

39 / 1980

Witold Kosinski

TEORIA POWIERZCHNI OSOBLIWYCH
W ZASTOSOWANIU DO ANALIZY FAL

p. 269



WARSZAWA 1980

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 maja 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 39/1980



57121



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 170 egz. Ark. wyd. 4. Ark. druk. 7..

Oddano do drukarni we wrześniu 1980

Nr zamówienia WDN zam. 627/e/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Witold Kosiński
Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych
Pracownia Teorii Materiałów Niesprężystych

TEORIA POWIERZCHNI OSOBLIWYCH
W ZASTOSOWANIU DO ANALIZY FAL

Wstęp

We współczesnej mechanice kontinuum słowo "fala" obejmuje dużą klasę zjawisk. Każde zaburzenie rozchodzące się w kontinuum ze skończoną prędkością może być traktowane jako fala.

Reakcje kontinuum i jego zachowanie są na ogół opisywane układem nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, które nie są łatwe do rozwiązania. Ci, którzy zajmują się tylko "małymi" perturbacjami około pewnego ustalonego stanu kontinuum linearyzują te równania i wtedy słowo fala jest przez nich rozumiane jako zaburzenie sinusoidalne o małej amplitudzie, którego prędkość rozprzestrzeniania się jest niezależna od "małego" zaburzenia z nią związanego.

Dla większości badaczy pracujących we współczesnej mechanice kontinuum fala oznacza albo element klasy rozwiązań pewnego układu quasi-liniowych /hiperbolicznych^{1/} równań różniczkowych cząstkowych, albo poruszającą się powierzchnię nieciągłości /osobliwa/ funkcji pola, której prędkość propagacji zależy od nieliniowych własności materiału ośrodka. Temu drugiemu znaczeniu poświęcimy większość niniejszego opracowania.

1/ Istnieją niehiperboliczne równania, których rozwiązania mają typowy charakter falowy /per. WHITHAM [1974] /.

Autorem modelowania zjawisk falowych w aspekcie poruszającej się powierzchni jest HUGONOT [1887, 1889]. W jego interpretacji fala jest zaburzeniem ściśle ograniczonym do powierzchni, choć o dowolnej wielkości. Istotą tej koncepcji jest możliwość ujęcia całokształtu zagadnień, dotyczących analizy fal, w stosunkowo jednolitą, ściśle matematyczną teorię, wolną od wszelkich linearyzacji i założeń upraszczających. Ujęcie to daje aparat do badania zachowania się głównych zaburzeń falowych przenoszonych przez trajektorie tych powierzchni. Skoro intensywności zaburzeń są na nich największe, to znając je można bez rozwiązywania pełnego problemu przewidzieć czy wytrzymałość ośrodka nie będzie przekroczona, czy też nastąpi zniszczenie.

Teoria powierzchni nieciągłości bierze swój początek od prac HADAMARDA [1903], choć już wcześniej STOKES [1848] i CHRISTOFFEL [1887] otrzymali prawo zachowania masy na fali uderzeniowej. Przez następne 50 lat nie nastąpił postęp w tej dziedzinie, nie licząc wyników KOČINA [1926], dotyczących analizy równań bilansu ośrodka na powierzchniach nieciągłości.

Współczesne badania opisał artykuł ERICKSENA [1953] o falach przyspieszenia w izotropowym nieściśliwym materiale sprężystym. Następnym krokiem w badaniach był cykl prac THOMASA [1957a, b, 1961], w których wprowadzono podstawowe pojęcie do analizy zachowania się zaburzeń, a mianowicie pochodną przemieszczeniową. Kinematykę powierzchni osobliwych w tych latach badali również HAYES [1957], TRUESDELL i TOUPIN [1960].

Późniejsze badania w zakresie teorii i propagacji powierzchni w ośrodkach ciągłych mają bogatą literaturę. Dość szerokie opracowanie tematu wraz z przystępnym wprowadzeniem kinematycznych i geometrycznych związków zgodności na fali i ich zastosowaniem w liniowej termosprężystości przynosi pozycja CHADWICKA i POWDRILLA [1965]. Inne pozycje warte odnotowania należy podzielić na te, w których zajmowane się falami prędkości /tzw. silnych nieciągłości/ np. uderzeniowym oraz te - poświęcone falam przyspieszenia /tzn. słabych

nieciągłości, tzw. falam akustycznym/.

Wśród fal prędkości rozróżnia się dwie główne grupy: fale o nieciągłości normalnej składowej prędkości oraz fale o nieciągłości stycznej /tzw. powierzchnie zawirowania/ znane w hydrodynamice/por. LANDAU i LIFSZIC [1960] i KOČIN [1965] /.

Literatura przestrzennych zagadnień rozprzestrzeniania się fal uderzeniowych, ze względu na złożoność występujących tam problemów, jest uboższa. Pewne ogólne własności niejednowymiarowych fal uderzeniowych w cieczech i ciałach stałych są dyskutowane między innymi w następujących, nie wspomnianych dotąd pozycjach: BOWEN i CHEN [1972], WEYL [1949], CHEN i WRIGHT [1975] /ciecze/, BLAND [1964], [1970], CHU [1967], CURRIE [1971, 1972], MCCARTHY [1975] /wszystkie dla ciał hipersprężystych/, GERMAIN [1972] /ciecz i plazma/, MANDEL [1975] /ciała stałe sprężyste i sprężysto-plastyczne/, WESOŁOWSKI, BÜRGER [1977], ERINGEN i SUHUBI [1974], KOSIŃSKI [1980] /ciała hipersprężyste/ /por. też WESOŁOWSKI [1974], [1978], WILMAŃSKI [1975] /.

Obszerną literaturę dotyczącą głównie jednowymiarowych fal uderzeniowych można znaleźć w następujących opracowaniach monograficznych: ACHENBACH [1973] /ciała sprężyste/, CHEN [1973] /ciała sprężyste i lepkesprężyste/, SCHULER, NUNZIATO i WALSH [1973], SPENCE [1973], NUNZIATO i in. [1974] /wszystko dla ośrodków lepkesprężystych/, NOWACKI [1974, 1980], BEJDA [1971, 1972], BALTOV [1973] /ośrodki sprężysto-plastyczne/, KOSIŃSKI [1975 a], [1976], WOŁOSZYŃSKA [1979] /niesprężyste ośrodki z parametrami wewnętrznymi/ /por. też COURANT i FRIDRICHES [1948], DUNWOODY [1972], NOWACKI [1975 a, b], WŁODARCZYK [1977], CHEN i GURTIN [1971], HANYGA [1979], [1980], KENNEDY i NUNZIATO [1976].

Fale przyspieszenia, zwane tak ze względu na występującą w nich nieciągłość pola wektora przyspieszenia, mają dość szeroką literaturę. Ich współczesne badania, zapoczątkowane wspomnianą pracą ERICKSENA [1953] znacznie posunął do przodu TRUESDELL [1961], który ujedynolcił i rozszerzył wcześniejsze wyniki dotyczące fal w nieliniowych ośrodkach sprężystych.

Rok [1964] przyniósł dalsze osiągnięcia. Była nim praca GREENA [1964], który wykorzystał pochodną Thomasa do studiów nad zmianą amplitudy płaskich fal przyspieszenia. CHU [1964] i BLAND [1964] uzyskali rozwiązania w postaci fal prostych w sprężystych ośrodkach ściśliwych i nieściśliwych.

W następnym roku pojawił się w serii prac o falach w materiale z pamięcią /per. COLEMAN i in. [1965] artykuł COLEMAN i GURTINA [1965] o trójwymiarowej fali przyspieszenia w materiale prostym z pamięcią /tj. w nieliniowym materiale lepko-sprężystym/.

Od roku [1965] nastąpiła istna lawina prac oryginalnych i przeglądowych, a dotyczących analizy fal przyspieszenia w sprężystych i niesprężystych /lepko-sprężystych, sprężysto-plastycznych; ogólnie dysypatywnych/ ośrodkach ciągłych. Należy jednak zauważyć, że dla ośrodków niesprężystych najbogatsza literatura zagadnień fal przyspieszenia dotyczy fal jednowymiarowych.

Śród prac dotyczących zagadnień trójwymiarowych fal przyspieszenia wymienimy prace MANDELA [1962, 1976], HILLA [1962] /ośrodki sprężysto-plastyczne/, CHADWICKA i POWDRILLA [1965], VARLEYA i DUNWOODY'EGO [1965] i VARLEYA [1965a] /ośrodek lepko-sprężysty/, GREENA [1965] i VARLEYA [1965b], VARLEY i CUMBERBATCHE'A [1965], GURTINA i WALSHE'A [1967], CURRIE i HAYES'A [1969], CHENA [1968a,b], SUHUBI [1970], CHADWICKA i CURRIE [1973], WANGA i TRUESDELLA [1973], WESOŁOWSKIEGO [1973, 1976], BOREJKI [1979] /wszystkie dla ośrodków sprężystych bądź termosprężystych/, BALABANA, GREENA i HAGHDY'EGO [1970], TOKUOKI [1971], [1973b, 1974, 1978], KUKUDŽANOVA [1977], CLIFTONA [1974], PIAU [1975], RANIECKIEGO [1976], TINGA [1975], NOWACKIEGO [1977] /wszystkie dla ośrodków sprężysto-plastycznych/, BÜRGERA [1968] /ciecz z parametrami wewnętrznymi/, BOWENA i CHENA [1972], BOWENA i WANGA [1971b], MIHALESCU i SULICIU [1976], KOŚCIŃSKIEGO i SZMIT [1977] /wszystkie dla ośrodków z parametrami wewnętrznymi/.

Szerszy przegląd literatury znajdzie Czytelnik w nastę-

pających monografiach: CHEN [1973, 1976], ACHENBACH [1973], McCARTHY [1975], KRINGEN i SUHUBI [1974], MANDEL i BRUN [1976] /pob. też WRIGHT [1973], BOWEN i WANG [1970] /.

Jednowymiarowe fale przyspieszenia dla ciał niesprężystych znalazły swoje opracowania w pozycjach SCHULER, NUNZIATO i WALSH [1973], NUNZIATO i in. [1974] /ośrodki lepko-sprężyste/, KOSIŃSKI i PERZYMA [1972], KOSIŃSKI [1974, 1976 i 1980] /ośrodki z parametrami wewnętrznymi/ /por. też COLEMAN i GURTIN [1967] /.

Przedstawiona powyżej bibliografia nie wyczerpuje oczywiście literatury zagadnienia, a umieszczenie tylko tych pozycji we wstępie z pominięciem innych może nie mniej znaczących nie jest samowolne. Całość miała za zadanie dać Czytelnikowi choć częściowy obraz historyczny i "geograficzny" problemu propagacji fal w aspekcie poruszających się powierzchni nieciągłości funkcji pola.

Spis literatury cytowanej tutaj jak i na dalszych stronach zamieszczony po Dodatkach A i B jest sporządzony alfabetycznie. Pozycje bibliograficzne w tekście opatrzone /jak zapewne Czytelnik zauważył/ obok nazwiska autora /lub autorów/ rokiem publikacji. Zdaniem autora, tego typu informacja przy większych opracowaniach, jest pełniejsza i bardziej uniwersalna w stosunku do częste stosowanego odwołania do porządkowego numeru pozycji.

Niniejszy temat powstał w części z materiałów przygotowywanych do wykładów na Studium Doktoranckim IPPT-PAN, z opracowania dla AGH i Zespołu Rzecznawców STIPNaft. w Krakowie, a także z myślą o słuchaczach Podyplomowego Studium z dziedziny zastosowań matematyki w mechanice organizowanego przez Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW.

1. POWIERZCHNIA W KONTINUUM, JEJ GEOMETRIA I KINEMATYKA

1.1. Powierzchnia ruchoma w kontinuum

W celu opisania trójwymiarowych zagadnień rozprzestrzeniania się fal w ośrodkach ciągłych wprowadzimy koncepcję ruchomej powierzchni w kontinuum jako jednoparametrowej rodziny regularnych powierzchni $\{s(t)\}_{t \in I}$ w przestrzeni euklidesowej E^3 , której parametr t , przebiegający pewien odcinek I osi rzeczywistej, będziemy utożsamiać z czasem. Zakładamy, że istnieje reprezentacja tej rodziny w postaci przedstawienia parametrycznego

$$/1.1./ \quad s(t) : \quad \underline{x} = \underline{\varphi}(t, l^1, l^2),$$

gdzie \underline{x} jest punktem z przestrzeni E^3 , zaś zmienne l^1, l^2 , zwane parametrami Gaussa /lub parametrami powierzchniowymi/ przebiegają pewien otwarty podzbiór w E^2 . O funkcji $\underline{\varphi}$ zakładamy co najmniej ciągłą różniczkowalność względem swych zmiennych. Jeśli użyjemy zapisu wskaźnikowego dla /1.1./, tzn.

$$x^i = \varphi^i(t, l^1, l^2),$$

to wymagamy, aby rząd macierzy $(\partial \varphi^i / \partial l^\alpha)$ ($i = 1, 2, 3, \alpha = 1, 2$) wyniósł dwa. Zapewnia to istnienie wektora normalnego w każdym punkcie powierzchni, a jednocześnie stwarza możliwość eliminacji parametrów l^α z /1.1/ i przedstawienie rodziny powierzchni w postaci uwikłanej.

$$/1.2/ \quad s(t) : \quad g(t, \underline{x}) = 0.$$

Zbierzemy teraz podstawowe związki dla powierzchni, przyjmując, że małe litery łacińskie we wskaźnikach, np. i, j, k przybierają wartości 1, 2 i 3, zaś wskaźniki alfabetu greckiego /np. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ / - wartości 1, 2. Jak zwykle w

odniesieniu do zagadnień mechaniki korzystamy z konwencji sumacyjnej Einsteina.

Wektory $\underline{\psi}_{, \alpha}$ styczne do powierzchni $S(t)$ dane są przez

$$/1.3/ \quad \underline{\psi}_{, \alpha} = \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t^{\alpha}} \quad \text{albo} \quad \psi_{, \alpha}^i(t, l^1, l^2) = \frac{\partial \psi^i(t, l^1, l^2)}{\partial t^{\alpha}} .$$

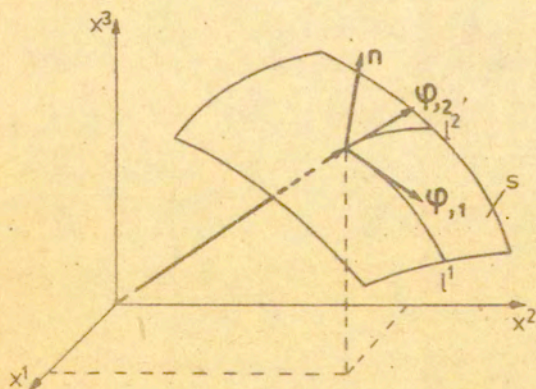
Wektor $\underline{\psi}_{, 1}$ jest styczny do linii współrzędnej $l^2 = \text{const}$. Jednostkowy wektor normalny przedstawiamy związkiem

$$/1.4/ \quad \underline{n} = \frac{(\underline{\psi}_{, 1} \times \underline{\psi}_{, 2})}{|\underline{\psi}_{, 1} \times \underline{\psi}_{, 2}|_3} ,$$

gdzie $|\cdot|_3$ oznacza długość wektora w E^3 . Stąd otrzymujemy

$$/1.5/ \quad \underline{n} \cdot \underline{n} = 1 , \quad \underline{n} \cdot \underline{\psi}_{, \alpha} = 0 ,$$

gdzie kropka oznacza iloczyn skalarny wektorów /Rys.1/.



Rys.1. Linie współrzędnych na powierzchni, wektory styczne i normalny.

Pierwsza forma kwadratowa /tensor metryczny/ jest zdefiniowana przez swoje składowe

$$/1.6/ \quad g_{\alpha\beta} = \Psi_{,\alpha} \cdot \Psi_{,\beta}.$$

Wyrazy odwrotne dane są przez zależność

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma},$$

gdzie δ_{α}^{γ} są symbolami Kroneckera.

Różniczkując wektory styczne $\Psi_{,\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, względem współrzędnych Gaussa $1^1, 1^2$ otrzymujemy nowe wektory $\Psi_{,\alpha\beta}$, które można rozłożyć w bazie wektorów $\Psi_{,1}, \Psi_{,2}, \underline{n}$. Oznaczając współczynniki rozkładu wektora $\Psi_{,\alpha\beta}$ na kierunku $\Psi_{,1}$ i $\Psi_{,2}$ odpowiednio przez $\Gamma_{\alpha\beta}^1$ i $\Gamma_{\alpha\beta}^2$, natomiast przez $b_{\alpha\beta}$ współczynnik rozkładu na kierunek normalny \underline{n} , otrzymamy tzw. wzór Gaussa

$$\Psi_{,\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^1 \Psi_{,1} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \Psi_{,2} + b_{\alpha\beta} \underline{n},$$

lub krócej

$$/1.6/ \quad \Psi_{,\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \Psi_{,\gamma} + b_{\alpha\beta} \underline{n}.$$

Współczynniki $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ nazywają się symbolami Christoffela drugiego rodzaju, zaś $b_{\alpha\beta}$ są składowymi drugiej formy kwadratowej. Spełniają one, ze względu na /1.5/ i /1.6/ następujące równanie:

$$/1.7/ \quad b_{\alpha\beta} = \Psi_{,\alpha\beta} \cdot \underline{n}.$$

W rozkładzie pochodnych $\underline{n}_{,\alpha} = \frac{\partial \underline{n}}{\partial 1^{\alpha}}$ względem $\Psi_{,1}, \Psi_{,2}$ i \underline{n} nie wystąpi wektor \underline{n} , gdyż $\underline{n}_{,\alpha}$ jest pro-

stopadły do \underline{n} /różniczkowanie związku /1.5/ prowadzi do $\underline{n} \cdot \underline{n},\alpha = 0$ /1 leży zatem w płaszczyźnie wektorów $\underline{\Psi}_1, \underline{\Psi}_2$ i \underline{n} . Oznaczając współczynniki tego rozkładu przez $-b_\alpha^r$ mamy rozkład

$$/1.8/ \quad \underline{n},\alpha = -b_\alpha^r \underline{\Psi}_r.$$

Łatwo wykazać, że $b_\alpha^r = b_{\alpha\beta} g^{\beta r}$, a stąd $b_{\alpha\beta} = -\underline{\Psi}_r,\alpha \cdot \underline{n},\beta$. Wyrażenie /1.8/ nosi nazwę wzórów Weingartena. Wprowadzimy krzywiznę Gaussa K_g jako drugi niezmiennik drugiej formy kwadratowej

$$/1.9/ \quad K_g = \frac{\det (b_{\alpha\beta})}{\det (g_{\alpha\beta})} = \det (b_\beta^\alpha),$$

oraz krzywiznę średnią K_m jako połowę pierwszego niezmiennika.

$$/1.10/ \quad K_m = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} b_\alpha^\alpha.$$

Przy użyciu tensora metrycznego wprowadzimy dualną bazę $\{\underline{\Psi}^1, \underline{\Psi}^2, \underline{n}\}$ /zwaną kobazą/ do bazy $\{\underline{\Psi}_1, \underline{\Psi}_2, \underline{n}\}$ poprzez związek

$$/1.11/ \quad \underline{\Psi}^\alpha = g^{\alpha\beta} \underline{\Psi}_{,\beta}.$$

Wtedy $\underline{\Psi}^\alpha \cdot \underline{\Psi}_{,\beta} = g_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha, \underline{\Psi}^\alpha \cdot \underline{n} = \underline{\Psi}_{,\alpha} \cdot \underline{n} = 0$, $\underline{n} \cdot \underline{n} = 1$ i otrzymamy

$$/1.12/ \quad \underline{\Psi}^1 \otimes \underline{\Psi}_{,1} + \underline{\Psi}^2 \otimes \underline{\Psi}_{,2} + \underline{n} \otimes \underline{n} = 1,$$

gdzie \otimes oznacza iloczyn tensorowy, zaś 1 jest tensorem jednostkowym w E^3 . W zapisie indeksowym mamy postać

$$/1.13/ \quad g^{\alpha\beta} \underline{\Psi}_{,\alpha}^i \underline{\Psi}_{,\beta}^j + \underline{n}^i \underline{n}^j = G^{ij},$$

gdzie g^{ij} są składowymi tensora metrycznego w E^3 . Jeśli układ jest prostokątny kartezjański, to mamy

$$g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha}^i \varphi_{,\beta}^j + a^i a^j = \delta^{ij} .$$

W tym miejscu warto przypomnieć, że dla wektorowych i tensorowych wielkości geometrycznych zdefiniowanych na powierzchni pochodne względem współrzędnych Gaussa w zapisie indeksowym przyjmują postać pochothanej kowariantnej, oznaczanej dalej średnikiem. W przypadku wielkości /pola/ skalarnej $a = a(t, l^1, l^2)$ pochodna kowariantna $a_{;\alpha}$ pokrywa się z pochodną cząstkową, tzn.

$$a_{;\alpha} = \frac{\partial a}{\partial l^\alpha} (t, l^1, l^2) .$$

Dla pola wektorowego $\underline{a} = a_r \underline{\varphi}^r = a^\beta \underline{\varphi}_{,\beta}$ mamy

$$/1.14/ \quad a_{;\alpha}^\delta = \frac{\partial a_\alpha^\delta}{\partial l^\alpha} - \Gamma_{\alpha\delta}^\delta a_\alpha^\delta, \quad a_{;\alpha}^\beta = \frac{\partial a_\alpha^\beta}{\partial l^\alpha} + \Gamma_{\alpha\delta}^\beta a_\alpha^\delta .$$

Należy zauważyć, że składowe pola tensorowego /wektorowego/ otaczającej powierzchnię przestrzeni euklidesowej, są traktowane przy różniczkowaniu jako tensory dwupunktowe. Na przykład, jeśli

$$\underline{\Psi} = \Psi^i \underline{e}_i, \quad \text{to} \quad \Psi_{;\alpha}^i = \frac{\partial \Psi^i}{\partial l^\alpha} \underline{e}_i - \Psi_{,\alpha}^i,$$

gdzie \underline{e}_i są wektorami bazy w E^3 . Natomiast dla pola wektorów stycznych /które jest typowym polem dwupunktowym/ $\underline{\varphi}_{,\alpha}$ mamy, zgodnie z /1.14/,

$$\begin{aligned} \varphi_{;\alpha;\beta} &= \left\{ \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial l^\alpha \partial l^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \frac{\partial \varphi^i}{\partial l^\lambda} \right\} \underline{e}_i \\ &= \varphi_{;\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \varphi_{;\lambda} = \varphi_{;\alpha\beta} . \end{aligned}$$

/1.15/

Wzór Gaussa /1.6/ zapisany z użyciem pochodnej kowarian-
tnej przyjmie postać

$$/1.16/ \quad \varphi_{;\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} \cdot \underline{n}.$$

Dla powierzchni poruszającej się wszystkie geometryczne
własności dotąd omówione są funkcjami czasu /por. /1.1//.
Dyskusję zmian czasowych wielkości zaczęliśmy od wprowadzenia
wektora

$$/1.17/ \quad \underline{e} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{albo} \quad \underline{e}^1 = \frac{\partial \varphi^1(t, l^1, l^2)}{\partial t}$$

prędkości poruszania się punktów powierzchni $s(t)$ mierzonej
w parametryzacji $/l^1, l^2/$. Prędkość ta istotnie zależy
od parametryzacji, gdyż przy nowej parametryzacji

$\bar{\varphi}(t, l^1, l^2) = \varphi(t, \theta^1(t, l^1, l^2), \theta^2(t, l^1, l^2))$
różnica między prędkością $\bar{\underline{e}}$, mierzoną w parametryzacji
 \bar{l}^1, \bar{l}^2 , a prędkością \underline{e} będzie

$$\bar{\underline{e}} - \underline{e} = \varphi_{;\alpha} \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial t}.$$

Ostatni związek wskazuje, że wektory prędkości $\bar{\underline{e}}$ i \underline{e}
mają tę samą składową normalną. Oznaczając ją przez \underline{n} otrzy-
many

$$/1.18/ \quad \underline{n} = u_n \underline{n}, \quad \text{gdzie} \quad u_n = \underline{e} \cdot \underline{n} = \bar{\underline{e}} \cdot \underline{n}.$$

Wielkości u i u_n jako niezależnie od wyboru parametry-
zacji powierzchni noszą odpowiednie nazwy: normalnej prę-
dkości powierzchni i składowej normalnej prędkości albo szyb-
kości przemieszczania się /ang. speed of displacement/.

