

Dla $\beta = \lambda_j$ powyższy wzór redukuje się do postaci następującej:

$$\lim_{\beta \rightarrow \lambda_j} \left\langle \psi_j, u^{(k)}(\ominus) \right\rangle = -\frac{1}{k+1} \frac{1}{\overline{\psi}_0^T} \frac{d^{k+1} A(\beta)}{d\beta^{k+1}} u_0^{(k)}.$$

Sukcesywne wyznaczanie macierzy $W_\mu(\ominus)$, kolejno dla $\mu = 2, 3, \dots$, pozwala na budowanie szeregu (5.4) i jednocześnie obliczanie współczynników szeregu (4.25) dla $h_0(z, w)$. Znając te współczynniki, można obliczyć współczynniki poszukiwanego równania na rozmaitości centralnej (4.24), które ostatecznie przyjmuje postać:

$$(5.24) \quad \dot{z}(t) = \Lambda z(t) + \sum_{\mu \geq 2} \frac{1}{\mu!} F_\mu^{(z)} z^\mu,$$

gdzie Λ , jak poprzednio, oznacza diagonalną macierz zbudowaną z bifurkacyjnych wartości własnych $i\omega_0, -i\omega_0, 0$, natomiast $F_\mu^{(z)}$ są prostokątnymi macierzami utworzonymi ze znanych już liczb zespolonych.

Wszystkie operacje na szeregach wielu zmiennych, niezbędne do obliczenia elementów macierzy $F_\mu^{(z)}$, dają się w miarę prosto zaprogramować. Jedynym mankamentem jest fakt, że prawa strona równania (5.8) jest iloczynem (5.9) dwóch szeregów, co zmusza do przechowywania w pamięci komputera wszystkich wyrazów szeregu (5.4) w trakcie całego procesu obliczeń. Rozmiar tego obszaru pamięci zwiększa się bardzo szybko ze wzrostem liczby wyrazów szeregu, ponieważ rośnie nie tylko liczba składowych wektorów z^μ , ale także liczba współczynników funkcji wykładniczych (5.16).

Przedstawiona tu metoda redukcji na rozmaitość centralną, prowadząca od równania różniczkowo-całkowego (4.8) do równania różniczkowego zwyczajnego (5.24), jest dość złożona z punktu widzenia obliczeń numerycznych. Dla takich algorytmów ważnym zadaniem jest sprawdzenie poprawności napisanego kodu komputerowego (programu obliczeniowego).

Zwykle w tym celu wykonuje się obliczenia dla wybranego prostego przypadku, dla którego jest dostępne albo rozwiązanie w postaci analitycznej, albo wyniki obliczeń wykonane inną metodą. Niestety, dla równań różniczkowo-całkowych można w ten sposób sprawdzić co najwyżej poprawność obliczania współczynnika $F_2^{(z)}$ [15], ponieważ brak w literaturze odpowiednich przykładów. Istnieje natomiast inny sposób, oparty o pewną ciekawą własność rozpatrywanych równań, przedstawioną w cytowanej już pracy [15]. Otóż jeżeli w badanym układzie równań różniczkowo-całkowych wszystkie całki mają postać

$$(5.25) \quad \int_{-\infty}^0 \mathfrak{z}(t+s)Q(-s)ds$$

i funkcja Q jest rozwiązaniem pewnego skalarnego równania różniczkowego rzędu n o stałych współczynnikach, to po wprowadzeniu dla każdej takiej całki n nowych zmiennych Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$,

$$(5.26) \quad Y_i(t) = \int_{-\infty}^0 \mathfrak{z}(t+s) \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} Q(-s) ds,$$

można badany układ sprowadzić do układu większej liczby równań różniczkowych zwyczajnych. Metoda redukcji na rozmaiłość centralną dla równań różniczkowych zwyczajnych jest dobrze znana [26] i wystarczy teraz wybrać odpowiedni układ równań różniczkowo-całkowych, dający się sprowadzić do równań zwyczajnych i porównać wyniki obu metod. Pozytywny wynik takiego testu przedstawiono w pracy [36].

6. Bifurkacja Hopfa, forma normalna i cykl graniczny

Układ równań różniczkowych (5.24) opisujący ruch asymptotyczny na rozmaiłości centralnej ma szczególną postać, wynikającą ze sposobu rozwinięcia (unfolding) rozmaiłości centralnej, polegającym na włączeniu prędkości (4.2) do zbioru zmiennych niezależnych. W efekcie pojawiła się zerowa wartość własna operatora \mathcal{L} (4.9) oraz odpowiadające jej wektory własne φ_3 i ψ_3 , które mają tylko ostatnią składową różną od zera. Z kolei wektor prawej strony (4.10) równania (4.8) ma zerową ostatnią składową, co w porównaniu ze wzorem (4.17) powoduje, że $z_3 = u$, a układ równań różniczkowych na rozmaiłości centralnej ma następującą budowę (przy ograniczeniu sumy we wzorze (5.24) do L wyrazów):

$$(6.1) \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{cases} = \begin{bmatrix} i\omega_0 + \tilde{P}_1^{(L-1)}(u) & 0 \\ 0 & -i\omega_0 + \tilde{P}_2^{(L-1)}(u) \end{bmatrix} \begin{cases} z_1(t) \\ z_2(t) \end{cases} + \sum_{\mu=2}^L \frac{1}{\mu!} \tilde{D}_\mu^{(L-\mu)}(u) \begin{cases} z_1 \\ z_2 \end{cases}^\mu,$$

gdzie $\tilde{P}_1^{(L-1)}(u)$ i $\tilde{P}_2^{(L-1)}(u)$, jak również elementy macierzy $\tilde{D}_\mu^{(L-\mu)}(u)$ są wielomianami względem u , o stopniach odpowiednio $L-1$ i $L-\mu$. Wielomiany \tilde{P}_1 i \tilde{P}_2 mają współczynniki przy zerowej potędze u równe zeru, tzn. $\tilde{P}_1^{(L-1)}(0) = 0$ i $\tilde{P}_2^{(L-1)}(0) = 0$. Widać stąd, że sposób rozwinięcia (unfolding) rozmaiłości centralnej, niezbędny dla badania układu w skończonym przedziale zmienności u , jest jednocześnie prostym narzędziem efektywnego wyznaczania rozwinięć potęgowych względem tego parametru wszystkich występujących w równaniu (6.1) współczynników.

Hopf [4] pokazał, że równanie (6.1) ma rodzinę rozwiązań okresowych (cykli granicznych), sparametryzowaną wartościami u . Założeniem generującym tę ciekawą własność jest jedynie para sprzężonych urojonych wartości własnych macierzy części liniowej równania dla $u = 0$. O wyrazie nieliniowym wystarczy założyć, że ma L ciągłych pochodnych względem z_1 i z_2 , do rzędu $L+2$ włącznie, co w rozpatrywanym przypadku jest spełnione. W praktyce bowiem nie jest możliwe wyznaczenie wszystkich wyrazów nieskończonego szeregu występującego po prawej stronie równania (5.24). Zawsze wyznacza się skończoną ich liczbę – w przeciwnym wypadku trzeba by założyć analityczność funkcji nieliniowej (co zresztą zrobił Hopf w swojej oryginalnej pracy). Co więcej, żaden z wyrazów szeregu po prawej stronie równania nie musi być równy zeru, a samo równanie (6.1) nie ma jeszcze symetrii obrotowej, charakterystycznej dla bifurkacji Hopfa.

Sprowadzenie pierwotnego różniczkowo-całkowego równania flatteru (2.7), o wielu stopniach swobody, do układu dwóch równań różniczkowych zwyczajnych (6.1) ma duże znaczenie, ale nie tylko ze względu na znaczną redukcję liczby stopni swobody i uproszczenie typu równań. Od tego momentu cała dalsza analiza wkracza na dobrze zbadany teren klasycznej bifurkacji Hopfa. W szczególności wiadomo, jak bez całkowania równania (6.1) wyznaczyć amplitudę i częstość cyklu granicznego, czyli podstawowe asymptotyczne parametry drugiego, poza stacjonarnym, rozwiązania. Co więcej, wiadomo kiedy dany cykl graniczny jest stabilny, a kiedy nie [10, 38]. Innymi słowy, z punktu widzenia analizy jakościowej wszystko już wiadomo o flatterze nieliniowym, natomiast otrzymanie wyników liczbowych jest sprawą czysto techniczną (choć nie trywialną). Z tego powodu dalsze rozważania ograniczono tylko do niezbędnego minimum.

Układ równań (6.1) można sprowadzić do prostszej postaci, nazywanej formą normalną Poincaré. Okazuje się jednak, że wygodniej jest przekształcać układ trzech równań (5.24), ponieważ jest on układem o stałych współczynnikach, nie wymagającym specjalnego traktowania rozwinięć potęgowych względem parametru bifurkacyjnego u . Ponieważ celem jest modyfikacja tylko części nieliniowej, więc stosuje się tzw. prawie tożsamościową transformację zmiennych, która pozostawia wyraz liniowy równania w niezminionej postaci. Transformacja do nowych zmiennych $\zeta(t)$ jest następująca:

$$(6.2) \quad z(t) = \zeta(t) + \sum_{\nu \geq 2} \frac{1}{\nu!} \tilde{U}_\nu \zeta^\nu(t).$$

Macierzowe współczynniki \tilde{U}_ν wyznacza się z warunku, aby wyzerować możliwie najwięcej współczynników w części nieliniowej nowego układu równań. Z twierdzenia Hartmana-Grobmana wiadomo, że nie można wyzerować wszystkich, bo wówczas nowy układ byłby układem liniowym, a ponieważ bifurkacyjne wartości własne leżą na osi urojonej, więc taka transformacja (zerująca wszystkie współczynniki) nie może istnieć. W literaturze jest znanych kilka sposobów wyznaczania współczynników \tilde{U}_ν , z których dwa szczególnie dobrze nadają się do obliczeń numerycznych. Pierwszy polega na utworzeniu ciągu transformacji (6.2), kolejno dla $\nu = 2, 3, \dots$, przy czym każda z nich zawiera tylko jeden wyraz nieliniowy [37], natomiast sposób drugi wykorzystuje od razu pełny szereg (6.2) i metodę transformacji Liego do obliczania współczynników [26]. W pracy wykorzystano drugi z tych sposobów (opisany w Dodatku), nieco bardziej sformalizowany, ale dający większe możliwości. Wynikiem zastosowania transformacji (6.2) oraz przejścia do współrzędnych biegunowych

$$(6.3) \quad \zeta_1 = r(t)e^{i\theta(t)}, \quad \zeta_2 = \bar{\zeta}_1,$$

jest forma normalna w postaci układu dwóch równań ($\zeta_3 \equiv u$):

$$(6.4a) \quad \frac{dr}{dt} = r \sum_{j=0}^n a_j(u) r^{2j},$$

$$(6.4b) \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \sum_{j=0}^n b_j(u) r^{2j},$$

gdzie $n = [L/2]$, natomiast współczynniki $a_j(u)$ i $b_j(u)$ ($j = 0, \dots, n$) są wielomianami względem u o współczynnikach rzeczywistych (sposób ich wyznaczenia opisano w Dodatku):

$$(6.5) \quad a_j(u) = \sum_{k=0}^{2n} a_{jk} u^k, \quad b_j(u) = \sum_{k=0}^{2n} b_{jk} u^k,$$

przy czym $a_{00} = b_{00} = 0$.

Korzyścią z wykorzystania formy normalnej jest jej symetria obrotowa – równanie dla r nie zależy od θ i może być scałkowane niezależnie. Co więcej, dla znalezienia amplitudy $r = r_H$ cyklu granicznego, wystarczy w równaniu (6.4a) podstawić $dr/dt = 0$ i rozwiązać otrzymane równanie algebraiczne

$$(6.6a) \quad r_H \sum_{j=0}^n a_j(u) r_H^{2j} = 0.$$

Dla każdego u lewa strona równania (6.6a) jest wielomianem względem r_H . Stąd wszystkie możliwe amplitudy cykli granicznych są dodatnimi i rzeczywistymi pierwiastkami tego wielomianu. Istnieją dwie gałęzie rozwiązań, ponieważ zawsze jedną jest rozwiązanie stacjonarne $r_H = 0$. Dla $r = r_H$ (cykl graniczny) prawa strona równania (6.4b) nie zależy od czasu, skąd wynika, że oscylacje cyklu granicznego $\zeta_1 = \zeta_H(t)$ na rozmaitości centralnej są harmoniczne

$$\zeta_H = r_H e^{i\omega_H t}$$

i dla każdej amplitudy r_H odpowiadająca jej częstość ω_H jest dana wzorem

$$(6.6b) \quad \omega_H = \omega_0 + \sum_{j=0}^n b_j(u) r_H^{2j}.$$

Z porównania ze wzorami (D.20) w Dodatku wynika, że funkcje

$$a_0(u) = \sum_{k=1}^{2n} a_{0k} u^k, \quad b_0(u) = \sum_{k=1}^{2n} b_{0k} u^k$$

są rozwinięciami potęgowymi bifurkacyjnych wartości własnych λ_1 i $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ względem parametru u :

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) = \sum_{k=1}^{2n} a_{0k} u^k, \quad \operatorname{Im}(\lambda_1) = \omega_0 + \sum_{k=1}^{2n} b_{0k} u^k.$$

Jeżeli rozwinięcia (6.5) ograniczy się tylko do wyrazów najwyższego rzędu, to równanie (6.6a) przybiera postać

$$(6.7) \quad a_{01} u r_H + a_{10} r_H^3 = 0,$$

z której wynika pierwiastkowy wzrost amplitudy cyklu granicznego w funkcji parametru bifurkacyjnego u (w bezpośrednim otoczeniu punktu bifurkacji):

$$(6.8) \quad r_H = \sqrt{-\frac{a_{01}}{a_{10}} u}.$$

Istnienie formy normalnej w postaci (6.7) wymaga, spełnienia warunków:

$$(6.9) \quad a_{01} \neq 0, \quad a_{10} \neq 0.$$

Jak łatwo sprawdzić, dla przyjętej definicji parametru bifurkacyjnego (ruch stateczny dla $u < 0$)

$$(6.10) \quad a_{01} = \left. \frac{d \operatorname{Re}(\lambda_1)}{du} \right|_{u=0} > 0,$$

w związku z czym cykl graniczny dla $a_{10} < 0$ może istnieć tylko dla $u > 0$ (Rys. 6.1a), natomiast dla $a_{10} > 0$ warunkiem istnienia cyklu granicznego (r_H musi być rzeczywiste) jest nierówność $u < 0$ (Rys. 6.1b). Stabilność cyklu granicznego w otoczeniu punktu bifurkacji można łatwo zbadać za pomocą zlinearyzowanej metody małych zaburzeń. Niech

$$r(t) = r_H + \rho(t), \quad \frac{\rho}{r_H} \ll 1.$$

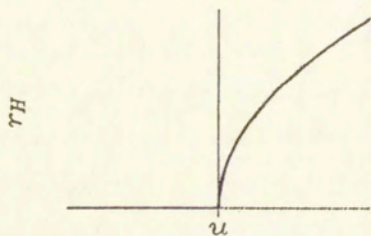
Wówczas równanie (6.4a) przybiera postać

$$\frac{dr}{dt} = (r_H + \rho) \sum_{j=0}^n a_j(u) (r_H + \rho)^{2j},$$

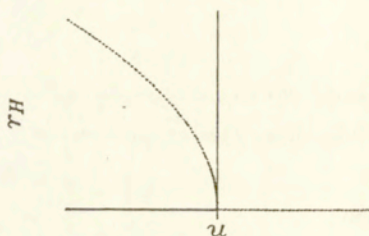
a po uwzględnieniu (6.6a) oraz po linearyzacji wokół $\rho = 0$ daje proste równanie różniczkowe

$$\frac{d\rho}{dt} = -a_0(u)\rho,$$

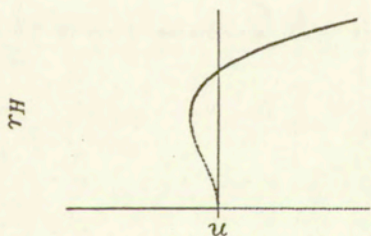
z którego bezpośrednio wynika, że cykl graniczny jest stabilny dla $a_0(u) > 0$, czyli wobec (6.10), dla $u > 0$.



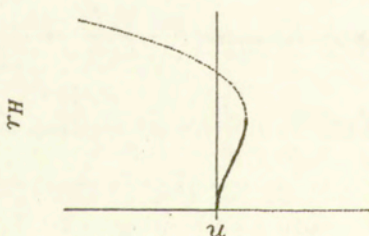
Rys. 6.1a



Rys. 6.1b



Rys. 6.2a



Rys. 6.2b

Uwzględnienie wyższych potęg r_H i u w równaniu (6.6a) prowadzi w pierwszej kolejności do dwóch typów wykresów bifurkacyjnych, przedstawionych na rysunkach 6.2a i 6.2b. Na

każdym z nich występują dwie gałęzie cykli granicznych (poza rozwiązaniem stacjonarnym), rozdzielone punktem, w którym $du/dr_H = 0$. Stabilność tych gałęzi można określić w sposób analogiczny jak poprzednio, badając zaburzenie cyklu w punkcie rozdziału. Linie ciągłe na wspomnianych wykresach odpowiadają ruchom statecznym, natomiast linie przerywane to niestateczne cykle graniczne.

