

Stefan Jan Kowalski

**MODEL SUSZENIA MATERIAŁÓW
Z UWZGLĘDNIENIEM
ICH TRWAŁYCH DEFORMACJI**

2/1996

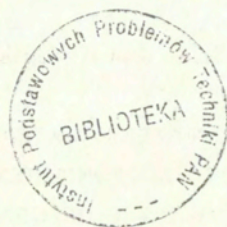
P. 269



WARSZAWA 1996

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 25 marca 1996 r.



56570



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark. wyd. 1,75 Ark. druk. 2,0

Oddano do drukarni w marcu 1996 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.

Warszawa, ul. Jasna 1

<http://rcin.org.pl>

Stefan Jan Kowalski

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN,
Zakład Mechaniki i Akustyki Ośrodków Porowatych,
ul. Mielżyńskiego 27/29, 61-725 Poznań.

**MODEL SUSZENIA MATERIAŁÓW Z UWZGLĘDNIENIEM
ICH TRWAŁYCH DEFORMACJI**

Streszczenie

Przedstawiono układ równań opisujący mechaniczne zachowanie się zawiłzonych materiałów kapilarno-porowatych poddanych procesowi suszenia. Rozważono trzy warianty odkształceń materiału szkieletu: sprężyste, sprężystolepkie i sprężysto-plastyczne. Wyprowadzono równania transportu masy i ciepła oraz ogólną postać związków fizycznych. Przedyskutowano sposób formułowania warunków brzegowych.

1. WSTĘP

Celem pracy jest opracowanie termomechanicznego modelu suszenia materiałów kapilarno-porowatych z uwzględnieniem ich deformacji trwałych. Bezpośrednim źródłem deformacji jest ubywająca w procesie suszenia wilgoć a także, choć w mniejszym stopniu, zmieniająca się temperatura materiału suszonego. Wtórą przyczyną deformacji są naprężenia, które pojawiają się w trakcie procesu suszenia jeśli rozkłady koncentracji wilgoci i temperatury w materiale suszonym są nierównomierne lub gdy

nałożone są na niego więzy zewnętrzne (brak swobody odkształcania).

Największą trudność w opisie i modelowaniu deformacji materiałów suszonych stanowią zmieniające się własności mechaniczne materiału w trakcie procesu suszenia. Implikuje to zmienność stałych materiałowych od zawartości wilgoci. Materiały ceramiczne lub ilaste, na przykład, są tuż po uformowaniu plastyczne lub sprężysto-plastyczne a pod koniec procesu suszenia są sprężysto-kruche.

Pełny opis tych zmieniających się własności wymaga zaangażowania metod mechaniki nieliniowej oraz pojęć teorii plastyczności, lepkoplastyczności, termosprężystości aż do teorii kruchego pęknięcia. Opracowanie jednego koherentnego modelu, który opisywałby deformacje od początku do końca procesu suszenia, jest zadaniem niezwykle trudnym. Bardziej realne wydaje się wykorzystanie kilku modeli adekwatnych dla poszczególnych okresów suszenia i ich sprzężanie w momentach przejściowych.

Metodologia rozważań zastosowana w niniejszej pracy oparta jest na koncepcji i pojęciach mechaniki ośrodków ciągłych. Zakłada się, że materiał suszony stanowi izotropowe kapilarnoporowate ciało o równomiernym rozkładzie zarówno porów jak i wypełniającej te pory cieczy i gazu. Bazując na równaniach bilansu oraz termodynamice procesów nieodwracalnych skonstruowano związki fizyczne i równania transportu ciepła i masy. Wyprowadzono zamknięty układ równań, który przy zadanych warunkach początkowo-brzegowych (warunkach suszenia) opisuje proces suszenia i deformowania się materiału suszonego.

2. OPIS DEFORMACJI

W procesach suszenia zawilżonych materiałów kapilarnoporowatych, które są procesami cieplnymi, możemy wyróżnić trzy przyczyny deformacji: deformacja związana ze zmianą zawartości wilgoci (zasadnicza), deformacja związana ze zmianą temperatury i deformacja mechaniczna spowodowana pojawieniem się naprężeń wewnętrznych (najbardziej niebezpieczna, gdyż niekiedy trwała). Pojęcie deformacji zawężimy tutaj do pojęcia deformacji właściwej

nałożone są na niego więzy zewnętrzne (brak swobody odkształcania).

Największą trudność w opisie i modelowaniu deformacji materiałów suszonych stanowią zmieniające się własności mechaniczne materiału w trakcie procesu suszenia. Implikuje to zmienność stałych materiałowych od zawartości wilgoci. Materiały ceramiczne lub ilaste, na przykład, są tuż po uformowaniu plastyczne lub sprężysto-plastyczne a pod koniec procesu suszenia są sprężysto-kruche.

Pełny opis tych zmieniających się własności wymaga zaangażowania metod mechaniki nieliniowej oraz pojęć teorii plastyczności, lepkoplastyczności, termosprężystości aż do teorii kruchego pęknięcia. Opracowanie jednego koherentnego modelu, który opisywałby deformacje od początku do końca procesu suszenia, jest zadaniem niezwykle trudnym. Bardziej realne wydaje się wykorzystanie kilku modeli adekwatnych dla poszczególnych okresów suszenia i ich sprzężanie w momentach przejściowych.

Metodologia rozważań zastosowana w niniejszej pracy oparta jest na koncepcji i pojęciach mechaniki ośrodków ciągłych. Zakłada się, że materiał suszony stanowi izotropowe kapilarnoporowate ciało o równomiernym rozkładzie zarówno porów jak i wypełniającej te pory cieczy i gazu. Bazując na równaniach bilansu oraz termodynamice procesów nieodwracalnych skonstruowano związki fizyczne i równania transportu ciepła i masy. Wyprowadzono zamknięty układ równań, który przy zadanych warunkach początkowo-brzegowych (warunkach suszenia) opisuje proces suszenia i deformowania się materiału suszonego.

2. OPIS DEFORMACJI

W procesach suszenia zawilżonych materiałów kapilarnoporowatych, które są procesami cieplnymi, możemy wyróżnić trzy przyczyny deformacji: deformacja związana ze zmianą zawartości wilgoci (zasadnicza), deformacja związana ze zmianą temperatury i deformacja mechaniczna spowodowana pojawieniem się naprężeń wewnętrznych (najbardziej niebezpieczna, gdyż niekiedy trwała). Pojęcie deformacji zawężymy tutaj do pojęcia deformacji właściwej

czyli odkształcenia ϵ_{ij} .

W tej pracy ograniczamy się do teorii małych odkształceń zakładając, że tensor odkształcenia jest sumą trzech wyżej wymienionych odkształceń:

$$(2.1) \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{\theta} + \epsilon_{ij}^{\vartheta} + \epsilon_{ij}^M,$$

gdzie $\epsilon_{ij}^{\theta} = \hat{\epsilon}_{ij}^{\theta}(\theta)$ jest odkształceniem spowodowanym zmianą stanu zawilżenia θ , $\epsilon_{ij}^{\vartheta} = \hat{\epsilon}_{ij}^{\vartheta}(\vartheta)$ jest odkształceniem spowodowanym zmianą temperatury ϑ a $\epsilon_{ij}^M = \hat{\epsilon}_{ij}^M(\sigma_{ij})$ jest odkształceniem mechanicznym spowodowanym naprężeniami σ_{ij} , wyindukowanymi w procesie suszenia. Odkształcenie mechaniczne jest, w ogólnym przypadku, sumą odkształcenia sprężystego $\epsilon_{ij}^{(e)}$ i odkształcenia nieodracalnego (trwałego) $\epsilon_{ij}^{(ir)}$

$$(2.2) \quad \epsilon_{ij}^M = \epsilon_{ij}^{(e)} + \epsilon_{ij}^{(ir)}.$$

Naprężenia wywołujące odkształcenia mechaniczne muszą spełniać warunek równowagi mechanicznej wewnątrz materiału:

$$(2.3) \quad \sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0,$$

gdzie b_i oznacza siłę masową (grawitacyjną) działającą na masę zawartą w jednostce objętości. Przecinek wśród indeksów oznacza różniczkowanie względem zmiennej przestrzennej. W rozważaniach zakłada się symetryczność tensora naprężeń $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Współrzędne tensora odkształcenia muszą spełniać równanie zgodności odkształceń, które ma postać {por. np. Nowacki (1970)}:

$$(2.4) \quad \epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0.$$

Równanie zgodności odkształceń stanowi jednocześnie kryterium wskazujące przy jakich rozkładach temperatury i koncentracji wilgoci nie występują odkształcenia mechaniczne a zatem naprężenia. Załóżmy, że taka sytuacja ma miejsce, czyli $\epsilon_{ij}^M = 0$. Wtedy stan odkształcenia wywołany jest polem koncentracji wilgoci i polem temperatury. Przyjmujemy, że pola te wywołują

zmiany objętościowe proporcjonalne odpowiednio do zmiany zawartości wilgoci i temperatury:

$$(2.5) \quad c_{ij}^{\theta} = \alpha_{\theta} (\theta - \overset{\circ}{\theta}) \delta_{ij} ,$$

$$(2.6) \quad c_{ij}^{\vartheta} = \alpha_{\vartheta} (\vartheta - \overset{\circ}{\vartheta}) \delta_{ij} .$$

gdzie $\alpha_{\theta} \geq 0$ i $\alpha_{\vartheta} \geq 0$ są współczynnikami rozszerzalności wilgotnościowej i termicznej a $\overset{\circ}{\theta}$ i $\overset{\circ}{\vartheta}$ jest wilgotnością i temperaturą w stanie odniesienia. Tensor odkształcenia (2.1) w tym przypadku ma postać:

$$(2.7) \quad c_{ij} = \psi \delta_{ij}; \quad \psi = \alpha_{\theta} (\theta - \overset{\circ}{\theta}) + \alpha_{\vartheta} (\vartheta - \overset{\circ}{\vartheta}) .$$