Przy przedstawieniu uwikłanym /1.2/ wektor normalny jest
dany przez

$$/1.19/ \quad \underline{n} = \text{grad } g / |\text{grad } g|_3 \quad \text{albo}$$

$$a_k = \frac{\partial g / \partial x^k}{(g_{,k} G^{ki} g_{,i})^{1/2}}$$

żeś szybkość przemieszczenia /po zróżniczkowaniu /1.2/ względem czasu $\frac{\partial g}{\partial t} + \underline{c} \cdot \text{grad } g = 0$, przez

$$/1.20/ \quad u_n = \underline{c} \cdot \underline{n} = \underline{c} \cdot \text{grad } g / |\text{grad } g|_3 = - \frac{\partial g}{\partial t} / |\text{grad } g|_3,$$

Na koniec zauważmy, że jeśli pochodna $\partial g / \partial t$ jest stale różna od zera, równanie /1.2/ można rozwickać względem t i przedstawić rodzinę $\{s(t)\}_{t \in I}$ w postaci

$$/1.21/ \quad s(t) : \quad t = \tau(\underline{x}).$$

Przy takim przedstawieniu następujące zależności są prawdziwe

$$/1.22/ \quad \underline{n} = \pm \text{grad } \tau / |\text{grad } \tau|_3, \quad u_n = \pm 1 / |\text{grad } \tau|_3$$

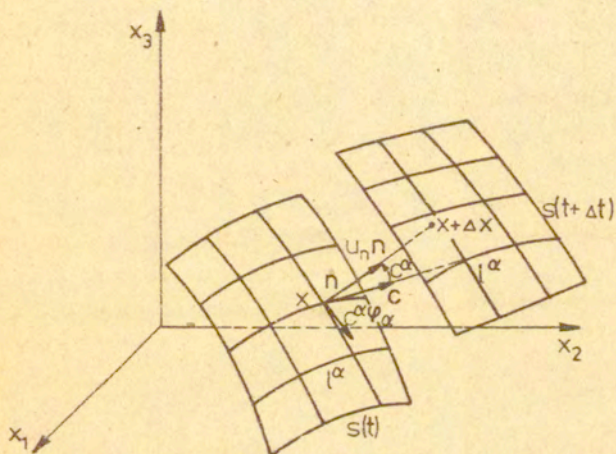
$$\text{grad } \tau = \underline{n} / u_n.$$

Dobór jednego ze znaków \pm zależy od przedstawienia powierzchni $s(t)$ równaniem /1.21/ zapisanym w postaci $g(t, \underline{x}) = 0$ /tzn. są dwie możliwości $t - \tau(\underline{x}) = 0$ albo $\tau(\underline{x}) - t = 0$ /. W szczególności jeśli wektor \underline{n} w chwili t_0 jest skierowany w obszar opisany nierównością $t_0 < \tau(\underline{x})$ to należy wziąć znak $+$. Wektor \underline{n}/u_n nosi nazwę wektora spowolnienia bądź powolności lub opóźnienia /ang. slowness vector/.

Przed określeniem pochodnej przemieszczeniowej wróćmy na chwilę do prędkości \underline{c} wyznaczanej przez /1.17/ i rozłożmy ją na kierunki: styczny i normalny

$$/1.23/ \quad \underline{c} = c^\alpha \varphi_{, \alpha} + u_n \underline{n}, \quad \text{gdzie } c^\alpha = \underline{c} \cdot \varphi^\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \varphi_{, \beta} g^{\beta \alpha}.$$

Widzimy, że wektor $c^\alpha \varphi_{, \alpha}$ /zwany przez TRUESDELLA i TOUPINA [1960, s. 499] prędkością styczną parametryzacji/ jest prędkością unieszenia punktu powierzchniowego / l^1, l^2 / = = const. w kierunku stycznym do powierzchni /Rys. 2/.



Rys.2. Kinematyka powierzchni

Wektor $u_n \underline{n}$ wyznacza krzywą /jako wektor styczny krzywej/, która w każdej chwili czasu t jest ortogonalna do powierzchni $S(t)$. Jest to tak zwana trajektoria normalna powierzchni. Wybierając ze wszystkich dopuszczalnych parametryzacji powierzchni taką, przy której trajektorie punktów powierzchniowych będą trajektoriami normalnymi powierzchni /tzn. miejscem geometrycznym punkta powierzchniowego (l^1, l^2) dla różnych czasów jest trajektoria normalna powierzchni/, otrzymamy równanie

$$/1.24/ \quad \underline{c} = u_n \underline{n}$$

i wraz z nim zanikanie składowych stycznych c^α .

Parametryzację o tej własności nazywa się parametryzacją konwekcyjną /per. BOWEN i WANG [1971a], KOSINSKI [1980] /.

Jeśli u_n jest niezależne od współrzędnych powierzchniowych, poruszająca się powierzchnia $\{s(t)\}_{t \in I}$ tworzy rodzinę powierzchni równoległych /per. /1.34/ i Dodatek A/.

PRZYKŁAD 1.1. Niech $\{s(t)\}_{t \in (0, \infty)}$ będzie poruszającą się powierzchnią obrotową

$$s(t) : \underline{x} = \underline{\varphi}(t, l^1, l^2) = (r(t, l^2) \cos l^1, r(t, l^2) \times \\ \times \sin l^1, l^2) = (x_1),$$

gdzie (x_1) oznaczają kartezjańskie współrzędne punktu \underline{x} , $r(t, l^2) > 0$; natomiast parametry /współrzędne Gaussa/ l^1, l^2 przebiegają przedziały $l^1 \in (0, 2\pi)$, $l^2 \in (a, b)$.
Stąd

$$\underline{\varphi}_{,1} = (-r \sin l^1, r \cos l^1, 0) \quad \underline{\varphi}_{,2} = (r_{,2} \cos l^1, r_{,2} \sin l^1, 1)$$

$$\underline{n} = (\cos l^1, \sin l^1, -r_{,2}) / \sqrt{1 + r_{,2}^2}$$

$$\underline{\varphi}^1 = \underline{\varphi}_{,1} / r^2 \quad \underline{\varphi}^2 = \underline{\varphi}_{,2} / (1 + (r_{,2})^2)$$

$$\underline{c} = \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial t} = (r_{,t} \cos l^1, r_{,t} \sin l^1, 0),$$

$$u_n = \underline{c} \cdot \underline{n} = r_{,t} / \sqrt{1 + (r_{,2})^2}.$$

$$\text{gdzie } r_{,2} = \frac{\partial r(t, l^2)}{\partial l^2}, \quad r_{,t} = \frac{\partial r(t, l^2)}{\partial t}.$$

Zauważmy, że c^α składowe styczne prędkości \underline{c} w ogólnym przypadku nie znikają, gdyż

$$c^1 = \underline{c} \cdot \underline{\varphi}^1 = 0, \quad c^2 = \underline{c} \cdot \underline{\varphi}^2 =$$

$$= -r_{,t} r_{,2} / \sqrt{1 + (r_{,2})^2}.$$

W sytuacji, gdy $r_{,2} = 0$ na miejsce równość /1.24/, tzn. wybrana parametryzacja / l^1, l^2 / jest parametryzacją konwekcyjną, a ponadto $\{s(t)\}_{t \in (0, \infty)}$ tworzy rodzinę powierzchni równoległych.

1.2. Pochodna przemieszczeniowa

Załóżmy, że funkcja f o wartościach skalarnych, wektorowych czy tensorowych jest określona w iloczynie kartezjańskim $I \times \mathcal{D}$, gdzie \mathcal{D} jest podzbiorem w E^3 , zawierającym poruszającą się powierzchnię $\{s(t)\}_{t \in I}$. Przyjmijmy, że powierzchnia ta dana jest w parametryzacji konwekcyjnej. Policzmy prędkość zmiany funkcji f ograniczonej do powierzchni $\{s(t)\}_{t \in I}$, tzn. funkcji $f|_{\{s(t)\}_{t \in I}}$. Będzie to pełna pochodna czasowa tej funkcji, czyli (czasowa) prędkość zmian funkcji f widziana przez obserwatora poruszającego się z powierzchnią, a więc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t, \underline{x})|_{\{s(t)\}_{t \in I}} &= \frac{d}{dt} f(t, \Psi(t, l^1, l^2)) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \text{grad } f \cdot \underline{e}. \end{aligned}$$

Współrzędne l^1, l^2 tworzą parametryzację konwekcyjną, czyli po zastosowaniu związków /1.17/ i /1.24/ otrzymamy

$$/1.25/ \quad \frac{d}{dt} f|_{\{s(t)\}_{t \in I}} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_n \text{grad } f \cdot \underline{n}.$$

Skoro obliczeń dokonaliśmy w parametryzacji konwekcyjnej pochodną czasową z lewej strony /1.25/ wyraża prędkość zmian funkcji f wzdłuż trajektorii normalnej powierzchni. Przyjmijmy dla niej oznaczenie $\frac{\delta}{\delta t}$ i nazwę pochoednej przemieszczeniowej zaproponowane przez THOMASA [1957a]. Mamy więc

$$/1.26/ \quad \frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_n \frac{\partial}{\partial n} .$$

W szczególności, dla przedstawienia /1.1/ powierzchni $\{s(t)\}_{t \in I}$

$$/1.27/ \quad \frac{\delta \underline{x}}{\delta t} = \frac{\delta \psi}{\delta t} = u_n \underline{n} .$$

Jeśli l^1, l^2 tworzą parametryzację konwekcyjną, to

$$/1.28/ \quad \frac{\delta \underline{x}}{\delta t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} , \quad \text{gdzie } \underline{x} = \psi(t, l^1, l^2) ,$$

gdy nie są nią, to

$$/1.29/ \quad \frac{\delta \underline{x}}{\delta t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} - e^{\alpha} \frac{\psi}{\alpha} , \quad \text{gdzie } \underline{x} = \psi(t, l^1, l^2) .$$

Stąd możemy wyprowadzić ogólne wyrażenie na pochodną przemieszczeniową dowolnej funkcji przy niekoniecznie konwekcyjnej parametryzacji poruszającej się powierzchni

$$/1.30/ \quad \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \text{grad } f \cdot \frac{\delta \underline{x}}{\delta t} .$$

Łatwo sprawdzić, że pochodna przemieszczeniowa spełnia prawa /zwykłego/ różniczkowania.

Jeśli zdefiniujemy funkcję f w opisie powierzchniowym wzorem

$$/1.30/ \quad \bar{r}(t, l^1, l^2) = r(t, \psi(t, l^1, l^2)),$$

to otrzymamy

$$/1.31/ \quad \frac{\delta r}{\delta t} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} - e^\alpha \bar{r}_{,\alpha}$$

W końcu, jeśli wykorzystamy przedstawienie /1.21/ i określimy funkcję

$$\bar{r}(\underline{x}) = r(\tau(x), \underline{x}),$$

to otrzymamy

$$/1.32/ \quad \frac{\delta r}{\delta t} = u_n \text{grad } \bar{r} \cdot \underline{n} = u_n \frac{\partial \bar{r}}{\partial n}$$

Przy analizie zachowania się amplitud fal trzeba korzystać z wyrażenia na pochodną przemieszczeniową wektora normalnego $\underline{n}(t, l^1, l^2)$ do powierzchni. Aby wprowadzić ten wzór zróżniczkujemy /1.5/

$$\frac{\delta \underline{n}}{\delta t} \cdot \underline{n} = 0, \quad \frac{\delta \underline{n}}{\delta t} \cdot \underline{\psi}_{,\alpha} = -\underline{n} \cdot \frac{\delta \underline{\psi}_{,\alpha}}{\delta t}$$

Wykorzystując fakt, że $\{\underline{\psi}_{,1}, \underline{\psi}_{,2}, \underline{n}\}$ tworzy bazę, otrzymamy

$$\frac{\delta \underline{n}}{\delta t} = -\underline{n} \cdot \frac{\delta \underline{\psi}_{,\alpha}}{\delta t} \underline{\psi}^\alpha$$

Dla pochodnej wektorów stycznych mamy z definicji /1.31/ oraz ze związków /1.6/, /1.17/ i /1.23/

$$\frac{\delta \underline{\psi}_{,\alpha}}{\delta t} = \frac{\partial \underline{\psi}_{,\alpha}}{\partial t} - c^\sigma \underline{\psi}_{,\alpha\sigma} = \frac{\partial c}{\partial t} - c^\sigma \underline{\psi}_{,\alpha\sigma}$$

$$c_{,\alpha}^\delta \underline{\psi}_{,\delta} + u_{n,\alpha} \underline{n} + u_n \underline{n}_{,\alpha} + c^\delta \underline{\psi}_{,\delta\alpha} - c^\sigma \underline{\psi}_{,\alpha\sigma}$$

Błąd

$$\underline{n} \cdot \frac{\delta \varphi_{,\alpha}}{\delta t} = u_{n,\alpha},$$

więc

$$/1.33/ \quad \frac{\delta \underline{n}}{\delta t} = -u_{n,\alpha} \varphi^{\alpha} \quad \text{lub} \quad \frac{\delta \underline{n}}{\delta t} = -u_{n,\alpha} g^{\alpha\beta} \varphi_{,\beta},$$

czy w zapisie indeksowym

$$/1.33'/ \quad \frac{\delta n^i}{\delta t} = -u_{n^i,\alpha} g^{\alpha\beta} \varphi_{,\beta}^i.$$

Z tego równania wynika, że warunkiem koniecznym i wystarczającym tworzenia przez powierzchnię poruszającą się $\{s(t)\}_{t \in I}$ rodziny powierzchni równoległych jest niezależność szybkości przemieszczania u_n od współrzędnych Gaussa, tzn.

$$/1.34/ \quad u_n = u_n(t).$$

W tym przypadku normalne trajektorie powierzchni są liniami prostymi.

Wyrażenie /1.33/ we współrzędnych przestrzennych z E^3 można zapisać następująco

$$/1.35/ \quad \frac{\delta \underline{n}}{\delta t} = (\underline{n} \circ \underline{n} - 1) \cdot \text{grad } \hat{u}_n,$$

lub w składowych^{2/}

$$/1.35'/ \quad \frac{\delta n^i}{\delta t} = /n^i n^j - G^{ij}/ u_{n,j},$$

^{2/} Przypominamy, że w prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych składowe tensora metrycznego G^{ij} stają się delta Kroneckera δ^{ij} .

skoro $u_{n,\alpha} = \text{grad } \hat{u}_n \cdot \underline{\Psi}_{,\alpha}$, gdzie $\hat{u}_n(t, \underline{x}) = u_n(t, l^1, l^2)$,
 $\underline{x} = \underline{\Psi}$. Skorzystaliśmy tutaj z następującej postaci wyprowa-
 dzonego już związku /1.12/:

$$/1.36/ \quad \underline{\Psi}^\alpha \circ \underline{\Psi}_{,\alpha} = 1 - n \circ n.$$

W monografii autora [1980] jeden z punktów rozdziału
 pierwszego /pkt 2.1/ poświęcone opisowi i ewolucji w czasie
 geometrii powierzchni.

W szczególności wykazane słuszność następujących wzorów

$$\frac{\delta \underline{\Psi}_{,\alpha}}{\delta t} = u_{n,\beta} n^\beta - u_n b_\alpha^\beta \underline{\Psi}_{,\beta} + c_{,\alpha}^\beta \underline{\Psi}_{,\beta}$$

$$\frac{\delta \underline{\Psi}_{,\alpha}^\alpha}{\delta t} = u_{n,\beta} \varepsilon^{\beta\alpha} n^\alpha - c_{,\gamma}^\alpha \varepsilon^{\gamma\beta} \underline{\Psi}_{,\beta} + u_n b^{\alpha\beta} \underline{\Psi}_{,\beta}$$

/1.37/

$$\frac{\delta \varepsilon_{\alpha\beta}}{\delta t} = c_{,\alpha}^\gamma \varepsilon_{\gamma\beta} + c_{,\beta}^\gamma \varepsilon_{\gamma\alpha} - 2 u_n b_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta b_{\alpha\beta}}{\delta t} &= u_{n,\alpha\beta} - u_{n,\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + c_{,\alpha}^\gamma b_{\gamma\beta} + c_{,\beta}^\gamma b_{\gamma\alpha} - \\ &- u_n b_\alpha^\gamma b_{\gamma\beta}. \end{aligned}$$

Przedstawione wzory znacznie się upraszczają dla szcze-
 gólnej parametryzacji powierzchni, a mianowicie dla paramo-
 tryzacji konwekcyjnej. Zgodnie z definicją parametryzacja
 /k¹, k²/ jest wtedy konwekcyjna, gdy składowe styczne c^α
 prędkości poruszania się \underline{c} /por. /1.23// mierzonej w tej
 parametryzacji znikają. Wtedy związek /1.31/ przyjmie upro-

szerebną postać

$$/1.38/ \quad \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}$$

dla dowolnej funkcji f . Oznacza to, że pochodna przemieszczeniowa staje się w parametryzacji konwekcyjnej czasową pochodną cząstkową.

W szczególności związki /1.37/_{3,4} redukują się do

$$\frac{\delta_k g_{\alpha\beta}}{\delta t} = -2 u_n b_{\alpha\beta}$$

/1.39/

$$\frac{\delta_k b_{\alpha\beta}}{\delta t} = u_n{}_{;\alpha\beta} - u_n b_{\alpha}^{\gamma} b_{\gamma\beta},$$

gdzie indeks k ma oznaczać, że mamy tu do czynienia z parametryzacją konwekcyjną. W zapisie wzoru /1.39/₂ wykorzystaliśmy pochodną kowariantną /por. /1.14//.

Przejdźmy jeszcze raz do dowolnej parametryzacji. Często obok wyprowadzonych wyrażen /1.31/ i /1.32/ na pochodną przemieszczeniową dowolnej funkcji f wymagane są związki na pochodne /cząstkowe/ przestrzenne na powierzchni. Zgodnie z oznaczeniami funkcji $\tilde{f}(t, l^1, l^2)$ i $\tilde{f}(\underline{x})$ mamy następujące związki

$$/1.40/ \quad \tilde{f}_{, \alpha} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial l^{\alpha}} = \text{grad } f \cdot \underline{\psi}_{, \alpha},$$

$$\text{grad } \tilde{f} = \frac{\partial f}{\partial t} \text{ grad } \underline{\Gamma} + \text{grad } f, \text{ gdy } u_n \neq 0.$$

Oznaczając przez $\frac{\partial f}{\partial n}$ i $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial n}$ pochodne w kierunku normalnych i wykorzystując /1.22/ możemy napisać

$$/1.41/ \quad \tilde{f}_{, \alpha} \varphi^{\alpha} = \text{grad } f \cdot \underline{\varphi}_{, \alpha} \varphi^{\alpha} \quad ,$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{u_n} + \frac{\partial f}{\partial n} \quad ,$$

gdzie /1.41/₁ otrzymane przez pomnożenie /1.40/₁ przez $\underline{\varphi}^{\alpha}$ natomiast /1.41/₂ - przez \underline{n} . Związek /1.12/ w zastosowaniu do /1.41/₁ daje poszukiwaną pochodną

$$/1.42/ \quad \text{grad } f = \tilde{f}_{, \alpha} \varphi^{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial n} \underline{n} \quad .$$

W notacji wskaźnikowej mamy

$$/1.43/ \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = G_{ik} \left\{ \tilde{f}_{, \alpha} \varphi^{k\alpha} + \frac{\partial f}{\partial n} n^k \right\} = G_{ik} \left\{ g^{\alpha\beta} \tilde{f}_{, \alpha} \varphi_{, \beta}^k + \frac{\partial f}{\partial n} n^k \right\} \quad ,$$

gdzie $\frac{\partial f}{\partial n} \equiv n^k \frac{\partial f}{\partial x^k}$. Tutaj f jest polem skalarnym.