Forma normalna (6.6a) może także generować inne niż pokazane na Rys. 6.1 i 6.2 postacie wykresów bifurkacyjnych. W literaturze wykresy inne niż takie, jak na rysunkach 6.1a i 6.1b, określa się często mianem bifurkacji „zdegenerowanych”, w odróżnieniu od „klasycznej” bifurkacji Hopfa (to znaczy takiej, dla której zachodzą związki (6.9)). Dość liczny zbiór bifurkacji zdegenerowanych przedstawia praca [38], w której wykresy bifurkacyjne w kształcie pokazanym na Rys. 6.2a i 6.2b prezentowane są jako charakterystyczne dla bifurkacji z liczbą parametrów większą niż jeden (w praktyce każdy złożony układ dynamiczny jest wieloparametrowy). Interesującym jest przypadek, kiedy forma normalna (6.6a) nie ma pierwiastków rzeczywistych dodatnich. Oznacza to, że warunek występowania pary urojonych wartości własnych nie jest warunkiem wystarczającym do powstania cyklu granicznego.

Wynika stąd ważny wniosek praktyczny. Fakt istnienia pary urojonych wartości własnych jednoznacznie określa typ bifurkacji (bifurkacja Hopfa), natomiast wyraz nieliniowy determinuje samo wystąpienie cyklu granicznego i sposób jego zależności od parametru bifurkacyjnego. Inaczej mówiąc, jeżeli istnieje para urojonych sprzężonych wartości własnych, to wiadomo, że jeśli w ogóle nastąpi bifurkacja rozwiązania stacjonarnego, to nowe rozwiązanie asymptotycznie będzie miało postać cyklu granicznego. Jednak do określenia zachowania tego cyklu w otoczeniu punktu bifurkacji niezbędna jest znajomość formy normalnej, ponieważ na podstawie szeregu potęgowego występującego po prawej stronie równania (6.1), żadnych wniosków na ten temat wyciągnąć nie można. Współczynniki $a_j(u)$ formy normalnej (6.6a) zależą bowiem od wartości liczbowych elementów macierzy $\tilde{D}_\mu^{(L-\mu)}(u)$, występujących w równaniu (6.1). Warto jednak zwrócić uwagę, że sam fakt występowania w formie normalnej (6.6a) tylko wyrazów o nieparzystych potęgach amplitudy cyklu wynika jedynie z postaci części liniowej wyjściowego układu równań różniczkowych (5.24). W warunku rezonansowym (wzór (D.19) w Dodatku), który decyduje o tym, których wyrazów szeregu nie da się wycelminować, występują tylko wartości własne części liniowej i wykładniki potęg zmiennych niezależnych.

Ważną cechą form normalnych jest ich asymptotyczny charakter. Z analityczności szeregu potęgowego występującego po prawej stronie równania (6.1) nie wynika bowiem analityczność formy normalnej. Zatem szeregi (6.6) mogą, ale nie muszą być zbieżne dla $n \rightarrow \infty$. Dla takich

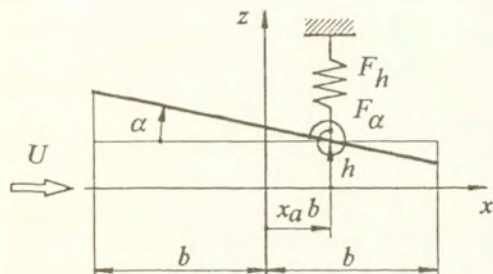
szeregów asymptotycznych ważna jest odpowiedź na pytanie, ile co najwyżej wyrazów szeregu (n) można uwzględnić, aby w zadanym przedziale zmienności parametru bifurkacyjnego (u) błąd wyznaczenia amplitudy cyklu granicznego nie przekroczył zadanej wartości. Niestety, pytanie to pozostaje nadal bez odpowiedzi. Z punktu widzenia analizy jakościowej wystarczy znajomość najmniejszej liczby wyrazów szeregu, które trzeba uwzględnić, aby odrzucone wyrazy wyższych rzędów nie zmieniały jakościowo lokalnego zachowania układu. Zagadnienie to można rozwiązać dla prostszych układów, których współczynniki są dane analitycznie [52]. W rozpatrywanym przypadku nieliniowego flutteru samolotu pozostaje wykonanie obliczeń dla różnej liczby n wyrazów szeregów (6.6), a następnie oszacowanie zakresu ich stosowalności na podstawie otrzymanych wyników numerycznych.

Z punktu widzenia analizy flutteru samolotu większą uwagę trzeba poświęcić wykresom 6.1b i 6.2b. Oznaczają one bowiem, że zakres wartości prędkości $u < 0$ nie jest już zakresem w pełni bezpiecznym, jak to wynikało z liniowego przybliżenia analizy flutterowej. Jest on zakresem bezpiecznym, ale dla małych zaburzeń początkowych. Dla zaburzeń początkowych o amplitudzie większej od amplitudy niestatecznego cyklu granicznego (linia przerywana) oscylacje będą narastać z czasem (do wartości, której nie da się wyznaczyć w oparciu o lokalną analizę asymptotyczną).

Bifurkacje opisane wykresami 6.1a i 6.2a oznaczają w praktyce zwiększenie bezpiecznego zakresu prędkości lotu, o ile wartość amplitudy cyklu granicznego nie przekroczy wartości dopuszczalnej przez samą konstrukcję samolotu. Nie oznacza to jednak zwiększenia zakresu prędkości eksploatacyjnych samolotu, ponieważ każde drgania są dla konstrukcji niekorzystne.

7. Przypadek szczególny – profil o dwóch stopniach swobody

Dwuwymiarowy układ aeroelastyczny, jakim jest cienki profil zawieszony na sprężynach w płaskim przepływie nieściśliwym, był stosowany w początkach analizy flatterowej jako jedyny dostępny model zjawiska [24]. Obecnie wiadomo, że w odniesieniu do całego samolotu jest to model o zbyt dużym stopniu uproszczenia, jednak będący jego częścią dwuwymiarowy model aerodynamiczny bywa stosowany do dzisiaj, w ramach tzw. teorii pasowej. Teoria ta zakłada, że dla smukłych elementów nośnych samolotu (skrzydła, usterzenie) można wyznaczać siły aerodynamiczne w każdym przekroju oddzielnie, traktując jego opływ jako płaski. Nakład pracy obliczeniowej jest tu o wiele mniejszy, niż dla najprostszego nawet modelu trójwymiarowego. Co więcej, wyrażenia dla sił aerodynamicznych mają postać zamkniętych wzorów (zawierających zmodyfikowane funkcje Bessela). Ta ostatnia własność sprawia, że dwuwymiarowy układ aeroelastyczny jest szczególnie przydatny do testowania modeli nieliniowych, ponieważ nie wprowadza dodatkowych błędów w procesie obliczeniowym.



Rys. 7.1. Dwuwymiarowy cienki profil

W literaturze dostępne są prace poświęcone nieliniowej analizie flatterowej cienkiego profilu (nieliniowość dotyczy z reguły charakterystyk sprężystych), w ujęciu eksperymentalnym i teoretycznym, polegającym na numerycznym całkowaniu równań ruchu [39–47]. Wyniki prezentowanej tu asymptotycznej metody teorii

bifurkacji, w zastosowaniu do cienkiego profilu, zostały przedstawione po raz pierwszy w pracy [48].

Schemat geometryczny rozważanego profilu pokazuje rysunek 7.1. Jako wymiar charakterystyczny przyjęto połowę cięciwy b . Oś odniesienia jest oś sprężysta, przechodząca przez punkt mocowania sprężyn do profilu. Położenie profilu jest wyznaczone przez kąt obrotu α wokół osi odniesienia i przemieszczenie pionowe h tej osi. Bezwymiarową odległość pomiędzy osią odniesienia i połową cięciwy profilu oznaczono przez x_a . Własności dynamiczne układu zlinearyzowanego są opisane przez następujące cztery bezwymiarowe parametry:

$\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2}$, stosunek masy profilu do masy przyłączonej (powietrza),

$x_\alpha = \frac{S_\alpha}{mb}$, bezwymiarowa odległość mierzona od osi sprężystej do środka ciężkości profilu,

$r_\alpha = \sqrt{\frac{I_\alpha}{mb^2}}$, promień bezwładności względem osi sprężystej,

$\Omega = \frac{\omega_h}{\omega_\alpha}$, stosunek częstości niesprężonych drgań giętych i skrętnych.

Znaczenie użytych symboli jest następujące:

ρ – gęstość powietrza,

m – masa profilu (na jednostkę rozpiętości),

S_α – moment statyczny profilu względem osi sprężystej (na jednostkę rozpiętości),

I_α – moment bezwładności profilu względem osi sprężystej (na jednostkę rozpiętości),

ω_h – częstość kołowa niesprężonych drgań giętych,

ω_α – częstość kołowa niesprężonych drgań skrętnych.

Dla danych częstości niesprężonych drgań własnych ω_h i ω_α można wyznaczyć odpowiadające im współczynniki sztywności K_h i K_α :

$$K_h = m\omega_h^2, \quad K_\alpha = I_\alpha\omega_\alpha^2.$$

Założono, że obydwie sprężyny mają następujące nieliniowe charakterystyki:

$$(7.1) \quad F_h = K_h(h + c_h h^3), \quad F_\alpha = K_\alpha(\alpha + c_\alpha \alpha^3),$$

gdzie F_h i F_α oznaczają siły uogólnione w sprężynach, a c_h i c_α są znanymi współczynnikami liczbowymi.

Przemieszczenia profilu w czasie ruchu są opisane przez N -wymiarowy ($N = 2$) wektor współrzędnych fizycznych $u(t)$, którego elementy są funkcjami czasu t :

$$(7.2) \quad u(t) = \begin{Bmatrix} h(t) \\ \alpha(t) \end{Bmatrix}.$$

Przy braku zewnętrznych sił aerodynamicznych oraz przy założeniu, że sprężyny są liniowe ($c_h = c_\alpha = 0$), można wyznaczyć częstości ω_j i postacie $\Phi_j^{(s)}$ ($j = 1, 2$) drgań własnych z następującego zagadnienia na wartości własne:

$$\omega_j^2 M \Phi_j^{(s)} = K \Phi_j^{(s)},$$

gdzie M i K są macierzami odpowiednio mas i sztywności:

$$M = \begin{bmatrix} m & -S_\alpha \\ -S_\alpha & I_\alpha \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\alpha \end{bmatrix},$$

Wprowadzenie współrzędnych modalnych w postaci (2.2b) jest w rozpatrywanym przypadku zabiegiem czysto formalnym, ponieważ układ ma tylko dwa stopnie swobody. Niemniej jednak warto, a nawet trzeba to zrobić, aby móc przetestować pełny algorytm prezentowanej metody redukcji na rozmaitość centralną. Wektor współrzędnych modalnych $q(t)$ jest zdefiniowany wzorem

$$(7.3) \quad u(t) = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(s)} \\ \vdots \\ \Phi_2^{(s)} \end{bmatrix} q(t),$$

który jest szczególnym przypadkiem zależności (2.6) – macierz Φ jest tutaj kwadratowa.

Ogólna postać nieliniowego równania flatteru profilu jest taka sama, jak postać (2.7) dla całego samolotu:

$$\ddot{q}(t) + K_\omega q(t) + k(q) = f_A(q),$$

gdzie, tak jak i poprzednio, $f_A(q)$ jest wektorem uogólnionych niestacjonarnych sił aerodynamicznych. Ponieważ profil nie ma stopni swobody przemieszczeń sztywnych, więc uogólniona macierz sztywności nie jest osobliwa:

$$K_\omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}.$$

Wektor $k(q)$ nieliniowych sił sprężystych zależy od współrzędnych modalnych w sposób opisany wzorem (2.10), a w rozpatrywanym przypadku przybiera prostą postać:

$$k(q) = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(s)} \\ \vdots \\ \Phi_2^{(s)} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{array}{l} K_h c_h (\Phi_{11}^{(s)} q_1 + \Phi_{21}^{(s)} q_2)^3 \\ K_\alpha c_\alpha (\Phi_{12}^{(s)} q_1 + \Phi_{22}^{(s)} q_2)^3 \end{array} \right\},$$

gdzie $\Phi_{ij}^{(s)}$ oznacza składową o numerze j wektora postaci drgań własnych o numerze i ($i, j = 1, 2$).

Elementy macierzy transmitancji (2.15) dla profilu w przepływie nieściśliwym można wyznaczyć analitycznie [2]. Wynik jest następujący:

$$\mathbf{A}(p; U) = -\pi \rho b^2 U^2 \begin{bmatrix} \Phi_1^{(s)} \\ \vdots \\ \Phi_2^{(s)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p^2 + 2pC(p) & p + (2+p)C(p) \\ -pC(p) & \frac{p^2}{8} + \frac{p}{2} \left(1 + \frac{p}{2}\right) C(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^{(s)} \\ \vdots \\ \Phi_2^{(s)} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$C(p) = \frac{K_1(p)}{K_0(p) + K_1(p)}$$

jest uogólnioną funkcją Theodorsena zespolonego argumentu

$$(7.4) \quad p = \frac{sb}{U},$$

natomiast $K_0(p)$ i $K_1(p)$ są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela. Zespolony wykładnik ruchu oscylacyjnego (2.12) $s = \gamma + i\omega$ zawiera współczynnik tłumienia γ i częstość kołową oscylacji ω .

Funkcja $K_0(p)$ ma w początku układu osobliwość logarymiczną i jest określona w całej płaszczyźnie zespolonej, za wyjątkiem punktów w zerze i w nieskończoności oraz łączącego je cięcia wzdłuż ujemnej części osi rzeczywistej. Funkcja $K_1(p)$ ma w punkcie $p = 0$ biegun pierwszego rzędu. W rezultacie funkcja Theodorsena jest w zerze ograniczona, $C(0) = 1$, ale ma w tym miejscu punkt rozgałęzienia. Prezentowany algorytm redukcji na rozmaitość centralną wymaga znajomości pochodnych macierzy transmitancji, a tym samym pochodnych funkcji Theodorsena, w skończonej liczbie punktów leżących na osi urojonej poza zerem. Najbliższy zera punkt, w którym trzeba różniczkować funkcję Theodorsena, odpowiada częstości flatteru liniowego.

Zagadnienie numerycznego obliczania wartości funkcji Bessela jest od wielu lat dobrze znane, tak że praktycznie można wykonywać obliczenia z każdą wymaganą dokładnością [49] (poza bezpośrednim otoczeniem ujemnej części osi rzeczywistej). Do obliczeń parametrów cyklu granicznego potrzebne będą pochodne macierzy transmitancji $\mathbf{A}(s; U)$ względem zmiennych s i U . Z postaci wzoru (2.15) wynika, że pochodne te można łatwo znaleźć, jeżeli znane są pochodne względem zmiennej zespolonej p (7.4). Dla aproksymacji n -tego rzędu (6.6) najwyższy rząd pochodnych wynosi $2n-1$. Pierwsze pochodne zmodyfikowanych funkcji Bessela $K_0(p)$ i $K_1(p)$ spełniają następujące związki:

$$\frac{dK_0(p)}{dp} = -K_1(p), \quad \frac{dK_1(p)}{dp} = -K_0(p) - \frac{K_1(p)}{p},$$

które pozwalają na obliczenie pierwszych dwóch pochodnych funkcji Theodorsena

$$\frac{dC(p)}{dp} = 2C(p) - 1 + \frac{1}{p}(C(p) - 1)C(p),$$

$$\frac{d^2C(p)}{dp^2} = \frac{2C(p) - 1}{p} + 2 \frac{dC(p)}{dp} \left(1 + \frac{C(p) - 1}{p} \right).$$

Wyższe pochodne spełniają następujący wzór rekurencyjny, słuszny dla $k > 1$:

$$\frac{d^{k+1}C(p)}{dp^{k+1}} = \left(2 - \frac{k+1}{p} \right) \frac{d^k C(p)}{dp^k} + \frac{1}{p} \frac{d^k C^2(p)}{dp^k} + \frac{2k}{p} \frac{d^{k-1} C(p)}{dp^{k-1}}.$$

Pierwszy z dwóch prezentowanych tutaj przykładów obliczeniowych dotyczących cienkiego profilu został wybrany w celu porównania asymptotycznego rozwiązania równania flatteru metodą redukcji na rozmaitość centralną z rozwiązaniem czysto numerycznym, opartym o numeryczne całkowanie nieliniowego równania ruchu w czasie. Niestety, w literaturze jest bardzo mało takich rozwiązań, a ponadto z reguły dotyczą uproszczonego modelu aerodynamicznego. Wyniki obliczeń numerycznych, bazujące na modelu aeroelastycznym najbliższym stosowanemu w tym rozdziale, zawiera raport [40]. Uwzględniono w nim jedną sprężynę nieliniową związaną z obrotem profilu wokół osi odniesienia, co odpowiada stałym $c_h = 0$, $c_\alpha \neq 0$ we wzorze (7.1). Zachowano także operator aerodynamiczny w postaci całki splotu (2.11). Podobnie jak przy wykorzystaniu tego wzoru dla ruchu harmonicznego, prowadzącego do funkcji Theodorsena, również dla ruchu dowolnego otrzymuje się siły aerodynamiczne zależne od jednej charakterystycznej funkcji $\phi(\tau)$, zwanej funkcją Wagnera [24]. Funkcja ta opisuje wzrost w czasie bezwymiarowym ($\tau = Ut/b$) cyrkulacji prędkości wokół profilu, którego prędkość wzrosła w sposób impulsowy od zera do pewnej skończonej wartości U :