Równanie zgodności odkształceń, w przypadku gdy nie występują odkształcenia mechaniczne (stan beznaprężeniowy), przyjmuje postać:

$$(2.8) \quad \psi_{,kl} \delta_{ij} + \psi_{,ij} \delta_{kl} - \psi_{,jl} \delta_{ik} - \psi_{,ik} \delta_{jl} = 0 ,$$

które będzie spełnione o ile:

$$(2.9) \quad \psi_{,ij} = 0 .$$

Rozwiązaniem (2.9) jest:

$$(2.10) \quad \psi = a + bx + cy + dz ,$$

przy dowolnych stałych a, b, c, d . Dla obszaru nieograniczonego rozwiązanie powyższe prowadziłyby do nieskończonych wartości θ lub ϑ lub obu razem. Wykluczając ten przypadek otrzymamy $\psi = a$ lub:

$$(2.11) \quad \alpha_{\theta} \text{ grad } \theta + \alpha_{\vartheta} \text{ grad } \vartheta = 0 .$$

Z (2.11) wynika, że możliwy byłby przypadek stanu beznaprężeniowego przy gradientach temperatury i koncentracji

wilgoci różnych od zera. Musiałyby jednakże być one wzajemnie zależne od siebie t.j.

$$(2.12) \quad \text{grad } \theta = - \frac{\alpha_{\vartheta}}{\alpha_{\theta}} \text{ grad } \vartheta$$

Przeczy to założeniu o niezależności parametrów θ i ϑ . Wnioskujemy więc, że stan beznaprężeniowy w materiale zawilżonym jest generalnie możliwy tylko gdy materiał jest równomiernie zawilżony w całym obszarze, czyli gdy $\theta = \text{const}$. Analogiczny wniosek dotyczy pola temperatury.

Ponieważ w trakcie procesu suszenia mamy do czynienia z nierównomiernymi rozkładami zarówno wilgoci jak i temperatury należy sądzić, że procesowi temu towarzyszy zawsze pewien stan naprężenia. Pomijanie tego stanu w większości dotychczas prezentowanych w literaturze modeli suszenia {np. Łykov (1966), Whithaker (1977), Ilic & Turner (1986)} należy uznać za ich istotny mankament. Pokażemy, że uwzględnienie deformacji w modelu suszenia czyni go jakościowo innym. Model taki uwzględnia deformację materiału suszonego jako zjawisko sprzężone z procesem suszenia. Pozwala to opracować system kontroli procesu suszenia z punktu widzenia wytrzymałości materiału suszonego a więc warunku pozwalającego uniknąć destrukcji materiału w trakcie procesu suszenia.

3. RÓWNANIA ROZKŁADU WILGOCI I TEMPERATURY

W poprzednim punkcie wykazaliśmy, że rozkład wilgoci i temperatury determinuje stan naprężenia w materiale suszonym. Dlatego w tym punkcie zajmiemy się opisem tych rozkładów.

Podstawę do wyprowadzenia równań opisujących rozkład wilgoci są równania bilansu masy. Objętością kontrolną (układem termodynamicznym) w naszych rozważaniach będzie jednostka objętości ciała porowatego. Niech ρ_0 oznacza gęstość masową porowatego ciała, natomiast ρ_L , ρ_V , ρ_A masę cieczy, pary i powietrza zawarte w jednostce objętości ciała porowatego (ciała suszonego). Całkowita wilgoć zawarta w jednostce objętości ρ_M

jest sumą wilgoci w fazie ciekłej i gazowej:

$$(3.1) \quad \rho_M = \rho_L + \rho_V.$$

Ponieważ rzeczywista gęstość pary jest wielokrotnie mniejsza od gęstości rzeczywistej cieczy, udział masowy pary w stosunku do udziału masowego cieczy jest pomijalnie mały, czyli $\rho_M \approx \rho_L$.

Masa wilgoci odniesiona do masy ciała suchego nazywa się wilgotnością właściwą θ . Stosując powyższe oznaczenia możemy napisać:

$$(3.2) \quad \theta = \frac{\rho_M}{\rho_0} = \theta_L + \theta_V \approx \theta_L$$

gdzie $\theta_L = \rho_L / \rho_0$ i $\theta_V = \rho_V / \rho_0$ oznaczają odpowiednio zawartość cieczy i pary w porach. W naszych rozważaniach zakładamy będziemy, że deformację ciała porowatego wywołuje wilgoć w stanie skondensowanym, $\theta \approx \theta_L$. Wpływ zawartości pary θ_V na deformację będziemy zanedbywać. Dla procesów kwazistatycznych, wykluczających szoki termiczne w których mógłby mieć miejsce nagły wzrost ciśnienia pary, założenie to jest uzasadnione. Podobnie, zawartość suchego powietrza w porach $\theta_A = \rho_A / \rho_0$ przyjmować będziemy za neutralną wobec deformacji.

Jeżeli ciało suszone deformuje się (zmienia swoją objętość) to gęstość szkieletu (masy suchej) też ulega zmianie zgodnie z równaniem ciągłości masy szkieletu:

$$(3.3) \quad \dot{\rho}_0 = - \rho_0 v_{oi} \cdot i$$

gdzie v_{oi} jest współrzędną wektora prędkości deformacji szkieletu a kropka nad symbolem oznacza pochodną materialną z prędkością konwekcji v_{oi} .

Zmiana zawartości cieczy i pary w wyodrębnionej objętości ciała suszonego wynika z dwóch powodów: po pierwsze, wpływu tych substancji poza wyodrębnioną objętość; po drugie, przemiany fazowej cieczy w parę lub na odwrót. Zawartość powietrza w porach może ulegać zmianie tylko poprzez wymianę z otoczeniem, Fakt ten

zapisujemy następująco:

$$(3.4a) \quad \rho_o \dot{\Theta}_L = -\eta_{Li,i} + \rho_L^* ,$$

$$(3.4b) \quad \rho_o \dot{\Theta}_V = -\eta_{Vi,i} + \rho_V^* ,$$

$$(3.4c) \quad \rho_o \dot{\Theta}_A = -\eta_{Ai,i} ,$$

gdzie η_{Li} , η_{Vi} i η_{Ai} oznaczają strumienie cieczy, pary i powietrza przepływające przez wyodrębnioną objętość a ρ_L^* i ρ_V^* wyrażają zmiany masy cieczy i pary w przemianie fazowej przy czym:

$$(3.5) \quad \rho_L^* + \rho_V^* = 0 .$$

Równanie (3.5) wyraża zasadę zachowania masy cieczy i pary w przemianie fazowej.

Jeśli η_{Li} , η_{Vi} i η_{Ai} oznaczają strumienie cieczy, pary i powietrza przez jednostkę powierzchni ciała suszonego wyrażone w $\text{kg/m}^2\text{s}$, to dzieląc te strumienie odpowiednio przez ρ_L , ρ_V i ρ_A otrzymujemy średnie prędkości wypływu cieczy w_{Li} , pary w_{Vi} i powietrza w_{Ai} z ciała suszonego:

$$(3.6a) \quad w_{Li} = v_{Li} - v_{oi} = \eta_{Li} / \rho_L ,$$

$$(3.6b) \quad w_{Vi} = v_{Vi} - v_{oi} = \eta_{Vi} / \rho_V ,$$

$$(3.6c) \quad w_{Ai} = v_{Ai} - v_{oi} = \eta_{Ai} / \rho_A ,$$

gdzie v_{Li} , v_{Vi} i v_{Ai} są średnimi bezwzględnymi prędkościami przepływu cieczy, pary i powietrza przez ośrodek porowaty.