Wzór na pochodną przemieszczeniową /1.31/ zapisany w tej notacji przyjmie postać

$$/1.44/ \quad \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} - G_{ik} c^i \varphi^{k\alpha} \tilde{f}_{, \alpha} = \frac{\partial f}{\partial t} - G_{ik} g^{\alpha\beta} \varphi_{, \alpha}^k c^i \tilde{f}_{, \beta} \quad .$$

Skorzystane tutaj z /1.23/ zapisanego następująco

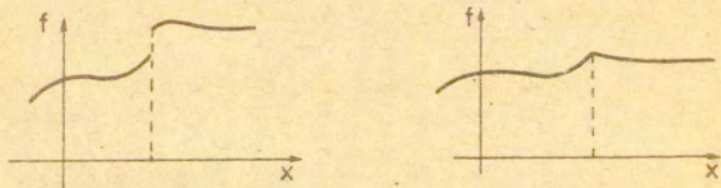
$$/1.45/ \quad c^{\alpha} = G_{ik} c^i \varphi^{k\alpha} = G_{ik} g^{\alpha\beta} \varphi_{, \beta}^k c^i \quad .$$

W notacji wskaźnikowej zapis związków /1.42/ i /1.31/ dla pól tensorowych, w ogólnym niekartezjańskim przestrzennym układzie współrzędnych wymaga należytej uwagi. Zwrócono na to uwagę w Dodatku B o pochodnej niezmienniczej.

2. FUNKCJE O NIECIĄGŁOŚCIACH SKOKOWYCH NA RUCHOMEJ POWIERZCHNI

W poprzednim rozdziale zajmowaliśmy się ciągle różniczkowalnymi funkcjami na ruchomej powierzchni $\{s(t)\}_{t \in I}$. Teraz zajmiemy się funkcjami, które tracą swoją regularność na powierzchni $s(t)$. Oczywiście, nie wszystkie takie funkcje można zbadać.

Funkcja f określona na pewnym obszarze $R \subset E^n$, zawierającym jakąś gładką powierzchnię S /tzn. $S \subset R$ / może być nieciągła w pewnych punktach, a nawet na całej powierzchni S . Może się zdarzyć, że są te punkty o nieciągłości skokowej. Charakteryzują się one istnieniem granicy funkcji, która nie pokrywa się z wartością funkcji w punkcie. W teorii funkcji rzeczywistych punkty takie noszą nazwę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju /por. GUTER i in. [1967, s.32] / /Rys.3/.



Rys.3. Funkcja z punktem nieciągłości pierwszego rodzaju oraz funkcja ciągła z punktem nieciągłości pierwszej pochodnej

Celem naszym w tym rozdziale jest znalezienie warunków, jakie muszą spełniać skokowe nieciągłości funkcji i jej pochodnych na poruszającej się powierzchni $\{s(t)\}_{t \in I}$.

Aby to uzyskać można pójść drogą zaproponowaną w monografii autora [1980, rozdz. II], gdzie najpierw wprowadzone

gładkie rozszerzenie funkcji określonej na zbiorze nieotwartym, a następnie, stosując do rozszerzeń wzory na pierwsze i drugie pochodne cząstkowe funkcji gładkiej na rodzinie powierzchni $\{s(t)\}_{t \in I}$, otrzymane poszukiwane warunki.

W niniejszym opracowaniu pójdziemy inną - można powiedzieć - klasyczną i mniej ścisłą matematycznie drogą, opartą na znanym lemacie Hadamarda.

2.1. Powierzchnie nieciągłości funkcji

DEFINICJA 2.1. Niech funkcja f o wartościach skalarnych, wektorowych bądź tensorowych jest określona w obszarze $\mathcal{N} \subset E^n$ i niech gładka powierzchnia $S \subset \mathcal{N}$ rozdziela ten obszar na dwie części \mathcal{N}^+ i \mathcal{N}^- tak, że

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^+ \cup S \cup \mathcal{N}^-.$$

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w każdym z podobszarów \mathcal{N}^+ i \mathcal{N}^- i posiada wartości graniczne f_+ i f_- , gdy dowolny punkt z powierzchni S jest osiąganym odpowiednio z \mathcal{N}^+ bądź \mathcal{N}^- . Jeśli f jest ciągła w całym obszarze \mathcal{N} , to wtedy jest ciągła także przy przejściu przez powierzchnię i funkcje f_+ i f_- pokrywają się. Jeśli natomiast nie zachodzi równość, to mówimy, że S jest powierzchnią nieciągłości funkcji f i obserwujemy nieciągłość skokową funkcji f na S .

Przez skok funkcji f na powierzchni S rozumiany wyrażenie

$$/2.1/ \quad \llbracket f \rrbracket \equiv f_- - f_+.$$

Jest jasne, że $\llbracket f \rrbracket$ staje się teraz funkcją zdefiniowaną tylko na powierzchni S .

PRZYKŁAD 2.1. W obszarze $\mathcal{M} = \{(t, \underline{x}) : t > 0, x_1 > 0, x_2 > 0\}$ określamy funkcję

$$f(t, \underline{x}) = \begin{cases} -\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 \underline{x} \cdot \underline{x} & \text{dla } \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 > x_1^2 + x_2^2, \\ \frac{t}{t_0} \underline{x} \cdot \underline{x} & \text{dla } \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 \leq x_1^2 + x_2^2, \end{cases}$$

gdzie x_1, x_2, x_3 są współrzędnymi kartezjańskimi punktu \underline{x} . Łatwo widać, że zdefiniowana funkcja jest nieciągła na poruszającej się powierzchni walca

$$s(t) : \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

W każdym z obszarów

$$\mathcal{M}^+ = \{(t, \underline{x}) \in \mathcal{M} : \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 < x_1^2 + x_2^2\},$$

$$\mathcal{M}^- = \{(t, \underline{x}) \in \mathcal{M} : \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 > x_1^2 + x_2^2\}$$

funkcja jest ciągła i ciągle różniczkowalna. Skok funkcji jest dany przez

$$[[f]] = -\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 \underline{x} \cdot \underline{x} - \frac{t}{t_0} \underline{x} \cdot \underline{x}, \text{ gdzie } \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Wprowadzając parametryzację konwekcyjną ruchomej powierzchni walca /por. Przykład 1.1/ związkami

$$x_1 = \frac{t}{t_0} \cos l^1, \quad x_2 = \frac{t}{t_0} \sin l^1, \quad x_3 = l^2$$

skok $[f]$ można przedstawić następująco:

$$[f](t, l^1, l^2) = - \left(\left(\frac{t}{t_0} \right)^2 + \left(\frac{t}{t_0} \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 + (l^2)^2 \right).$$

LEMAT HADAMARDA. Niech funkcja f oprócz założeń Definicji 2.1 spełnia warunki: funkcja f jest ciągle różniczkowalna w każdym z podobszarów \mathcal{N}^+ , \mathcal{N}^- oraz jej gradient $\text{grad } f = (\partial f / \partial z^r)$, $r = 1, 2, \dots, n$, posiada wartości graniczne $\text{grad } f_+$ i $\text{grad } f_-$, gdy dowolny punkt powierzchni jest osiągany odpowiednio z \mathcal{N}^+ i \mathcal{N}^- . Jeżeli $\underline{x} = \Lambda(s)$ ($z^r = \Lambda^r(s)$, $r = 1, 2, \dots, n$) jest parametrycznym przedstawieniem krzywej gładkiej na S i funkcje f_+ oraz f_- określone na powierzchni/ są ciągle różniczkowalne wzdłuż tej krzywej, to

$$/2.2/ \quad \frac{df_+}{ds} = (\text{grad}_{\underline{x}} f)_+ \cdot \frac{d\Lambda}{ds},$$

$$\frac{df_-}{ds} = (\text{grad } f)_- \cdot \frac{d\Lambda}{ds},$$

lub w zapisie indeksowym /w układzie kartezjańskim/

$$/2.2'/ \quad \frac{df_+}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial z^r} \right)_+ \frac{d\Lambda^r}{ds},$$

$$\frac{df}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^F} \right) \frac{d\Lambda^F}{ds}.$$

Oba związki dają zależność dla pochodnej skoku

$$/2.3/ \quad \frac{d[f]}{ds} = [\text{grad}_x f] \cdot \frac{d\Lambda}{ds}.$$

Przedstawiony lemat wyraża stwierdzenie, że prawo różniczkowania złożonego /dla pełnej pochodnej funkcji f wzdłuż krzywej/ jest spełnione też w granicy na powierzchni S osiągniętej jednostronnie.

Zauważmy, że w sformułowaniu lematu /jak i w jego dowodzie, por. HADAMARD [1903], LICHTENSTEIN [1929], KOSIŃSKI [1980] nieistotne jest założenie o wymiarze powierzchni. Może to być nawet powierzchnia nie poruszająca się.

2.2. Geometryczne warunki zgodności

Jeśli jak w punkcie 1 oznaczymy przez $\underline{\Psi}_{,1}$ i $\underline{\Psi}_{,2}$ wektory styczne do powierzchni w E^3 i zastosujemy /2.3/ do linii krzywych parametrycznych l^α , to otrzymamy

$$[f]_{,\alpha} \equiv \frac{\partial [f]}{\partial l^\alpha} = [\text{grad } f] \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial l^\alpha} = [\text{grad } f] \cdot \underline{\Psi}_{,\alpha}.$$

Mnożąc ten wynik tensorowo przez $\underline{\Psi}^\alpha = g^{\alpha\beta} \underline{\Psi}_{,\beta}$ i sumując po α , i wykorzystując postać /1.36/ równości /1.12/, dostajemy

$$[f]_{,\alpha} \underline{\Psi}^\alpha = [\text{grad } f] \cdot (\underline{1} - \underline{n} \otimes \underline{n}),$$

lub w składowych

$$[f]_{,\alpha} g^{\alpha\beta} \varphi_{i,\beta}^j = \left[\frac{\partial f}{\partial x^i} \right] \quad (G^{ij} - n^i n^j).$$

Stąd pojawia się związek zgodności na powierzchni osobliwej dla pierwszej pochodnej gradient funkcji^{3/} f:

$$/2.4/ \quad [\text{grad } f] = [f]_{,\alpha} \varphi^{\alpha} + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] \underline{n},$$

lub w zapisie indeksowym

$$/2.4*/ \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x^i} \right] = [f]_{,\alpha} g^{\alpha\beta} \varphi_{i,\beta}^j + \left[\frac{\partial f}{\partial x^j} n^j \right] n^i,$$

gdzie skorzystaliśmy z równości $[\text{grad } f] \cdot \underline{n} = \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]$.

Zauważmy, że znając skok funkcji oraz skok jej pochodnej normalnej możemy wyznaczyć skok w pierwszych pochodnych samej funkcji. Oznacza to z drugiej strony, że $[\text{grad } f]$ nie może być dany dowolnie na powierzchni nieciągłości.

Ważnym wnioskiem ze związku zgodności jest następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE MAXWELLA. Jeśli funkcja f jest ciągła na S lub skok $[f]$ jest niezależny od parametrów powierzchni, to

$$/2.5/ \quad [\text{grad } f] = \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] \underline{n}.$$

Przechodząc do warunków zgodności dla drugich pochodnych przestrzennych zakładamy dodatkowo, że funkcja f jest

^{3/} Jeśli f nie jest polem skalarnym, prawa strona będzie zawierała iloczyny tensorowe /per. wzór /2.6//.

ciągłe dwukrotnie różniczkowalna w podobszarach \mathcal{N}^+ i \mathcal{N}^- oraz jej drugi gradient grad grad f posiada wartości graniczne $(\text{grad grad } f)_+$ i $(\text{grad grad } f)_-$, gdy dowolny punkt powierzchni S jest osiągany odpowiednio z \mathcal{N}^+ i \mathcal{N}^- . Wstawiając w miejsce f pochodną grad f związek /2.4/ przejdzie w

$$/2.6/ \quad \llbracket \text{grad grad } f \rrbracket = \llbracket \text{grad } f \rrbracket_{,\alpha} \Psi^\alpha + \left[\frac{\partial \text{grad } f}{\partial n} \right] \circ \underline{n} .$$

Skoro skok gradienta f spełnia bezpośrednio /2.4/, to po pomnożeniu skalarnie /zwężeniu/ obu stron powyższego związku przez tensor $\underline{n} \circ \underline{n}$ otrzymamy

$$/2.7/ \quad \llbracket \text{grad grad } f \rrbracket \cdot \underline{n} \circ \underline{n} = \left[\frac{\partial \text{grad } f}{\partial n} \right] \cdot \underline{n} .$$

Lewą stronę można zapisać z definicji w postaci $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial n^2} \right]$. Zauważmy, że prawa strona jest symetryczna ze względu na dwa ostatnie /jeśli f jest wielkością nieskalarną; jeśli f jest skalarne, to są tylko dwa wskaźniki/ wskaźniki, gdyż lewa strona jest symetryczna. Wykorzystując ten fakt wraz z /2.7/, wyznaczenie skalarne związku /2.6/ przez \underline{n} daje

$$/2.8/ \quad \left[\frac{\partial \text{grad } f}{\partial n} \right] = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial n^2} \right] \underline{n} + (\llbracket \text{grad } f \rrbracket_{,\alpha} \cdot \underline{n}) \Psi^\alpha .$$

Wyraz $\llbracket \text{grad } f \rrbracket_{,\alpha}$ wyznaczamy przez zróżniczkowanie /2.4/

$$/2.9/ \quad \llbracket \text{grad } f \rrbracket_{,\alpha} = \llbracket f \rrbracket_{,r\alpha} \Psi^r + \llbracket f \rrbracket_{,r} \Psi_{,\alpha}^r + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_{,\alpha} \underline{n} + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] \underline{n}_{,\alpha} .$$

Do końcowego wyniku musimy znaleźć pochodną $\underline{\Psi}_{,\alpha}^{\delta}$.
Skorzystajmy z dwóch równości

$$\underline{\Psi}_{,\alpha}^{\delta} \cdot \underline{n} = (\underline{\Psi}^{\delta} \cdot \underline{n})_{,\alpha} - \underline{\Psi}^{\delta} \cdot \underline{n}_{,\alpha} = -\underline{\Psi}^{\delta} \cdot \underline{n}_{,\alpha},$$

$$\underline{\Psi}_{,\alpha}^{\delta} \cdot \underline{\Psi}_{,\delta} = (\underline{\Psi}^{\delta} \cdot \underline{\Psi}_{,\delta})_{,\alpha} - \underline{\Psi}^{\delta} \cdot \underline{\Psi}_{,\delta\alpha} = -\underline{\Psi}^{\delta} \cdot \underline{\Psi}_{,\delta\alpha}.$$

Wzory Weingartena /1.8/ i Gaussa /1.6/ zastosowane do prawych stron dają w efekcie następujące dwa wyrażenia /pamiętając o symetrii $\Gamma_{\delta\alpha}^{\delta} = \Gamma_{\alpha\delta}^{\delta}$ /:

$$\underline{\Psi}_{,\alpha}^{\delta} \cdot \underline{n} = b_{\alpha}^{\delta}, \quad \underline{\Psi}_{,\alpha}^{\delta} \cdot \underline{\Psi}_{,\delta} = -\Gamma_{\alpha\delta}^{\delta}.$$

Stąd często wykorzystywany związek /1.12/ prowadzi do poszukiwanego wyrażenia

$$/2.10/ \quad \underline{\Psi}_{,\alpha}^{\delta} = -\Gamma_{\alpha\delta}^{\delta} \underline{\Psi}^{\delta} + b_{\alpha}^{\delta} \underline{n}.$$

Wstawienie tej formuły do /2.9/ pozwala podać wymagane dwie relacje dla $[[\text{grad } f]]_{,\alpha} \cdot \underline{n}$ /w /2.8// oraz $[[\text{grad } f]]_{,\alpha} \circ \underline{\Psi}^{\alpha}$ /w /2.6//. Nie wypisując tych częściowych relacji przedstawimy końcowy wynik

$$/2.11/ \quad [[\text{grad grad } f]] = \left([[f]]_{,\delta\alpha} - \left[\left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] b_{\delta\alpha} \right) \underline{\Psi}^{\delta} \circ \underline{\Psi}^{\alpha} \right. \\ \left. + \left[\left[\frac{\partial^2 f}{\partial n^2} \right] \underline{n} \circ \underline{n} + \left(\left[\left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_{,\alpha} + [[f]]_{,\delta} b_{\alpha}^{\delta} \right) (\underline{n} \circ \underline{\Psi}^{\alpha} + \underline{\Psi}^{\alpha} \circ \underline{n}) \right), \right.$$

gdzie musieliśmy jeszcze raz korzystać ze wzoru /1.8/ do wyznaczenia $\underline{n}_{,\alpha}$ przy ostatnim wyrazie w /2.9/ oraz z wyrażenia /1.14/ dla pochodnej kowariantnej drugiej pochodnej powierzchniowej $[[f]]$. Otrzymany rezultat nosi nazwę /geometrycznego/ warunku zgodności drugiego rzędu. Zauważmy na koniec, że /2.11/ posiada pewne własności symetrii, które mogą w zastosowaniach uprościć otrzymywane wyrażenia. Przy założeniu ciągłości f na powierzchni albo ogólniej, niezależno-

ści skoku $[f]$ od parametrów powierzchniowych wyrażenie /2.11/ upraszcza się do

$$\begin{aligned} /2.12/ \quad [\text{grad grad } f] &= - \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] b_{\gamma\alpha} \varphi^{\gamma} \circ \varphi^{\alpha} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial n^2} \right] \underline{n} \circ \underline{n} \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_{,\alpha} (\underline{n} \circ \varphi^{\alpha} + \varphi^{\alpha} \circ \underline{n}). \end{aligned}$$

W zapisie indeksowym przy prostokątnym układzie kartezjańskim mamy

$$\begin{aligned} /2.12^o/ \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right] &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial n^2} \right] n_i n_j + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_{,\alpha} (n_i \varphi_{j,\beta} + \varphi_{i,\beta} n_j) g^{\alpha\beta} \\ &- \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] b^{\alpha\beta} \varphi_{i,\alpha} \varphi_{j,\beta} . \end{aligned}$$

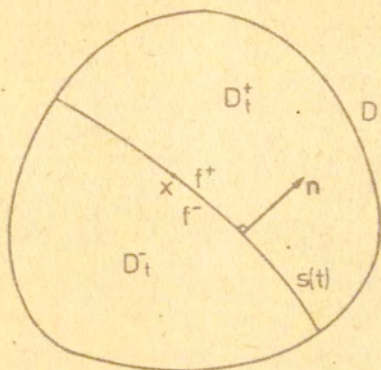
Jeśli ponadto założymy ciągłość $\text{grad } f$ na powierzchni, to w miejscu /2.12/ otrzymamy

$$\begin{aligned} /2.13/ \quad [\text{grad grad } f] &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial n^2} \right] \underline{n} \circ \underline{n} , \\ \text{lub} \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} \right] &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} \right] n_k n_l . \end{aligned}$$

Warunki zgodności wyższego rzędu otrzymujemy podobnie, lecz ich postać nie będzie nam tutaj potrzebna.

2.3. Kineratyczne warunki zgodności

Przejdźmy do pochodnych czasowych. Przyjmijmy w związku z tym, że dla każdej chwili czasu $t \in I$ przestrzenny obszar $\mathcal{D} \subset E^3$ jest rozdzielony poruszającą się powierzchnią $s(t)$ na dwa rozłączne podobszary \mathcal{D}_t^+ i \mathcal{D}_t^- . Przyjmujemy, że zbiór \mathcal{D}^+ oznacza podobzary \mathcal{D} , w stronę którego skierowany jest wektor normalny \underline{n} do $s(t)$ /Rys. 4/.



Rys.4. Powierzchnia nieciągłości funkcji f rozdzielająca obszar przestrzenny D .