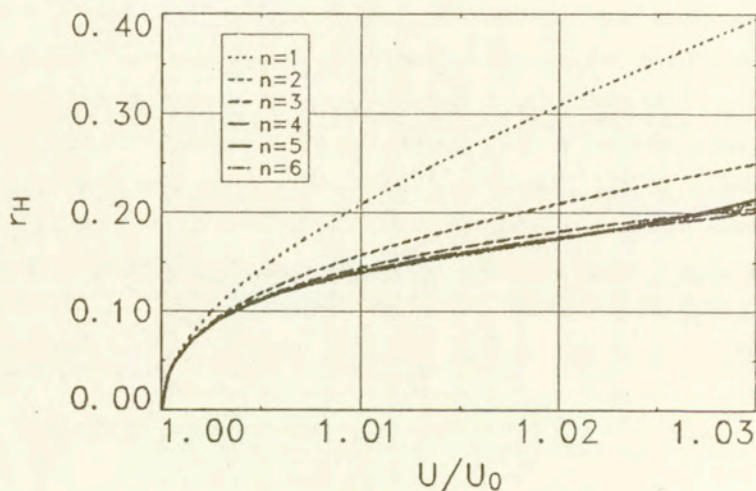
$$\phi(\tau) = 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-x\tau} dx}{x^2 \left((K_0(x) - K_1(x))^2 + \pi^2 (I_0(x) + I_1(x))^2 \right)},$$

gdzie K_0 , K_1 , I_0 i I_1 są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela, odpowiednio zerowego i pierwszego rodzaju. Wartości funkcji Wagnera obliczano w raporcie [40] z prostego wzoru przybliżonego, zwanego aproksymacją Jonesa [50]:

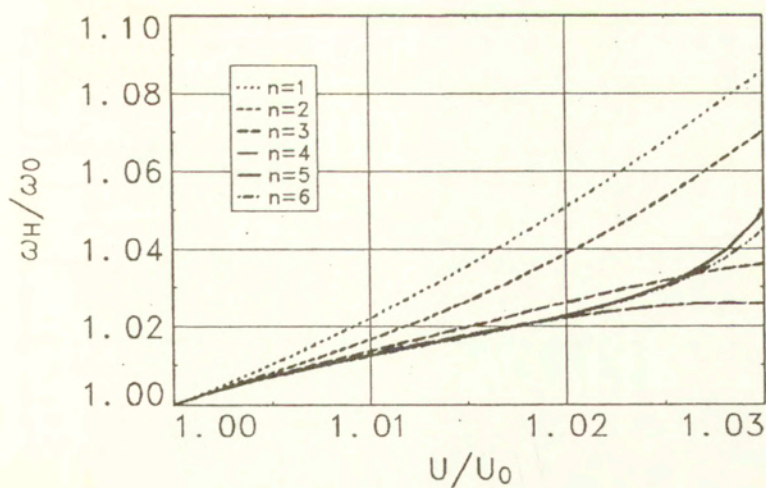
$$\phi(\tau) = 1 - 0.165e^{-0.0455\tau} - 0.335e^{-0.3\tau}$$

Wbrew pozorom, zastosowanie tego wzoru nie jest tylko uproszczeniem samej procedury obliczeniowej, ale przede wszystkim jakościową zmianą modelu aeroelastycznego. Można bowiem pokazać, że w tym przypadku operator całkowy różniczkowo-całkowego równania flatteru profilu ma postać całki (5.25), a więc po wprowadzeniu nowych zmiennych zgodnie ze wzorem (5.26), można równanie flatteru przekształcić do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu. Nie należy zatem traktować jako wzorcowych wyników numerycznego całkowania nieliniowego równania flatteru, zawartych w raporcie [40].

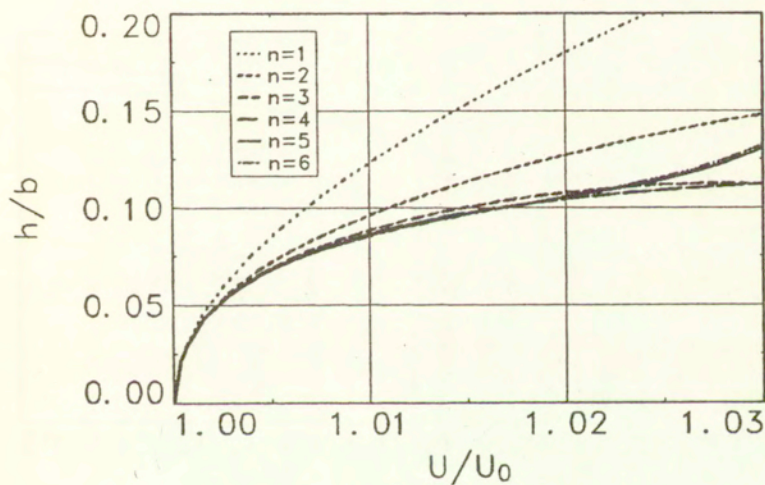
Wartości danych liczbowych dla pierwszego przykładu były następujące: $x_a = -0.5$, $\mu = 100$, $x_\alpha = 0.25$, $r_\alpha = 0.5$, $\Omega = 1.2$ i $c_\alpha = 3$. Wynikowe wartości amplitudy i częstości cyklu granicznego na rozmaitości centralnej, odpowiadające różnej liczbie n wyrazów szeregów (6.6), pokazano na rysunkach 7.2 i 7.3. Amplituda cyklu granicznego r_H została unormowana do wartości $\sqrt{|a_{01}/a_{10}|}$ (6.8).



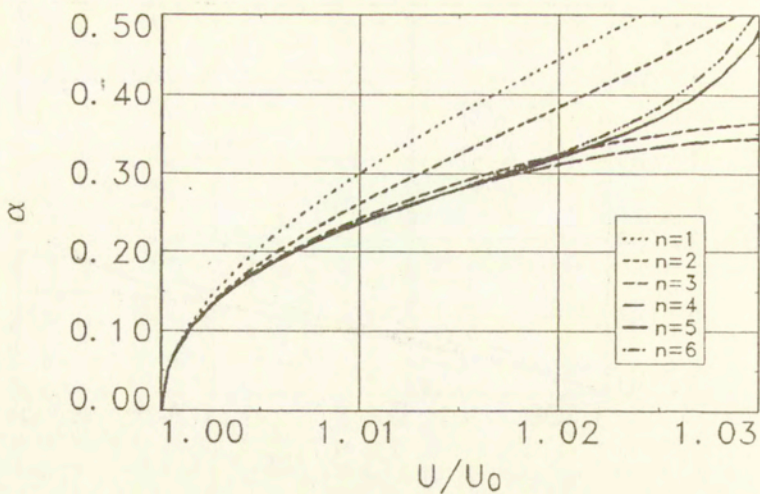
Rys. 7.2. Amplituda cyklu granicznego na rozmaitości centralnej



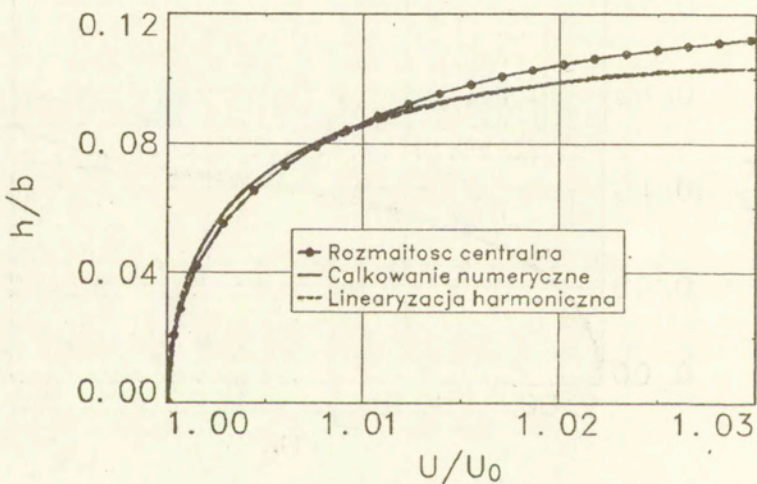
Rys. 7.3. Częstość cyklu granicznego na rozmaitości centralnej



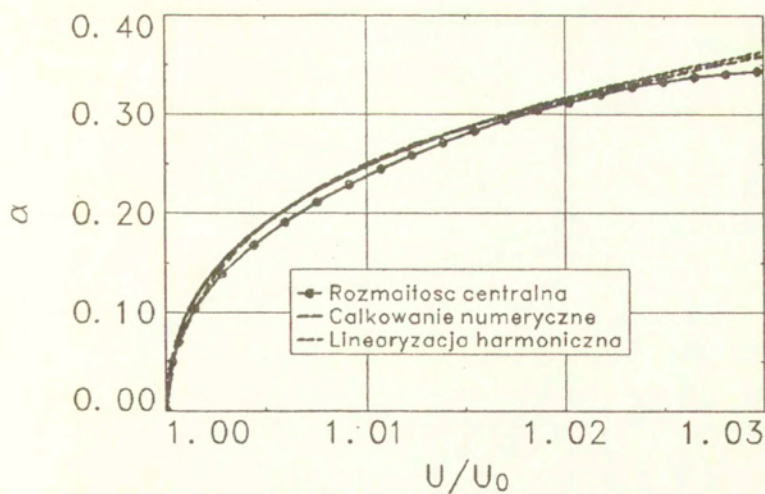
Rys. 7.4. Amplituda oscylacji postępowych profilu



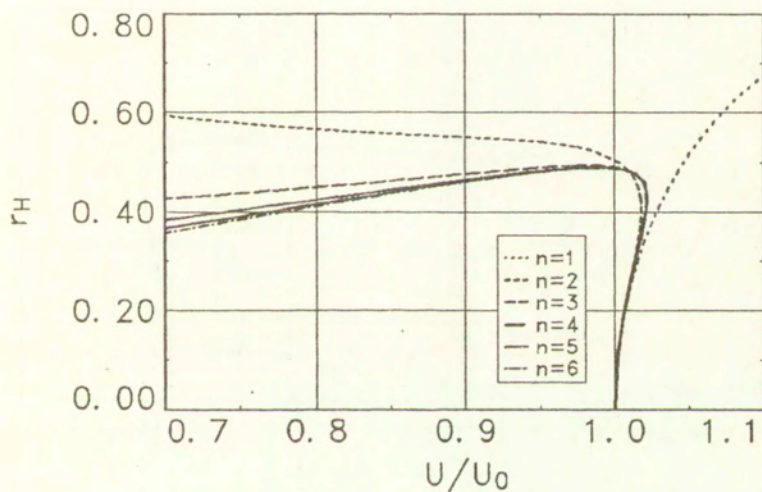
Rys. 7.5. Amplituda oscylacji obrotowych profilu



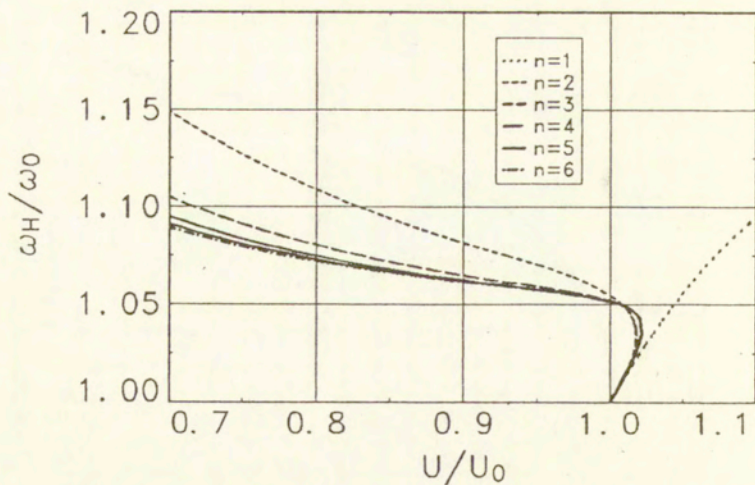
Rys. 7.6. Amplituda oscylacji postępowych profilu



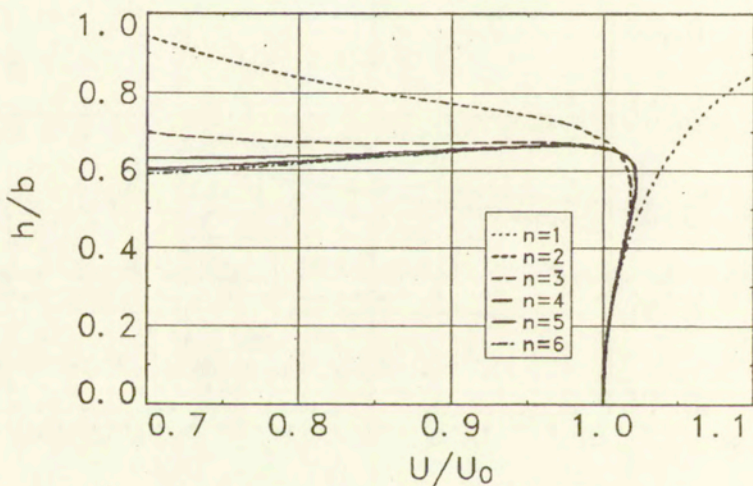
Rys. 7.7. Amplituda oscylacji obrotowych profilu



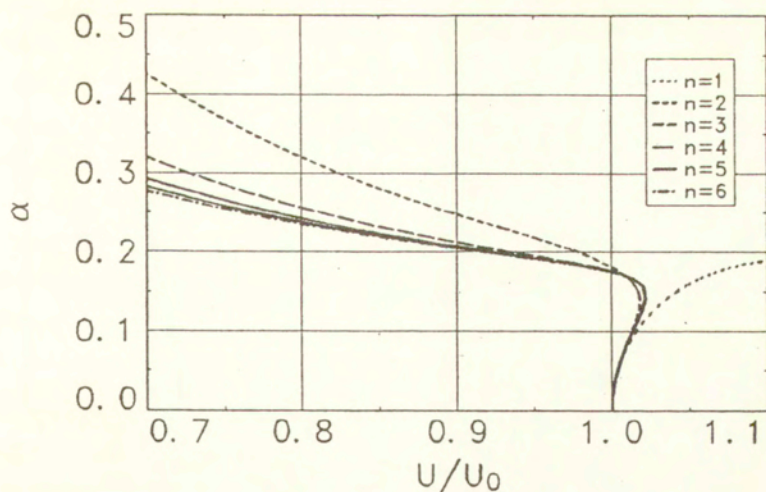
Rys. 7.8. Amplituda cyklu granicznej na rozmaitosci centralnej



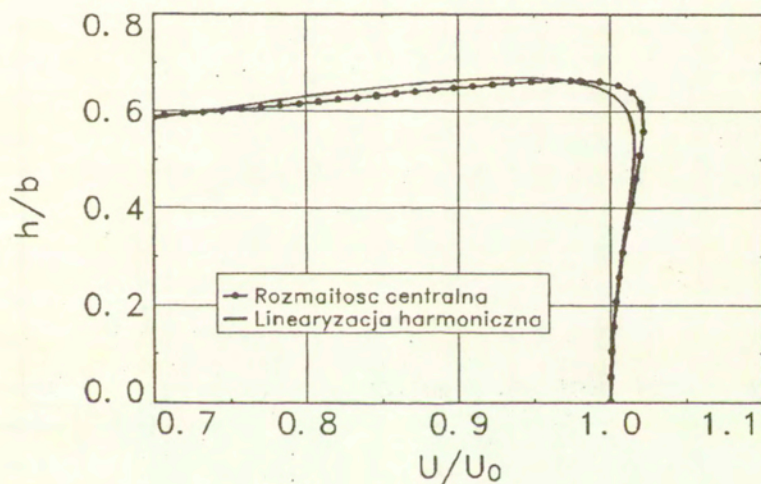
Rys. 7.9. Częstość cyklu granicznego na rozmaitości centralnej



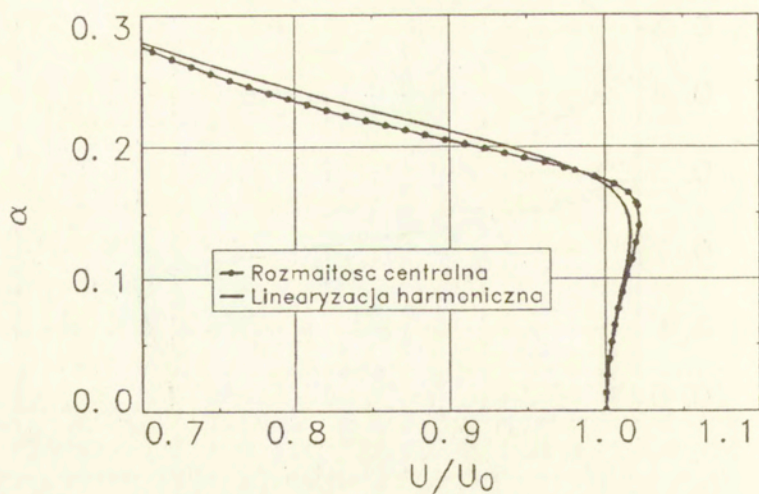
Rys. 7.10. Amplituda oscylacji postępowych profilu



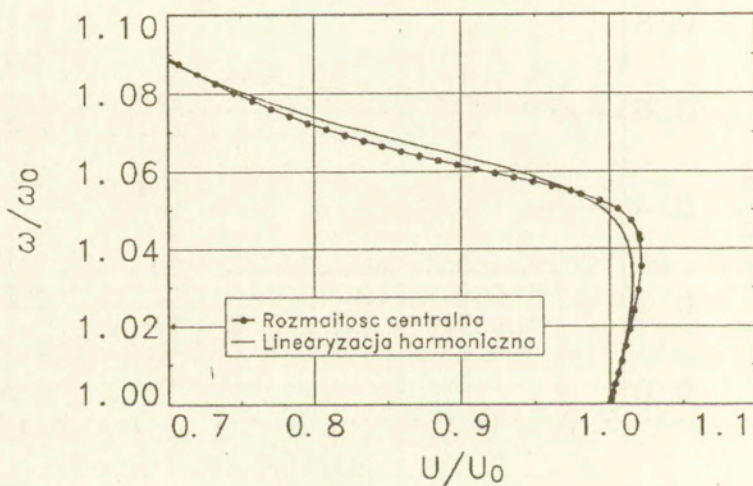
Rys. 7.11. Amplituda oscylacji obrotowych profilu



Rys. 7.12. Amplituda oscylacji postępowych profilu



Rys. 7.13. Amplituda oscylacji obrotowych profilu



Rys. 7.14. Częstość cyklu granicznego

Widać, że jest to przypadek cyklu granicznego, odpowiadającego rysunkowi 6.1a. Potwierdza on wynikający z analizy liniowej wniosek, że zakres prędkości poniżej punktu bifurkacji jest zakresem bezpiecznym. Wprawdzie powyżej tego punktu amplituda cyklu granicznego narasta dość szybko, ale sam cykl graniczny jest rozwiązaniem stabilnym. Ten typ bifurkacji bywa czasem nazywany bifurkacją bezpieczną [53].