Równanie pozwalające określić pole temperatury wynika z bilansu energii. Niech e oznacza energię wewnętrzną materiału suszonego odniesioną do jednostki masy ciała suchego:

$$(3.7) \quad e = e_o + \overset{\text{def}}{\Theta}_L e_L + \Theta_V e_V + \Theta_A e_A .$$

gdzie e_o , e_L , e_v i e_A są energiami wewnętrznymi ciała porowatego, cieczy, pary i powietrza. Zmiana w czasie energii wewnętrznej zawartej w jednostce objętości ciała suszonego wyraża się jak następuje:

$$(3.8) \quad \rho_o \dot{e} = \sigma_{ij} \dot{e}_{ij} - (q_i + \eta_{Li} h_L + \eta_{Vi} h_v + \eta_{Ai} h_A)_{,i} + \\ + r + \eta_{Li} b_i + \eta_{Vi} b_i + \eta_{Ai} b_i.$$

gdzie q_i oznacza strumień ciepła dostarczonego do ciała przez przewodzenie i konwekcję, $h_L = e_L - P_L / \rho_L$, $h_v = e_v - P_v / \rho_v$ i $h_A = e_A - P_A / \rho_A$ oznaczają entalpie właściwe cieczy, pary i powietrza, P_L , P_v i P_A oznacza ciśnienia parcjalne cieczy, pary i powietrza, r oznacza ciepło radiacji dostarczane do ciała suszonego na jednostkę objętości a \dot{e}_{ij} oznacza tensor prędkości deformacji:

$$(3.8a) \quad \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} (v_{oi,j} + v_{oj,i}) .$$

Zmiana energii wewnętrznej, jak widać z (3.8), wynika z pracy mechanicznej naprężeń wyindukowanych podczas procesu suszenia i sił masowych oraz wymiany ciepła i masy pomiędzy ciałem suszonym i otoczeniem.

W równaniu (3.8) część odkształceń jest nieodwracalnych. Praca naprężeń wykonana na tych odkształceniach będzie również nieodwracalna. Nieodwracalne są też procesy przewodzenia ciepła i przepływu masy wilgoci, w wyniku których następuje wyrównywanie się temperatur i rozkładu koncentracji wilgoci. Również nieodwracalnymi są procesy przemian fazowych cieczy w parę, którym towarzyszy pochłanianie (lub wydzielanie w przypadku kondensacji) ciepła parowania. Nieodwracalność procesów manifestuje się produkcją entropii.

Niech s oznacza entropię całkowitą ciała suszonego odniesioną do jednostki masy ciała suchego:

$$(3.9) \quad s \stackrel{def}{=} s_o + \theta_L s_L + \theta_v s_v + \theta_A s_A ,$$

gdzie s_o , s_L , s_v , s_A są entropiami ciała porowatego, cieczy, pary

i powietrza. Entropia, którą układ termodynamiczny wymienia z otoczeniem wyraża się następująco:

$$(3.10) \quad \dot{S}^{(e)} = - \left(\frac{q_i}{T} + \eta_L s_L + \eta_{v1} s_v + \eta_{A1} s_A \right)_{,i} + \frac{r}{T} .$$

Na entropię tę składa się strumień ciepła q_i i ciepło radiacji r odniesione do temperatury bezwzględnej T oraz entropia transportowana wraz ze strumieniem masy cieczy, pary i powietrza.

Entropia produkowana w układzie $S^{(i)}$ stanowi różnicę pomiędzy entropią całkowitą a entropią wymienianą z otoczeniem. Jej przyrost całkowity jest nieujemny (II zasada termodynamiki):

$$(3.11) \quad \dot{S}^{(i)} = \rho_o \dot{s} - \dot{S}^{(e)} \geq 0 .$$

Eliminując r w (3.10) przez podstawienie go z (3.8) a następnie wstawiając (3.10) do (3.11) otrzymamy

$$(3.12) \quad \rho_o (\dot{s} T - \dot{e}) + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - (\eta_{L1} \mu_L + \eta_{v1} \mu_v + \eta_{A1} \mu_A)_{,i} + \\ + \eta_{L1} b_i + \eta_{v1} b_i + \eta_{A1} b_i - \\ - \frac{q_i + (\eta_{L1} s_L + \eta_{v1} s_v + \eta_{A1} s_A) T}{T} T_{,i} \geq 0 ,$$

gdzie

$$(3.13a) \quad \mu_L = h_L - s_L T ,$$

$$(3.13b) \quad \mu_v = h_v - s_v T ,$$

$$(3.13c) \quad \mu_A = h_A - s_A T ,$$

oznaczają potencjały cieczy, pary i powietrza.

Jeżeli w cieczy występują siły kapilarne to ciśnienie całkowite cieczy jest sumą ciśnienia hydrostatycznego P_{oL} i kapilarnego P_L^{cap} tj. $P_L = P_{oL} + P_L^{cap}$. Wtedy potencjał cieczy

jest sumą potencjału chemicznego i potencjału kapilarnego:

$$(3.13d) \quad \mu_L = \mu_L^{\text{chem}} + \mu_L^{\text{cap}} ,$$

przy czym $\mu_L^{\text{chem}} = e_L - P_{oL} / \rho_L - S_L T$, $\mu_L^{\text{cap}} = -P_L^{\text{cap}} / \rho_L$.

Nierówność (3.12) wyrazimy za pomocą funkcji energii swobodnej zdefiniowanej jak następuje:

$$(3.14) \quad f = e - sT$$

Ponadto wydzielimy moc dysypowaną oraz, wykorzystując równania bilansu masy (3.4), przepisujemy nierówność (3.12) w postaci:

$$(3.15) \quad \rho_o (\dot{f} - s\dot{\theta} + \frac{1}{\rho_o} \sigma_{ij} \dot{c}_{ij}^{(r)} + \mu_L \dot{\theta}_L + \mu_v \dot{\theta}_v + \mu_A \dot{\theta}_A) + \\ + \sigma_{ij} \dot{c}_{ij}^{(ir)} + \rho_L (\mu_v - \mu_L) - \eta_{Li} \hat{\mu}_{L,i} - \eta_{vi} \hat{\mu}_{v,i} - \eta_{Ai} \hat{\mu}_{A,i} - \\ - \left[q_i + (\eta_{Li} s_L + \eta_{vi} s_v + \eta_{Ai} s_A) T \right] T_{,i} / T \geq 0 ,$$

gdzie podstawiono:

$$(3.16) \quad \dot{c}_{ij} = \dot{c}_{ij}^{(r)} + \dot{c}_{ij}^{(ir)} .$$

Tutaj indeks "r" oznacza odwracalność a indeks "ir" nieodwracalność odkształceń. Potencjały transportu wilgoci $\hat{\mu}_L$, $\hat{\mu}_v$ i $\hat{\mu}_A$ są sumą potencjału wilgoci i potencjału grawitacyjnego tj. $\hat{\mu}_\alpha = \mu_\alpha + \mu^{\text{graw}}$; $\alpha = L, v, A$, $b_i = -\mu_{,i}^{\text{graw}}$.

Z doświadczeń wiadomo, że praca włożona w deformację trwałą w znacznej swej części zamienia się w ciepło i jest rozproszona. Miarą ilości pracy zamienionej na ciepło jest wzrost temperatury ciała deformowanego. Sugeruje to zapostulowanie równania Gibbsa w następującej postaci:

$$(3.17) \quad \dot{f} = \frac{1}{\rho_o} \sigma_{ij} \dot{c}_{ij}^{(r)} + \mu_L \dot{\theta}_L + \mu_v \dot{\theta}_v + \mu_A \dot{\theta}_A - s\dot{\theta} .$$

Funkcja energii swobodnej wyraża tę część energii zakumulowanej w materiale, która może być zamieniona na pracę mechaniczną. Nie zawiera więc członu " $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(ir)}$ ", który wyraża pracę dysypowaną. Praca ta manifestuje się wzrostem ciepła i jest zawarta w wyrażeniu " $s\dot{\theta}$ " stanowiącym prędkość zmian tzw. energii związanej.

Uwzględniając (3.17) w (3.15) otrzymamy nierówność rezidualną wyrażającą ilość energii dysypowanej na jednostkę czasu w jednostce objętości. Można pokazać, że ze względu na interpretację fizyczną i różne reprezentacje tensorowe poszczególnych członów tej nierówności muszą one być nieujemne niezależnie od pozostałych członów. Tak więc otrzymujemy:

$$(3.18a) \quad -\eta_{Li} \dot{\mu}_{L,i} - \eta_{Vi} \dot{\mu}_{V,i} - \eta_{Ai} \dot{\mu}_{A,i} - \\ - \left[q_i + (\eta_{Li} s_L + \eta_{Vi} s_V + \eta_{Ai} s_A) T \right] \dot{\theta}_{,i} / T \geq 0 ,$$

$$(3.18b) \quad \dot{\rho}_L (\mu_V - \mu_L) \geq 0 ,$$

$$(3.18c) \quad \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(ir)} \geq 0 .$$

Nierówności te narzucają pewne ograniczenia na strumienie ciepła i masy oraz prędkość przemiany fazowej i moc dysypowaną. Wnioski stąd wynikające omówimy w następnym punkcie.