Bierąc różnicę pochodnej przemieszczeniowej /1.26/ funkcji f zapisaną po obu stronach powierzchni, otrzymamy ^{4/} kinematyczny warunek zgodności

$$/2.14/ \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right] = \frac{\delta}{\partial t} [f] - u_n \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right].$$

Jeśli $[f] = 0$, to

$$/2.15/ \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right] = -u_n \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] = -u_n [\text{grad } f] \cdot n.$$

Aby skrócić zapis przyjmujemy oznaczenia

4/ Związek /2.14/ otrzymuje się w zasadzie także z lematem Hadamarda przy oznaczeniach $\mathcal{N} = \mathbb{R}^D$, $S = U(t) - s(t)$ oraz krzywej $\underline{x} = \underline{\Lambda}(S)$, jako trajektorii normalnej, tj. $\underline{x} = (t, \underline{x}) = (s, \psi(s, l^1, l^2))$, gdzie (l^1, l^2) jest parametryzacją konwekcyjną.

$$A = [f], \quad B = \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right], \quad A' = \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right].$$

/2.16/

$$B' = \left[\frac{\partial \text{grad } f}{\partial t} \right] \cdot \underline{n}, \quad C = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial n^2} \right].$$

Zastępując f w /2.4/ i /2.14/ przez $\frac{\partial f}{\partial t}$ otrzymamy związek

$$/2.17/ \quad \left[\frac{\partial \text{grad } f}{\partial t} \right] = B' \underline{n} + A',_{\alpha} \underline{\psi}^{\alpha},$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right] = -u_n B' + \frac{\delta A'}{\delta t}.$$

Wykorzystując równość $\text{grad } \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } f$ oraz definicję /1.26/ wraz z wyrażeniami /2.5/, /1.33/ i /2.8/ otrzymamy

$$\frac{\delta B}{\delta t} = B' + u_n C - u_n',_{\gamma} A',_{\alpha} \underline{e}^{\gamma\alpha}.$$

Wyznaczając stąd B' i wstawiając do /2.17/ wyprowadzamy następujące kinematyczne warunki zgodności drugiego rzędu:

$$/2.18/ \quad \left[\text{grad } \frac{\partial f}{\partial t} \right] = \left\{ \frac{\delta B}{\delta t} + u_n',_{\beta} A',_{\alpha} g^{\alpha\beta} - u_n C \right\} \underline{n} + A',_{\alpha} \underline{\psi}^{\alpha},$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right] = \frac{\delta A'}{\delta t} + u_n \left\{ u_n C - \frac{\delta B}{\delta t} - u_n',_{\beta} A',_{\alpha} g^{\alpha\beta} \right\}.$$

W szczególności, gdy f jest ciągła przy przejściu przez powierzchnię- A znika i /2.18/ redukują się do

$$\left[\text{grad} \frac{\partial f}{\partial t} \right] = \left\{ \frac{\delta B}{\delta t} - u_n C \right\} \underline{n} - (u_n B)_{,\alpha} \underline{\Psi}^\alpha,$$

/2.19/

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right] = u_n^2 C - 2 u_n \frac{\delta B}{\delta t} - B \frac{\delta u_n}{\delta t}.$$

Jeśli ponadto pierwsze pochodne funkcji f są ciągłe przy przejściu przez powierzchnię, ostatecznie relacje upraszczają się do postaci

$$\left[\text{grad} \frac{\partial f}{\partial t} \right] = -u_n \left[\frac{\partial^2 f}{\partial n^2} \right] \underline{n},$$

/2.20/

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right] = u_n^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial n^2} \right],$$

tak często wykorzystywanych w analizie fal przyspieszenia.

3. POWIERZCHNIE OSOBLIWE DLA FUNKCJI RUCHU

Jak dotąd nasza dyskusja powierzchni osobliwej /ściślejszej powierzchni osobliwości/ dla pewnej wzorcowej funkcji f nie łączyła się z ruchem materialnego kontinuum. W tej części zajmiemy się klasyfikacją ruchomych powierzchni osobliwych ze względu na funkcję ruchu χ , tzn. obecnie przyjmujemy, że $f = \chi$.

3.1. Materialny opis ruchomej powierzchni

Przyjmujemy, że ruchowi powierzchni $\{s(t)\}_{t \in I}$ w przestrzeni E^3 towarzyszy deformacja /ruch/ χ_t , $t \in I$ ciała odkształcalnego B . Ciało B reprezentuje materialne kontinuum. Ruch jest pojęciem względnym, więc i ruch χ_t ciała B odbywa się względem pewnej wybranej konfiguracji odniesienia R . Tak więc równanie

$$/3.1/ \quad \underline{x} = \chi_t(X) = \chi(X, t), \quad X \in B, \quad t \in I$$

daje przepis zmian położenia \underline{x} cząstki X w czasie t . Po wprowadzeniu konfiguracji odniesienia cząstec X przypisujemy miejsce \underline{x} w konfiguracji odniesienia. Choć formalnie funkcja ruchu miejsca \underline{x} i czasu t nie jest tą samą funkcją χ z /3.1/, nie wprowadzamy między nimi rozróżnienia i będziemy pisać^{5/}

5/ Formalne rozróżnienie obu funkcji i ich zastosowanie w zjawiskach faleznych znajdzie Czytelnik w opracowaniu KOSIŃSKIEGO [1980].

$$/3.2/ \quad \underline{x} = \gamma(\underline{x}, t) \quad \text{albo} \quad x^i = \gamma^i(x^K, t),$$
$$i, K = 1, 2, 3.$$

Jeśli $\underline{x} = \Psi(t, l^1, l^2)$ jest przestrzennym przedstawieniem parametrycznym rodziny $\{s(t)\}_{t \in I}$, to istnieje przestrzenne przedstawienie uwikłane /por. /1.2//.

$$/3.3/ \quad g(t, \underline{x}) = 0$$

o własności $g(t, \underline{\varphi}) = 0$.

W konfiguracji odniesienia \mathcal{R} możemy zdefiniować rodzinę powierzchni $\{\Sigma(t)\}_{t \in I}$ przepisem

$$/3.4/ \quad G(t, \underline{x}) = 0, \quad t \in I, \quad \underline{x} \in \mathcal{R}(B)$$

określony następująco

$$/3.5/ \quad G(t, \underline{x}) = g(t, \gamma(\underline{x}, t)).$$

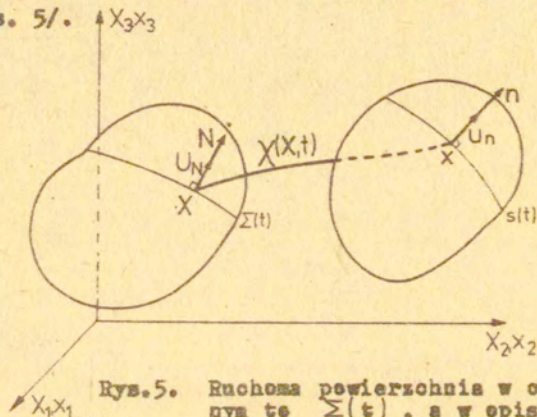
Wybieramy układ parametrów l^Δ , $\Delta = 1, 2$ taki, aby przy jego pomocy przedstawić parametrycznie $\Sigma(t)$, tzn.

$$/3.6/ \quad \Sigma(t) : \underline{x} = \underline{p}(t, l^1, l^2) \quad \text{lub} \quad x^K = P^K(t, l^\Delta)$$

o własności $G(t, \underline{p}) = 0$.

Funkcja \underline{p} jest ciągle różniczkowalna o nieznikającą jacobianie. Dla każdego t powierzchnia $\Sigma(t)$ jest obrazem /miejsca/ powierzchni $s(t)$ w konfiguracji odniesienia i na odwrót - powierzchnia $s(t)$ jest przestrzennym miejscem powierzchni $\Sigma(t)$ z konfiguracji odniesienia. W ten sposób

funkcja ruchu identyfikuje^{6/} obie rodziny $\{s(t)\}_{t \in I}$ i $\{\Sigma(t)\}_{t \in I}$, tzn., że w istocie mamy do czynienia z jedną rodziną powierzchni, dla której odpowiednio $\{s(t)\}$ stanowi obraz przestrzenny, natomiast $\{\Sigma(t)\}$ - obraz materialny. Często mówi się w takich sytuacjach o dualności przedstawień /Rys. 5/.



Rys. 5. Ruchoma powierzchnia w opisie materialnym to $\Sigma(t)$, a w opisie przestrzennym $s(t)$.

Podobnie do /1.19/ i /1.20/ definiujemy odpowiednie jednostkowy wektor normalny \underline{N} do powierzchni $\Sigma(t)$ i składową normalną prędkości

$$/3.7/ \quad \underline{N} = \frac{\text{Grad } G(t, \underline{X})}{|\text{Grad } G|_3}, \quad u_{\underline{N}} = \frac{-\partial G / \partial t}{|\text{Grad } G|_3},$$

gdzie $\text{Grad } G(t, \underline{X}) = \nabla G(t, \underline{X}) = \frac{\partial G(t, \underline{X})}{\partial \underline{X}}$ /w układzie

6/ Jeśli przez γ^{-1} oznaczymy funkcję odwrotną do funkcji ruchu γ , tzn. $\underline{X} = \gamma^{-1}(\underline{x}, t)$, to funkcję \underline{P} w /3.6/ można wybrać taką, że $I \circ = I \circ$ oraz $\underline{P}(t, 1^1, 1^2) = \gamma^{-1}(\underline{x}(t, 1^1, 1^2), t)$.

kartezjańskim Grad $G(t, \underline{X}) = \left(\frac{\partial G(t, X^L)}{X^K} \right) /.$

Oznaczmy tensor gradientu deformacji przez \underline{F} , tzn.

/3.8/ $\underline{F}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \chi(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}} = \text{Grad } \chi(\underline{X}, t),$

albo $F^i_K(t, X^L) = \frac{\partial \chi^i(X^L, t)}{\partial X^K}.$

natomiast wektor prędkości cząstek przez \underline{v} , tzn.

/3.9/ $\underline{v}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \chi(\underline{X}, t)}{\partial t}$ albo $v^i(X^L, t) = \frac{\partial \chi^i(X^L, t)}{\partial t}$

/w układzie kartezjańskim/. Wtedy zwykłe prawa różniczkowania złożonego dla /3.5/ prowadzą do

$$\frac{\partial G(t, \underline{X})}{\partial t} = \text{grad } g(t, \underline{x}) \underline{v} + \frac{\partial g(t, \underline{x})}{\partial t},$$

$$\text{Grad } G(t, \underline{X}) = \text{grad } g(t, \underline{x}) \underline{F}$$

/albo $\frac{\partial G}{\partial X^K} = \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial \chi^i}{\partial X^K} /.$

Te drugie równanie prowadzi do następującego związku między wektorami normalnymi \underline{n} i \underline{N}

/3.10/ $\underline{N} = \underline{n} \underline{F} \frac{|\text{grad } g|_3}{|\text{Grad } G|_3} = \frac{\underline{n} \underline{F}}{|\underline{n} \underline{F}|_3} = \frac{\underline{F}^T \underline{n}}{|\underline{F}^T \underline{n}|_3}.$

Ten wynik, jak i następny są prawdziwe przy założeniach ciągłej różniczkowalności funkcji ruchu χ .

Z drugiej strony wykorzystując odwrotny tensor gra-

dientu deformacji \underline{F}^{-1} /tj. $\underline{F}^{-1} \underline{F} = \underline{F}\underline{F}^{-1} = \underline{1}$, gdzie $\underline{1}$ jest tensorem jednostkowym, w indeksach $(\underline{F}^{-1})^K{}_1 \underline{F}^1{}_L = \delta^K{}_L$ /, można napisać

$$/3.11/ \quad \underline{n} = \underline{N} \underline{F}^{-1} \frac{|\text{Grad } G|_3}{|\text{grad } g|_3} = \frac{\underline{N} \underline{F}^{-1}}{\left| \frac{\underline{N} \underline{F}^{-1}}{|\underline{F}^{-1}|} \right|_3} = \frac{(\underline{F}^{-1})^T \underline{N}}{\left| (\underline{F}^{-1})^T \underline{N} \right|_3}.$$

Między składowymi normalnymi u_n i U_N sądzicie wtedy relacja /per. /1.17/ i /1.18//.

$$/3.12/ \quad U_N = (\underline{c} - \underline{v}) \cdot \underline{n} \frac{|\text{grad } g|_3}{|\text{Grad } G|_3} =$$

$$= (u_n - v_n) \frac{1}{\left| \frac{\underline{F}^T \underline{n}}{|\underline{F}^{-1}|} \right|_3} = (u_n - v_n) \left| (\underline{F}^{-1})^T \underline{N} \right|_3,$$

gdzie $v_n = \underline{v} \cdot \underline{n}$ na $S(t)$ jest rzutem wektora prędkości cząstki na normalną do powierzchni $S(t)$.

Wielkość

$$/3.13/ \quad U \equiv u_n - v_n$$

nazwiemy lokalną prędkości /poprawniej, szybkością/ propagacji powierzchni. Jest to normalna prędkość poruszania się powierzchni względem ośrodka /poruszającego się ruchem

χ_t z prędkością \underline{v} /. Przy jej pomocy zapiszemy /3.12/ w postaci

$$/3.14/ \quad U_N = U \frac{|\text{grad } g|_3}{|\text{Grad } G|_3}.$$

— Jeszcze raz należy podkreślić, że otrzymane wyniki, tzn. /3.10/ - /3.14/ są prawdziwe przy założeniu ciągłej

różniczkowalności funkcji ruchu. Założenie to przestaje obowiązywać w przypadku fal uderzeniowych. Jak się później okaże, istotna część zależności pozostaje w mocy, o ile określona pochodna czasowa \underline{v} oraz gradient \underline{F} w punkcie (\underline{x}, t) zastąpimy ich jednostronnymi granicami \underline{v}^- i \underline{F}^- bądź \underline{v}^+ i \underline{F}^+ . Należy zaznaczyć, że tutaj, tak jak i w dalszych partiach, żądamy ciągłości funkcji ruchu \underline{x} i jej odwrotnej \underline{x}^{-1} .

3.2. Powierzchnia nieciągłości prędkości

Powierzchnie osobliwe w teorii fal w ośrodkach ciągłych dzieli się zgodnie z rzędem najniższej pochodnej funkcji ruchu doznającej nieciągłości przy przejściu przez nią. I tak powierzchnia osobliwa pierwszego rzędu, to powierzchnia nieciągłości wektora prędkości \underline{v} i /bądź/ tensora gradientu deformacji \underline{F} . Przykładem takich powierzchni są fale uderzeniowe i powierzchnie zawirowania /często ogólnie zwane falami prędkości, por. WESOŁOWSKI [1974] /. W niniejszym opracowaniu zajmujemy się falami prędkości o nieciągłej normalnej składowej wektora prędkości, tzn. przypadkiem gdy

$$/3.15/ \quad [\underline{v}] \cdot \underline{n} \neq 0, \text{ albo } [v^1]_{n_1} \neq 0.$$

W nomenklaturze STOKESA [1848], TRUESDELLA i TOUPINA [1960, s. 513] są to fale uderzeniowe. Powierzchnie zawirowania zdefiniowane warunkami

$$/3.16/ \quad [\underline{v}] \neq 0 \quad \text{ i } [\underline{v}] \cdot \underline{n} = 0$$

charakteryzują się nieciągłą składową styczną wektora prędkości /zwane przez Couranta i Fridrichsa - nieciągłościami kontaktowymi, a przez Truesdella i Toupina a vortex sheet/ nie będą tutaj badane /Czytelników zainteresowanych wia-

snościami takich powierzchni osobliwych odsyłamy do rozdziału 5-ge monografii autora [1980] /.

Zauważmy, że ze względu na /3.15/ i /3.13/ falę uderzeniową można zdefiniować poprzez warunek nieciągłości lokalnej prędkości propagacji U , tzn. $[[U]] \neq 0$. Ponadto zachodzi na niej związek /ze względu na ciągłość u_n /:

$$/3.17/ \quad [[U]] = -[[v_n]].$$

Zgodnie z uwagą na końcu p. 3.1. w miejsce /3.10/ i /3.14/ prawdziwe są związki

$$\underline{N} = \frac{(\underline{F}^T)^- \underline{n}}{|(\underline{F}^T)^- \underline{n}|_3} = \frac{(\underline{F}^T)^+ \underline{n}}{|(\underline{F}^T)^+ \underline{n}|_3}, \quad \frac{((\underline{F}^{-1})^T)^- \underline{N}}{|((\underline{F}^{-1})^T)^- \underline{N}|_3} = \frac{((\underline{F}^{-1})^T)^+ \underline{N}}{|((\underline{F}^{-1})^T)^+ \underline{N}|_3} = \underline{n}$$

/3.18/

$$U_N = \frac{U^-}{|(\underline{F}^T)^- \underline{n}|_3} = \frac{U^+}{|(\underline{F}^T)^+ \underline{n}|_3}.$$

Powyższe zależności mogą być zapisane w równoważnej postaci

$$\left[\frac{\underline{F}^T}{|(\underline{F}^T)^- \underline{n}|_3} \right] \underline{n} = \underline{0}, \quad \left[\frac{(\underline{F}^{-1})^T}{|(\underline{F}^{-1})^T \underline{N}|_3} \right] \underline{N} = \underline{0}, \quad \left[\frac{U}{|(\underline{F}^T)^- \underline{n}|_3} \right] = 0.$$

Z tego względu, że funkcja ruchu \underline{x} jest określona na $1 \times \mathcal{R}(\mathcal{B})$, nieciągłości tensora \underline{F} i wektora \underline{v} będą określone przez geometrię rodziny $\{\Sigma(t)\}_{t \in I}$ w opisie materialnym. Tak więc korzystając z wyprowadzonych w p.2 warunków zgodności należy w miejsce wielkości geometrycznych powierzchni $s(t)$ wstawić wielkość z geometrii i kinematyki powierzchni $\Sigma(t)$.

Warunki zgodności /2.15/ dla pochodnych funkcji ruchu są następujące

$$/3.19/ \quad [\underline{F}] = \left[-\frac{\partial \chi}{\partial \underline{H}} \right] \bullet \underline{H} , \quad [\underline{v}] = -U_H \left[\frac{\partial \chi}{\partial \underline{H}} \right] ,$$

stąd

$$U_H [\underline{F}] \underline{H} = -[\underline{v}] ,$$

albo

$$/3.19'/ \quad [F_K^i] = \left[\frac{\partial \chi^i}{\partial H} \right] H_K , \quad [v^i] = -U_H \left[\frac{\partial \chi^i}{\partial H} \right] ,$$

gdzie, zgodnie z wprowadzonym w /2.4/ oznaczeniem, piszemy

$$/3.20/ \quad \frac{\partial \chi}{\partial H} = \text{Grad } \chi \cdot \underline{H} = \underline{F} \underline{H} ,$$

$$\text{albo} \quad \frac{\partial \chi^i}{\partial H} = \frac{\partial \chi^i}{\partial X^K} X^K ,$$

w układzie kartezjańskim. Wektor

$$/3.21/ \quad \underline{s} = \left[\frac{\partial \chi}{\partial \underline{H}} \right] = [\underline{F} \underline{H}]$$

nosi częste nazwę amplitudy fali uderzeniowej /por. Mc CARTHY [1975] /albo wektora charakterystycznego fali uderzeniowej /por. KOSIŃSKI [1980] /, albo wektora osobliwości /por. TRUESDELL i TOUPLIN [1960] /.

Pochodna przemieszczeniowa $\frac{\delta}{\delta t}$, zdefiniowana w dualnym opisie materiałnym, ma postać /por. /1.26//

$$/3.22/ \quad \frac{\delta(\cdot)}{\delta t} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + U_H \text{Grad}(\cdot) \cdot \underline{H} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + U_H \frac{\partial(\cdot)}{\partial \underline{H}} .$$

Wykorzystując związek zgodności /2.19/₂ otrzymany

$$/3.23/ \quad 2 U_N \frac{\delta \underline{s}}{\delta t} + \underline{s} \frac{\delta U_N}{\delta t} = U_N^2 \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial N^2} \right] - [\dot{\underline{v}}],$$

gdzie

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial N^2} = (\text{Grad Grad } \chi) \cdot (\underline{N} \otimes \underline{N})$$

albo

$$\frac{\partial^2 \chi^i}{\partial N^2} = \frac{\partial^2 \chi^i}{\partial X^K \partial X^L} N^K N^L$$

w układzie kartezjańskim. Grupując dwa pierwsze wyrazy, przy założeniu, że $U_N > 0$, zapiszemy związek /3.23/ w krótszej postaci

$$/3.24/ \quad 2 \sqrt{U_N} \frac{\delta}{\delta t} (\sqrt{U_N} \underline{s}) = U_N^2 \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial N^2} \right] - [\dot{\underline{v}}].$$

Równania /3.23/ i /3.24/ rządzą ewolucją podstawowych wielkości: skoku pochodnej normalnej funkcji ruchu i normalnej szybkości wzdłuż trajektorii normalnej powierzchni $\Sigma(t)$.

Pewne własności skoków $[\underline{v}]$ i $[\underline{p}]$ na fali uderzeniowej; są zebrane i udowodnione w monografii autora [1980].

Na koniec tego punktu zapważmy, że z teoretycznego punktu widzenia jest możliwa sytuacja, w której

$$[\underline{p}] \neq \underline{0} \quad \text{ i } \quad [\underline{v}] = \underline{0}.$$

Odpowiada to /por. /3.19// znikającej składowej normalnej U_N prędkości powierzchni. Takie powierzchnie nazywa się powierzchniami absolutnie /bezwzględnie/ materialnymi. Są one stałym obrazem cząstek ciała w ruchu, reprezentujących pewną powierzchnię materialną w ciele. Powierzchnie jednostronne

sterialne charakteryzują się jednym z warunków $U^- = 0$ albo $U^+ = 0$ przy jednoczesnym $U_N \neq 0$.