Jeżeli amplituda i częstość cyklu granicznego na rozmaitości centralnej (ruch harmoniczny) jest znana, to za pomocą ciągu transformacji (6.3), (6.2), (5.4) dla $\ominus = 0$, (4.3) oraz (2.6), która w przypadku profilu jest dana wzorem (7.3), można obliczyć przebiegi czasowe dla współrzędnych fizycznych profilu $h(t)$ i $\alpha(t)$ (7.2). Nie są one już zwykłymi sinusoidami, jak to miało miejsce na rozmaitości centralnej, i dlatego w charakterze amplitudy przyjęto maksymalną wartość danej współrzędnej w czasie jednego okresu drgań. Wykresy tak zdefiniowanych amplitud cyklu granicznego dla współrzędnych fizycznych w funkcji bezwymiarowej prędkości U/U_0 pokazano na rysunkach 7.4 i 7.5. Ciąg linii na każdym z wykresów, odpowiadający różnej liczbie wyrazów n , do której została ograniczona aproksymacja potęgowa formy normalnej (6.6), dość dobrze ilustruje wspomniany w poprzednim rozdziale jej asymptotyczny charakter. Widać wyraźnie, że do jakościowego opisu parametrów cyklu granicznego w przedstawionym na rysunkach zakresie zmienności prędkości (parametru bifurkacyjnego) wystarczy tylko pierwszy wyraz rozwinięcia potęgowego formy normalnej ($n = 1$). Z drugiej strony, na podstawie wyników obliczeń można wyciągnąć wniosek, że maksymalna liczba wziętych pod uwagę wyrazów szeregu nie powinna przekraczać czterech. Ten ostatni przypadek ($n = 4$) porównano z wynikami całkowania numerycznego, zaczerpniętymi ze wspomnianego już raportu [40], a także z wynikami obliczeń metodą linearyzacji harmonicznej [51]. Porównanie wyników przedstawiają rysunki 7.6 i 7.7.

W drugim przykładzie obliczeniowym obydwie sprężyny miały charakterystyki nieliniowe trzeciego stopnia (7.1) o wartościach stałych $c_h = 0.3$ i $c_\alpha = 5$. Dane geometryczne i masowe profilu $x_a = -0.1$, $\mu = 20$, $x_\alpha = 0.25$ i $r_\alpha = 0.5$ zostały wzięte z pracy [43]. Stosunek częstości niesprężonych drgań własnych był równy $\Omega = 1.5$. Amplitudy i częstości cyklu granicznego na rozmaitości centralnej, odpowiadające różnej liczbie n wyrazów szeregów (6.6), pokazano na rysunkach 7.8 i 7.9. Jest to przypadek cyklu granicznego, odpowiadającego rysunkowi 6.2b. Z punktu widzenia bezpieczeństwa jest on zdecydowanie niepożądany. Po pierwsze rozwiązanie stabilne (stacjonarne oraz cykl graniczny w bezpośredniej bliskości punktu bifurkacji) znika dla większych wartości prędkości, a po drugie obszar przyciągania stabilnego rozwiązania stacjonarnego jest ograniczony amplitudą niestabilnego cyklu granicznego w szerokim zakresie

prędkości poniżej punktu bifurkacji. Wynika stąd wniosek, że ten zakres prędkości jest bezpieczny tylko dla małych zaburzeń, nie wykraczających poza wspomniany obszar przyciągania. Taki typ bifurkacji bywa czasem nazywany bifurkacją niebezpieczną [53].

Podobnie jak w poprzednim przykładzie obliczeniowym, amplitudy cyklu granicznego dla współrzędnych fizycznych w funkcji bezwymiarowej prędkości U/U_0 pokazano na rysunkach 7.10 i 7.11. Tym razem ciąg linii na każdym z wykresów, odpowiadający różnej liczbie wyrazów n , do której została ograniczona aproksymacja potęgowa formy normalnej (6.6), zdaje się wskazywać, że forma normalna może być tutaj analityczna. Trudno to oczywiście udowodnić (wszystkie wyniki są tylko zbiorem liczb), w każdym razie współczynniki liczbowe szeregów (6.6) maleją szybko do zera ze wzrostem n . Do jakościowego opisu parametrów cyklu granicznego w przedstawionym na rysunkach zakresie zmienności prędkości (parametru bifurkacyjnego) nie wystarczy teraz tylko pierwszy wyraz rozwinięcia potęgowego formy normalnej – potrzebne są co najmniej dwa wyrazy. Przybliżenie szóste ($n = 6$) porównano z wynikami obliczeń otrzymanymi za pomocą metody linearyzacji harmonicznej [51]. Porównanie wyników przedstawiają rysunki 7.12, 7.13 i 7.14.

Ogólnie rzecz biorąc, zgodność wyników otrzymanych różnymi metodami w obu przykładach obliczeniowych jest dobra. W odniesieniu do metody linearyzacji harmonicznej wynika to głównie z symetrii charakterystyk (7.1) nieliniowych sprzężym względem współrzędnych uogólnionych. W rezultacie rzeczywisty ruch oscylacyjny profilu niewiele odbiega od harmonicznego, a tym samym spełnione jest podstawowe założenie tej metody.

8. Obliczenia cyklu granicznego dla samolotu

Opisany w poprzednim rozdziale przypadek szczególny cienkiego profilu o dwóch stopniach swobody był na tyle prosty, że nie wymagał specjalnych zabiegów numerycznych do zastosowania algorytmu redukcji na rozmiatość centralną. Inaczej jest w przypadku, gdy obliczenia cyklu granicznego dotyczą całego samolotu. Potrzebne jest wówczas oprogramowanie do analizy (liniowej) flatteru samolotu, które oprócz standardowych wyników, takich jak prędkość, częstość i postać flatteru, umożliwi wyprowadzenie dodatkowych danych, niezbędnych dla analizy nieliniowej. W prezentowanej pracy wykorzystano zestaw programów do analizy flatteru samolotów lekkich o układzie konwencjonalnym, opracowany w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN, w ówczesnym Zakładzie Mechaniki Cieczy i Gazów. Same programy komputerowe ulegały wielu przeobrażeniom na przestrzeni ostatnich dwudziestu lat, lecz podstawowe założenia i metodyka obliczeń niewiele się zmieniły od czasu ich opublikowania w roku 1976 [20].

Model masowo-szywnościowy samolotu zakłada, że jego podstawowe elementy konstrukcyjne (kadłub, skrzydła, klapy, lotki, stateczniki i stery) są na tyle smukłe, że mogą być zastąpione odpowiednio dobranym układem prostoliniowych belek o ciągłym rozkładzie parametrów szywnościowych i masowych. Z praktyki obliczeniowej wynika, że model ten zupełnie dobrze opisuje drgania własne nie tylko szybowców, ale także samolotów, których elementy konstrukcyjne mają znacznie mniejsze wydłużenie. Jeżeli samolot nie ma elementów wymagających wprowadzenia dużej liczby dodatkowych mas skupionych, jak np. zastrzały, podwieszane pod skrzydłami wyposażenie itp., to do wyznaczenia pierwszych kilkunastu postaci drgań własnych w zupełności wystarcza model masowo-szywnościowy o kilkuset stopniach swobody. Dość szeroki zakres stosowalności modelu belkowego wynika w dużej mierze z faktu, że model ten jest jakościowo zgodny z wewnętrzną strukturą skrzydeł i usterzenia, których głównymi elementami nośnymi są najczęściej dźwigary. Z drugiej strony, przy badaniu flatteru dominującą rolę odgrywają siły aerodynamiczne działające właśnie na te elementy, natomiast aerodynamiczne obciążenia kadłuba uwzględnia się tylko w wyjątkowych przypadkach. Umieszczone na dźwigarach szywne żebra powodują, że przekroje powierzchni nośnych równoległe do kierunku opływu (profile aerodynamiczne) można traktować z dobrym przybliżeniem jako nieodkształcalne i wyznaczać niestacjonarne siły aerodynamiczne w każdym przekroju oddzielnie, wykorzystując do tego celu dwuwymiarowy model Theodorsena [2]. Ta metoda wyznaczania obciążeń aerodynamicznych na trójwymiarowych powierzchniach nośnych nosi w literaturze nazwę metody pasowej. Rezygnuje się z niej na korzyść metod

istotnie trójwymiarowych (tzw. niestacjonarnych metod powierzchni nośnej) tylko w razie konieczności, ponieważ złożoność analizy (a tym samym efektywny czas obliczeń) wzrasta wówczas co najmniej o rząd wielkości. Znacznie zwiększa się w tym przypadku także liczba danych potrzebnych do opisu postaci drgań własnych. W modelu belkowym postać (wektor własny) jest opisywana za pomocą dwóch funkcji jednej zmiennej, przedstawiających ugięcia i skręcenia każdej z belek. Pomimo iż wartości tych funkcji są znane tylko w skończonej liczbie punktów, nie stanowi to problemu ze względu na łatwość interpolacji funkcji jednej zmiennej. Metoda powierzchni nośnej wymaga interpolacji funkcji dwóch zmiennych, a co za tym idzie, wartości ugięć w dużo większej liczbie punktów.

Z liniowej analiza flutterowej zwykle można otrzymać następujące wielkości:

- parametry punktu bifurkacji (prędkość krytyczna U_0 i częstość ω_0 flutteru),
- postać flutteru (prawy wektor własny zagadnienia (2.18)),
- częstości drgań własnych (macierz K_ω (2.5)),
- postaci drgań własnych Φ_j (2.3), dla $j = 1, 2, \dots, N$.

Znając postacie drgań własnych oraz dane geometryczne konstrukcji samolotu, można wyznaczyć jawną postać wektora nieliniowych sprężystych sił uogólnionych $k(q)$ na podstawie wzoru (2.10), wstawiając odpowiednie wartości liczbowe elementów macierzy K_j ($j > 1$), wynikające z nieliniowych charakterystyk sprężyn, a także wstawiając wartości liczbowe elementów macierzy R (2.9), określone przez położenie sprężyn. Do wyznaczenia cyklu granicznego potrzebne są jeszcze następujące dane:

- wartości elementów macierzy transmitancji (2.15) w punkcie $s = 0$,
- wartości elementów macierzy transmitancji (2.15) oraz jej pochodnych (5.19) w punktach $s = \pm mi\omega_0$, dla $m = 1, 2, \dots, 2n+1$, gdzie n jest liczbą wyrazów aproksymacji (6.6) formy normalnej.

Standardowe oprogramowanie do analizy flutterowej z reguły nie dostarcza pochodnych macierzy transmitancji, co najwyżej pierwsze dwie, które bywają czasem wykorzystywane do iteracyjnego rozwiązywania liniowego równania flutteru. W przypadku profilu o dwóch stopniach swobody, można było pochodne macierzy transmitancji obliczać analitycznie. Teoretycznie taka możliwość istnieje również dla samolotu, ale tylko w ramach metody pasowej. Ponadto wymaga daleko idących zmian programów obliczeniowych, które to zmiany, jak się okazuje, nie są konieczne. Współczynniki macierzy transmitancji są bowiem gładkimi funkcjami zarówno prędkości, jak i argumentu s (poza otoczeniem ujemnej części osi

rzeczywistej). Z tego powodu, w rozpatrywanym przypadku można do obliczania pochodnych zastosować metody numeryczne, mimo iż w ogólności mogą być one źle uwarunkowane. Dobre wyniki dają znane z podręczników analizy numerycznej metody różnic skończonych, a także bezpośrednia dyskretyzacja wzoru całkowego Cauchy'ego w płaszczyźnie zespolonej zmiennej p (7.4)

$$\frac{d^j a_{kl}(p)}{dp^j} = \frac{j!}{2\pi i} \oint_C \frac{a_{kl}(z)}{(z-p)^{j+1}} dz \approx \frac{j!}{2\pi i} \sum_{r=1}^m \frac{a_{kl}(z_r)}{(z_r-p)^{j+1}} \Delta z_r,$$

gdzie $a_{kl}(p)$ jest elementem macierzy transmitancji (2.15). Węzły całkowania z_r znajdują się na okręgu C o małym promieniu i o środku w punkcie p . Ten sposób obliczania pochodnych wymaga jednak możliwości wykonywania obliczeń aerodynamicznych poza osią urojoną płaszczyzny zespolonej, co może czasami być trudne do realizacji, gdy nie są dostępne źródłowe wersje programów flutterowych.

Pewnym ograniczeniem dla zwiększania liczby stopni swobody samolotu (współrzędnych modalnych) w praktycznej realizacji algorytmu redukcji na rozmaitość centralną jest dostępna pamięć RAM komputera. Wynika to stąd, że liczba składowych wektorów \mathbf{x}^v w rozwinięciach w szeregi Taylora wielu zmiennych, jak na przykład (5.6), rośnie bardzo szybko ze wzrostem liczby wyrazów szeregu i wymaga dużego obszaru pamięci. Jeżeli na przykład flutter samolotu można wystarczająco dokładnie opisać za pomocą sześciu postaci drgań własnych i czterech wyrazów szeregu na rozmaitości centralnej ($n = 4$ w równaniach (6.6)), to liczba składowych wektora \mathbf{x}^v , odpowiadającego ostatniemu ($v = 9$) wyrazowi szeregu (5.6) jest równa 293930. Tyle samo kolumn liczy macierz współczynników f_j tego szeregu, przy liczbie wierszy równej 13. Jest zatem istotne, aby w obliczeniach uwzględniać tylko niezbędne postacie drgań własnych, redukując tym samym liczbę stopni swobody do niezbędnego minimum.

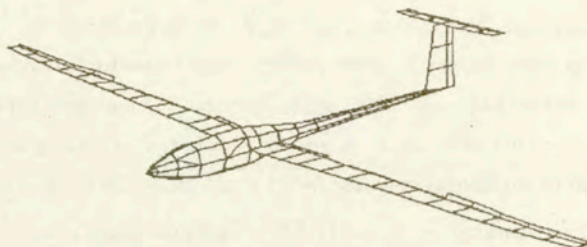
W pracy zostaną przytoczone wyniki obliczeń dotyczące trzech przypadków flutteru nieliniowego szybowców SZD-56-BoBer i SZD-52-Krokus. Wyniki należy traktować jedynie jako ilustrujące możliwości metody redukcji na rozmaitość centralną w zastosowaniu do rzeczywistych konstrukcji lotniczych. W szybowcach tych nie występowały bowiem nieliniowości w układach sterowania, a w obliczeniach zostały wprowadzone tylko w celu zbadania, co mogłoby się dzieć w przypadku ich obecności. Co więcej, obliczenia przeprowadzono przy całkowicie niewyważonych powierzchniach sterowych, ponieważ

wyważenie istniejące na rzeczywistych konstrukcjach eliminowało flutter z zakresu eksploatacyjnych prędkości lotu.