4. RÓWNANIA STANU. RÓWNANIA TRANSPORTU MASY I CIEPŁA

Postać równania Gibbsa (3.17) sugeruje, że energia swobodna f jest funkcją stanu zależną od parametrów stanu takich jak: tensor odkształceń odwracalnych $\epsilon_{ij}^{(r)}$, temperatura θ , oraz zawartość cieczy θ_L , pary θ_V i powietrza θ_A , czyli:

$$(4.1) \quad \hat{f} = \hat{f}(\epsilon_{ij}^{(r)}, \theta, \theta_L, \theta_V, \theta_A) .$$

Zrózniczkowanie tej funkcji względem czasu i porównanie jej z (3.17) prowadzi do następujących równań stanu:

$$(4.2a) \quad \sigma_{ij} = \rho_0 \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial \epsilon_{ij}^{(r)}} \right]_{\vartheta, \theta_L, \theta_V, \theta_\lambda} = \sigma_{ij}(\epsilon_{ij}^{(r)}, \vartheta, \theta_L, \theta_V, \theta_\lambda),$$

$$(4.2b) \quad s = - \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial \vartheta} \right]_{\epsilon_{ij}^{(r)}, \theta_L, \theta_V, \theta_\lambda} = s(\epsilon^{(r)}, \vartheta, \theta_L, \theta_V, \theta_\lambda),$$

$$(4.2c) \quad \mu_L = \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta_L} \right]_{\epsilon_{ij}^{(r)}, \vartheta, \theta_V, \theta_\lambda} = \mu_L(\epsilon^{(r)}, \vartheta, \theta_L, \theta_V, \theta_\lambda),$$

$$(4.2d) \quad \mu_V = \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta_V} \right]_{\epsilon_{ij}^{(r)}, \vartheta, \theta_L, \theta_\lambda} = \mu_V(\epsilon^{(r)}, \vartheta, \theta_L, \theta_V, \theta_\lambda),$$

$$(4.2e) \quad \mu_\lambda = \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta_\lambda} \right]_{\epsilon_{ij}^{(r)}, \vartheta, \theta_L, \theta_V} = \mu_\lambda(\epsilon^{(r)}, \vartheta, \theta_L, \theta_V, \theta_\lambda),$$

gdzie $\epsilon^{(r)} = \epsilon_{ii}^{(r)}$.

Przedstawimy obecnie warunki dostateczne dla spełnienia nierówności (3.18). Wybierzemy wariant możliwie najprostszy, (wariant kanonicznej formy kwadratowej) i przyjmijmy że strumienie są liniowymi funkcjami wyrażen przy nich stojących tzn.

$$(4.3a) \quad \eta_{Li} = - \Lambda_L \mu_{L,i}; \quad \Lambda_L \geq 0,$$

$$(4.3b) \quad \eta_{Vi} = - \Lambda_V \mu_{V,i}; \quad \Lambda_V \geq 0,$$

$$(4.3c) \quad \eta_{\lambda i} = - \Lambda_\lambda \mu_{\lambda,i}; \quad \Lambda_\lambda \geq 0,$$

$$(4.3d) \quad q_i = - \Lambda_\vartheta \vartheta_{,i} - (\eta_{Li} s_L + \eta_{Vi} s_V + \eta_{\lambda i} s_\lambda) T; \quad \Lambda_\vartheta \geq 0,$$

$$(4.3e) \quad \rho_L^* = - \rho_V^* - \omega (\mu_V - \mu_L); \quad \omega \geq 0,$$

$$(4.3f) \quad \epsilon_{ij}^{(ir)} = c_{ijkl} \sigma_{kl}; \quad c_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \geq 0.$$

Strumienie masy cieczy, pary i powietrza są proporcjonalne odpowiednio do gradientu potencjału cieczy, pary i powietrza. Potencjały te zależą od tych samych parametrów stanu co energia swobodna (4.1).

Strumień ciepła dostarczonego do materiału składa się z dwóch części: ciepła dostarczonego przez przewodzenie w wyniku gradientu temperatury $\vartheta_{,i} \neq 0$ oraz ciepła transportowanego wraz ze strumieniami cieczy i gazu: $(\eta_{Li}S_L + \eta_{Vi}S_V + \eta_{Ai}S_A)T$.

Związek (4.3e) wyraża proporcjonalność prędkości przemiany masy w przemianie fazowej do różnicy potencjałów cieczy i pary. Równość tych potencjałów oznacza brak przemiany fazowej.

Związek (4.3f) może wyrażać prawo Newtona-Cauchy-Poissona dla ciał lepkich lub prawo płynięcia plastycznego dla ciał plastycznych przy dodatkowych warunkach dotyczących płynięcia.

Dla ciał izotropowych tensor własności materiałowych c_{ijkl} ma postać:

$$(4.4) \quad c_{ijkl} = \lambda_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \lambda_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \lambda_3 (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Ponieważ tensor naprężenia jest z założenia symetryczny więc związek (4.3f) dla porowatych ciał izotropowych przyjmie postać:

$$(4.5) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{(ir)} = \lambda_1 \sigma_{kk} \delta_{ij} + 2 \lambda_2 \sigma_{ij}.$$

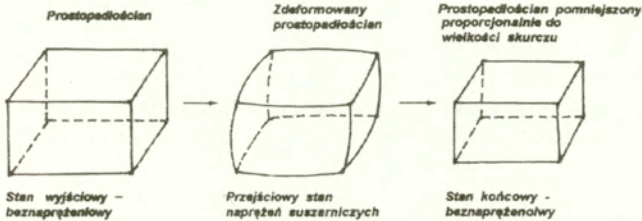
W przypadku ciał porowatych możliwe są trwałe odkształcenia zarówno dla zmian objętościowych jak i dewiatorowych. Wielkości λ_1 i λ_2 zinterpretujemy bliżej przy specyfikacji związków fizycznych.

5. ZWIĄZKI FIZYCZNE DLA ZAWILŻONEGO CIAŁA POROWATEGO

W punkcie tym przedstawimy trzy modele własności fizycznych zawilżonego ciała porowatego a mianowicie : model sprężysty, model lepkosprężysty i model sprężysto-plastyczny.

Model sprężysty

W modelu tym zakładamy, że jeżeli w trakcie procesu suszenia pojawią się naprężenia to naprężenia te zdeformują materiał liniowo-sprężysto. Oznacza to, że materiał wróci do pierwotnej postaci jeżeli naprężenia znikną. Tak więc jeżeli na początku i na końcu procesu suszenia będzie stan beznaprężeniowy to materiał suszony zachowa swoją postać (rys.1)



Rys.1 Deformacja materiału suszonego w modelu sprężystym

Może on oczywiście zmienić swoje wymiary proporcjonalnie do wielkości skurczu. Jednakże zmiana kształtu materiału suszonego o własnościach izotropowych ma miejsce jedynie wtedy gdy pojawia się stan naprężenia lecz powraca do pierwotnej postaci gdy stan naprężenia znika.