3.3. Powierzchnia osobliwa drugiego rzędu

Zgodnie z tytułem rozpatrzmy sytuację, w której pierwsze pochodne funkcji ruchu są ciągłe, natomiast jej drugie pochodne doznają nieciągłości skokowej, tzn.

$$[\underline{v}] = \underline{0}, \quad [\underline{f}] = \underline{0}.$$

/3.25/ oraz

$$[\dot{\underline{v}}] = \underline{0} \text{ lub } /1/ [\text{Grad } \underline{f}] \neq \underline{0}.$$

Warunki zgodności /2.13/ i /2.20/ przyjmą postać

$$[\text{Grad } \underline{f}] = \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial N^2} \right] \underline{e}_N \otimes \underline{e}_N, \quad \left[\frac{\partial f^i_K}{\partial X^L} \right] = \left[\frac{\partial^2 \chi^i}{\partial X^M \partial X^N} \right] N^M N^N N^K N^L,$$

/3.26/

$$[\dot{\underline{f}}] = -U_N \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial N^2} \right] \underline{e}_N, \quad [\dot{f}^i_K] = -U_N \left[\frac{\partial^2 \chi^i}{\partial X^M \partial X^N} \right] N^M N^N N^K,$$

$$[\dot{\underline{v}}] = U_N^2 \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial N^2} \right], \quad [\dot{v}^i] = U_N^2 \left[\frac{\partial^2 \chi^i}{\partial X^M \partial X^N} \right] N^M N^K.$$

Wstawiając w związki /2.19/ prędkość \underline{v} w miejsce funkcji f , otrzymamy

$$/3.27/ [\dot{\underline{v}}] = -2U_N \frac{\delta}{\delta t} ([\dot{\underline{f}}] \underline{e}_N) - [\dot{\underline{f}}] \underline{e}_N \frac{\delta U_N}{\delta t} + U_N^2 \left[\frac{\partial \dot{\underline{f}}}{\partial N} \right] \underline{e}_N$$

Ze względu na /3.26/ przy nieznikającej U_N dostajemy zależności

$$/3.28/ \quad [\dot{\underline{y}}]_{\underline{N}} = -U_N \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial N^2} \right] = -U_N^{-1} [\dot{\underline{y}}],$$

lub w składowych kartezjańskim układzie prostokątnym

$$/3.28'/ \quad [\dot{P}^i_K]_{N^K} = -U_N \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial X^M \partial X^N} \right] N^M N^N = -U_N^{-1} \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right].$$

W efekcie, w miejsce relacji /3.27/ możemy napisać⁷⁷

$$[\dot{\underline{y}}] = 2 \frac{\delta [\dot{\underline{y}}]}{\delta t} - \frac{[\dot{\underline{y}}]}{U_N} \frac{\delta U_N}{\delta t} + U_N^2 \left[\frac{\partial \dot{P}}{\partial N} \right]_{\underline{N}},$$

$$/3.29/ \quad [\text{Grad } \dot{P}] = \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial N^2} \right] \circ \underline{N} \circ \underline{N} + \frac{b_{r\Delta}}{U_N} [\dot{\underline{y}}] \circ \underline{P}^r \circ \underline{P}^\Delta - \left(\frac{[\dot{\underline{y}}]}{U_N} \right)_{\underline{r}} \circ (\underline{N} \circ \underline{P}^r + \underline{P}^r \circ \underline{N}).$$

Przy założeniu $U_N > 0$ dostajemy

$$2\sqrt{U_N} \frac{\delta}{\delta t} ([\dot{\underline{y}}]/\sqrt{U_N}) = [\dot{\underline{y}}] - U_N^2 [\partial \dot{P} / \partial N]_{\underline{N}}.$$

W poprzednim podpunkcie zdefiniowaliśmy powierzchnie osobliwe absolutnie materialne i jednostronnie materialne.

77/ $b_{r\Delta}$ są składowymi drugiego tensora metrycznego ruchomej powierzchni w opisie materialnym, tzn. $\Sigma(t)$, $t \in I$, zaś $\underline{P}^k = g^{r\Delta} \underline{P}_{,\Delta}$ są wektorami bazy dualnej do bazy $\{\underline{P}_{,1}, \underline{P}_{,2}, \underline{N}\}$; gdzie $g^{r\Delta}$ to składowe kowariantne tensora metrycznego, $[\Delta = 1, 2$.

W przypadku powierzchni drugiego rzędu wektor prędkości \underline{v} jest ciągły i oba pojęcia są nierozróżnialne. Przyjmujemy więc określenie: powierzchnia osobliwa drugiego rzędu jest materiałna, gdy U_N znika. Na takiej powierzchni

$$[\dot{\underline{v}}] = \underline{0} \quad \text{i} \quad [\text{Grad } \underline{F}] \neq \underline{0} \quad \text{oraz} \quad [\dot{\underline{F}}] = \underline{0}.$$

Wśród powierzchni osobliwych drugiego rzędu najbardziej nas interesują fale przyspieszenia jako powierzchnie nieciągłości pola wektora przyspieszenia. Wielkością charakterystyczną w analizie fal przyspieszenia jest nieznikający wektor:

$$/3.30/ \quad \hat{\underline{a}} = \left[\frac{\partial^2 \underline{a}}{\partial N^2} \right] \quad \text{albo} \quad \hat{a}^i = \left[\frac{\partial^2 \alpha^i}{\partial X^M \partial X^N} \right] N^M N^N.$$

Przy jego pomocy warunki zgodności /3.26/ mogą być z wykorzystaniem \underline{n} i \underline{U} zapisane w postaci:

$$[\text{Grad } \underline{F}] = \left(\frac{U_N}{U} \right)^2 \hat{\underline{a}} \circ \underline{F}^T \underline{n} \circ \underline{F}^T \underline{n}, \quad \left[\frac{\partial F_K^i}{\partial X^L} \right] = \left(\frac{U_N}{U} \right)^2 \hat{a}^i \cdot F_{K^j}^i F_{L^p}^j a_p$$

$$/3.31/ \quad [\dot{\underline{F}}] = - \left(\frac{U_N}{U} \right) U_N \hat{\underline{a}} \circ \underline{F}^T \underline{n}, \quad [F_K^i] = - \left(\frac{U_N}{U} \right) U_N \hat{a}^i F_{K^j}^j$$

$$[\dot{\underline{v}}] = U_N^2 \hat{\underline{a}}, \quad [\dot{v}^i] = U_N^2 \hat{a}^i.$$

Częściej korzysta się z wektora amplitudy \underline{a} określonego przez

$$/3.32/ \quad \underline{a} = \left(\frac{U_N}{U} \right)^2 \hat{\underline{a}}.$$

Z nim związki /3.31/ będą wyglądały następująco

$$\begin{aligned} \text{[Grad } \underline{F}] &= \underline{a} \circ \underline{F}_{,n}^T \circ \underline{F}_{,n}^T \\ /3.33/ \quad \text{[}\dot{\underline{F}}\text{]} &= -U \underline{a} \circ \underline{F}_{,n}^T \\ \text{[}\dot{\underline{v}}\text{]} &= U^2 \underline{a} . \end{aligned}$$

Zauważmy, że ostatnie związki wykorzystują wielkości geometryczne powierzchni w opisie przestrzennym.

Przyjmuje się następujące określenia: dla fali przyspieszenia

podłużna, jeśli

$$/3.34/ \quad \underline{a} \times \underline{n} = \underline{0}, \quad \text{tzn. } \underline{a} \parallel \underline{n},$$

gdzie \times oznacza iloczyn wektorowy;

poprzeczna, jeśli

$$\underline{a} \cdot \underline{n} = 0.$$

Przez bezpośrednie różniczkowanie i wykorzystanie wzorów Gaussa i Weingartena otrzymuje się /CHEN [1968a] /

$$\underline{a}_{, \gamma} \cdot \underline{\psi}_{, \alpha} = -b_{\gamma\alpha} \underline{a} \cdot \underline{n} \quad \text{na fali podłużnej,}$$

/3.35/

$$\underline{a}_{, \gamma} \cdot \underline{n} = b_{\gamma}^{\alpha} \underline{a} \cdot \underline{\psi}_{, \alpha} \quad \text{na fali poprzecznej.}$$

Łatwo też wykazać, że na fali przyspieszenia następujące równanie /por. wyprowadzenie DORIA i BOWENA [1970] dla przypadku fali podłużnej/

$$\begin{aligned} /3.36/ \quad 2 u_n \frac{\delta}{\delta t} \left[\frac{\partial \underline{v}}{\partial n} \right] + \left[\frac{\partial \underline{v}}{\partial n} \right] \frac{\delta u_n}{\delta t} = \\ = u_n^2 \left(\left[\text{div Grad } \underline{v} \right] + \left[\frac{\partial \underline{v}}{\partial n} \right] 2 K_n \right), \end{aligned}$$

gdzie

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_n \text{grad}(\cdot) \underline{n}.$$

Na zakończenie chcę zwrócić uwagę na istniejącą możliwość innego omówienia fal przyspieszenia, niż tego, które wykorzystuje pochodną przemieszczeniową Thomasa i równanie amplitudy fali przyspieszenia /por. /3.22/, /3.27/, /3.29//, wyprowadzone przy jej pomocy.

Jak wiemy, pochodna Thomasa /pochodna przemieszczeniowa/ mierzy zmianę wielkości mechanicznych i termodynamicznych lub ich skoków, określonych na powierzchni osobliwej i to w kierunku normalnym, tzn. wzdłuż trajektorii normalnej poruszającej się powierzchni $\{\Sigma(t)\}_{t \in I}$.

Dla wielu zagadnień, szczególnie dla ośrodków izotropowych i fal propagujących się w obszar niezaburzony, równanie na zmianę wektora charakterystycznego fali przyspieszenia jest równaniem różniczkowym zwyczajnym względem czasu t , tj. parametru trajektorii normalnej. Lecz nie jest tak zawsze. Bardzo częste równanie amplitudy, oprócz pochodnej względem t , zawiera pochodne styczne względem parametrów powierzchni l^1, l^2 /por. /3.29//. W takich przypadkach trudno myśleć o znalezieniu rozwiązania.

Występowanie pochodnych stycznych w równaniu amplitudy oznacza, że trajektorie normalne nie są krzywymi rozchodzenia się głównych zaburzeń związanych z falą przyspieszenia. Zaburzenie byłoby główne, gdyby jego zmiana względem parametru krzywej /trajektorii normalnej/ nie zależała od rozkładu w innych kierunkach, tj. kierunkach stycznych do powierzchni.

Aby uniknąć pochodnych stycznych w równaniu amplitudy należy znaleźć nieortogonalne trajektorie /krzywe/ rozchodzenia się zaburzeń głównych i zastąpić pochodną przemieszczeniową Thomasa pochodną mierzącą zmianę zaburzenia wzdłuż nowej trajektorii.

Jeśli przypomnimy wyrażenia /1.26/ - /1.31/ to widać, szczególnie z ostatniej postaci /1.31/, że w przypadku parametryzacji konwekcyjnej pochodna przemieszczeniowa pokrywa się z pochodną osąstkową względem czasu. Jeśli krzywa propagacji zaburzeń głównych nie jest trajektorią normalną, parametryzacja konwekcyjna traci swoje znaczenie i niezbędne jest zastąpienie tej parametryzacji inną - niekonwekcyjną. W istocie ta nowa parametryzacja powinna być tak dobrana, aby prędkość poruszania się powierzchni \underline{g} /por. /1.17// wyznaczała kierunek krzywej propagacji zaburzeń.

W teorii równań hiperbolicznych krzywe propagacji głównych zaburzeń noszą nazwę bicharakterystyk.

Można przedstawić formalną teorię fal przyspieszenia, w której nie zakłada się, że zaburzenia główne rozprzestrzeniają się wzdłuż trajektorii normalnych /por. KOSIŃSKI [1980], rozdz. VI /. Podejście to ma szczególne zastosowanie do badania fal w ośrodkach nieizotropowych i /lub/ wstępnie odkształconych.

Historycznie rzecz ujmując, idea Thomasa wprowadzenia pochodnej przemieszczeniowej miało służyć badaniu fal rozchodzących się w izotropowych i niezaburzonych ośrodkach. W takich przypadkach zaburzenia główne rozchodzą się po trajektoriach normalnych. Konkludując można zaryzykować twierdzenie, że analiza rozchodzenia się fal bazująca na pochodnej przemieszczeniowej Thomasa ma głównie zastosowanie do przypadku, kiedy ruchoma powierzchnia w kontinuum /fala/ tworzy rodzinę powierzchni równoległych sparametryzowaną bądź czasem, bądź długością drogi przebytą przez zaburzenie wzdłuż trajektorii normalnej /por. wielkość α zdefiniowaną przez związek /A.2/ w Dodatku A/. W tym też celu umieszczone na zakończenie rozdział dotyczący rodziny powierzchni równoległych.

4. RÓWNANIA BILANSU KONTINUUM ODKSZTAŁCALNEGO

Ruch dowolnej objętości \mathcal{U} , która jest częścią ciała \mathcal{B} jest rządony trzema równaniami bilansu zapisanymi w kartezjańskim układzie współrzędnych

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \rho \, dv = 0,$$

$$/4.1/ \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \rho \, v^i \, dv = \int_{\partial \mathcal{U}} T^{ij} m_j \, da + \int_{\mathcal{U}} \rho \, b^i \, dv,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \rho (\varepsilon + v^i v_i) \, dv = \int_{\mathcal{U}} \rho (b^i v_i + r) \, dv + \int_{\partial \mathcal{U}} (T^{ij} v_j + q^i) m_i \, da$$

i nierównością produkcji entropii w postaci Clausiusa-Duhema

$$/4.2/ \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \rho \eta \geq \int_{\partial \mathcal{U}} \frac{1}{T} q^i m_i \, da + \int_{\mathcal{U}} \rho \frac{r}{T} \, dv,$$

gdzie ρ , T^{ij} , b^i , ε , r , q^i i η oznaczają odpowiednio: gęstość masy, składowe symetrycznego tensora Cauchy'ego naprężeń, składowe objętościowych sił na jednostkę masy, gęstość energii wewnętrznej na jednostkę masy, gęstość objętościowych źródeł ciepła na jednostkę czasu i masy, składowe wektora strumienia ciepła i gęstość entropii na jednostkę masy. Ponadto m_i są składowymi jednostkowego zewnętrznego wektora normalnego do $\partial \mathcal{U}$; T - temperatura.

Trzy równania /4.1/ wyrażają odpowiednio prawa zachowania masy, pędu i energii. Nierówność /4.2/ jest traktowana

jako drugie prawo termodynamiki. Drugie prawo ruchu Cauchy'ego /bilans momentów/ jest automatycznie spełniony przez żądanie symetrii tensora naprężenia.

Znane prawo transportu dla ciałek /por. TRUESDELL i TOUPIN [1960, s. 347] / i twierdzenie o dywergencji /zamianie ciałek powierzchniowych na objętościowe/ pozwala przejść do następujących lokalnych postaci praw całkowych /4.1/, /4.2/ przy założeniu ciągłości $\dot{\rho}$, $\dot{\rho}v_i$, b_i , $\rho\dot{\epsilon}$ i r oraz ciągłej różniczkowalności T^{ij} , q^i i v w obszarze $\mathcal{V}(B)$:

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0 \quad , \quad \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad ,$$

$$/4.3/ \quad T_{,j}^{ij} + \rho b^i = \rho \dot{v}^i \quad , \quad \operatorname{div} \underline{T} + \rho \underline{b} = \rho \dot{\underline{v}} \quad ,$$

$$\rho \dot{\epsilon} = T^{ij} v_{i,j} + q_{i,i} + \rho r \quad , \quad \rho \dot{\epsilon} = \operatorname{tr}(\underline{T} \underline{D}) + \operatorname{div} \underline{q} + \rho r \quad ,$$

$$\rho \eta \geq \frac{1}{\rho} q_{i,i} - \frac{1}{\rho} q_i v_{,i} \quad , \quad \rho \eta \geq \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{q} - \frac{1}{\rho} \underline{q} \cdot \nabla \underline{v} + \rho r \quad ,$$

gdzie $\underline{D} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{v} + (\operatorname{grad} \underline{v})^T)$, w składowych $D_j^i = \frac{1}{2} (v_j^i + v_i^j)$, jest tensorem prędkości odkształceń $\operatorname{tr}(\cdot)$ oznacza ślad wielkości tensorewej w nawiasie, natomiast kropka nad wielkościami jest czasowym różniczkowaniem materialnym /substancjalnym/, tzn. jeśli $f = f(\underline{x}, t)$, to

$$\dot{f} = \operatorname{grad} f \cdot \underline{v} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad .$$

Przy takim oznaczeniu prawo zachowania masy /4.3/ przyjmie następującą postać w zmiennych \underline{x} i t /tzw. zmiennych Eulera/

$$/4.4/ \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^i)_{,i} = 0 \quad .$$

Jeśli nie są spełnione założenia gładkości odnośnie funkcji występujących w /4.3/ i mamy do czynienia z powierzchnią nieciągłości $S(t)$ przecinającą obszar \mathcal{U} , to musimy

zmodyfikować przejście od praw globalnych /4.1/, /4.2/ do praw lokalnych. W tym celu skorzystamy z następujących twierdzeń całkowych^{8/}

$$\frac{d}{dt} \int_V f \, dV = \int_{V-S(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \underline{v}) \right) dV + \int_{S(t)} [f(\underline{c} - \underline{v})] \cdot \underline{n} \, da$$

/4.5/

$$\int_{\partial V} f \cdot \underline{m} = \int_{V-S(t)} \operatorname{div} \underline{f} \, dV - \int_{S(t)} [\underline{f}] \cdot \underline{n} \, da,$$

gdzie \underline{c} jest prędkością przemieszczenia powierzchni $S(t)$ /per. /1.17//. Skoro \underline{n} oznacza jednostkowy wektor normalny powierzchni $S(t)$ użyliśmy litery \underline{n} do oznaczenia jednostkowego wektora normalnego względem brzegu ∂V obszaru. Zauważmy, że ostatni wyraz prawej strony pierwszego związku możemy przedstawić przy użyciu lokalnej prędkości propagacji U następująco /per. /3.13//

$$[f(\underline{c} - \underline{v})] \cdot \underline{n} = [fU], \quad [f(c^i - v^i)] n_i = [fU].$$

Wykorzystując równania /4.5/ do praw bilansu /4.1/ i nierówności /4.3/ otrzymujemy, z warunku ich słuszności dla dowolnego obszaru V i dowolnej części powierzchni $S(t)$ równania i nierówności /4.3/ dla punktów obszaru spęsa powierzchni osobliwej oraz tzw. dynamiczne warunki zgodności

$$\begin{aligned} [\rho U] &= 0, \\ [\rho U v] &= -[I n], \quad [\rho U v^i] = -[T^{ij} n_j] \\ /4.6/ \quad [\rho(\epsilon + \frac{1}{2} v \cdot v) U] &= -[I v + g] \cdot \underline{n}, \quad [\rho(\epsilon + \frac{1}{2} v \cdot v) U] = -[T^{ij} v_j + q^i] n_i \\ [\rho U \eta] &\geq -[g/\rho] \cdot \underline{n}, \quad [\rho U \eta] \geq -[q^i/\rho] n_i \end{aligned}$$

dla punktów leżących na powierzchni osobliwej. Trzy pierwsze

8/ Wyprowadzenie równań /4.5/ można znaleźć u THOMASA [1949], TRUESDELLA i TOUPINA [1960], ERINGENA [1967, 1975], KOSIŃSKIEGO [1980].

równania noszą częste nazwę uogólnionych związków Rankine'a-Hugonietta na przypadek dowolnego kontinuum odkształcalnego.

W opisie materialnym warunki te mają postać

$$\begin{aligned} U_N[\rho_0] &= 0 \\ \rho_0 U_N[\underline{v}] &= -[\underline{\tilde{T}}] N, \quad \rho_0 U_N[\underline{v}_i] = -[\tilde{T}_{ik}] N^k, \\ /4.7/ \quad \rho_0 U_N[\underline{\varepsilon} + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v}] &= -[\underline{v} \tilde{T} + \tilde{q}] N, \quad \rho_0 U_N[\underline{\varepsilon} + \frac{1}{2} v^i v_i] = -[v^i \tilde{T}_{ik} + \tilde{q}_k] N^k, \\ \rho_0 U_N[\eta] &= -[\tilde{q}^k / \underline{v}^k] N, \quad \rho_0 U_N[\eta] = -[\tilde{q}^k / \underline{v}^k] N_k, \end{aligned}$$

gdzie ρ_0 jest gęstością masy w konfiguracji odniesienia, $\tilde{T} = (\tilde{T}_{ik})$ - pierwszym tensorem naprężenia Piola-Kirchhoffa, natomiast $\tilde{q} = (\tilde{q}^k)$ - wektorem strumienia ciepła odniesionym do jednostki powierzchni w konfiguracji odniesienia.

Przedstawione warunki /4.6/ w opisie przestrzennym i ich równoważna postać /4.7/ w opisie materialnym muszą być spełnione w dowolnym ruchu dowolnej powierzchni nieciągłości $s(t)(\Sigma(t))$. Leć zauważyć, że gdy $\Sigma(t)(s(t))$ jest powierzchnią osobliwą drugiego rzędu, to równości /3.25/_{1,2} wymagające ciągłości wektora prędkości \underline{v} i tensora gradienta deformacji \underline{F} sprowadzają związki /4.6/_{1,2} do postaci^{9/}

$$/4.8/ \quad U[\rho] = 0, \quad [\underline{\tau}] \underline{n} = 0, \quad \text{albo} \quad [\tau_{1j}] n_j = 0.$$

Pierwszy związek oznacza ciągłość gęstości masy na powierzchni drugiego rzędu /w szczególności na fali pręyspieszenia/, drugi - ciągłość normalnej składowej tensora naprężenia.

9/ Przy wypisywaniu tych związków wykorzystujemy następującą równość $[fg] = f[g]$, prawdziwą dla dowolnych dwóch funkcji f i g takich, że f jest ciągła przy przejściu przez $s(t)$, natomiast g może doznawać na niej skoku nieciągłości.