Założono, podobnie jak w obliczeniach dotyczących profilu o dwóch stopniach swobody, że moment zawiasowy M_{δ} w punktach wprowadzenia napędu każdej powierzchni sterowej jest wielomianem stopnia trzeciego względem jej lokalnego kąta obrotu δ

$$(8.1) \quad M_{\delta} = K_{\delta}(\delta + c\delta^3),$$

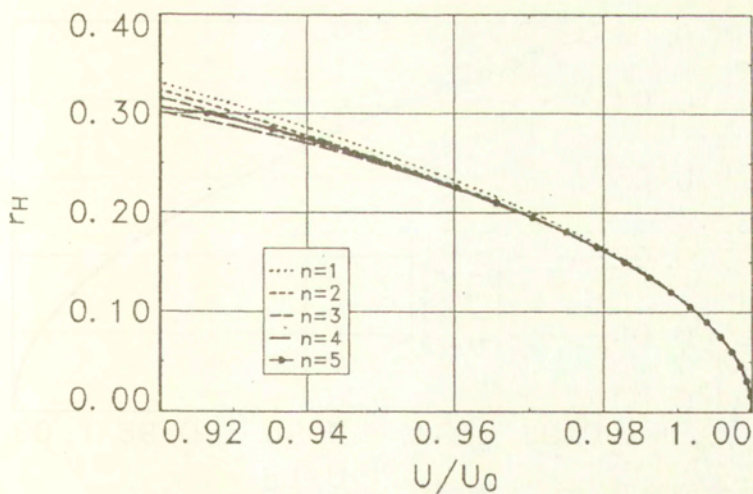
gdzie K_{δ} jest stałą sprężyny liniowej, wynikającą z modelowania rzeczywistego układu sterowania szybowców. Wartości liczbowe współczynnika c wybierano tak, aby moment pochodzący od wyrazu nieliniowego w zależności (8.1) był tego samego rzędu, co moment wynikający ze skręcenia sprężyny liniowej (dla średnich kątów wychylenia powierzchni sterowych, dopuszczanych przez istniejące ograniczniki). Dla szybowca SZD-56-BoBer przyjęto dla lotki $c = 50$ oraz $c = 0.1$ dla pozostałych powierzchni sterowych. Odpowiednie wartości dla szybowca SZD-52-Krokus wynosiły 10 i 0.1. Przy powyższym założeniu jedyną



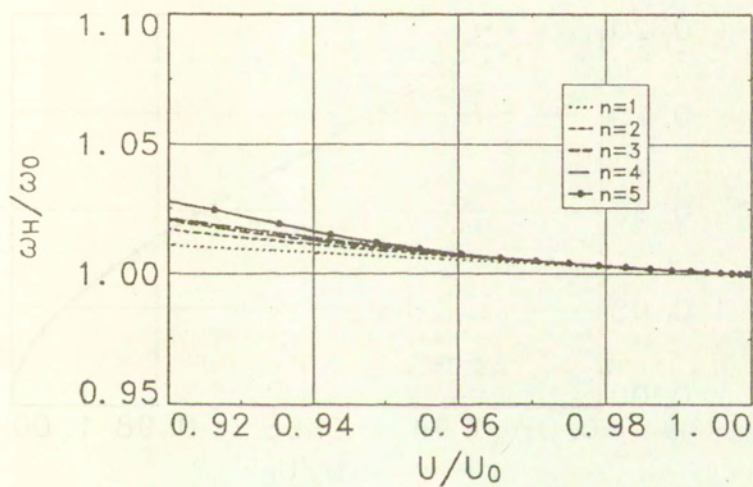
Rys. 8.1. Postać flutteru symetrycznego szybowca SZD-56-BoBer

niezerową macierzą współczynników w rozwinięciu (2.8) była macierz K_2 .

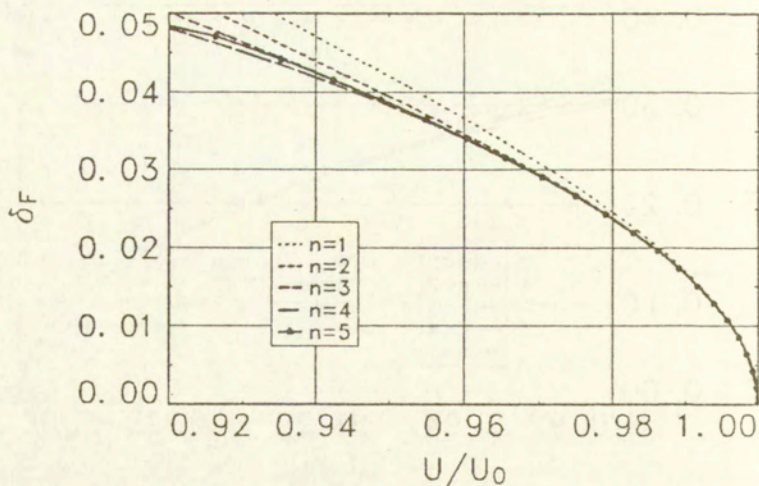
W sporej części zbadanych przypadków występował stabilny cykl graniczny powyżej krytycznej prędkości flutteru, taki jak na rysunku 6.1a. W przypadkach tych obecność nieliniowości nie wpływała na zakres bezpiecznych prędkości lotu. Rysunek 8.1 przedstawia postać pierwszego z trzech przypadków flutteru, w którym sytuacja jest odmienna. Jest to klasyczny przypadek symetrycznego flutteru lotkowo-klapowego, w którym klapy i lotki drgają w przeciwnych fazach. Klapy nie są na rysunku widoczne, ponieważ są wychylone ku dołowi. Prędkość flutteru wynosiła 51.8 m/s, a częstość kołowa 114.6 rad/s. W przypadku tym wystąpił niestabilny cykl graniczny poniżej krytycznej prędkości flutteru, którego amplitudę i częstość na rozmaitości



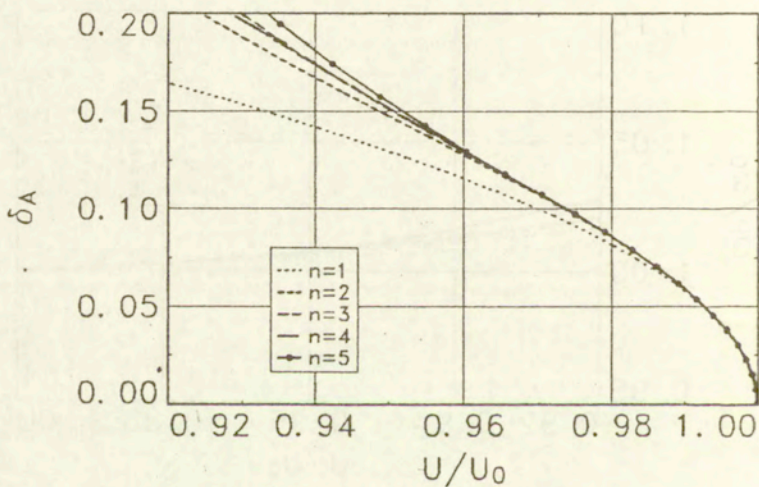
Rys. 8.2. Amplituda cyklu granicznego na rozmaitości centralnej



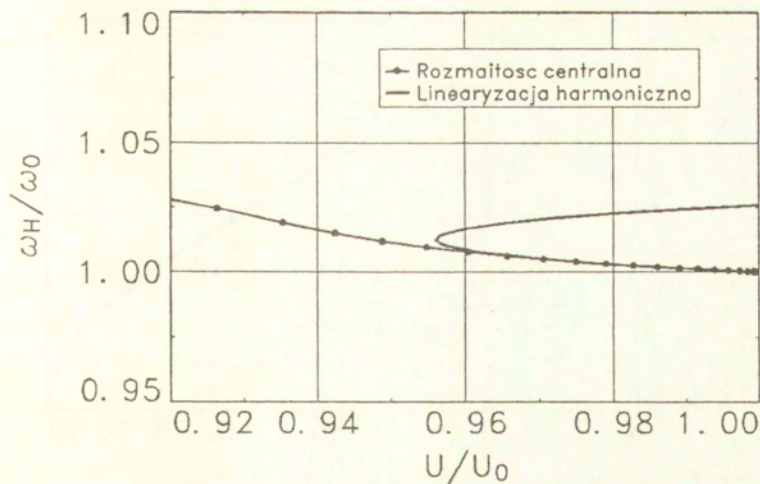
Rys. 8.3. Częstość cyklu granicznego na rozmaitości centralnej



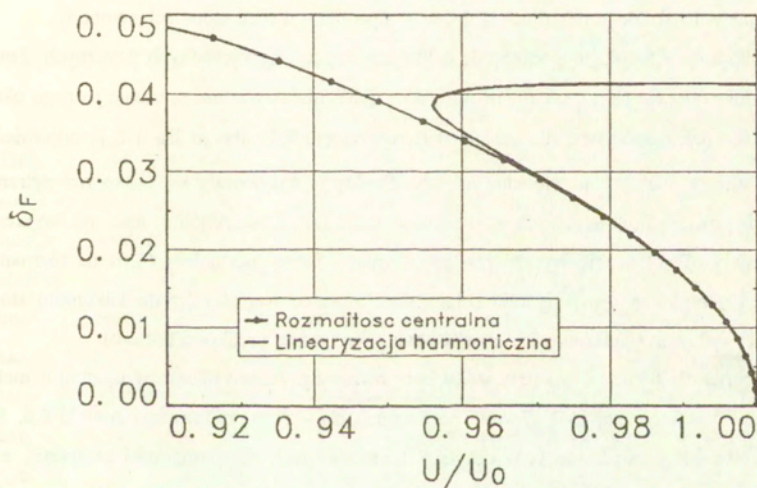
Rys. 8.4. Amplituda cyklu granicznego dla kłapy



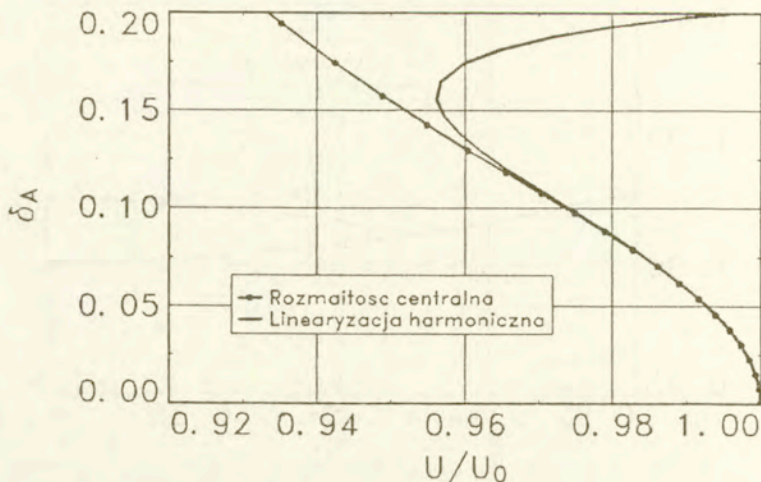
Rys. 8.5. Amplituda cyklu granicznego dla lotki



Rys. 8.6. Częstość cyklu granicznego



Rys. 8.7. Amplituda cyklu granicznego dla kłapy



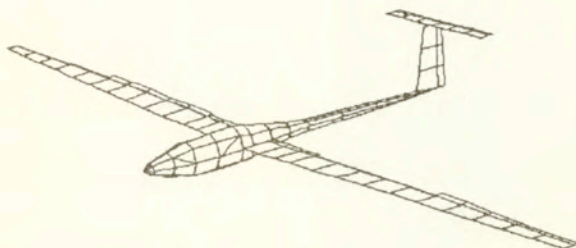
Rys. 8.8. Amplituda cyklu granicznego dla lotki

centralnej przedstawiają rysunki 8.2 i 8.3. Amplituda r_H została unormowana w taki sam sposób, jak w rozdziale poprzednim, dotyczącym profilu o dwóch stopniach swobody.

Rysunki 8.4 i 8.5 pokazują amplitudę cyklu granicznego współrzędnych fizycznych. Została ona zdefiniowana tak samo, jak dla profilu, jako maksymalna wartość w czasie jednego okresu drgań. Jako reprezentatywne dla postaci flatteru przyjęto kąty obrotu δ_F i δ_A , odpowiednio kłapy i lotki, w punktach przyłożenia napędu. Punkty te znajdowały się blisko wewnętrznych krawędzi powierzchni sterowych (od strony kadłuba). Poszczególne linie na wykresach odpowiadają różnej liczbie wyrazów n aproksymacji formy normalnej (6.6) na rozmaitości centralnej. Amplituda oscylacji lotki osiąga dość znaczne wartości (rzędu kilkunastu stopni) przy niezbyt dużym spadku prędkości (8% poniżej krytycznej prędkości flatteru).

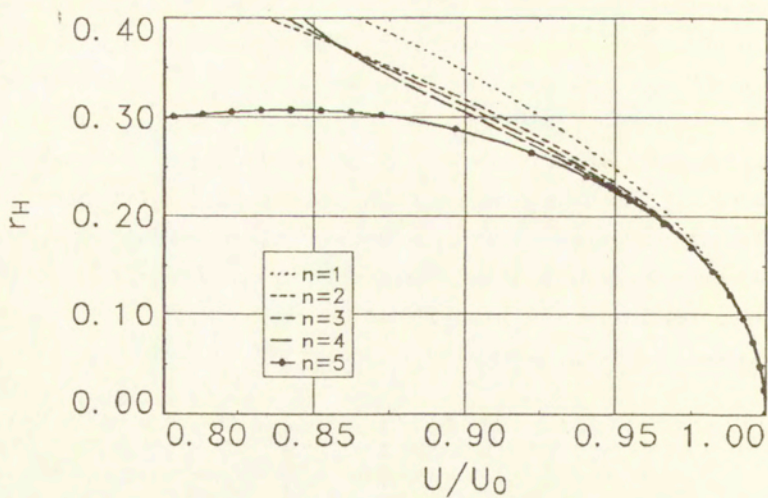
Obliczenia dla tego samego przypadku były również przeprowadzone w oparciu o metodę linearyzacji harmonicznej [51]. Wyniki porównania dla $n = 5$ przedstawiają rysunki 8.6, 8.7 i 8.8. Porównanie częstości dotyczy oscylacji harmonicznych na rozmaitości centralnej, a nie częstości podstawowej cyklu granicznego w zmiennych fizycznych. We wszystkich prezentowanych przypadkach można było tak postąpić, ponieważ odchylenie od ruchu harmonicznego było niewielkie. Wskazywały na to wykresy fazowe, które odpowiednio unormowane miały kształt niewiele różniący się od okręgów. W pobliżu punktu bifurkacji ma miejsce bardzo dobra zgodność ilościowa pomiędzy wynikami obydwu metod, jednak dla

większych amplitud pojawia się jakościowa rozbieżność wyników. Podczas gdy asymptotyczna analiza na rozmaitości centralnej w całym prezentowanym obszarze wskazuje na obecność jedynie niestabilnego cyklu granicznego, to zgodnie z metodą linearyzacji harmonicznej występuje również stabilna gałąź rozwiązania, która rozciąga się nawet powyżej krytycznej prędkości flatteru. Jest to o tyle zastanawiające, że ciąg aproksymacji dla $n = 1 \dots 5$, widoczny na wykresach 8.2 – 8.5, sugerowałby raczej, że należy oczekiwać wiarygodnych wyników metody redukcji na rozmaitość centralną w całym przedstawionym zakresie prędkości (przynajmniej co do jakościowego ich charakteru). Należy jednak pamiętać, że metoda linearyzacji harmonicznej jest również metodą przybliżoną, uwzględniającą tylko pierwsze wyrazy rozwinięć w szereg Fouriera nieliniowych funkcji opisujących siły działające w układach sterowania.

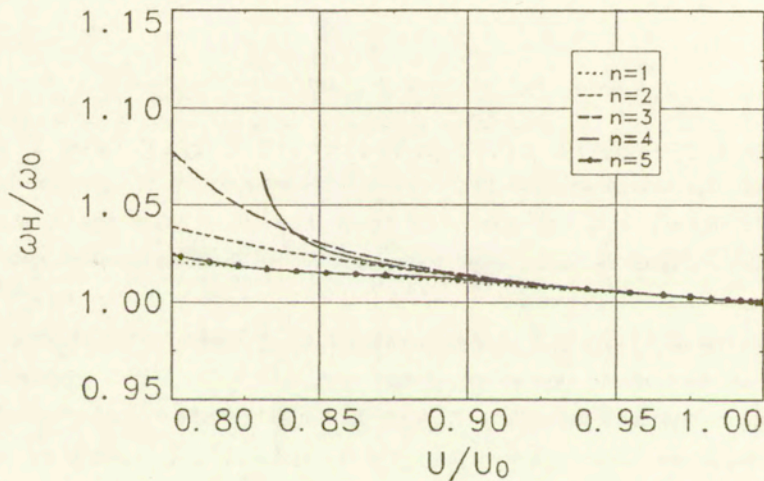


Rys. 8.9. Postać flatteru antysymetrycznego szybowca SZD-56-BoBer

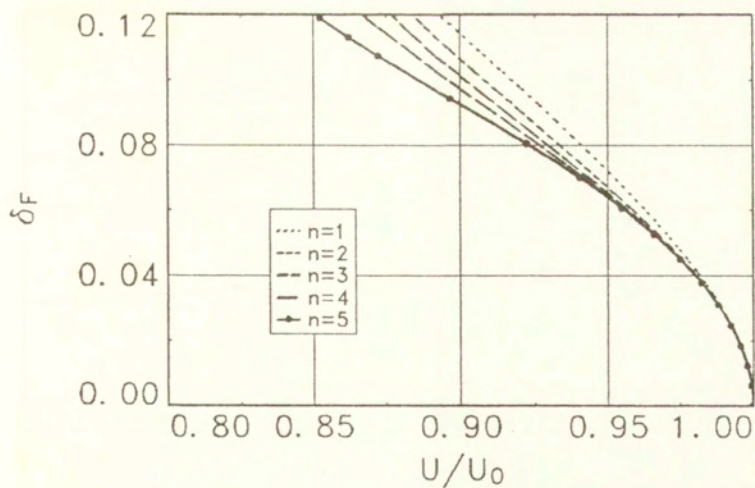
Drugi z prezentowanych przypadków dotyczył antysymetrycznego flatteru klapowo-lotkowego tego samego szybowca. Postać flatteru przedstawia rysunek 8.9. Prędkość flatteru wynosiła 49.4 m/s, a częstość kołowa 117.4 rad/s. Również w tym przypadku wystąpił niestabilny cykl graniczny poniżej krytycznej prędkości flatteru, którego amplitudę i częstość na rozmaitości centralnej przedstawiają rysunki 8.10 i 8.11. Amplitudy oscylacji klapy i lotki pokazują rysunki 8.12 i 8.13. Porównanie wyników metod redukcji na rozmaitość centralną i linearyzacji harmonicznej przedstawiają rysunki 8.14, 8.15 i 8.16. Zakres prędkości lotu pokazany na wykresach jest większy niż w poprzednim przypadku i wynosi 20% prędkości krytycznej flatteru. Widać dzięki temu (zwłaszcza na rysunku 8.13), że asymptotyczne szeregi stosowane w metodzie redukcji na rozmaitość centralną są istotnie rozbieżne, oraz że przy pięciu wyrazach aproksymacji (6.6) nie należy w tym konkretnym przypadku oczekiwać wiarygodnych wyników w zakresie większym niż około 5% poniżej prędkości flatteru. Dlatego jakościowa rozbieżność wyników prezentowanej metody i metody linearyzacji harmonicznej, widoczna na wykresach 8.14, 8.15 i 8.16, nie budzi w tym przypadku zastrzeżeń.