Dla modelu sprężystego odkształcenie jest odwracalne, czyli:

$$(5.1) \quad \epsilon_{ij}^{(ir)} = 0, \quad \epsilon_{ij}^{(r)} = \epsilon_{ij}^{(e)} + \epsilon_{ij}^{\Theta} + \epsilon_{ij}^{\nu} = \epsilon_{ij}$$

Związek pomiędzy odkształceniem mechanicznym a naprężeniem ma tu postać związku Hooke'a przy czym stałe materiałowe zależą od stanu zawilżenia i temperatury materiału. Aby to pokazać rozwiniemy funkcję energii swobodnej (4.1) w szereg Taylora w otoczeniu stanu wyjściowego $\epsilon_{ij}^{(r)} = 0$ (stan spęcznienia) zatrzymując wyrazy do drugiego rzędu włącznie:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\epsilon_{ij}^{(r)}, \vartheta, \theta_L, \theta_V, \theta_A) &= \hat{f}(0, \vartheta, \theta_L, \theta_V, \theta_A) + \\
 &+ \frac{\partial \hat{f}(0, \vartheta, \theta_L, \theta_V, \theta_A)}{\partial \epsilon_{ij}^{(r)}} \epsilon_{ij}^{(r)} + \\
 &+ \frac{\partial^2 \hat{f}(0, \vartheta, \theta_L, \theta_V, \theta_A)}{\partial \epsilon_{ij}^{(r)} \partial \epsilon_{kl}^{(r)}} \epsilon_{ij}^{(r)} \epsilon_{kl}^{(r)} .
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Wykorzystując równanie stanu (4.2a) otrzymujemy:

$$\sigma_{ij} = \rho_0 \frac{\partial \hat{f}(0, \vartheta, \theta_L, \theta_V, \theta_A)}{\partial \epsilon_{ij}^{(r)}} + k_{ijkl} \epsilon_{kl}^{(r)} ,
 \tag{5.3}$$

gdzie

$$k_{ijkl} = \rho_0 \frac{\partial^2 \hat{f}(0, \vartheta, \theta_L, \theta_V, \theta_A)}{\partial \epsilon_{ij}^{(r)} \partial \epsilon_{kl}^{(r)}} ,
 \tag{5.3a}$$

jest tensorem stałych materiałowych zależnym od temperatury i stanu zawilżenia materiału. Dla materiału izotropowego, rozważanego w tej pracy, tensor ten ma postać:

$$k_{ijkl} = M(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + A\delta_{ij}\delta_{kl} .
 \tag{5.3b}$$

gdzie M oznacza moduł ścinania a A moduł zmian objętościowych.

Jeśli w materiale suszonym nie występują naprężenia to stan odkształcenia (jednorodny w całym materiale) określają wzory analogiczne do (2.7). Dla takiego stanu wyliczamy pierwszy wyraz w (5.3) a mianowicie:

$$\begin{aligned}
 \rho_0 \frac{\partial \hat{f}(0, \vartheta, \theta_L, \theta_V, \theta_A)}{\partial \epsilon_{ij}^{(r)}} &= -(2M + 3A) \times \\
 &\times \left[\alpha_{\theta_L} (\theta_L - \dot{\theta}_L) + \alpha_{\theta_V} (\theta_V - \dot{\theta}_V) + \alpha_{\theta_A} (\theta_A - \dot{\theta}_A) + \alpha_{\vartheta} (\vartheta - \dot{\vartheta}) \right] \delta_{ij} .
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Zgodnie z wcześniejszym założeniem pomijamy wpływ zawartości pary i powietrza na deformację materiału suszonego przyjmując od tego

miejsca $\alpha_{\theta_v} \equiv 0$ i $\alpha_{\theta_\lambda} \equiv 0$.

Związek pomiędzy naprężeniami a odkształceniem przedstawia się następująco:

$$(5.5) \quad \sigma_{ij} = 2M \varepsilon_{ij}^{(r)} + \left[A \varepsilon_{kk}^{(r)} - \gamma_{\theta} (\theta - \theta^0) - \gamma_{\vartheta} (\vartheta - \vartheta^0) \right] \delta_{ij},$$

gdzie $\gamma_{\theta} = \alpha_{\theta} (2M + 3A)$, $\gamma_{\vartheta} = \alpha_{\vartheta} (2M + 3A)$, $\theta_L \equiv \theta$. Stałe materiałowe M , A , α_{θ} i α_{ϑ} zależą w ogólnym przypadku od zawilżenia i temperatury.

Związek (5.5) odwrócony względem odkształceń przyjmuje postać:

$$(5.6) \quad \varepsilon_{ij}^{(r)} = 2M' \sigma_{ij} + \left[A' \sigma_{kk} + \alpha_{\theta} (\theta - \theta^0) + \alpha_{\vartheta} (\vartheta - \vartheta^0) \right] \delta_{ij},$$

gdzie $2M' = 1/2M$, $A' = -A/2M(2M+3A)$.

Materiał lepkosprężysty

W tym przypadku oprócz odkształceń sprężystych powstają także odkształcenia nieodwracalne zależne od wielkości naprężeń i czasu ich występowania. Prędkość odkształceń całkowitych $\dot{\varepsilon}_{ij}$ jest sumą prędkości odkształceń odwracalnych $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(r)}$ i nieodwracalnych $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(ir)}$:

$$(5.7) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(r)} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{(ir)}.$$

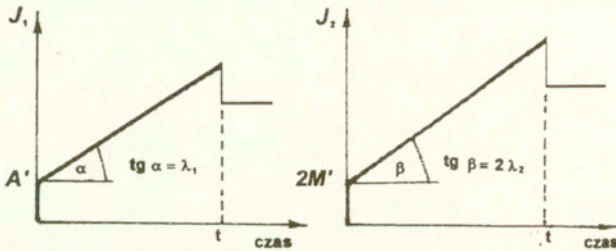
Odształcenia odwracalne wyraża związek (5.6), natomiast nieodwracalne związek (4.5). Po podstawieniu tych związków do (5.7) otrzymujemy:

$$(5.8) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = 2M' \dot{\sigma}_{ij} + A' \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + (\alpha_{\theta} \dot{\theta} + \alpha_{\vartheta} \dot{\vartheta}) \delta_{ij} + 2\lambda_2 \sigma_{ij} + \lambda_1 \sigma_{kk} \delta_{ij}.$$

Związek (5.8) możemy zapisać w postaci całkowej jak następuje:

$$(5.9) \quad \epsilon_{ij}(x_1, t) = \int_0^t \left[2J_2(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{ij}(x_1, \tau)}{\partial \tau} + J_1(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kk}(x_1, \tau)}{\partial \tau} \right] \delta_{ij} d\tau + \left[\alpha_{\theta}(\theta - \dot{\theta}) + \alpha_{\vartheta}(\vartheta - \dot{\vartheta}) \right] \delta_{ij},$$

gdzie: $J_1(t) = A' + \lambda_1 t$, $J_2(t) = M' + \lambda_2 t$, przy czym λ_1 i λ_2 wyrażają prędkość pełzania objętościowego i dewiatorowego (rys.2)



Rys.2 Funkcja pełzania dla przyjętego modelu lepkosprężystego

Całka w wyrażeniu (5.9) przedstawia odkształcenie mechaniczne będące sumą odkształcenia sprężystego $\epsilon_{ij}^{(e)}$ i odkształcenia niesprężystego (trwałego) $\epsilon_{ij}^{(ir)}$ wynikającego z pełzania materiału w przedziale czasowym $(0, t)$.

W materiałach porowatych pełzanie dotyczy zarówno zmian postaciowych jak i objętościowych.

Związek (16.3) możemy napisać w formie bardziej zwartej, a mianowicie:

$$(5.10) \quad \epsilon_{ij}(x_k, t) = \left[\alpha_{\theta}(\theta - \dot{\theta}) + \alpha_{\vartheta}(\vartheta - \dot{\vartheta}) \right] \delta_{ij} + J_{ijkl}(t) \sigma_{kl}(x, 0+) + \int_0^t J_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kl}(x_k, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

lub w formie splotu:

$$(5.10a) \quad \begin{aligned} \epsilon_{ij}(x_k, t) = & [\alpha_{\theta}(\theta - \dot{\theta}) + \alpha_{\vartheta}(\vartheta - \dot{\vartheta})] \delta_{ij} + J_{ijkl}(t) \sigma_{kl}(x, 0+) + \\ & + J_{ijkl}(t) * \frac{\partial \sigma_{kl}(x, t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

gdzie znak * oznacza splot funkcji, natomiast:

$$(5.10b) \quad J_{ijkl} = J_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + J_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

nazywa się tensorową funkcją pełzania.

Wzory (5.10) lub (5.10a) przedstawiają związek naprężenie - odkształcenie typu pełzania.

Jeżeli w materiale suchym występują efekty relaksacyjne to opisujemy związkiem naprężenie-odkształcenie typu relaksacyjnego:

$$(5.11) \quad \sigma_{ij}(x_k, t) = \epsilon_{ij}^M(x_k, 0+) G_{ijkl}(t) + \int_0^t G_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kl}^M(x_k, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

gdzie $\epsilon_{ij}^M = \epsilon_{ij} - [\alpha_{\theta}(\theta - \dot{\theta}) + \alpha_{\vartheta}(\vartheta - \dot{\vartheta})] \delta_{ij}$ jest tensorem odkształceń mechanicznych, natomiast G_{ijkl} jest tensorem czwartego rzędu noszącym nazwę *tensorowej funkcji relaksacyjnej*. Dla materiału izotropowego może on być przedstawiony za pomocą kombinacji skalarów i tensora metrycznego:

$$(5.11a) \quad G_{ijkl}(t) = \frac{G_2(t) - G_1(t)}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{G_1(t)}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

gdzie $G_1(t)$ i $G_2(t)$ są skalarnymi funkcjami relaksacyjnymi odpowiadającymi odpowiednio ścinaniu i wszechstronnemu ściskaniu. Ich postać dla przedstawionego wyżej modelu Maxwella jest następująca;

$$(5.11b) \quad G_1(t) = 2M \exp\left(-\frac{\lambda_2}{M} t\right),$$

$$(5.11c) \quad G_2(t) = (2M + 3A) \exp\left(-\frac{2\lambda_2 + 3\lambda_1}{2M + 3A} t\right),$$

przy czym $M=E/2(1+\nu)$, $K=A+2M/3=E/3(1-2\nu)$ oznaczają odpowiednio moduł ścinania i moduł zmian objętościowych natomiast E jest modułem Younga a ν współczynnikiem Poissona dla rozważanego materiału.