5. FALE AKUSTYCZNE W OŚRODKU SPRĘŻYSTYM PRZY NISKICH TEMPERATURACH

Celem tej części opracowania jest przedstawienie konkretnych zastosowań rozwiniętej w poprzednich rozdziałach teorii do analizy fal w ośrodkach termosprężystych.

Wybrany przez nas model ośrodka ma dostarczyć obek przykładu analizy fal przyspieszenia w ciele stałym pewnego zakresu współczesnych badań nad zjawiskiem przewodzenia ciepła w materiałach.

Mechaniczne teorie XIX-go i XX-go wieku uwzględniające transport ciepła bazują na klasycznej teorii przewodnictwa. Biorą swoje początki od J.B.J. Fouriera, który w 1822 roku sformułował prawo proporcjonalności między strumieniem ciepła i gradientem temperatury. Konsekwencją tego prawa jest paraboliczne równanie różniczkowe rządzące rozkładem temperatury w ciele, a w efekcie nieskończona prędkość rozchodzenia się zaburzeń cieplnych.

Ten fakt stoi w sprzeczności z obserwacjami fizycznymi /które wykazują, że w bardzo niskich temperaturach problem ten nabiera znacznej wagi/ i szczególną teorią względności. Już w 1867 roku dzięki MAXWELLOWI [1867] zostało podane zmodyfikowane prędkościowe równanie ciepła usuwające tę sprzeczność. Niestety, Maxwell odrzucił w wyprowadzonych związkach człon z prędkością strumienia ciepła /którego uwzględnienie prowadziło do hiperbolicznego równania rozkładu ciepła/ i powrócił do prawa Fouriera.

5.1. Równanie Maxwella - Cattaneo w termosprężystości

Problem istnienia skończonej prędkości propagacji zaburzeń cieplnych był badany na przestrzeni ostatnich 40-tu

lat /porównaj bibliografię prac KOSIŃSKIEGO [1975] WOŁO-SZYŃSKIEJ [1979] i IGNACZAKA [1980]. Istnieją już liczne opracowania podnoszące ten problem czy to dla ośrodków sprężystych czy też niesprężystych. Jeden z najprostszych ujęć tego zagadnienia w sprężystości to założenie /por. KOSIŃSKI i SZMIT [1977]/, że obok termosprężystych równań konstytutywnych dla energii wewnętrznej Ψ entropii η i naprężenia $\underline{\underline{T}}$

$$\Psi = \Psi(F, \vartheta) \quad \eta = \eta(F, \vartheta) = -\partial_{\vartheta} \Psi(F, \vartheta)$$

$$/5.1/ \quad \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}(F, \vartheta) = \rho \partial_F \Psi(F, \vartheta)$$

w funkcjach gradientu deformacji $\underline{\underline{F}}$ i temperatury ϑ , istnieje zmodyfikowane równanie prędkościowe dla wektora $\underline{\underline{q}}$ strumienia ciepła

$$/5.2/ \quad \tau \dot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{q}} = -k \text{Grad } \vartheta,$$

gdzie τ jest tzw. czasem relaksacji, k - współczynnikiem przewodnictwa ciepła, natomiast $\text{Grad } \vartheta$ jest gradientem temperatury.

Istniejące badania doświadczalne przeprowadzone w bardzo niskich temperaturach wykazały, że czas τ jest wielkością bardzo małą. W zastosowaniach praktycznych przyjmuje się wielkość znikającą ($\tau = 0$) prowadzi do klasycznego równania przewodnictwa

$$/5.3/ \quad \underline{\underline{q}} = -k \text{Grad } \vartheta$$

Równanie /5.2/ nazywane jest często w literaturze związkami Maxwella-Cattaneo. W teorii liniowej prowadzi do liniowego hiperbolicznego równania różniczkowego dla rozkładu temperatury.

5.2. Warunek propagacji fali akustycznej

Podstawowy układ równań teraospężystego ciała \mathcal{B} o gęstości odniesienia ρ_0 tworzą: pierwsze prawo ruchu Cauchy'ego

$$/5.4/ \quad \rho_0 \dot{\underline{v}} - \text{Div } \underline{\tilde{T}} - \rho_0 \underline{b} = \underline{0},$$

z siłami masowymi \underline{b} , geometryczny związek zgodności

$$/5.5/ \quad \underline{\dot{F}} - \text{Grad } \underline{v} = \underline{0},$$

bilans energii /pierwsze prawo termodynamiki/.

$$/5.6/ \quad \rho_0 \nabla \partial_F \partial_V \Psi \cdot \underline{\dot{F}} + \rho_0 \nabla \partial_V^2 \Psi \dot{V} - \text{Div } \underline{q} = \rho_0 r$$

i równanie Maxwella-Cattaneo /5.2/. Występujący tutaj tensor naprężenia jest pierwszym tensorem Pioli-Kirchhoffa. Równanie /5.6/ jest zredukowaną postacią po wykorzystaniu związków potencjalnych /5.1/_{2,3} pełnego prawa termodynamiki

$$\rho_0 (\dot{V} + \eta \nabla \cdot \underline{v} + \eta \dot{V}) = \underline{\tilde{T}} \cdot \underline{\dot{F}} + \text{Div } \underline{q} + \rho_0 r$$

z objętościowymi źródłami ciepła r .

Kropka występująca między dwoma tensorami oznacza pełne nasunięcie /iloczyn skalarny/, np.

$$\underline{\tilde{T}} \cdot \underline{\dot{F}} = \tilde{T}^{ik} \dot{F}_k = \tilde{T}^{ik} \dot{F}_{ik}.$$

Rozpatrzmy, zgodnie z zamierzeniem, falę akustyczną /przyspieszenia/ rozprzestrzeniającą się w ciele \mathcal{B} . Ruchoma powierzchnia nieciągłości $\{\Sigma(t)\}_{t \in I}$ wektora przyspieszenia $\underline{\ddot{v}}$ będzie jednocześnie powierzchnią nieciągłości prędkości temperatury \dot{V} i jej gradientu $\text{Grad } \dot{V}$. Zgodnie z oznaczeniami /3.30/ i warunkami zgodności /3.26/ dla pochodnych funkcji ruchu i dualnego /tzn. w opisie materialnym/ do /2.15/ ki-

nematycznego warunku zgodności mamy

$$[\text{Grad } \underline{F}] = \hat{\underline{a}} \circ \underline{N} \circ \underline{N}, \quad [\text{Grad } \underline{v}] = -U_{\underline{N}} \hat{\underline{a}} \circ \underline{N},$$

/5.7/

$$[\dot{\underline{v}}] = U_{\underline{N}}^2 \hat{\underline{a}}, \quad [\text{Grad } \underline{v}] = \hat{\underline{e}} \underline{N}, \quad [\dot{\underline{v}}] = -U_{\underline{N}} \cdot \hat{\underline{e}}$$

$$[\dot{\underline{q}}] = -U_{\underline{N}} [\text{Grad } \underline{q}] \underline{N},$$

gdzie wielkość $\hat{\underline{e}} := \left[\frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{N}} \right]$ można nazwać amplitudą termiczną.

Zakładając ciągłość \underline{b} i \underline{r} równania /5.4/, /5.5/, /5.6/ i /5.3/ w zapisie indeksowym przyjmują postać

$$[\dot{v}^L] - \frac{1}{\varrho_0} A_n^{LKM} [F_{M,K}^n] - \frac{1}{\varrho_0} P^{LK} [v_{,K}] = 0$$

$$[\dot{F}_L^L] - [v_{,L}^L] = 0$$

/5.8/

$$c_v [\dot{v}] - \nu P_L^K [\dot{F}_K^L] + [q_{,K}^K] = 0$$

$$[\dot{q}_K] + \frac{k}{T} [v_{,K}] = 0,$$

gdzie funkcja

$$/5.9/ \quad c_v := \dot{v} \partial_v \underline{N} = -\nu \partial_v^2 \Psi(F, \nu)$$

jest ciepłem właściwym /na jednostkę masy/ przy stałym odkształceniu. Tensor $\partial_F \hat{\underline{T}}$ o składowych $A_n^{LKM} = \partial \hat{T}^{LK} / \partial F_M^n$ jest tensorem sprężystości. Wykorzystując /5.7/ równania /5.8/ mogą być zapisane w zwartej postaci

$$(\bar{\underline{Q}} - U_{\underline{N}}^2 \underline{1}) \hat{\underline{a}} + \underline{P} \underline{N} \hat{\underline{e}} = \underline{0},$$

/5.10/

$$U_{\underline{N}}^2 \nu \partial_v \hat{\underline{T}} \underline{N} \cdot \hat{\underline{a}} + \left(\frac{k}{T} \underline{N} \cdot \underline{N} - \varrho_0 c_v U_{\underline{N}}^2 \right) \hat{\underline{e}} = \underline{0},$$

gdzie $\bar{\underline{Q}}$ jest symetrycznym tensorem zdefiniowanym przez swoje składowe:

$$/5.11/ \quad \bar{Q}_D^L := A_D^{LKM} N_K N_M.$$

Tensor \bar{Q} z dokładnością do czynnika skalarnego pokrywa się z tensorem akustycznym Q zdefiniowanym poniżej /por.

/5.13//. Zależy od \underline{F} i ∇ a jego symetria wynika z istnieniem energii swobodnej i potencjalnego związku /5.1/ dla naprężenia.

Przejdźmy do opisu w konfiguracji aktualnej, wprowadzając równoległe do wektora amplitudy \underline{a} określonego przez /3.32/ amplitudę termiczną

$$/5.12/ \quad \underline{e} = \frac{U_H}{U} \hat{e},$$

gdzie zgodnie z oznaczeniem /3.13/ wielkość U jest lokalną szybkością propagacji powierzchni. Podobnie definiując tensor akustyczny Q poprzez

$$/5.13/ \quad Q := \frac{\rho U^2}{\rho_0 U_H^2} \bar{Q}$$

otrzymamy, po pomnożeniu pierwszego równania w /5.10/ przez $\frac{\rho}{\rho_0}$, z ρ jako gęstością aktualną, związek

$$(\rho - \rho U^2 \mathbf{1}) \underline{a} + \frac{\rho}{\rho_0} \partial_\nu \tilde{T} \underline{F}^T \underline{a} = \underline{0}.$$

Należało tutaj jeszcze skorzystać z zależności /3.10/ i /3.14/. Skoro tensor Cauchy'ego wyraża się poprzez relację

$$/5.14/ \quad \underline{T} = \frac{\rho}{\rho_0} \tilde{T} \underline{F}^T,$$

ostatnie otrzymany związek zapiszemy jako

$$/5.15/ \quad (\rho - \rho U^2 \mathbf{1}) \underline{a} + \partial_\nu \underline{T} \underline{a} = \underline{0},$$

gdzie \underline{T} jest funkcją konstytutywną tensora Cauchy'ego.

Otrzymane równanie jest identyczne z tym w teorii fal przyspieszenia w klasycznym ośrodku termosprężystym. Przy znikającej termicznej amplitudzie e otrzymujemy warunek propagacji fali homotermicznej /por. HADAMARD [1903], TRUESDELL [1961], CHADWICK i CURRIE [1972] /.

Lecz w przeciwieństwie do klasycznego sformułowania prawa przewodnictwa w ciele sprężystym, gdzie występuje tylko jedno równanie wektorowe typu /5.15/ mamy do czynienia dodatkowo z równaniem skalarnym /5.10/2. Wprowadzając do /5.10/2 nowe amplitudy \underline{a} i e oraz tensor naprężenia Cauchy'ego otrzymamy

$$U^2 \nabla \cdot \underline{J} \partial_{\underline{v}} \underline{F} \underline{n} \cdot \underline{a} + \left(\frac{k}{T} \underline{F}^T \underline{n} \cdot \underline{F}^T \underline{n} - \rho_0 c_v U^2 \right) e = 0,$$

$$J = \rho_0 / \rho.$$

Lewy tensor odkształcenia Cauchy'ego-Greens \underline{B} pozwala zapisać produkt $\underline{F}^T \underline{n} \cdot \underline{F}^T \underline{n}$ w postaci $\underline{n} \cdot \underline{B} \underline{n}$. Stąd powyższe równanie wraz z /5.15/ zapisane razem tworzą następujący układ

$$/5.16/ \quad (\rho - \rho U^2 \underline{1}) \underline{a} + \rho e = \underline{g}$$

$$U^2 \nabla \cdot \underline{p} \cdot \underline{a} + \left(\frac{k}{T} \underline{n} \cdot \underline{B} \underline{n} - \rho_0 c_v U^2 \right) e = 0,$$

gdzie wektor \underline{p} jest dany przez

$$/5.17/ \quad \underline{p} = \partial_{\underline{v}} \underline{J} (\underline{F}, \underline{v}) \underline{n}$$

Wielkość $\bar{P} := -\frac{\underline{v}}{\rho_0} \partial_{\underline{v}} \underline{J} (\underline{F}, \underline{v})$ jest tensorem tzw. ciepła utajonych zmian odkształcenia na jednostkę masy.

Układ /5.17/ będzie miał niezerowe rozwiązania \underline{a} i e o ile jego wyznacznik $w(U_N^2)$ znika. Jeśli podstawimy $z = U_N^2$, to warunek zerowania się wyznacznika

$$/5.18/ \quad w(z) := d_4 z^4 - d_3 z^3 + d_2 z^2 - d_1 z + d_0$$

zapiszemy następująco

$$/5.19/ \quad w(z) = 0, \quad z = \frac{u^2}{H},$$

gdzie

$$d_0 = \frac{k}{T} \underline{n} \cdot \underline{B} \underline{n}$$

$$/5.20/ \quad d_1 = (\sqrt{J} \underline{Q} \underline{P} \cdot \underline{Q} \underline{P} - \underline{P} \cdot \underline{P} \underline{II} \underline{Q} - (\underline{P} \cdot \underline{P}) \cdot \underline{Q} \operatorname{tr} \underline{Q}) \\ - \frac{k}{T} \underline{n} \cdot \underline{B} \underline{n} \underline{II} \underline{Q} + \varphi_0 c_v \det \underline{Q},$$

$$d_2 = \sqrt{J} (\underline{P} \cdot \underline{P} \operatorname{tr} \underline{Q} - \underline{P} \cdot \underline{Q} \underline{P}) + \varphi_0 \frac{k}{T} \underline{n} \cdot \underline{B} \underline{n} \operatorname{tr} \underline{Q} \\ - \varphi_0 c_v \underline{II} \underline{Q},$$

$$d_3 = \sqrt{J} \underline{P} \cdot \underline{P} + \frac{k \varphi_0^2}{T} \underline{n} \cdot \underline{B} \underline{n} + \varphi_0 c_v \operatorname{tr} \underline{Q},$$

$$d_4 = \varphi^3 \varphi_0 c_v,$$

przy oznaczeniu $\underline{II} \underline{Q} = \frac{1}{2} (\operatorname{tr} \underline{Q}^2 - (\operatorname{tr} \underline{Q})^2)$. Równanie /5.19/ jest warunkiem propagacji fal przyspieszenia w ośrodku termospężystym z równaniem Maxwella-Cattanea przewodnictwa ciepła.

W badanym ośrodku rozprzestrzeniać się będą fale przyspieszenia o ile rozwiązania równania w /5.19/ będą dodatnie /ogólnie nieujemne z co najmniej jednym niezerowym rozwiązaniem/. Bliższa analiza współczynników /5.20/ i postaci /5.18/ prowadzi do następującego stwierdzenia.

SPOSTRZEŻENIE. W badanym ośrodku fale przyspieszenia /akustyczne/ rozprzestrzeniają się z prędkościami dodatnimi wtedy i tylko wtedy, gdy tensor \underline{Q} jest dodatnio określony, ciepło właściwe c_v jest dodatnie, współczynniki d_0, \dots, d_4 są dodatnie oraz

$$/5.21/ \quad D := H^2 + H^2 < 0 \quad \text{i} \quad w(z_1) < 0, \quad w(z_2) > 0, \quad w(z_3) < 0,$$

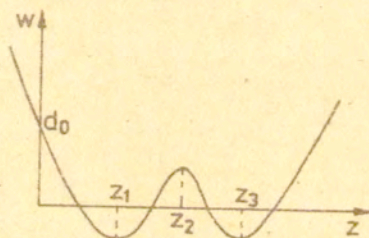
gdzie

$$2M = -\frac{d_3^2}{32 d_4^2} + \frac{d_3 d_2}{8 d_4^2} - \frac{d_1}{4 d_4},$$

$$3N = \frac{8 d_4 d_2 - 3d_3^2}{16 d_4^2}$$

zaś $z_1 < z_2 < z_3$ są pierwiastkami wielomianu $w'(z) = 4 d_4 z^3 - 3 d_3 z^2 + 2 d_2 z - d_1$.

Aby udowodnić nierówności /5.21/ należy zauważyć, że wielomian /5.18/ musi mieć wykres tak jak na Rys.6, aby jego pierwiastki były dodatnie.



Rys.6. Wykres wielomianu /5.18/ zabezpieczającego dodatniość jego pierwiastków.

Odpowiednią kolejność pierwiastków pochodnej $w'(z)$ gwarantują pozostałe nierówności. Warunek dodatniości tensora \underline{Q} jest identyczny jak w przypadku teorii izotermicznej.

Analizując fale główne KOSIŃSKI i SZMIT [1976] pokazali, że ogólnie propagują się ostre fale w każdym kierunku głównych osi kształceń. Jeśli tensor ciepła ukrytych nie znika /stała $p \neq 0$ /, to rozchodzą się dwie fale poprzeczne z pręd-

kościami izotermicznymi i dwie termomechaniczne fale podłużne. Natomiast przy znikającym tensorze $\partial_q J(\underline{F}, \mathcal{V})$ problem rozpręga się na trzy fale mechaniczne /jedną podłużną i dwie poprzeczne/ oraz jedną falę czyste termiczną. Prędkość tej ostatniej wynosi $\sqrt{b_{(i)k} / \tau_{\theta_0 c}}$, gdzie $b_{(i)}$ jest odkształceniem głównym. /Jeśli fala rozchodzi się w ośrodku niezaburzonym, to $b_{(i)} = 1/$. Łatwo zauważyć, że w przejściu z czasu relaksacji τ do zera prędkość fali termicznej rośnie do nieskończoności. Podobne rezultaty w teorii liniowej otrzymał TOKUOKA [1973a]. W ośrodkach bardziej złożonych termomechaniczne fali badali między innymi TOKUOKA [1973b, 1974] i KUKUDŽANOV [1977] /materiał termo-sprężyste-plastyczny/, Katarzyna Szmít-Wołoszyńska w swojej pracy doktorskiej WOŁOSZYŃSKA [1979] /materiał termo-sprężyste-lepkoplastyczny/ oraz KOSIŃSKI [1975] i MIHAILESCU z SULICIU [1976] w materiałach z wewnętrznymi zmianami stanu.

6. FAŁA UDERZENIOWA W OŚRODKU SKAŁOPODOBNYM MODELOWANYM MATERIAŁEM REOLOGICZNYM

Celem tej części opracowania jest przedstawienie konkretnych zastosowań rozwiniętej w poprzednich punktach teorii do analizy fal w ośrodkach niesprężystych.

W tym rozdziale rozpatrzmy płaską falę uderzeniową rozprzestrzeniającą się w ośrodku opisywaną stosunkowo prostym modelem materiału z wewnętrzną zmienną stanu. Wprowadzono wewnętrzną zmienną stanu /często zwana w literaturze parametrem wewnętrznym, per. PERZYNA [1978] / wpływającą na uogólniony moduł sprężystości uwzględnia czułość materiału na historię zmian objętości właściwej. Proponowane tutaj trójwymiarowe i obiektywne związki konstytutywne modelu mogą służyć do opisu zachowania się szerokiej klasy ciał sypkich i skałopodobnych.

Analizując płaską falę uderzeniową rozważa się efekt zniszczenia scharakteryzowany gwałtownym /nieskończonym/ wzrostem w skończonym czasie amplitudy fali. Formuluje się warunki takiego zachowania się fali.

W następnym rozdziale zbędamy falę przyspieszenia w ośrodku sypkim /z dylatacją / modelowanym równaniami teorii sprężyste-lepkoplastyczności /per. PERZYNA [1966, 1979] /.

6.1. Ośrodek skałopodobny jako kontinuum reologiczne wrażliwe na historię zmiany objętości

Ośrodki skaliste, górotwory i grunty wykazują duże zmiany objętości przy działających na nie obciążeniach /efekt dylatacji/. Ponadto obserwuje się w takich ośrodkach efekty czasowe, takie jak pełzanie, starzenie /relaksacja/. Te

przemawia za przyjęciem do rozważań modelu reologicznego.

W większości teoretycznych studiów ośrodki sypkie i skalopodobne opisywane są przy założeniach infinitesimalnej teorii ciał sprężysto-plastycznych. Używane tam prawa płynięcia są pewnego rodzaju niestowarzyszonymi prawami płynięcia sprężysto-plastyczności ze zmiennymi modułami sprężystości. Te ostatnie reprezentowane są przez rodzinę macierzy parametryzowaną bądź plastyczną zmianą gęstości / HUECKEL [1975] / bądź innym parametrem /Hueckel [1976] /.

W tych studiach teoretycznych podejście nieliniowej mechaniki kontinuum nie było częste w użyciu. Ponadto proponowane równania konstytutywne dla piasku, skał i innych ośrodków sypkich były zapisywane zazwyczaj w konfiguracjach beznaprężeniowych. Wydaje się bardziej adekwatne formułować równania w stanach wstępnie naprężonych w szczególności w obecności niejednorodnego /na ogół/ ciśnienia hydrostatycznego. Takie stany /a nawet bardziej złożone z naprężeniami ścisnającymi/ częste spotykamy w naturze, podczas gdy konfiguracje beznaprężeniowe są idealizacją eksperymentatora.