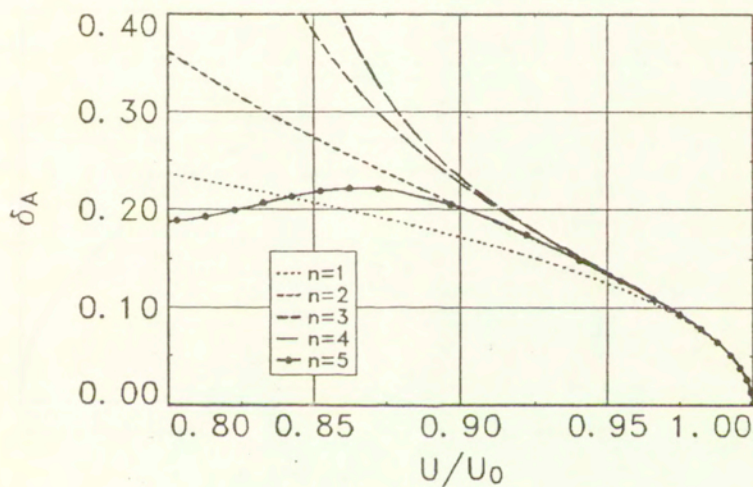
Rys. 8.10. Amplituda cyklu granicznego na rozmaitości centralnej



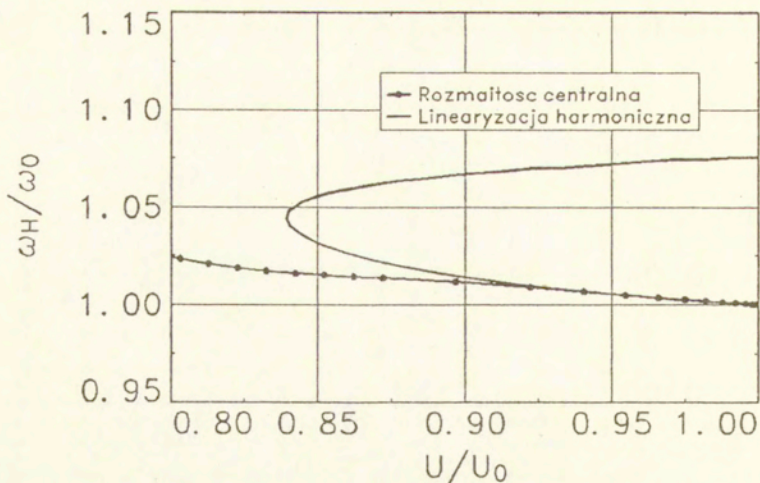
Rys. 8.11. Częstość cyklu granicznego na rozmaitości centralnej



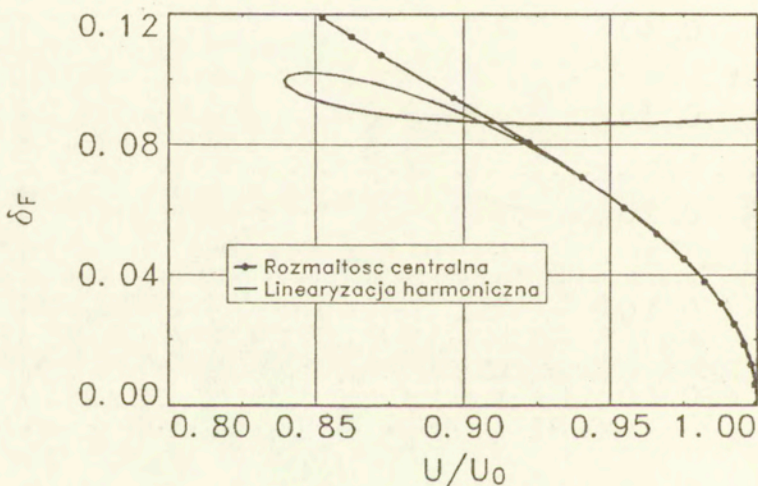
Rys. 8.12. Amplituda cyklu granicznego dla kłapy



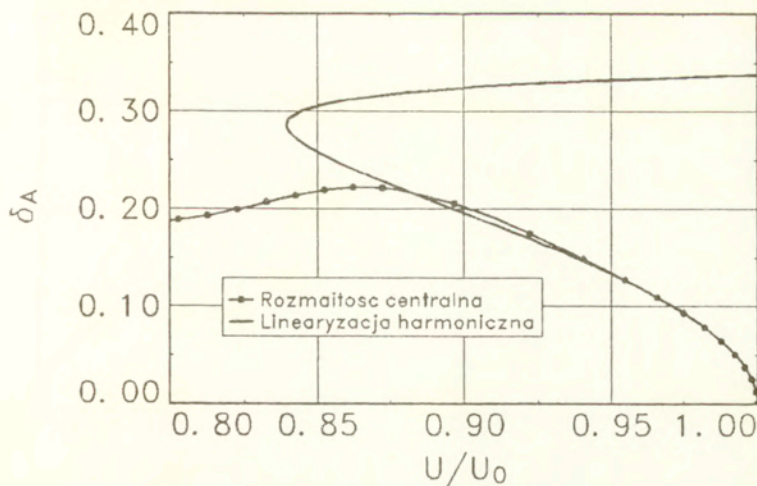
Rys. 8.13. Amplituda cyklu granicznego dla łotki



Rys. 8.14. Częstość cyklu granicznego

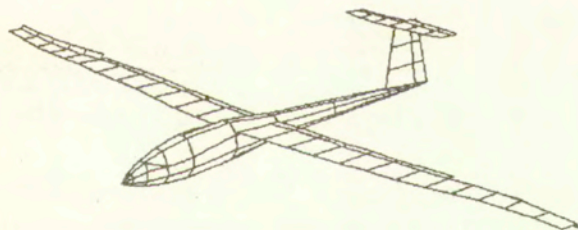


Rys. 8.15. Amplituda cyklu granicznego dla kłapy

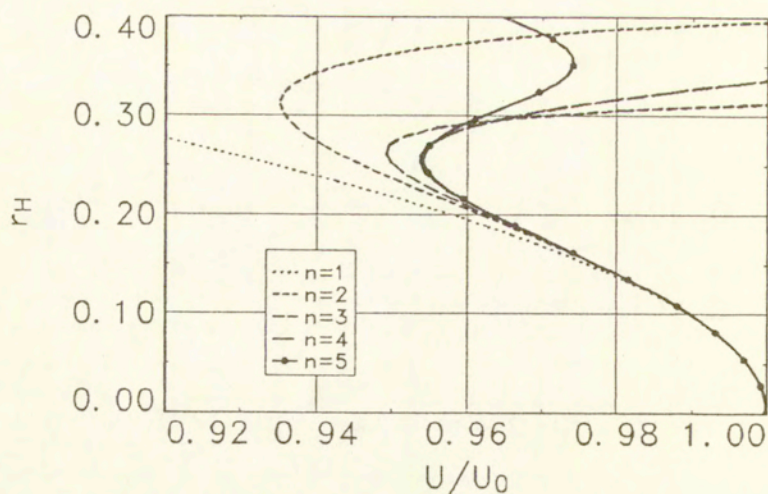


Rys. 8.16. Amplituda cyklu granicznego dla lotki

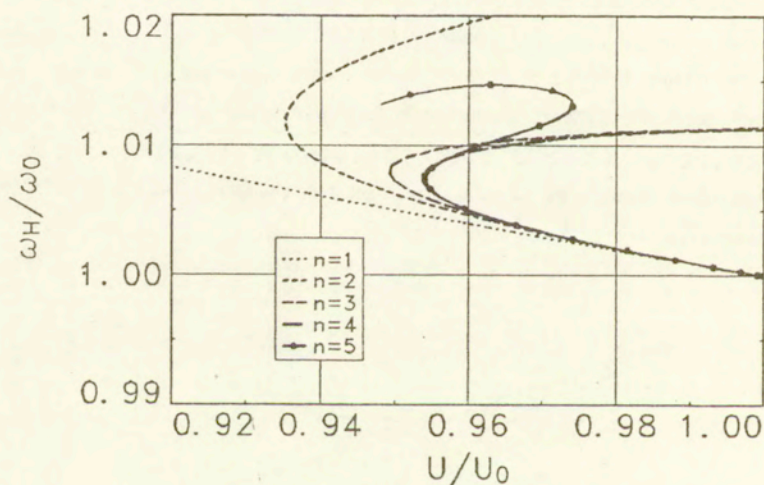
Trzeci z prezentowanych przypadków dotyczył antysymetrycznego flatteru lotkowego szybowca SZD-52-Krokus. Postać flatteru przedstawia rysunek 8.17. Udział wychylenia klap w postaci flatteru był tym razem dużo mniejszy. Prędkość flatteru wynosiła 62.5 m/s, a częstość kołowa 146.6 rad/s. Również w tym przypadku wystąpił niestabilny cykl graniczny poniżej krytycznej prędkości flatteru, którego amplitudę i częstość na rozmaitości centralnej przedstawiają rysunki 8.18 i 8.19. Amplitudy oscylacji kłapy i lotki pokazują rysunki 8.20 i 8.21. Porównanie wyników metod redukcji na rozmaitość centralną i linearyzacji harmonicznej przedstawiają rysunki 8.22, 8.23 i 8.24.



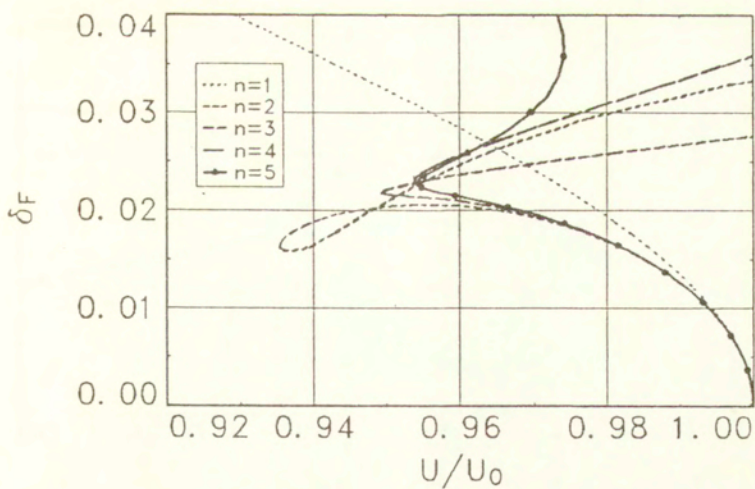
Rys. 8.17. Postać flatteru antysymetrycznego szybowca SZD-52-Krokus



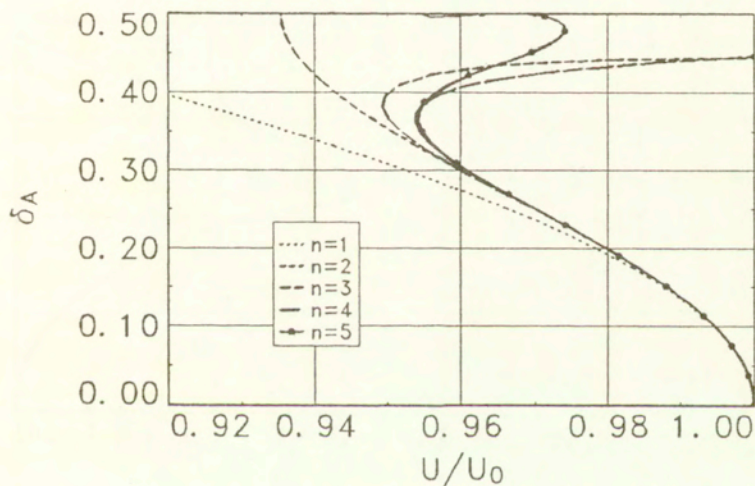
Rys. 8.18. Amplituda cyklu granicznego na rozmaiłości centralnej



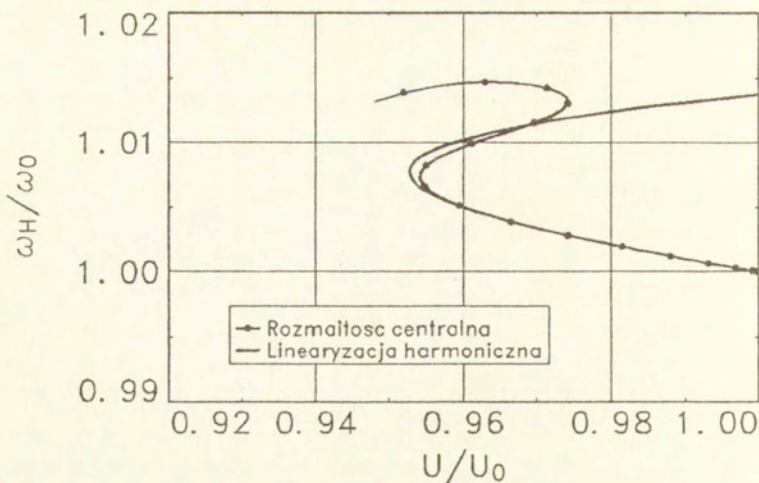
Rys. 8.19. Częstość cyklu granicznego na rozmaiłości centralnej



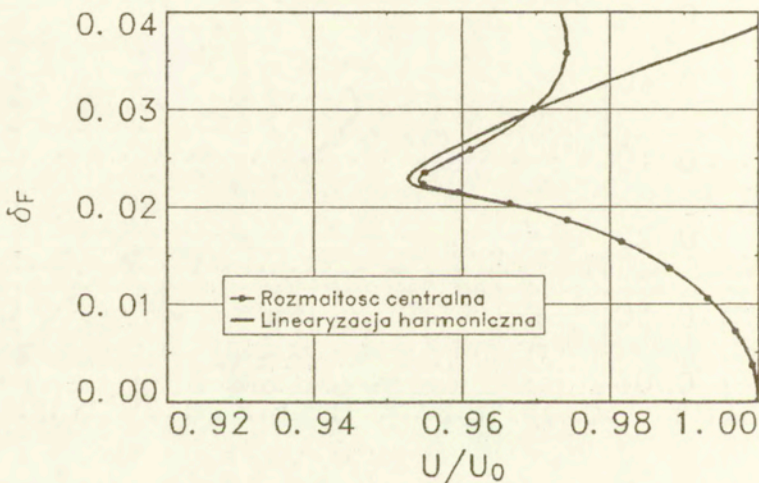
Rys. 8.20. Amplituda cyklu granicznego dla klapy



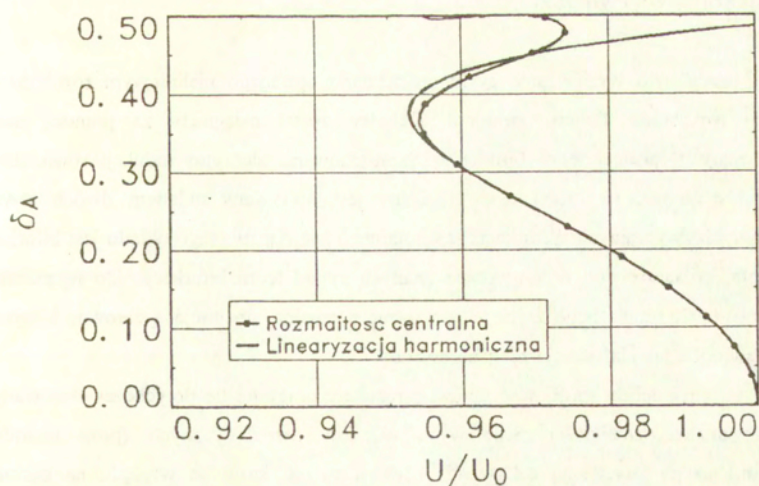
Rys. 8.21. Amplituda cyklu granicznego dla lotki



Rys. 8.22. Częstość cyklu granicznego



Rys. 8.23. Amplituda cyklu granicznego dla klapy



Rys. 8.24. Amplituda cyklu granicznego dla lotki

Tym razem obydwie porównywane metody wskazały pojawienie się stabilnej gałęzi rozwiązania, co prawda w zakresie większych amplitud, gdzie wyniki metody redukcji na rozmaidosc centralną mogą być interpretowane tylko jakościowo.