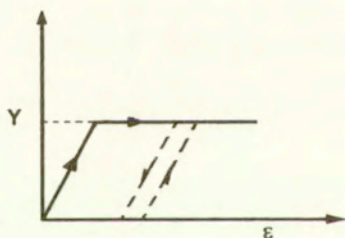
Itaya i inni (1991), przyjęli funkcje relaksacyjne w następujący sposób:

$$G_1(t) = \frac{E(t)}{1+\nu}, \quad G_2(t) = \frac{E(t)}{1-2\nu}, \quad E(t) = 7 \times 10^7 \exp\left(-\frac{t}{1,7 \times 10^4}\right) \text{ [Pa]},$$

przy czym współczynnik Poissona przyjęto $\nu=0,35$.

Model sprężysto-plastyczny

Jeśli naprężenia powstałe w procesie suszenia są stosunkowo niewielkie to ich zniknięcie może przywrócić pierwotny kształt materiału suszonego. Jeżeli jednak przekroczą one pewną wartość (granice sprężystości) mogą w materiale powstać deformacje trwałe, które nie znikną nawet jeśli naprężenia zmaleją do zera (rys.3).



Rys.3 Sprężysto-idealnie plastyczny model materiału

Jednym z podstawowych problemów w tym przypadku jest sformułowanie warunku przekroczenia granicy sprężystości zwanego warunkiem uplastycznienia. Uplastycznienie może mieć miejsce zarówno dla odkształceń postaciowych jak i czysto objętościowych. Przedstawimy tu model opracowany wcześniej przez de Boera & Kowalskiego (1983). Zgodnie z tym modelem funkcja uplastycznienia ma postać:

$$(5.12) \quad \phi = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_{kk}^2 - \beta^2 Y^2$$

$$\text{gdzie } \gamma = \frac{\beta}{\sqrt{2}(1 - \ln f_v)}, \quad \beta = \sqrt{3} \frac{1 - f_v^{\frac{2}{3}}}{3 - 2 f_v^{\frac{2}{3}}},$$

przy czym σ_{ij}^D oznacza dewiator tensora naprężenia a σ_{kk} jego część kulistą, f_v oznacza współczynnik porowatości czyli stosunek objętości porów do całkowitej objętości materiału porowatego, a Y oznacza granicę plastyczności materiału szkieletu dla rozciągania.

Prawo płynięcia plastycznego wyraża się poprzez pochodną funkcji uplastycznienia (potencjału plastycznego) względem naprężeń:

$$(5.13) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{(ir)} = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} (\sigma_{ij}^D + \gamma^2 \sigma_{kk} \delta_{ij}),$$

przy czym

$$(5.13a) \quad \phi = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0,$$

stanowi kryterium uplastycznienia dla idealnie plastycznego materiału, natomiast

$$(5.13b) \quad \phi = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0,$$

jest kryterium odciążenia ze stanu plastycznego. Współczynnik proporcjonalności $\dot{\lambda}$ jest dla materiału idealnie plastycznego wielkością stałą dodatnią co wynika z relacji (3.18c):

$$(5.14) \quad \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{(ir)} = \frac{1}{\dot{\lambda}} \left[(\dot{\epsilon}_{ij}^{(ir)})^D (\epsilon_{ij}^{(ir)})^D + \left(\frac{\dot{\epsilon}_{kk}^{(ir)}}{3\gamma} \right)^2 \right] = 2\dot{\lambda} \beta^2 Y^2 \geq 0,$$

na podstawie której stwierdzamy, że $\dot{\lambda} \geq 0$. We wzorze (5.14) wykorzystano warunek uplastycznienia $\phi = 0$ oraz podstawiono

$$\dot{c}_{ij}^{(ir)} = (\dot{c}_{ij}^{(ir)})^D + \frac{1}{3} \dot{c}_{kk}^{(ir)} \delta_{ij}.$$

Po obliczeniu $\dot{\lambda}$ z (5.14) i podstawieniu do (5.13) otrzymujemy jawny związek pomiędzy prędkościami odkształceń nieodwracalnych a naprężeniami:

$$(5.15) \quad \frac{\dot{c}_{ij}^{(ir)}}{\left[(\dot{c}_{ij}^{(ir)})^D (\dot{c}_{ij}^{(ir)})^D + \left(\frac{\dot{c}_{kk}^{(ir)}}{3\gamma} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left[\sigma_{ij}^D + \gamma^2 \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]}{\sqrt{2} \beta Y}$$

przy czym naprężenia spełniają tu następujący warunek plastyczności:

$$(5.16) \quad \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D + \gamma^2 \sigma_{kk}^2 = 2 \beta^2 Y^2.$$

Jak można zauważyć funkcja uplastycznienia (5.12) dla porowatości $f_v=0$ przyjmuje postać:

$$\phi = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D - (Y/\sqrt{3})^2$$

i jest znaną funkcją uplastycznienia wg Misesa dla ośrodków nieporowatych.

Jeżeli naprężenia nie spełniają warunku plastyczności tzn.

$$(5.17) \quad \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D + \gamma^2 \sigma_{kk}^2 < 2\beta^2 Y^2$$

to między naprężeniami i odkształceniami obowiązuje związek fizyczny dla zakresu sprężystego czyli (5.5) i (5.6).

Aby związek (5.13) korespondował z (4.5) należałoby przyjąć $\lambda_1 = (\gamma^2 - 1/3)\dot{\lambda}$ i $\lambda_2 = \dot{\lambda}/2$. Dla materiału lepkosprężystego sens współczynników jest inny (por. (5.9)).

6. ROWNANIA OPISUJACE STAN TERMICZNO WILGOTNOSCIOWY

Zasadniczą przyczyną powstawania naprężeń są niejednorodne rozkłady wilgoci i temperatury w materiale suszonym. Równania opisujące stan termiczno-wilgotnościowy stanowią równania bilansu masy i energii uzupełniane równaniami transportu oraz związkami fizycznymi.

Na podstawie równań bilansu masy (3.4) oraz równań transportu masy i jej wymiany w przemianie fazowej (4.3a,b,c,e) otrzymujemy:

$$(6.1a) \quad \rho_o \dot{\Theta}_L = (\Lambda_L \mu_{L,i})_{,i} + \omega (\mu_V - \mu_L) ,$$

$$(6.1b) \quad \rho_o \dot{\Theta}_V = (\Lambda_V \mu_{V,i})_{,i} + \omega (\mu_L - \mu_V) ,$$

$$(6.1c) \quad \rho_o \dot{\Theta}_A = (\Lambda_A \mu_{A,i})_{,i} .$$

W powyższym równaniu uwzględniono fakt, że $\mu^{graw}_{,ii} = 0$.

Dla domknięcia powyższych równań należy określić jeszcze związki pomiędzy potencjałami a parametrami stanu, w tym parametrami określającymi stan zawilżenia zgodnie z równaniami stanu (4.2).

Wobec jednoznacznej zależności potencjałów μ_L , μ_V i μ_A od parametrów Θ_L , Θ_V i Θ_A można odwrócić zależności (4.2c,d,e) i wyrazić te ostatnie przez potencjały i pozostałe parametry. W ten sposób można wyrazić równania bilansu masy (6.1) za pomocą potencjałów. Daje to pewne korzyści przy formułowaniu warunków brzegowych. Otrzymujemy wtedy:

$$(6.2a) \quad \Theta_L = \Theta_L(c^{(r)}, \vartheta, \mu_L, \mu_V, \mu_A) ,$$

$$(6.2b) \quad \Theta_V = \Theta_V(c^{(r)}, \vartheta, \mu_L, \mu_V, \mu_A) ,$$

$$(6.2c) \quad \Theta_A = \Theta_A(c^{(r)}, \vartheta, \mu_L, \mu_V, \mu_A) .$$

Rozkład temperatury determinuje równanie bilansu energii (3.8). Uwzględniając (3.14) i (3.17) oraz równanie transportu

ciepła (4.3c) otrzymujemy:

$$(6.3) \quad \rho_0 \dot{s} T = (\Lambda_\vartheta \vartheta_{,i})_{,i} + r + d$$

przy czym

$$(6.4) \quad d = \Lambda_L |\hat{\mu}_{L,i}|^2 + \Lambda_V |\hat{\mu}_{V,i}|^2 + \Lambda_\lambda |\hat{\mu}_{\lambda,i}|^2 + \omega (\mu_L - \mu_V)^2 + 2\lambda \beta^2 \gamma^2$$

oznacza moc dysypowaną wskutek transportu i wymiany masy oraz deformacji nieodwracalnych. We wzorze (6.4) wykorzystano zależności (4.3a, b, d) oraz (5.14). Tutaj:

$$(6.4a) \quad \lambda = \frac{\left[(\epsilon_{ij}^{(ir)})^D (\epsilon_{ij}^{(ir)})^D + \left(\frac{\epsilon_{kk}^{(ir)}}{3\gamma} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} \beta \gamma} \geq 0.$$

Moc dysypowana stanowi źródło ciepła.