W celu sformułowania praw fizycznych /konstytutywnych/ rozważanego ośrodka skalopodobnego wychodzimy od ogólnego związku konstytutywnego dla izotropowego materiału ze skalar-nymi zmiennymi wewnętrznymi /parametrami, wewnętrznymi/ przy dowolnych /dużych/ odkształceniach

$$\begin{aligned} /6.1/ \quad \tilde{T} &= \varphi_0 \mathbf{1} + \varphi_1 \underline{B} + \varphi_2 \underline{B}^2 \quad \text{lub} \\ \tilde{T}_{ij} &= \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 B_{ij} + \varphi_2 B_{ik} B_{kj}, \end{aligned}$$

gdzie \tilde{T} jest tensorem naprężeń Cauchy'ego, zaś \underline{B} - lewym tensorem odkształcenia Cauchy'ego - Greena wyrażonym przez gradient deformacji \underline{F}

$$/6.2/ \quad \underline{B} = \underline{F} \underline{F}^T \quad \text{lub} \quad B_{ij} = F_{ik} F_{jk}.$$

O wielkościach φ_0 , φ_1 , φ_2 zakładamy, że są funkcjami

$I_{\underline{B}}$, $II_{\underline{B}}$, $III_{\underline{B}}$ trzech niezmienników tensora \underline{B} oraz skalarnych parametrów wewnętrznych $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Przyjmujemy, że rozpatrywany ośrodek w konfiguracji odniesienia, tzn. gdy $\underline{B} = \underline{1}$, znajduje się w stanie hydrostatycznego ciśnienia, tzn. naprężenie $\underline{T} = -p \underline{1}$. W ośrodkach skalistych, górotworach i gruntach wartość ciśnienia p zależy od głębokości, tzn. $p = \hat{p}(\underline{X})$.

Ten fakt uwzględniamy przez zależność ciśnienia p od rozkładu parametrów wewnętrznych $\alpha_{(e)}^i$; $i = 1, 2, \dots, n$, z konfiguracji odniesienia. Innymi słowami, jeśli para $(\underline{B}, \alpha_{\underline{B}}) = (1, \alpha_{(e)}^i)$ wyznacza stan ośrodka w konfiguracji odniesienia, to w ogólnym przypadku $\alpha_{(e)}^i$ mogą być funkcjami \underline{X} .

Przyjmujemy założenia upraszczające i przeprowadzamy specyfikację funkcji materiałowych ψ_0, ψ_1, ψ_2 jak następuje:

$$\psi_0 = \psi_2 \equiv 0,$$

$$/6.3/ \quad \psi_1 = \psi_1(III_{\underline{B}}, \alpha) = (III_{\underline{B}})^{-\frac{1}{2}} \psi(\alpha).$$

Tak więc ograniczyliśmy liczbę zmiennych wewnętrznych do jeden i podobnie z liczbą funkcji materiałowych. Skoro $III_{\underline{B}} = \det \underline{B} = \det \underline{F} \det \underline{F}^T = (\det \underline{F})^2$, zaś

$$/6.4/ \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \det \underline{F},$$

więc założenia /6.3/ prowadzą do następującego równania konstytutywnego dla tensora Cauchy'ego

$$/6.5/ \quad \underline{T} = \frac{\rho}{\rho_0} \psi(\alpha) \underline{B} \quad \text{lub} \quad T_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \psi(\alpha) B_{ij}.$$

Przy takiej postaci związku ciśnienie w konfiguracji odniesienia będzie dane przez

$$/6.6/ \quad p = -\Psi(\alpha).$$

Funkcja $\Psi(\alpha)$ spełnia rolę modułu sprężystości zmieniającego się z czasem i deformacją.

Przejdźmy do równania ewolucji dla zmiennej /parametru/ α . Ogólnie można równanie zapisać jako

$$\dot{\alpha} = \check{\alpha}(\alpha, I_{\underline{B}}, II_{\underline{B}}, III_{\underline{B}}),$$

Skoro α ma opisywać wrażliwość materiału na zmiany objętości właściwej, celowe wydaje się ograniczenie funkcji $\check{\alpha}$ do postaci liniowej w zmiennych α i $\sqrt{III_{\underline{B}}}$, tj.

$$\check{\alpha}(\alpha, III_{\underline{B}}) = -h_0 \alpha + (\sqrt{III_{\underline{B}}} - 1) h_1, \text{ gdzie } h_0, h_1 \text{ są stałymi i } h_0 > 0.$$

Otrzymano stąd następującą postać równania ewolucji.

$$/6.7/ \quad \dot{\alpha} = -h_0 \alpha + (\det \underline{F} - 1) h_1 \text{ lub } \dot{\alpha} = -h_0 \alpha + \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) h_1.$$

W dalszej analizie wygodnie jest korzystać z postaci związku /6.5/ wyrażonego dla pierwszego tensora Pioli-Kirchhoffa $\check{\underline{T}}$, który jest związany z tensorem Cauchy'ego \underline{T} związkiem

$$/6.8/ \quad \check{\underline{T}} = (\det \underline{F}) \underline{T} (\underline{F}^T)^{-1} \text{ albo } \check{T}_{ik} = \frac{\rho_0}{\rho} T_{ij} F_{kj}^{-1}.$$

Stąd poszukiwany związek przyjmuje postać

$$/6.9/ \quad \check{\underline{T}} = \Psi(\alpha) \underline{F} \text{ albo } \check{T}_{ik} = \Psi(\alpha) F_{ik}.$$

Zależność $\Psi = \Psi(\alpha)$ powinna być wyznaczona na drodze badań eksperymentalnych, podobnie jak i znak stałej h_1 . Przyjęcie dodatniego h_0 w /6.7/ motywuje się wymaganiami stateczności rozwiązania równania /6.7/.

Zauważmy, że w trakcie deformacji izocherycznej /tj. spełniającej warunek $\det \underline{F} = 1$ / równania /6.5/ i /6.7/ opisują ośrodek o zmieniającą się modułe sprężystości ψ z czasem.

6.2. Płaska fala uderzeniowa w ośrodku reologicznym wrażliwym na zmianę objętości właściwej

Rozpatrzmy płaską falę uderzeniową rozprzestrzeniającą się w kierunku osi X_1 /kartezjańskiego układu współrzędnych/. Oznacza to, że ruchem powierzchni osobliwej $\{\Sigma(t)\}_{t \in I}$, będąca powierzchnią nieciągłości pierwszych pochodnych funkcji ruchu, tworzy rodzinę płaszczyzn równoległych o wektorze normalnym

$$/6.10/ \quad \underline{n} = [1, 0, 0].$$

Zgodnie z tym założeniem, występujące w opisie funkcje są zależne jedynie od X_1 i t . Z dynamicznych i geometrycznych warunków zgodności /4.6/ i /3.19/ przy obecnych założeniach /6.10/ otrzymamy

$$/6.11/ \quad [\tilde{T}_{11}] = -\varrho_0 U_N [v_1], \quad U_N [F_{11}] = -[v_1] \\ i, k = 1, 2, 3, \quad [F_{kj}] = 0 \text{ dla } j \neq 1.$$

Równanie amplitudy /3.23/ uproszczy się do

$$/6.12/ \quad 2\sqrt{U_N} \frac{\delta}{\delta t} (\sqrt{U_N} [F_{11}]) = U_N^2 [F_{11,1}] - [\dot{v}_1].$$

Równanie ruchu /4.3/ dla punktów spoza powierzchni osobliwej w opisie materialnym /tzn. w konfiguracji odniesienia/ ma postać

$$/6.13/ \quad \text{Div } \tilde{\underline{T}} + \varrho_0 \underline{b} = \varrho_0 \dot{\underline{v}},$$

albo

$$\tilde{T}_{ik,k} + \rho_0 b_i = \rho_0 \dot{v}_i.$$

Przechodząc do granic jednostrewnych na powierzchni $\Sigma(t)$ z funkcjami występującymi w tym równaniu i odejmując stronami, otrzymamy

$$/6.14/ \quad [\text{Div } \tilde{T}] = \rho_0 [\dot{v}],$$

albo

$$[\tilde{T}_{ik,1}] = \rho_0 [\dot{v}_1]$$

przy założeniu ciągłości sił \underline{b} , tzn., gdy zachodzi równanie $[\underline{b}] = 0$. Wstawiając tę zależność do /6.12/ dostajemy równanie

$$/6.14/ \quad 2\sqrt{U_N} \frac{\delta}{\delta t} (\sqrt{U_N} [F_{11}]) = U_N^2 [F_{11,1}] + \\ - \frac{1}{\rho_0} [T_{11,1}].$$

Przejdźmy do wyznaczenia prędkości fali uderzeniowej U_N . Z /6.11/ otrzymamy

$$/6.15/ \quad \rho U_N^2 = \frac{[\tilde{T}_{11}]}{[F_{11}]},$$

stąd

$$\frac{[\tilde{T}_{11}]}{[F_{11}]} = \frac{[\tilde{T}_{21}]}{[F_{21}]} = \frac{[\tilde{T}_{31}]}{[F_{31}]}.$$

Na podstawie równania konstytutywnego /5.9/ prawdziwy jest związek

$$/6.16/ \quad [T_{11}] = [\Psi(\alpha)F_{11}]$$

Nasuwą się pytanie, czy $[\Psi(\alpha)F_{11}] = \Psi(\alpha)[F_{11}]$?

Okazuje się, że tak, gdyż można pokazać na podstawie uogólnionych związków Rankine's-Hugoniot, że parametr α spełniający równanie /6.7/ w punktach różniczkowalności na fali uderzeniowej, czyni zadość warunkowi.^{10/}

$$/6.17/ \quad U_N [\alpha] = 0 .$$

Skoro α jest ciągle na fali uderzeniowej, zakładana ciągłość funkcji Ψ prowadzi do $[\Psi(\alpha)] = 0$. Relacje /6.15/ - /6.16/ dają stąd następujące wyrażenie na prędkość fali

$$/6.18/ \quad \rho_0 U_N^2 = \Psi(\alpha).$$

Jest to związek przypominający równanie na prędkość fal sprężystych. Różnicą zasadniczą jest zależność uogólnionego modułu sprężystości Ψ od parametru α .

Występującą w /6.14/ pochodną $[\tilde{T}_{11,1}]$ obliczamy ze wzoru różniczkowania złożonego

$$[\tilde{T}_{11,1}] = \left[\frac{\partial T_{11}}{\partial F_{KL}} F_{KL,1} \right] + \left[\frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha} \alpha_{,1} \right]$$

gdzie $T_{11}(F_{KL}, \alpha) = \Psi(\alpha)F_{11}$. Ponieważ $\frac{\partial T_{11}}{\partial F_{KL}} = \delta_{1K} \delta_{1L} \Psi(\alpha)$,

więc

$$/6.19/ \quad [\tilde{T}_{11,1}] = \Psi(\alpha) [F_{11,1}] + \Psi'(\alpha) [\alpha_{,1} F_{11}]$$

Wstawiając /6.19/ do /6.14/ i wykorzystując /6.18/ do redukcji wyrazów ze skokiem $[F_{11,1}]$ otrzymamy

^{10/} Dowód tego faktu przebiega analogicznie jak w przypadku jednowymiarowych fal uderzeniowych /por. KOSIŃSKI [1975e] /.

$$/6.20/ \quad 2\sqrt{U_N} \frac{\delta}{\delta t} (\sqrt{U_N} [F_{11}]) = - \frac{\Psi'(\alpha)}{\varrho_0} [\alpha_{,1} F_{11}] .$$

Kinematyczny warunek zgodności /2.15/ w opisie materialnym zastosowany do funkcji α implikuje relację

$$/6.21/ \quad [\alpha_{,1}] = - \frac{[\dot{\alpha}]}{U_N} .$$

Dla uproszczenia wyrażenia możemy skorzystać z łatwego do wykazania wzoru algebraicznego, prawdziwego dla dowolnych dwóch funkcji f i g

$$/6.22/ \quad [f g] = [f][g] + f^+[g] + [f]g^+ .$$

Skok iloczynu przedstawiamy jako sumę członów

$$[\alpha_{,1} F_{11}] = [\alpha_{,1}][F_{11}] + (\alpha_{,1})^+[F_{11}] + [\alpha_{,1}]F_{11}^+ .$$

Ten związek można, z pomocą /6.21/, zapisać jako

$$/6.23/ \quad [\alpha_{,1} F_{11}] = - \frac{[\dot{\alpha}]}{U_N} [F_{11}] + (\alpha_{,1})^+[F_{11}] - \frac{[\dot{\alpha}]}{U_N} F_{11}^+ .$$

Równanie ewolucji /6.17/ prowadzi do relacji

$$/6.24/ \quad [\dot{\alpha}] = [\det \underline{F}] h_1 .$$

Stąd pełne równanie amplitudy /6.20/ zapisze się jako

$$/6.25/ \quad 2\sqrt{U_N} \frac{\delta}{\delta t} (\sqrt{U_N} [A_1]) = \frac{\Psi'(\alpha)}{\varrho_0} \left\{ \frac{h_1}{U_N} [\det \underline{F}] A_1 - (\alpha_{,1})^+ A_1 + \frac{h_1}{U_N} [\det \underline{F}] F_{11}^+ \right\} ,$$

gdzie $A_1 = [F_{11}]$, zaś U_N spełnia równanie /6.18/. Stąd widać, że snając stan ośrodka przed falą, tzn. w obszarze "+" równania /6.25/ będą tworzyły układ trzech sprzężonych równań różniczkowych zwyczajnych wzdłuż trajektorii normalnej fali uderzeniowej na trzy wielkości A_1 , $i = 1, 2, 3$. Jak łatwo widać, jest to układ trzech równań Bernoulliego ze zmiennymi współczynnikami, jeśli stan w obszarze "+" nie jest stały i jednorodny.

Dla dalszej konkretnej analizy rozwiązania układu /6.25/ przyjmujemy następujące założenie o stanie ośrodka w obszarze przed nadejściem fali /przed frontem/.

Ośrodek przed falą /tj. w obszarze "+"/ jest w stanie równowagi /na ogół niejednorodnym/ z kartezjańskimi osiami X_1, X_2, X_3 jako głównymi kierunkami odkształceń.

Powyższe założenie odpowiada supozycji przyjętej przez BLANDA [1964]. Wynikają stąd następujące związki

$$\dot{\alpha}^+ = -h_0 \alpha + ((\det \underline{F})^+ - 1) h_1 = 0,$$

$$/6.26/ \quad [F_{ik}^+] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\Psi^i(\alpha)(\alpha_{,1})^+ \lambda_{1,i} + \Psi_0(\alpha) \lambda_{1,1} + \rho_0 b_1 = 0$$

gdzie $(\det \underline{F})^+ = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$. Pierwszy związek to równanie ewolucji dla α w obszarze "+", zerowanie się jego prawej strony, to konsekwencja założenia o stanie równowagi. Trzeci związek jest równaniem statyki /równowagi/ i może być użyty do wyznaczenia $(\alpha_1)^+$ w funkcji $\lambda_1, \lambda_{1,1}$ oraz składowej b_1 sił masowych.

Ze względu na /6.26/ skok w $\det \underline{F}$ jest dany przez

$$/6.27/ \quad [\det \underline{F}] = A_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Policzmy $(\delta/\delta t) U_H$:

$$\begin{aligned} /6.28/ \quad \frac{\delta}{\delta t} U_H &= \frac{\delta}{\delta t} (\varrho_0^{-1} \varphi(\alpha))^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (\varrho_0^{-1} \varphi'(\alpha)) (\alpha_{,1})^+ - \\ &- \varrho_0^{-2} \varphi(\alpha) \varrho_{0,1} \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy definicję pochodnej przemieszczeniowej $\delta/\delta t$ i niezależność od czasu wielkości ϱ_0 oraz α^+ .

Z ostatniego równania widzimy, że niejednorodny rozkład parametru α w ośrodku przed falą implikuje zmienną prędkość propagacji U_H . W liniowym ośrodku sprężystym znikający gradient $\varrho_{0,1}$ /tj. jednorodny rozkład masy/ prowadzi do stałej prędkości U_H .

Wprowadzając związki /6.27/ i /6.28/ do /6.25/ otrzymamy po pewnych manipulacjach

$$\begin{aligned} /6.29/ \quad \frac{\delta A_1}{\delta t} &= \frac{\varphi'(\alpha) h_1 \lambda_2 \lambda_3}{2 \varphi(\alpha)} (A_1 A_1 + A_1 \lambda_1 \delta_{11}) + \\ &+ A_1 \left(\frac{\varphi(\alpha)}{4 \varrho_0^2 U_H} \varrho_{0,1} - \frac{3 \varphi'(\alpha)}{4 \varrho_0 U_H} (\alpha_{,1})^+ \right). \end{aligned}$$

Jest to końcowa postać równania amplitudy fali uderzeniowej w badanym ośrodku reologicznym. /Odpowiadające równanie teorii jednowymiarowej z wewnętrznymi zmiennymi stanu wyprowadzono w artykule KOSIŃSKIEGO [1974]; płaską falę uderzeniową w materiale z pamięcią badał HUIJGOL [1973].

6.3. Efekt zniszczenia wywołany falą

Równanie amplitudy /6.29/ jest układem trzech równań Bernoulliego

$$/6.30/ \quad \frac{d A_1}{dt} = \beta A_1^2 + (\beta \lambda_1 + \delta) A_1,$$

$$\frac{d A_k}{dt} = \beta A_1 A_k + \delta A_k, \quad k = 2, 3,$$

gdzie^{11/}

$$\beta = \frac{\varphi'(\alpha) k_1 \lambda_2 \lambda_3}{2 \varphi(\alpha)}, \quad \delta = \frac{\varphi(\alpha)}{4 \rho_0^2 u_H} \rho_{0,1} +$$

$$- \frac{3 \varphi'(\alpha)}{4 \rho_0 u_H} (\alpha_{,1})^+,$$

/6.31/

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_H \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Symbol d/dt oznacza pochodną względem zmiennej t traktowanej jako parametr trajektorii normalnej fali. Ogólne rozwiązanie tego układu z warunkami początkowymi $A_1(0) \neq 0$ i $A_k(0)$ jest dane przez

$$/6.32/ \quad A_1(t) = \frac{\exp\left(\int_0^t (\beta(\tau) \lambda_1(\tau) + \delta(\tau)) d\tau\right)}{A_1(0) - \int_0^t \beta(\tau) \exp\left(\int_0^\tau (\beta(s) \lambda_1(s) + \delta(s)) ds\right) ds},$$

$$A_k(t) = A_k(0) \exp\left(\int_0^t (\beta(\tau) A_1(\tau) + \delta(\tau)) d\tau\right), \quad k = 2, 3.$$

11/ Zauważmy, że β i δ mają wymiar s^{-1} , zaś λ_1 jest bezwymiarową wielkością, tak jak odkształcenie.

Jest znanym faktem, że rozwiązanie równania Bernoulliego może posiadać pewne osobliwości. W szczególności obserwuje się jego nieograniczony wzrost w skończonym czasie.

Interesującą się wydaje fakt, że ewolucją fal przyspieszenia w różnego typu nieliniowych ośrodkach materialnych rządzi równanie typu Bernoulliego. Prezentowana analiza dostarcza pierwszego przypadku równania amplitudy fali uderzeniowej w postaci równania Bernoulliego.

Wykorzystując ogólną analizę rozwiązania równania Bernoulliego przeprowadzoną przez BAILEYA i CHENA [1971, 1972] wraz z późniejszymi rozszerzeniami BOV/ŻNA i CHENA [1972] oraz KOSIŃSKIEGO [1975] wykazuje się następującą uwagę przy założeniu nierówności,

$$/6.33/ \quad \frac{\varphi'(\alpha) h_1}{2 \varphi(\alpha)} > 0$$

SPOSTRZEŻENIE 1. Jeśli stan równowagi przed falą jest jednorodny, to każda rozprężająca /względem tego stanu/ fala prowadzi do nieskończonego w skończonym czasie wzrostu amplitudy. Oznacza to, że istnieje skończona wartość czasu $t = t_\infty$, przy której każda fala z

$$/6.34/ \quad [\det \underline{F}] > 0$$

ma własność

$$/6.35/ \quad \lim_{t \rightarrow t_\infty} |A_1(t)| = \infty.$$

Skoro wartości $F_{11}^+ = \lambda_1$ są skończone, jako że przed frontem fali, warunki /6.35/ prowadzą do nieograniczonego wzrostu F_{11}^- , gdyż

$$A_1 = [F_{11}] = F_{11}^- - F_{11}^+ = F_{11}^- - \lambda_1.$$

Te zjawisko można interpretować jako zniszczenie materiału /w tej chwili i w tym punkcie, tzn. w $Y \in \Sigma (t_\infty)$ /. Wielkości F_{11} są gradientami składowych u_1 wektora przemieszczenia \underline{u} . Nieograniczony wzrost, w pewnym punkcie, gradientów może być interpretowany jako symptom lokalnej utraty ciągłości /spójności/ materiału ośrodka. Skoro składowe naprężenia $[[T_{11}]]$ są powiązane równaniem /5.16/ z amplitudą fali, ich nieograniczony wzrost w skończonym czasie oznacza, że pewne /a także każde/ naprężeniowe kryterium zniszczenia materiału jest przekroczone.

Obok powyższego spostrzeżenia w artykule KOSIŃSKIEGO [1980] można znaleźć dowód następującego ogólnego faktu.