9. Uwagi końcowe i wnioski

Celem pracy było wyznaczenie cyklu granicznego opisanego nieliniowym różniczkowo-całkowym równaniem flatteru samolotu. Cel ten został osiągnięty za pomocą metod asymptotycznych lokalnej teorii bifurkacji. Skonstruowano algorytm redukcji równania na rozmiarowość centralną, na której cykl graniczny jest opisywany układem dwóch równań różniczkowych zwyczajnych. Bifurkacja stacjonarnego rozwiązania tego układu jest bifurkacją typu Hopfa, co umożliwiło wykorzystanie znanych metod teorii bifurkacji. Do wyznaczenia parametrów cyklu granicznego zastosowano formę normalną, obejmującą zarówno klasyczną bifurkację Hopfa, jak i bifurkację zdegenerowaną.

Warto w tym miejscu spróbować umieścić rezultaty pracy na tle dotychczas stosowanych metod w analizie stabilności nieliniowych układów aeroelastycznych (poza metodami bezpośredniego numerycznego całkowania równań ruchu, które ze względu na ogromną pracochłonność nie są stosowane na szeroką skalę). Przede wszystkim praca jest pierwszą, w której zastosowano asymptotyczne metody badania stabilności układów aeroelastycznych opisywanych równaniami różniczkowo-całkowymi (uwzględniającymi historię ruchu). Podejście asymptotyczne w ogóle jest atrakcyjne, ponieważ uwalnia od konieczności rozwiązywania zagadnienia początkowego dla pierwotnych równań. W przypadku obecności nieograniczonej pamięci w układzie jest to ogromnym ułatwieniem, bo wówczas przestrzeń warunków początkowych jest nieskończenie wymiarowa. Wydaje się również, że przedstawiony w pracy algorytm jest pierwszym, który z pomocą komputera można efektywnie zastosować do układów dynamicznych o większej liczbie stopni swobody z pamięcią. Stwierdzenie to trudno sformułować kategorycznie, ponieważ typ równań opisujących jeden układ dynamiczny, opisuje także wiele innych układów, występujących w najrozmaitszych dziedzinach wiedzy, a przepływ informacji pomiędzy różnymi dyscyplinami naukowymi bywa często znacznie opóźniony. W każdym razie wszystkie znane dotychczas metody analizy równań różniczkowo-całkowych są pracami matematycznymi, nie stawiającymi sobie za cel stworzenia efektywnych algorytmów, i w zastosowaniu do rozwiązania konkretnego problemu wymagają wykonywania przekształceń ręcznie (co najwyżej z pomocą programów wspomagających przekształcenia symboliczne), a w związku z tym ich zakres stosowalności z konieczności jest ograniczony. Prezentowana praca nie ma takich ograniczeń. Brak jest także formalnego ograniczenia zarówno na liczbę stopni swobody układu, jak i na liczbę wyrazów szeregów potęgowych aproksymujących amplitudę i częstość cyklu granicznego na rozmiarowości centralnej.

Metody stosowane dotychczas w analizie stabilności nieliniowych układów aeroelastycznych należą do jednej z dwóch grup. Albo traktują funkcje nieliniowe w sposób przybliżony, co sprowadza się do ich uśredniania w czasie jednego okresu i rozwiązywania zastępczego problemu liniowego (np. rozpowszechniona w różnych odmianach metoda linearyzacji harmonicznej), albo też stosują bardziej zaawansowane sposoby analizy, ale do równań różniczkowych (a nie różniczkowo-całkowych). Równaniami różniczkowymi opisane są dwa typy układów aeroelastycznych. Pierwszy dotyczy samolotów poruszających się z prędkościami naddźwiękowymi, a drugi przypadku, w którym na skutek wprowadzonych uproszczeń w poddźwiękowym modelu aerodynamicznym wpływ historii ruchu został albo częściowo, albo całkowicie wyeliminowany. Przy prędkościach naddźwiękowych ruch samolotu w sposób naturalny nie zależy od historii, ponieważ wprowadzone przez samolot zaburzenie przepływu, ze względu na skończoną prędkość jego propagacji, nigdy nie będzie oddziaływać na samolot ponownie. Przypadek ten obejmuje także flutter płyt i powłok (poszycia samolotu), opisywany na ogół przez jedno nieliniowe równanie różniczkowe cząstkowe dla funkcji jednej zmiennej geometrycznej i czasu, opisującej przemieszczenie powłoki w kierunku prostopadłym do jej nieodkształconej powierzchni. Równanie to, drugiego rzędu względem czasu i czwartego rzędu względem współrzędnej geometrycznej, można metodą rozdzielenia zmiennych i rozwinięcia w szereg Fouriera sprowadzić do układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu.

Nieskończony w czasie wpływ historii ruchu bywa czasami (zwłaszcza w zagadnieniach związanych ze sterowaniem) traktowany w sposób przybliżony poprzez skończenie wymiarową aproksymację elementów macierzy transmitancji funkcjami wymiernymi. Również w tym przypadku równanie ruchu ma postać układu równań różniczkowych zwyczajnych (metoda ta odpowiada aproksymacji elementów macierzy odpowiedzi impulsowych układu za pomocą skończonej liczby funkcji wykładniczych, o czym wspomniano na zakończenie Rozdziału 5). I wreszcie największym uproszczeniem modelu aerodynamicznego, prowadzącym do równań różniczkowych zwyczajnych, jest całkowite pominięcie śladu wirowego poprzez założenie, że w ruchu niestacjonarnym siły aerodynamiczne zależą od chwilowych wartości współrzędnych uogólnionych. Dla małych wartości częstości model ten może dawać pierwszą parę bifurkacyjnych wartości własnych obciążonych niewielkim błędem, ale obraz pozostałych punktów bifurkacji może być nieprawdziwy (jak to ma miejsce np. dla cienkiego profilu o dwóch stopniach swobody).

Z punktu widzenia zastosowań, zaletą metody redukcji na rozmaitość centralną jest wykorzystanie istniejących algorytmów do obliczania niestacjonarnych sił aerodynamicznych dla oscylacji harmonicznych, zamiast wyznaczania macierzy odpowiedzi impulsowych układu

aeroelastycznego. Opracowany algorytm redukcji równania flatteru na rozmaitość centralną może być ponadto wykorzystany do układów o dowolnej liczbie stopni swobody, natomiast jedynym źródłem ograniczeń w tym zakresie jest dostępna pamięć RAM komputera. Znaczne oszczędności można uzyskać optymalizując program obliczeniowy pod kątem właściwego gospodarowania pamięcią podczas operacji wykonywanych na szeregach Taylora wielu zmiennych.

Zastosowanie jako podstawowego narzędzia szeregów potęgowych ogranicza klasę funkcji nieliniowych, mogących występować w równaniu flatteru. W szczególności analiza nie obejmuje funkcji nieciągłych lub z nieciągłymi pochodnymi (będących wynikiem luzów lub tarcia między elementami konstrukcji) oraz funkcji wieloznacznych (pojawiających się w następstwie zjawiska histerezy). Poza tymi wyjątkami dopuszczone są wszystkie funkcje, które z wystarczającą dokładnością można aproksymować wielomianami. Nie jest przy tym istotne, czy nieliniowość jest umiejscowiona w jednym czy też w wielu punktach konstrukcji (co w szczególnym przypadku może oznaczać zdyskretyzowane nieliniowości rozłożone pierwotnie w sposób ciągły na całej konstrukcji).

Metoda redukcji na rozmaitość centralną jest metodą asymptotyczną, w dodatku posługującą się szeregami, które mogą być rozbieżne, ponieważ z analityczności szeregu potęgowego opisującego nieliniowy wyraz w równaniu flatteru nie wynika analityczność formy normalnej, opisującej ruch na rozmaitości centralnej. Co więcej, w chwili obecnej brak jest metod pozwalających oszacować liczbę wyrazów rozbieżnego szeregu asymptotycznego, której nie można przekroczyć w zadanym przedziale zmienności parametru bifurkacyjnego bez zwiększenia zadanego błędu rozwiązania. Jedyłą dostępną informacją na temat szeregu są bowiem wartości liczbowe jego pierwszych kilku lub kilkunastu współczynników. Nie wynika stąd jednak bezużyteczność metod asymptotycznych. Przedstawione w pracy porównania z innymi metodami wskazują wprawdzie na ograniczony zakres stosowalności metody redukcji na rozmaitość centralną, jeżeli jednak w tym zakresie wystąpią jakościowe zmiany rozwiązania, to zostaną również wykryte (jak na przykład dodatkowy punkt bifurkacji cyklu granicznego na Rys. 7.8).

Przedstawione w poprzednim rozdziale wyniki obliczeń cykli granicznych stanowią zbyt małą próbkę, aby na jej podstawie przeprowadzić daleko idące uogólnienia. Na kilka spraw warto jednak zwrócić uwagę. Przede wszystkim stwierdzono, że do jakościowego opisu cyklu granicznego szybowców (dotyczy to również profilu o dwóch stopniach swobody) wystarczają co najwyżej dwa wyrazy rozwinięcia formy normalnej na rozmaitości centralnej. Co więcej,

otrzymywane w tym przypadku wyniki są w bezpośredniej bliskości punktu bifurkacji również ilościowo zgodne z wynikami innych metod.

Następny wniosek dotyczy jedynie nieliniowości w postaci wielomianu trzeciego stopnia, która może być traktowana jako najprostszy model symetrycznej sprężyny o sztywniejącej charakterystyce. Otóż nawet przy dość dużych wartościach współczynnika c we wzorze (8.1) (przy wartości $c = 50$ i kącie obrotu powierzchni sterowej 0.1 radiana, siła w sprężynie pochodząca od wyrazu nieliniowego stanowi 50% siły linowej) amplituda cyklu granicznego najbardziej wychylonej powierzchni sterowej narasta bardzo szybko. W rezultacie zanim osiągnie wartość rzędu $0.15 - 0.20$ radiana, powyżej której są już widoczne jakościowe różnice pomiędzy aproksymacjami dla różnych liczb wyrazów szeregu (rysunki 8.5, 8.13 i 8.21), wcześniej przekracza wartość dopuszczalną przez zlinearyzowaną teorię aerodynamiczną (rzędu kilku stopni).

Wnioski te są również słuszne dla profilu dwuwymiarowego, chociaż nieco odmiennie na tym tle wyglądają wyniki dla drugiego przykładu (Rys. 7.11). Wprawdzie amplituda także narasta szybko w pobliżu punktu bifurkacji, jednak dla pierwszych sześciu wyrazów szeregu nie obserwuje się rozbieżnego charakteru w dość szerokim zakresie zmienności prędkości (30% poniżej prędkości krytycznej flatteru). Trudno znaleźć przyczynę tego zjawiska jedynie na podstawie obliczeń numerycznych. Można tylko stwierdzić, że dane masowe i sztywnościowe dla tego przypadku odbiegały dość znacznie od występujących w rzeczywistych konstrukcjach lotniczych: środek ciężkości był nadmiernie przesunięty do tyłu profilu, poza jego środek geometryczny, a częstość niesprężonych drgań giętych przewyższała częstość niesprężonych drgań giętych. Ponadto prędkość rozbieżności skrętnej była dwukrotnie mniejsza od prędkości flatteru. Dane te pochodziły z pracy, w której metodą eksperymentu numerycznego poszukiwano zjawiska chaosu.

Dodatek – Forma normalna Poincaré

Zagadnienie wyznaczania formy normalnej wymaga przekształcania szeregów wielu zmiennych, w szczególności podstawienia jednego szeregu w miejsce argumentu drugiego szeregu. Zwykle operacja taka prowadzi do skomplikowanych wzorów, których wyprowadzenie można znacznie uprościć za pomocą traktowanego czysto formalnie skalowania zmiennych $z \rightarrow z\varepsilon$, gdzie ε jest dodatnią liczbą rzeczywistą [26]. Ponieważ kontekst takiego skalowania jest całkowicie jasny, więc nie ma potrzeby wprowadzania nowych oznaczeń dla przeskalowanych wektorów. Układ równań różniczkowych (5.24) można zwięźle zapisać następująco:

$$(D.1a) \quad \dot{z} = F(z),$$

gdzie funkcja $F(z)$ jest dana w postaci szeregu

$$(D.1b) \quad F(z) = \sum_{\mu \geq 1} \frac{1}{\mu!} F_{\mu} z^{\mu},$$

w którym współczynniki F_{μ} są macierzami liczbowymi. Po przeskalowaniu zmiennych układ równań (D.1) przybiera postać:

$$(D.2a) \quad \dot{z} = F(z, \varepsilon),$$

z funkcją $F(z, \varepsilon)$ daną w postaci szeregu

$$(D.2b) \quad F(z, \varepsilon) = \sum_{\mu \geq 0} \frac{1}{\mu!} F_{\mu}(z) \varepsilon^{\mu}.$$

Podstawienie $\varepsilon = 1$ przywraca równaniu (D.2) pierwotną postać (D.1). Współczynniki szeregu (D.2b) są teraz funkcjami wektorowymi zmiennych z , związanymi ze współczynnikami szeregu (D.1b) zależnością

$$(D.3) \quad F_{\mu}(z) = \frac{1}{\mu+1} F_{\mu+1} z^{\mu+1}.$$

Zaletą skalowania zmiennych jest prosty zapis operacji definiującej każdy ze współczynników (D.3), bez potrzeby jawnej specyfikacji zależności od wektora zmiennych z

$$(D.4) \quad F_{\mu}(z) = \left. \frac{\partial^{\mu} F(z, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^{\mu}} \right|_{\varepsilon=0}.$$

Poszukiwana jest prawie tożsamościowa transformacja zmiennych

$$(D.5a) \quad z = \tilde{U}(\zeta, \varepsilon),$$

gdzie

$$(D.5b) \quad \tilde{U}(\zeta, \varepsilon) = \zeta + \tilde{u}(\zeta, \varepsilon),$$

sprowadzająca układ (D.2) do nowej postaci, zwanej formą normalną Poincaré,

$$(D.6a) \quad \dot{\zeta} = V(\zeta, \varepsilon),$$

w której prawa strona jest szeregiem potęgowym względem ε

$$(D.6b) \quad V(\zeta, \varepsilon) = \sum_{\mu \geq 0} \frac{1}{\mu!} V_{\mu}(\zeta) \varepsilon^{\mu}.$$

Transformację (D.5) trzeba wyznaczyć w taki sposób, aby wyzerować jak najwięcej współczynników $V_{\mu}(\zeta)$ szeregu (D.6b). Szeregi taktowane są jako formalne rozwinięcia potęgowe, ponieważ ze zbieżności szeregu (D.1b) nie wynika zbieżność szeregu (D.6b).