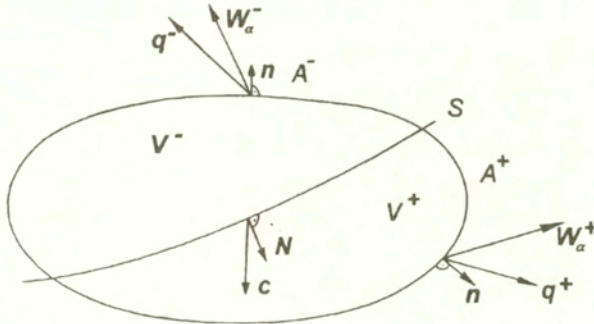
Funkcję entropii (4.2b) można wyrazić, wykorzystując zależności (6.2), za pomocą odkształcenia $\epsilon^{(r)}$, temperatury ϑ i potencjałów μ_L , μ_V , i μ_λ :

$$(6.5) \quad s = s(\epsilon^{(r)}, \vartheta, \mu_L, \mu_V, \mu_\lambda).$$

Równania (6.1a,b,c) wraz ze związkami (6.2a,b,c) oraz równanie (6.3) wraz ze związkiem (6.5) opisują stan termiczno-wilgotnościowy materiału suszonego. W równaniach tych występuje wielkość mechaniczna $\epsilon^{(r)}$ opisująca deformację objętościową materiału suszonego (skurcz). Wielkość tę określa równanie równowagi mechanicznej wraz ze związkiem fizycznym dla naprężeń, który zależnie od przyjętego modelu może mieć postać (5.5) (model sprężysty), (5.9) (model sprężystolepki) lub (5.13) (model sprężysto-plastyczny). Wymieniony wyżej zestaw równań w pełni opisuje stan mechaniczno,- termiczno,- wilgotnościowy materiału suszonego.

7. WARUNKI BRZEGOWE

Analizę warunków brzegowych ułatwiają równania bilansu napisane dla powierzchni osobliwej (powierzchni nieciągłości) S znajdującej się wewnątrz obszaru kontrolnego, (rys.4)



Rys.4 Powierzchnia osobliwa w obszarze kontrolnym

Zakładamy, że powierzchnia osobliwa, zorientowana przestrzennie jednostkowym wektorem normalnym N , przemieszcza się z prędkością c . Równania bilansu ściągnięte do obszaru powierzchni osobliwej S przyjmują następującą postać lokalną:

Bilans masy

$$(7.1) \quad \left[|\rho_{\alpha} (v_{oi} - c_i)| \right] N_i + \left[|\eta_{\alpha i}| \right] N_i = 0 ; \quad \alpha = L, V, \lambda.$$

Równowaga sił

$$(7.2) \quad \left[|\sigma_{ji}| \right] N_i = 0.$$

Bilans energii

$$(7.3) \quad \left[|\rho_{oi} e (v_{oi} - c_i)| \right] N_i + \left[|q_i + \eta_{Li} h_L + \eta_{Vi} h_V + \eta_{\lambda i} h_{\lambda}| \right] N_i = \\ = \left[|\sigma_{ji} (v_{oi} - c_i)| \right] N_i.$$

Bilans entropii

$$(7.4) \quad \left[|\rho_{oi} s (v_{oi} - c_i)| \right] N_i + \left[\frac{q_i}{T} + \eta_{Li} S_L + \eta_{Vi} S_V + \eta_{Ai} S_A \right] N_i = 0,$$

gdzie symbol $\left[| \cdot | \right]$ oznacza skok wartości funkcji na powierzchni osobliwej np. $\left[|\psi| \right] = \psi^+ - \psi^-$.

Powierzchnia brzegowa jest powierzchnią osobliwą, w naszym przypadku wyznaczoną przez brzeg porowatego ciała stałego. Zatem powierzchnia osobliwa przemieszcza się z prędkością szkieletu, czyli $v_{oi} = c_i$. Wtedy równania (7.1) do (7.4) przedstawiają warunki na brzegu. Zatem warunek (7.1) oznacza ciągłość składowej normalnej strumienia masy, czyli:

$$(7.5) \quad \left[|\eta_{\alpha i}| \right] N_i = 0 \quad \text{lub} \quad \eta_{\alpha i}^+ N_i = \eta_{\alpha i}^- N_i; \quad \alpha = L, V, A.$$

Wykorzystując równania transportu masy (4.3a, b, c), możemy warunek dla wymiany masy na brzegu wyrazić jak następuje;

$$(7.6) \quad \Lambda_{\alpha}^+ \mu_{\alpha, i}^+ N_i = \Lambda_{\alpha}^- \mu_{\alpha, i}^- N_i;$$

przy czym gradient potencjału od strony zewnętrznej powierzchni brzegowej zastępuje się zwykle wyrażeniem opisującym konwekcyjną wymianę masy np.

$$(7.7) \quad \Lambda_{\alpha}^- \mu_{\alpha, i}^- N_i = k_{\alpha} (\mu_{\alpha}^- - \mu_{\alpha a}).$$

Tutaj k_{α} oznacza współczynnik konwekcyjnej wymiany masy składnika α , natomiast $\mu_{\alpha a}$ oznacza potencjał składnika α w czynniku suszącym (zwykle odnosi się to do pary wodnej w powietrzu).

Warunek (7.2) wyraża ciągłość naprężeń na powierzchni brzegowej. Ponieważ zakładamy brak obciążeń zewnętrznych (powstałe naprężenia są samonaprężeniami termiczno wilgotnościowymi) to warunek (7.2) oznacza praktycznie brak składowej normalnej i składowych stycznych do powierzchni brzegowej.

Warunek (7.3) na brzegu wyraża ciągłość składowej normalnej strumienia ciepła i strumienia entalpii:

$$(7.8) \quad (q_i^+ + \eta_{Li}^+ h_L^+ + \eta_{Vi}^+ h_i^+ + \eta_{\alpha i}^+ h_\alpha^+) N_i = (q_i^- + \eta_{Li}^- h_L^- + \eta_{Vi}^- h_v^- + \eta_{\alpha i}^- h_\alpha^-) N_i.$$

Warunek (7.4) wyraża nieciągłość składowej normalnej strumienia ciepła i strumienia entropii z powodu przemian fazowych:

$$(7.9) \quad \left(\frac{q_i^+}{T^+} + \eta_{Li}^+ s_L^+ + \eta_{Vi}^+ s_v^+ + \eta_{\alpha i}^+ s_\alpha^+ \right) N_i \geq \left(\frac{q_i^-}{T^-} + \eta_{Li}^- s_L^- + \eta_{Vi}^- s_v^- + \eta_{\alpha i}^- s_\alpha^- \right) N_i.$$

Jeżeli przyjąć, że temperatury po obu stronach powierzchni brzegowej są sobie równe, czyli $T^+ = T^- = T$, a strumienie masy składników niezależne od siebie, to odejmując równanie (7,9) od (7.8) otrzymujemy następującą nierówność:

$$(7.10) \quad \eta_{\alpha i}^+ N_i (\mu_\alpha^+ - \mu_\alpha^-) \geq 0.$$

Przeanalizujemy możliwość spełnienia tej nierówności. Po pierwsze, stwierdzamy, że w warunkach równowagi strumienie masy i ciepła znikają a potencjały chemiczne po obu stronach powierzchni nieciągłości są sobie równe $\mu_\alpha^+ = \mu_\alpha^-$. Na podstawie (3.13) możemy wtedy napisać (por. Elwell & Pointon (1976):

$$(7.11) \quad h_L^- - h_L^+ = (s_L^- - s_L^+) T - l,$$

gdzie l oznacza ciepło parowania, znak "plus" odnosi się do cieczy a znak "minus" do pary.