Zakłada się, że istnieje transformacja odwrotna do przekształcenia (D.5)

$$(D.7) \quad \zeta = \tilde{U}^{-1}(z, \varepsilon),$$

która po zróżniczkowaniu względem czasu pozwala zapisać prawą stronę (D.6a) w postaci

$$(D.8) \quad V(\zeta, \varepsilon) = D_z \tilde{U}^{-1}(z, \varepsilon) F(z, \varepsilon),$$

gdzie operator różniczkowy D_z działający na wektor \tilde{U}^{-1} daje w wyniku kwadratową macierz

$$\left(D_z \tilde{U}^{-1}(z, \varepsilon) \right)_{ij} = \left[\frac{\partial \tilde{U}_i^{-1}(z, \varepsilon)}{\partial z_j} \right].$$

Z postaci (D.5b) transformacji prawie tożsamościowej wynika, że dla $\varepsilon = 0$ $z = \zeta$ oraz

$$(D.9) \quad D_z \tilde{U}^{-1}(z, 0) = I,$$

gdzie I jest macierzą jednostkową, czyli po transformacji wyraz liniowy względem z szeregu nie ulega zmianie

$$V_0(\zeta) = F_0(\zeta).$$

Pozostałe współczynniki szeregu (D.6b) można otrzymać za pomocą różniczkowania funkcji $V(\zeta, \varepsilon)$ danej w postaci (D.8):

$$(D.10) \quad V_{\mu}(\zeta) = \left. \frac{\partial^{\mu}}{\partial \varepsilon^{\mu}} D_z \tilde{U}^{-1}(z, \varepsilon) F(z, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0}.$$

Pierwsze różniczkowanie daje wyrażenie

$$(D.11) \quad \frac{\partial V(\zeta, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \left(D_z \tilde{U}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - U \times \right) F \right) (\tilde{U}(\zeta, \varepsilon), \varepsilon),$$

w którym zastosowano skrócony zapis operatorowy

$$(D.12) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - U \times \right) F = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} - (D_z U) F + (D_z F) U,$$

oraz oznaczenie

$$U = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varepsilon}.$$

Z postaci prawej strony (D.11) widać, że każde kolejne różniczkowanie jest równoważne zastosowaniu operatora (D.12), co pozwala na prosty zapis wyższych pochodnych

$$(D.13) \quad \frac{\partial^\mu V(\zeta, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^\mu} = \left(D_z \tilde{U}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - U \times \right)^\mu F \right) (\tilde{U}(\zeta, \varepsilon), \varepsilon).$$

Powyższy wzór dla $\varepsilon = 0$ daje poszukiwaną zależność współczynników $V_\mu(\zeta)$ szeregu (D.6b) od współczynników transformacji U

$$(D.14) \quad V_\mu(\zeta) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - U \times \right)^\mu F \right) (\zeta, 0).$$

Współczynniki transformacji U

$$(D.15) \quad U(\zeta, \varepsilon) = \sum_{\mu \geq 0} \frac{1}{\mu!} U_\mu(\zeta) \varepsilon^\mu$$

wyznacza się z warunku

$$(D.16) \quad V_\mu(\zeta) = 0, \quad \text{dla } \mu \geq 1.$$

W celu obliczenia współczynników $U_\mu(\zeta)$, tworzy się w oparciu o wzór (D.14) następujący ciąg rekurencyjny:

$$f_l^{(\mu)} = f_{l+1}^{(\mu-1)} + \sum_{j=0}^l b_j^l f_{l-j}^{(\mu-1)} \times U_j, \quad l = 0, \dots, \mu$$

w którym $b_j^l = \frac{l!}{j!(l-j)!}$ są współczynnikami dwumianowymi, natomiast

$$f_i^{(0)} = F_i(\zeta), \quad V_\mu(\zeta) = f_0^{(\mu)}.$$

Ze struktury wzoru rekurencyjnego wynika, że dla kroku o numerze μ zachodzi związek

$$(D.17) \quad V_\mu(\zeta) = \Gamma_{\mu-2}(\zeta) - U_{\mu-1}(\zeta) \times F_0(\zeta),$$

w którym wektor $\Gamma_{\mu-2}(\zeta)$ zależy tylko od wyznaczonych już współczynników szeregu U , o numerach mniejszych od $\mu - 1$. W rozpatrywanym przypadku liniowy wyraz szeregu ma prostą budowę

$$F_0(\zeta) = \Lambda \zeta,$$

gdzie Λ jest diagonalną macierzą utworzoną z wartości własnych $\lambda_1 = i\omega_0$, $\lambda_2 = -i\omega_0$, $\lambda_3 = 0$. Równanie (D.17) przybiera teraz prostą postać

$$(D.18) \quad V_\mu \zeta^\mu = \Gamma_{\mu-2} \zeta^\mu - U_{\mu-1} \Lambda_\mu \zeta^\mu + \Lambda U_{\mu-1} \zeta^\mu,$$

gdzie Λ_μ jest diagonalną macierzą o elementach

$$(\Lambda_\mu)_{kk} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu_j^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, c_{\mu,m}, \quad m = 3.$$

Liczby $\mu_j^{(k)}$ odpowiadają k -tej kompozycji liczby μ (k -tej składowej wektora ζ^μ). Równanie (D.18) można zapisać oddzielnie dla każdego z elementów występujących w nim macierzy ($l = 1, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, c_{\mu,m}$)

$$(V_\mu)_{lk} = (\Gamma_{\mu-2})_{lk} - (U_{\mu-1})_{lk} \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \mu_j^{(k)} - \lambda_l \right).$$

Widać stąd, że dla elementu $(V_\mu)_{lk} = 0$ można wyznaczyć odpowiadający mu element $(U_{\mu-1})_{lk}$, ale tylko wtedy, gdy

$$(D.19) \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j \mu_j^{(k)} - \lambda_l \neq 0, \quad \text{dla } l = 1, 2, \dots, m, \quad m = 3.$$

Warunek ten bywa często w literaturze nazywany warunkiem rezonansowym. Zatem w szeregu (D.6b) nie da się wyzerować tych elementów macierzy V_μ , ($\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$), które są mnożone przez iloczyny potęg zmiennych $\zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} \zeta_3^{\mu_3}$, spełniających warunek $\mu_1 - \mu_2 = 1$

w pierwszym równaniu ($l = 1$), oraz warunk $\mu_1 - \mu_2 = -1$ w drugim równaniu ($l = 2$).

Ponieważ wszystkie elementy współczynników szeregu (D.1b), odpowiadające trzeciemu z równań, są równe zero ($\zeta_3 \equiv u$), więc również pozostaną zerowe w formie normalnej (D.6b).

W rezultacie formę normalną (ograniczoną do L wyrazów szeregu (D.6b)) można zapisać w postaci

$$(D.20a) \quad \frac{d\zeta_1(t)}{dt} = \left(i\omega_0 + P_1^{(2n)}(u) \right) \zeta_1(t) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} D_{1j}^{(2(n-j))}(u) \zeta_1^{j+1} \zeta_2^j,$$

$$(D.20b) \quad \frac{d\zeta_2(t)}{dt} = \left(-i\omega_0 + P_2^{(2n)}(u) \right) \zeta_2(t) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} D_{2j}^{(2(n-j))}(u) \zeta_2^{j+1} \zeta_1^j,$$

gdzie $n = [L/2]$, natomiast $P_1^{(2n)}(u)$, $P_2^{(2n)}(u)$, $D_{1j}^{(2(n-1))}(u)$ i $D_{2j}^{(2(n-1))}(u)$ są wielomianami względem parametru u . Niezamierzoną w opisywanej procedurze, ale niezwykle ważną własnością formy normalnej (D.20) jest jej symetria obrotowa, tzn. że równanie (D.20b) jest sprzężeniem równania (D.20a):

$$P_2^{(2n)}(u) = \bar{P}_1^{(2n)}(u), \quad D_{2j}^{(2(n-1))}(u) = \bar{D}_{1j}^{(2(n-1))}(u),$$

co pozwala na wprowadzenie współrzędnych biegunowych r, θ .

$$\zeta_1 = r e^{i\theta}, \quad \zeta_2 = \bar{\zeta}_1,$$

i sprowadzenie formy normalnej do postaci dwóch równań, z których pierwsze nie zależy od θ

$$(D.21a) \quad \frac{dr}{dt} = r \left(a_0(u) + \sum_{j=1}^n a_j(u) r^{2j} \right),$$

$$(D.21b) \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + b_0(u) + \sum_{j=1}^n b_j(u) r^{2j},$$

gdzie:

$$a_0(u) = \text{Re} \left(P_1^{(2n)}(u) \right), \quad a_j(u) = \text{Re} \left(D_{1j}^{(2(n-1))}(u) \right),$$

$$b_0(u) = \text{Im} \left(P_1^{(2n)}(u) \right), \quad b_j(u) = \text{Im} \left(D_{1j}^{(2(n-1))}(u) \right)$$

są już wielomianami o współczynnikach rzeczywistych.

Literatura

1. I. E. GARRICK, W. H. REED, *Historical Development of Aircraft Flutter*, Journal of Aircraft, **18**, 11, 897-912, November 1981.
2. T. THEODORSEN, *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*, NACA Rept. No. 496, 1935.
3. M. W. HIRSCH, S. SMALE, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York and London, 1974.
4. E. HOPF, *Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems*, Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Nat., **94**, 1942.
5. J. D. CRAWFORD, *Introduction to bifurcation theory*, Reviews of Modern Physics, **63**, 4, October 1991.
6. J. W. EDWARDS, J. L. THOMAS, *Computational Methods for Unsteady Transonic Flows*, AIAA Paper 87-0107, Jan. 1987.
7. H. FÖRSCHING, *Challenges and Perspectives in Computational Aeroelasticity*, Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics 1995, Manchester, Published by The Royal Aeronautical Society, London.
8. S. F. SHEN, *An Approximate Analysis of Nonlinear Flutter Problems*, Journal of the Aerospace Sciences, **28**, 25-32, Jan. 1959.
9. W. C. RHEINBOLDT, *A Locally Parametrized Continuation Process*, ACM Trans. Math. Software, **9**, 2, 215-235, 1983.
10. J. E. MARSDEN, M. MCCRACKEN, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Applied Mathematical Sciences, **19**, Springer-Verlag, New York 1976.
11. P. J. HOLMES, *Bifurcations to Divergence and Flutter in Flow-Induced Oscillations: A Finite Dimensional Analysis*, Journal of Sound and Vibration, **53**, 471-503, 1977.
12. L. HSU, *Analysis of Critical and Post-Critical Behaviour of Non-Linear Dynamical Systems by The Normal Form Method*, Journal of Sound and Vibration, **89**, 2, 169-194, 1983.
13. J. GUCKENHEIMER, *Multiple Bifurcation Problems of Codimension Two*, SIAM J. Math. Anal., **15**, No. 1, January 1984.
14. P. LIMA, *Hopf Bifurcation in Equations with Infinite Delay*, Ph. D. Thesis, Brown University, June 1977.
15. B. D. HASSARD, N. D. KAZARINOFF, Y.-H. WAN, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, Cambridge University Press, 1981.

16. H. W. STECH, *Hopf Bifurcation Calculations for Functional Differential Equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 109, 2, 472-491, August 1985.
17. H. W. FÖRSCHING, *Grundlagen der Aeroelastik*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1974.
18. M. NOWAK, *Equations of Motion of Free Material System Composed of Elastic Bodies*, Archiwum Budowy Maszyn, 17, 1, 1970.
19. M. NOWAK, *Obliczanie częstości i postaci drgań własnych swobodnego szybowca*, Archiwum Budowy Maszyn, 19, 2, 1972.
20. M. NOWAK, W. POTKAŃSKI, *Metodyka analizy flatteru samolotów lekkich*, Prace Instytutu Lotnictwa, 65, 1976.
21. H. CLIMENT, E. H. JOHNSON, *Aeroelastic Optimization Using MSC/NASTRAN*, Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics 1993, Strasbourg.
22. V. J. E. STARK, *General Equations of Motion for an Elastic Wing and Method of Solution*, AIAA Journal, 22, 8, 1146-1153, August 1984.
23. R. D. MILNE, *Asymptotic Solutions of Linear Stationary Integro-Differential Equations*, ARC Reports and Memoranda, No. 3548, July 1966.
24. Y. C. FUNG, *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*, John Wiley & Sons, 1955.
25. D. D. LIU, P. C. CHEN, Z. X. YAO, D. SARHADDI, *Recent Advances in Lifting Surface Methods*, Proceedings of The International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics 1995, Manchester, Published by The Royal Aeronautical Society, London.
26. S.-N. CHOW, J. K. HALE, *Methods of Bifurcation Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 251, Springer-Verlag, 1982.
27. J. L. MOIOLA, G. CHEN, *Frequency Domain Approach to Computation and Analysis of Bifurcations and Limit Cycles: A Tutorial*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 3, 4, 843-867, 1993.
28. P. HARTMAN, *Ordinary Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, 1982.
29. N. CHAFEE, *A Bifurcation Problem for a Functional Differential Equation of Finitely Retarded Type*, Journal of Math. Anal. and Appl., 35, 2, 312-348, August 1971.
30. J. HALE, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, 1977.
31. T. NAITO, *On Autonomous Linear Functional Differential Equations with Infinite Retardation*, Journal of Differential Equations, 21, 2, 297-315, July 1976.

32. H. W. STECH, *On the Adjoint Theory for Autonomous Linear Functional Differential Equations with Unbounded Delays*, Journal of Differential Equations, 27, 3, 421-443, March 1978.
33. A. KELLEY, *The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds*, Journal of Differential Equations, 3, 546-570, 1967.
34. J. CARR, *Applications of Centre Manifold Theory*, Springer-Verlag, New York, 1981.
35. Y.-H. WAN, *On the Uniqueness of Invariant Manifolds*, Journal of Differential Equations, 24, 2, 268-273, May 1977.
36. J. GRZĘDZIŃSKI, *Calculation of coefficients of a power series approximation of a center manifold for nonlinear integro-differential equations*, Archives of Mechanics, 45, 2, 235-250, 1993.
37. L. HSU, L. FAVRETTO, *Recursive formulae for normal form and center manifold theory*, J. Math. Anal. and Appl., 101, 2, 562-574, July 1984.
38. M. GOLUBITSKY, W. F. LANGFORD, *Classification and Unfoldings of Degenerate Hopf Bifurcations*, Journal of Differential Equations, 41, 375-415, 1981.
39. B. H. K. LEE, P. LEBLANC, *Forced Oscillation of a Two-Dimensional Airfoil with Nonlinear Aerodynamic Loads*, National Research Council Canada, LR-617, Jan. 1986.
40. B. H. K. LEE, P. LEBLANC, *Flutter Analysis of a Two-Dimensional Airfoil with Cubic Non-Linear Restoring Force*, National Research Council Canada, NAE-AN-36, Feb. 1986.
41. B. H. K. LEE, J. DESROCHERS, *Flutter Analysis of a Two-Dimensional Airfoil Containing Structural Nonlinearities*, National Research Council Canada, LR-618, May 1987.
42. Z. C. YANG, L. C. ZHAO, *Analysis of Limit Cycle Flutter of an Airfoil in Incompressible Flow*, Journal of Sound and Vibration, 123, 1, 1-13, 1988.
43. L. C. ZHAO, Z. C. YANG, *Chaotic Motions of an Airfoil with Non-Linear Stiffness in Incompressible Flow*, Journal of Sound and Vibration, 138, 2, 245-254, 1990.
44. J.-K. LIU, L.-C. ZHAO, *Bifurcation Analysis of Airfoils in Incompressible Flow*, Journal of Sound and Vibration, 154, 1, 117-124, 1992.
45. D. M. TANG, E. H. DOWELL, *Comparison of Theory and Experiment for Non-Linear Flutter and Stall Response of a Helicopter Blade*, Journal of Sound and Vibration, 165, 2, 251-276, 1993.
46. K. A. KOUSEN, O. O. BENDIKSEN, *Limit Cycle Phenomena in Computational Transonic Aeroelasticity*, Journal of Aircraft, 31, 6, Nov.-Dec. 1994.

47. S. J. PRICE, B. H. K. LEE, H. ALIGHANBARI, *Postinstability Behavior of a Two-Dimensional Airfoil with a Structural Nonlinearity*, Journal of Aircraft, 31, 6, Nov.-Dec. 1994.
48. J. GRZĘDZIŃSKI, *Flutter analysis of a two-dimensional airfoil with nonlinear springs based on center manifold reduction*, Archives of Mechanics, 46, 5, 735-755, 1994.
49. Y. L. LUKE, *The Special Functions and Their Approximations*, Vols. I, II, Academic Press, New York 1969.
50. R. T. JONES, *The Unsteady Lift of a Wing of Finite Aspect Ratio*, NACA Rept. 681, 1940.
51. W. POTKAŃSKI, *Nonlinear Flutter Analysis by a Continuation Method*, Proceedings of Euromech-Kolloquium 349 Simulation of Structure Fluid Interaction in Aeronautics, 16.-18. Sept. 1996, Goettingen.
52. H. TROGER, A. STEINDL, *Nonlinear Stability and Bifurcation Theory*, Springer-Verlag Wien New York, 1991.
53. J. M. T. THOMPSON, H. B. STEWART, Y. UEDA, *Safe, explosive, and dangerous bifurcations in dissipative dynamical systems*, Physical Review, 49, 2, February 1994.
54. A. H. ZEMANIAN, *Distribution theory and transform analysis*, McGraw-Hill, New York 1965.
55. E. H. DOWELL, M. ILGAMOV, *Studies in Nonlinear Aeroelasticity*, Springer-Verlag, New York 1988.
56. C. J. BORLAND, D. P. RIZETTA, *Nonlinear Transonic Flutter Analysis*, AIAA Journal, 20, 11, Nov. 1982.
57. E. J. BREITBACH, *Treatment of the Control Mechanism of Light Airplanes in the Flutter Clearance Process*, Science and Technology of Low Speed and Motorless Flight, NASA CP-2085, Pt. II, 1979, pp. 437-466.
58. T. UEDA, E. H. DOWELL, *Flutter Analysis Using Nonlinear Aerodynamic Forces*, Journal of Aircraft, 21, 2, Feb. 1984.
59. C. L. LEE, *An Iterative Procedure for Nonlinear Flutter Analysis*, AIAA Journal, 24, 5, pp. 833-840, May 1986.
60. J. ANDERSON, *Qualitative Analysis of Non-Linear Transonic Aeroelastic Phenomena*, Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics 1991, Aachen, DGLR-Bericht 91-06.
61. J. ANDERSON, *Conjectures on New Transonic Aeroelastic Phenomena*, Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics 1995, Manchester, Published by the Royal Aeronautical Society.

Spis treści

| | |
|---|----|
| 1. Wstęp | 5 |
| 2. Równanie flatteru samolotu | 12 |
| 3. Krótki przegląd metod rozwiązywania nieliniowego równania flatteru | 23 |
| 4. Redukcja równania flatteru na rozmaitość centralną | 25 |
| 5. Algorytm redukcji na rozmaitość centralną – aproksymacja potęgowa | 33 |
| 6. Bifurkacja Hopfa, forma normalna i cykl graniczny | 44 |
| 7. Przypadek szczególny – profil o dwóch stopniach swobody | 51 |
| 8. Obliczenia cyklu granicznego dla samolotu | 65 |
| 9. Uwagi końcowe i wnioski | 82 |
| Dodatek – Forma normalna Poincaré | 86 |
| Literatura | 91 |



56556