Założmy teraz, że strumień $\eta_{\alpha i}$ płynie z wnętrza ciała w kierunku powierzchni brzegowej. Jego zwrot pokrywa się ze zwrotem wektora normalnego N_i , zatem $\eta_{\alpha i}^+ N_i \geq 0$. W takim przypadku nierówność (7.10) może być spełniona tylko wtedy, gdy:

$$(7.12) \quad \mu_\alpha^+ \geq \mu_\alpha^-.$$

Tak więc wnioskujemy, że transport masy będzie się zawsze odbywał

od miejsc o większym potencjale do miejsc o mniejszym potencjale. Oznacza to, że potencjał wilgoci jest funkcją odpowiedzialną za transport wilgoci.

Przyjmujemy, że $T^+ = T^-$ po obu stronach powierzchni brzegowej. Zachodzi także $h_v^+ = h_v^-$, $h_A^+ = h_A^-$, $s_v^+ = s_v^-$, $s_A^+ = s_A^-$. Na podstawie (7.8) oraz (4.3d) otrzymujemy:

$$(7.13) \quad \Lambda_{\vartheta}^+ \vartheta_{,i}^+ N_i = \Lambda_{\vartheta}^- \vartheta_{,i}^- N_i + \eta_{Li}^-(\mu_L^+ - \mu_L^-).$$

Przyjmując, że po zewnętrznej stronie powierzchni brzegowej zachodzi konwekcyjna wymiana ciepła to prawa strona (7.13) wynosi:

$$(7.14) \quad \Lambda_{\vartheta}^- \vartheta_{,i}^- N_i + \eta_{Li}^-(\mu_L^+ - \mu_L^-) = k_{\vartheta}(\vartheta^- - \vartheta_a) - l \eta_{Li}^- N_i.$$

gdzie k_{ϑ} oznacza współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła, ϑ_a jest temperaturą czynnika suszącego. Warunek brzegowy dla wymiany ciepła na powierzchni na której zachodzi przemiana fazowa ma więc postać (7.13) z prawą stroną (7.14).

Rozważmy jeszcze przypadek gdy powierzchnia osobliwa S (rys.4) jest przemieszczającą się w głąb materiału powierzchnią parowania. Gęstość masy szkieletu na tej powierzchni jest ciągła co implikuje ciągłość prędkości szkieletu $v_{oi}^+ = v_{oi}^-$. Zakładamy, że po stronie "plus" znajduje się ciecz a po stronie "minus" para. Na podstawie równania (7.1) piszemy:

$$(7.15) \quad (c_i - v_{oi})N_i = \frac{[|\eta_{Li}|] N_i}{[|\rho_L|]} = \frac{(\eta_{Li}^+ - \eta_{Li}^-) N_i}{\rho_L^+ - \rho_L^-}.$$

Widzimy, że jeśli $\eta_{Li}^+ = \eta_{Li}^-$, czyli jeśli ilość cieczy dopływającej do powierzchni S jest równa ilości pary z niej odpływającej to powierzchnia parowania nie przemieszcza się. W przeciwnym razie powierzchnia ta jest ruchoma.

Odpowiednikiem warunku (7.12) jest w przypadku ruchomej powierzchni następujący:

$$(7.16) \quad q_i^+ N_i = q_i^- N_i - l [\rho_L^+(c_i - v_{oi})N_i - \eta_{Li}^+ N_i].$$

Jeżeli brak jest podciągania cieczy do powierzchni parowania, $\eta_{Li}^+ N_i = 0$, to po prawej stronie (7.16) pozostanie wyrażenie $l\rho_L^+(c_i - v_{oi})N_i$ określające ilość ciepła zużytego na odparowanie ubywającej z powierzchni wody.

8. UWAGI KOŃCOWE

W pracy przedstawiono zarys konstruowania termomechanicznego modelu suszenia materiałów kapilarno porowatych z uwzględnieniem trwałych deformacji, które mogą wystąpić w trakcie procesu suszenia. Konieczność uwzględnienia takiego spektrum własności wynika z faktu, że materiały suszone zmieniają swe własności w trakcie procesu suszenia. Tak np. uwodniona glina może być na początku plastyczna lub sprężystolepka by w trakcie procesu suszenia stać się sprężystą lub nawet kruchą.

W rozważaniach unikano zbyt szczegółowych sformułowań. Powodem ku temu jest, że proces suszenia ze swej natury jest złożony i nawet przy ustalonych warunkach zewnętrznych (brzegowych) należy podzielić go na kilka faz: faza wstępna (podgrzewania), okres stałej prędkości suszenia, okres malejącej prędkości suszenia. Każda z tych faz charakteryzuje się innymi mechanizmami transportu masy i ciepła. Inny też układ równań opisuje stan termomechaniczny ośrodka w poszczególnych fazach. Dlatego też sensownym wydaje się wpisywanie szczegółowych równań dla konkretnych problemów i dla poszczególnych faz.

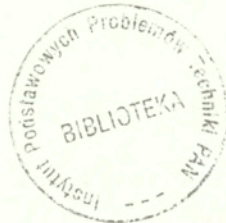
Przykłady wykorzystania przedstawionego tu modelu w zakresie sprężystym są już prezentowane w literaturze por. np. Kowalski & Musielak (1988), Kowalski, Musielak, Rybicki (1992), Rybicki (1993) i (1994), Kowalski, Rybicki (1994), i inne zgłoszone aktualnie do druku. W trakcie przygotowania do obliczeń jest model sprężystolepki.

Niniejsza praca stanowi fragment opracowania w ramach projektu badawczego No 3 P405 046 04 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych.

LITERATURA

- de Boer, R., Kowalski, S.J., 1983, A plasticity theory for fluid-saturated porous solids, *Int. J. Engng Sci.* **21**, 11, 1343-1357.
- de Boer, R., Kowalski, S.J., 1995, Thermodynamics of fluid-saturated porous media with phase change, *Acta Mechanica* **109**, 165-189.
- Elwell, D., Pointon, A.J., 1976, *Termodynamika klasyczna*, WNT, Warszawa.
- Fung, Y.C., 1969, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa.
- Ilic, M., Turner, I.W., 1986, Drying of a wet porous material, *Appl. Math.*, **10**, 2, 16-24.
- Itaya, Y., Hasatani, M., Hayakawa, K., 1991, Strain-stress formation and heat and moisture transfer of clay during drying, VII Sympozjum Suszarnictwa, Spałak/Łodzi.
- Kowalski, S.J., 1987, Thermomechanics of Constant Drying Rate Period., *Arch. Mech.*, **39**, 3, 157-176.
- Kowalski, S.J., 1990, Thermomechanics of Dried Materials., *Arch. Mech.*, **42**, 2, 123-149.
- Kowalski, S.J., 1994, Thermomechanics of the Drying Process of Fluid-Saturated Porous Media., *Drying Technology*, **12**, 3, 453-482.
- Kowalski, S.J., Musielak, G., 1988, Problemy matematycznego modelowania procesu suszenia zawilżonych ośrodków kapilarno-porowatych na przykładzie suszonej konwekcyjnie płyty. *Rozprawy Inżynierskie*, **36**, 2, 239-252.
- Kowalski, S.J., Musielak, G., Rybicki, A., 1992, Shrinkage Stresses in Dried Materials., *Engng. Trans.*, **40**, 1, 115-131.
- Kowalski, S.J., Rybicki, A., 1994, Interaction of Thermal and Moisture Stresses in Materials Dried Convectively., *Archive of Mechanics*, **46**, nr 3, 251-261.
- Lykow, A.W., 1968, *Teoria suszki*, Moskwa, Energia.
- Nowacki, W., 1970, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa.
- Pampuch, R., 1988, *Materiały ceramiczne*, PWN, Warszawa.
- Perzyna, P., 1966, *Teoria lepkoplastyczności*, PWN, Warszawa.
- Praca zbiorowa, pod red. I. Kisiela, 1982, *Mechanika skał i gruntów; Mechanika techniczna*, tomVII, PWN, Warszawa.

- Praca zbiorowa, 1985, Podstawy teoretyczne inżynierii chemicznej i procesowej, WNT, Warszawa.
- Rybicki, A., 1993, Determination of Drying Induced Stresses in a Prismatic Bar., Engng. Trans., 41, 2, 139-156.
- Rybicki, A., 1994, Zagadnienie ewolucji naprężeń skurczowych w materiałach suszonych, Praca doktorska, Politechnika Łódzka.
- Szarawara, J., 1985, Termodynamika chemiczna, WNT, Warszawa.
- Whithaker, S., 1977, Simultaneous heat, mass and momentum transfer in porous media. A theory of drying, Adv. Heat Transfer, 13, 119-203.
- Welty, J. R., Wicks, C, E, Wilson, R. E., 1969, Fundamentals of momentum, heat, and mass transfer, J. Wiley & Sons, Toronto.



56570