SPOSTRZEŻENIE 2. Jeśli stan równowagi przed falą jest niejednorodny, to rozprężająca fala będzie prowadzić do zniszczenia o ile początkowa wartość amplitudy fali A_1 przekracza pewną wartość krytyczną ω , tj.

$$A_1(0) = F_{11}^-(0) - F_{11}^+(0) > \omega,$$

gdzie

$$\omega = \left\{ \int_0^\infty \beta(t) \exp \left(\int_0^t \beta(s) \lambda_1(s) + \delta(s) ds \right) ds \right\}^{-1},$$

natomiast czas zniszczenia t_∞ jest określony przez

$$\int_0^{t_\infty} \beta(t) \exp \left(\int_0^t (\beta(\tau) \lambda_1(\tau) + \delta(\tau)) ds \right) = \frac{1}{A_1(0)}.$$

Interesujące wydaje się przeanalizowanie konkretnych postaci funkcji $\psi(\alpha)$ i stałej materiałowej h_1 pod kątem tego zjawiska. Ze względu na specyfikę fal w ośrodkach skalistych i górotworze, powinna być rozpatrywana fala sferyczna. Dla takiej fali dyskusja efektu zniszczenia nią wywołanego może mieć duże znaczenie praktyczne. Będzie to tematem przyszłych badań.

7. FALA PRZYSPIESZENIA W OŚRODKU SPRĘŻYSTO-LEPKOPLASTYCZNYM

Zajmiemy się obecnie analizą fali przyspieszenia rozprzestrzeniającą się w ośrodku opisywanym równaniami konstytutywnymi, zaproponowanymi przez P. Perzynę w jego opracowaniu [1979]. /Por. też książkę PERZYNA [1966, s.157]/. Ośrodki sypkie, grunty i skałopodobne mogą być opisywane tymi równaniami. Należy zaznaczyć, że tak jak tam ograniczamy się do małych odkształceń. To implikuje szereg uproszczeń. Podstawowym jest nierozróżnienie opisów przestrzennego i materialnego. Fala przyspieszenia będzie reprezentowana przez rodzinę powierzchni $\{s(t)\}_{t \in I}$ i normalnej $n(t)$ i normalnej składowej prędkości $G(t) = U_n(t)$, $t \in I$.

Równanie wiążące kartezjańskie składowe tensora prędkości odkształcenia E_{ij} ze składowymi S_{ij} dewiatora tensora naprężenia T_{ij} i jego prędkości \dot{S}_{ij} ma postać

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{S} \delta_{ij} + \delta \langle \Psi \left(\frac{a I_I + J_2^{1/2}}{k} - 1 \right) \rangle$$

$$/7.1/ \quad \left(a \delta_{ij} + \frac{S_{ij}}{2 J_2^{1/2}} \right),$$

gdzie

$$I_I = S = \frac{1}{3} T_{ij}, \quad J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \quad S_{ij} = T_{ij} - S \delta_{ij}, \mu, \nu$$

są stałymi sprężystymi, k - stałą reprezentującą granicę plastyczności, a - stałą charakteryzującą dylatację, δ - stałą lepkości, natomiast $\langle \Psi(s) \rangle = \begin{cases} \Psi(s) & \text{gdy } s > 0 \\ 0, & \text{gdy } s \leq 0. \end{cases}$

Równania tu prezentowane spełniają tzw. hipotezę nadwyżki stanu naprężenia. Mówi ona, że ośrodek zaczyna płynąć lepkoplastycznie dopiero po przekroczeniu przez tensor na-

prężenia statycznej granicy plastyczności reprezentowanej równaniem

$$a I_T + J_2^{\frac{1}{2}} = k$$

Odciążenie w ośrodku następuje dopiero od statycznej granicy plastyczności. Jest to zasadnicza różnica w porównaniu z hipotezami ośrodka plastycznego bez efektów lepkich.

Aby odwrócić to równanie /7.1/ i wyrazić \dot{T}_{ij} przez \dot{E}_{ij} i S_{ij} zapiszmy je w zwartej postaci

$$/7.2/ \quad \dot{E}_{ij} = A_{ij \, kl} \dot{T}_{kl} + \delta < \Psi > \left\{ \left(a - \frac{S}{J_2^{\frac{1}{2}}} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{2 J_2^{\frac{1}{2}}} T_{ij} \right\},$$

gdzie

$$A_{ij \, kl} = \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{4\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Jeśli przez



$$/7.3/ \quad C_{mnij} = \lambda \delta_{mn} \delta_{ij} + \mu (\delta_{mi} \delta_{nj} + \delta_{mj} \delta_{ni}).$$

oznaczymy tensor odwrotny do A_{ijm} , tzn. spełniający równanie

$$C_{mnij} A_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{mk} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{nk}),$$

to otrzymamy

$$/7.4/ \quad \dot{T}_{mn} = C_{mnij} \dot{E}_{ij} - \delta < \Psi > \left\{ (3\lambda + 2\mu) \left(a - \frac{\mu}{J_2^{\frac{1}{2}}} S \right) \delta_{mn} + \frac{\mu}{J_2^{\frac{1}{2}}} T_{mn} \right\},$$

lub po przekształceniach

$$/7.5/ \quad \dot{T}_{mn} = \lambda \dot{E}_{11} \delta_{mn} + 2\mu \dot{E}_{mn} - \delta \langle \Psi \rangle \left\{ (3\lambda + 2\mu) \delta_{mn} + \frac{\mu}{j_2^2} S_{mn} \right\}.$$

Równanie ruchu, bez sił masowych, na fali jest postaci

$$/7.6/ \quad [T_{ij,j}] = \rho [\dot{v}_i],$$

wraz z równaniami zgodności geometrycznej

$$[\dot{E}_{ij}] = \frac{1}{2} [v_{i,j} + v_{j,i}] = -\frac{1}{2G} \left\{ [\dot{v}_i] n_j + [\dot{v}_j] n_i \right\}$$

/7.7/

$$[T_{ij,k}] = -\frac{1}{G} [T_{ij}] n_k,$$

prowadzą poprzez

$$/7.8/ \quad [T_{kl,j}] = \frac{1}{G^2} C_{klpq} [\dot{v}_p] n_q n_j$$

do /równania/ warunku propagacji

$$/7.9/ \quad Q_{ik} [\dot{v}_k] = \rho G^2 [\dot{v}_i],$$

gdzie Q_{ik} są składowymi tzw. tensora akustycznego

$$/7.10/ \quad Q_{ik} = C_{ijkl} n_j n_l = (\lambda + \mu) n_i n_k + \mu \delta_{ik}.$$

Jeśli przez $\underline{a} = (a_1)$ oznaczymy wektor amplitudy fali, $\underline{a} = [\dot{v}]$, to /7.9/ zapiszemy jako

$$/7.11/ \quad (\mu - \rho G^2) a_1 + \{\mu + \lambda\} a_k a_k a_1 = 0.$$

Jak się można było spodziewać, otrzymujemy trzy rzeczywiste rozwiązania dla prędkości fal, a mianowicie:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \text{dla fali podłużnej, tj. } \underline{a} \parallel \underline{n},$$

$$/7.12/ \quad G^2 =$$

$$\frac{\mu}{\rho} \quad \text{dla 2 fal poprzecznych, tj. } \underline{a} \perp \underline{n}$$

SPOSTRZEŻENIE. W badanym ośrodku fale przyspieszenia rozchodzą się z prędkościami sprężystymi; są dwie fale poprzeczne i jedna podłużna dla każdego kierunku propagacji \underline{n} .

Można postawić pytanie: co różni otrzymany rezultat od wyników dla ośrodków sprężystych? Odpowiedź na to pytanie przyniesie analiza równania amplitudy.

Stała prędkość $G = U_N$ upraszcza równanie amplitudy /3.29/ do postaci

$$/7.13/ \quad 2 \frac{\delta a_1}{\delta t} = [\ddot{v}_1] - G^2 [\dot{v}_{1,k1}] a_k a_1.$$

Zróżniczkowane względem czasu równanie ruchu

$$T_{1j,j} = \rho \ddot{v}_1 + \dot{\rho} \dot{v}_1$$

daje związek

$$/7.14/ \quad [T_{1j,j}] = \rho [\ddot{v}_1] + [\dot{\rho} \dot{v}_1].$$

Zrózniczkowane względem x_j równanie konstytutywne /7.5/ w obszarze lepkoplastycznym

$$\dot{T}_{1j,j} = \lambda \dot{E}_{kk,i} + 2\mu \dot{E}_{1j,j} - \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial T_{rs}} T_{rs,j} \left\{ (3\lambda + 2\mu) \cdot \right. \\ \left. - \sigma \delta_{1j} + \frac{\mu}{J_2 \frac{1}{2}} S_{1j} \right\} + \sigma \Psi \left\{ \frac{\mu}{2J_2 \frac{3}{2}} S_{rs} S_{rs,j} S_{1j} - \frac{\mu}{J_2 \frac{1}{2}} S_{1j,j} \right\},$$

/7.15/

$$[\dot{T}_{1j,j}] = \lambda [\dot{E}_{kk,i}] + 2\mu [\dot{E}_{1j,j}] - \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial T_{rs}} \left\{ (3\lambda + 2\mu) \cdot \right.$$

$$\left. \sigma \delta_{1j} + \frac{\mu}{J_2 \frac{1}{2}} S_{1j} \right\} [T_{rs,j}] + \sigma \Psi \left\{ \frac{\mu}{2J_2 \frac{3}{2}} S_{rs} S_{1j} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu}{J_2 \frac{1}{2}} \delta_{ri} \delta_{sj} \right\} [S_{rs,j}],$$

Do dalszych przekształceń niezbędny jest wzór na skok gradientu dewiatera. Skoro dewiater prędkości odkształcenia $\dot{e}_{kl} = \dot{E}_{kl} - \frac{1}{3} \dot{E}_{ii} \delta_{kl}$ na fali spełnia warunek zgodności /por. /7.7/

$$/7.16/ \quad [\dot{e}_{kl}] = - \frac{1}{G} \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{kr} \delta_{ls} + \delta_{ks} \delta_{lr}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{rs} \right\} a_r n_s,$$

natomiast równanie konstytutywne /7.5/ prowadzi do związku

$$[\dot{S}_{kl}] = 2\mu [\dot{e}_{kl}]$$

to w efekcie

$$/7.17/ \quad [S_{rs,j}] = \frac{2\mu}{G^2} \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{rk} \delta_{sl} + \delta_{rl} \delta_{sk}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \delta_{rs} \delta_{kl} \right\} (a_k n_l n_j).$$

Po przekształceniach i wykorzystaniu dotychczasowych warunków zgodności i relacji między skokami otrzymamy następujące równanie amplitudy:

$$2G \frac{\delta a_i}{\delta t} + \frac{\lambda + \mu}{S} [v_{j,jj}] + \frac{\mu}{\rho} [v_{i,jj}] - G^2 [v_{i,kl}] a_k n_l \\ /7.18/ \quad + \frac{\gamma \partial \Psi}{\rho G \partial T_{rs}} L_{ij} \{ \lambda a_p n_p n_j \delta_{rs} + \mu (a_r n_s + a_s n_r) n_j \} \\ - \frac{1}{\rho} [\dot{\rho} \dot{v}_i] - \frac{\gamma}{\rho G} \Psi M_{ijrs} \{ \mu (a_r n_s + a_s n_r) n_j + \\ - \frac{2\mu}{3} a_p n_p n_j \delta_{rs} \} = 0,$$

gdzie

$$L_{ij} = (3\lambda + 2\mu) a \delta_{ij} + \frac{\mu}{J_2 \frac{1}{2}} S_{ij},$$

$$/7.19/ \quad M_{ijrs} = \frac{\mu}{2 J_2 \frac{1}{2}} S_{rs} S_{ij} - \frac{\mu}{J_2 \frac{1}{2}} \delta_{ri} \delta_{sj}.$$

Skomplikowana postać równania amplitudy skłania nas do rozpatrzenia osobno fali podłużnej i poprzecznej.

Dla fali podłużnej, przy wykorzystaniu związków /7.12/ /3.34/ i /3.35/₁, otrzymamy

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta \bar{a}^2}{\delta t} - 2GK_m \bar{a}^2 + \frac{\tau}{\rho G^2} \frac{\partial \Psi}{\partial T_{rs}} \left\{ (3\lambda + 2\mu) [\lambda \bar{a} \delta_{rs} + \mu (a_r n_s + n_r a_s)] \bar{a} \right. \\
 /7.20/ & \left. + \frac{\mu}{J_2^{\frac{1}{2}}} S_{ij} n_i n_j (\lambda \bar{a} \delta_{rs} + \mu (a_r n_s + n_r a_s)) - \frac{1}{\rho G} [\dot{\rho} \dot{v}_i n_i] \bar{a} - \frac{\tau}{\rho G^2} \Psi \right. \\
 & \left. - \left(\frac{\mu}{2J_2^{\frac{1}{2}}} S_{rs} S_{ij} n_i - \frac{\mu}{J_2^{\frac{1}{2}}} n_r \delta_{sj} \right) \left\{ \mu (a_r n_s + a_s n_r) n_j - \frac{2\mu}{3} a_p n_p n_j \delta_{rs} \right\} = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie $\bar{a}^2 = a_1 \cdot a_1$

Natomiast równanie amplitudy fali poprzecznej będzie /por. /3.34/ i /3.35/₂

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta \bar{a}^2}{\delta t} - 2GK_m \bar{a}^2 + \tau \frac{\partial \Psi}{\partial T_{rs}} \frac{S_{ij} a_i}{J_2^{\frac{1}{2}}} \left\{ \mu (a_r n_s + a_s n_r) n_j \right\} - \frac{1}{\rho G} [\dot{\rho} \dot{v}_i] a_i \\
 /7.21/ & - \tau \Psi \left\{ \frac{S_{ij}}{2J_2^{\frac{1}{2}}} a_i S_{rs} (\mu (a_r n_s + n_r a_s) n_j - \frac{\mu}{J_2^{\frac{1}{2}}} \bar{a}^2) \right\} = 0,
 \end{aligned}$$

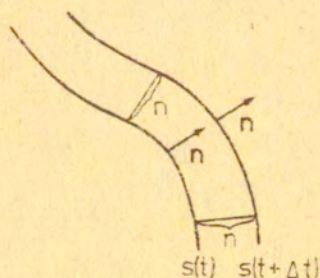
gdzie $\bar{a} = a_i \cdot a_i$.

Jest możliwe scałkowanie tych równań i zbadanie zachowania się nieciągłości składowej $[[\dot{y} \cdot \underline{n}]]$ normalnej przyspieszenia i gradientu $[[\sigma_{ik,1} n_k \cdot a_1]]$ naprężenia na normalnej trajektorii fali przy założeniach odnośnie stanu naprężenia przed frontem fali /por. podobną dyskusję w pracy TOKUOKI [1974].

DODATEK A

Rodzina powierzchni równoległych

Wróćmy na moment do wyrażień /1.33/, /1.33/ na pochodną przemieszczeniową wektora normalnego. Jak zauważyliśmy w /1.34/ warunek $u_{n,\alpha} = 0$, tzn. $u_n = \text{const}$ na powierzchni poruszającej się $s(t)$, oznacza, że wektor normalny jest stały wzdłuż trajektorii normalnej. To oznacza, że trajektorie normalne są liniami prostymi, a jednoparametrowa rodzina powierzchni $\{s(t)\}_{t \in I}$ tworzy rodzinę powierzchni równoległych. Niezależność normalnej składowej u_n prędkości od parametrów krzywoliniowych indywidualnej powierzchni $s(t_0)$ z rodziny $\{s(t)\}_{t \in I}$ oznacza, że po chwili t pozycja powierzchni $s(t_0 + t)$ jest wyznaczona przez odmierzenie od powierzchni $s(t_0)$ równych odcinków n wzdłuż prostych normalnych w kierunku jednostkowego wektora normalnego \underline{n} /per. Rys.7/.



Rys.7. Schematyczny obraz powierzchni równoległych

Wygodnie jest w takim przypadku posługiwać się parametryzacją konwekcyjną, w której punkt powierzchni $l^1, l^2 =$

= const, porusza się w czasie wzdłuż trajektorii normalnej. Zgodnie ze związkami /1.27/ i /1.28/ pochodna przemieszczeniowa funkcji położenia $\underline{\Psi}$ powierzchni w przestrzeni staje się wtedy pochodną cząstkową po czasie, a jej wartość pokrywa się z prędkością normalną, tzn.

$$\frac{\delta \underline{\Psi}}{\delta t} = \frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial t} = u_n \underline{n}.$$

Oba powyższe związki prowadzą do następującego przedstawienia powierzchni w chwili t w zależności od pozycji w chwili t_0 .

$$/A.1/ \quad \underline{\Psi}(t, l^1, l^2) = \underline{\Psi}(t_0, l^1, l^2) + \underline{n} \int_{t_0}^t u_n(\tau) d\tau.$$

Całkę po prawej stronie można zastąpić wyrazem $(t - t_0) \cdot u_n$ tylko wtedy, gdy składowa normalna u_n prędkości jest niezależna od czasu.

Powierzchnie równoległe odgrywają dużą rolę przy analizie fali przyspieszenia rozprzestrzeniającej się w stanie jednorodnym (niezaburzonym) ośrodka.

Wektory styczne powierzchni można wyrazić następująco

$$\underline{\Psi}_{, \alpha} = \underline{\Psi}^{\circ}_{, \alpha} + \underline{n}_{, \alpha} \underline{n},$$

gdzie przez \underline{n} oznaczyliśmy wartość całki, tzn.

$$/A.2/ \quad \underline{n}(t) = \int_{t_0}^t u_n(\tau) d\tau, \quad t > t_0,$$

z zaś $\underline{\Psi}^{\circ}$ oznacza funkcję $\underline{\Psi}(t_0, l^{\alpha})$. Korzystając ze wzorów Weingartena

$$/A.3/ \quad \underline{n}_{,\alpha} = -\underline{b} \varphi_{,\alpha} = -\underline{b}^0 \varphi_{,\alpha}^0$$

otrzymany w końcu związek dla wektora

$$/A.4/ \quad \varphi_{,\alpha} = (\delta_{\alpha}^{\beta} - n b^{\alpha\beta}) \varphi_{,\alpha}^0 = (\underline{1}_s - n \underline{b}^0) \varphi_{,\alpha}^0$$

W relacji /A.3/ przez \underline{b} , \underline{b}^0 oznaczyliśmy drugi tensor metryczny (tensor krzywizny) odpowiednio powierzchni $s(t)$ i $s(t_0)$, tzn.

$$\underline{b} = b_{\alpha}^{\beta} \varphi_{,\beta} \otimes \varphi_{,\alpha} = \underline{n}_{,\alpha} \otimes \varphi_{,\alpha}^0 ;$$

$$\underline{b}^0 = b_{\alpha}^{\beta} \varphi_{,\beta}^0 \otimes \varphi_{,\alpha}^0 = -\underline{n}_{,\alpha} \otimes \varphi_{,\alpha}^0 ;$$

Po prawej stronie wyrażenia /A.4/ symbol $\underline{1}_s$ oznacza jednostkowy (metryczny) tensor powierzchniowy.

Związki /A.3/ i /A.4/ pozwalają napisać

$$\underline{b}(\underline{1}_s - n \underline{b}^0) \varphi_{,\alpha}^0 = \underline{b}^0 \varphi_{,\alpha}^0 \quad ; \quad \alpha = 1, 2.$$

Stąd otrzymujemy związek między tensorami krzywizny powierzchni $s(t)$ i $s(t_0)$:

$$/A.5/ \quad \underline{b} = \underline{b}^0 (\underline{1}_s - n \underline{b}^0)^{-1} ,$$

gdzie $(\underline{1}_s - n \underline{b}^0)^{-1} (\underline{1}_s - n \underline{b}^0) = \underline{1}_s .$

Zauważmy, że różniczkując względem czasu związek /A.5/ otrzymamy

$$\frac{\partial \underline{b}}{\partial t} = u_n \underline{b}^0 (\underline{1}_s - n \underline{b}^0)^{-1} \underline{b}^0 (\underline{1}_s - n \underline{b}^0)^{-1} = u_n \underline{b}^2 .$$

Wykorzystując wzór Cayleya-Hamiltona

$$\underline{s}^2 - (\text{tr } \underline{s}) \underline{s} + (\det \underline{s}) \underline{1}_s = \underline{0}_s$$

dla dowolnego tensora powierzchniowego \underline{s} w zastosowaniu do tensora $(\underline{1}_s - n \underline{b}^0)^{-1}$, otrzymamy

$$(\underline{1}_s - n \underline{b}^0)^{-1} = \frac{\underline{1}_s - n K_g^0 (\underline{b}^0)^{-1}}{\det(\underline{1}_s - n \underline{b}^0)},$$

gdzie

$$\det(\underline{1}_s - n \underline{b}^0) = 1 - 2 K_m^0 n + K_g^0 n^2.$$

Stąd

$$/A.6/ \quad \underline{b} = \frac{\underline{b}^0 - K_g^0 n \underline{1}_s}{\det(\underline{1}_s - n \underline{b}^0)} = \frac{\underline{b}^0 - K_g^0 n \underline{1}_s}{1 - 2 K_m^0 n + K_g^0 n^2}.$$

Niezmienniki tensora \underline{b} , tzn. krzywizna średnia K_m oraz krzywizna Gaussa K_g mogą być wyrażone przy pomocy niezmienników tensora \underline{b}^0 bezpośrednio z postaci /A.6/, a mianowicie

$$K_m = \frac{K_m^0 - K_g^0 n}{\det(\underline{1}_s - n \underline{b}^0)} = \frac{K_m^0 - K_g^0 n}{1 - 2 K_m^0 n + K_g^0 n^2},$$

/A.7/

$$K_g = \frac{K_g^0}{\det(\underline{1}_s - n \underline{b}^0)} = \frac{K_g^0}{1 - 2 K_m^0 n + K_g^0 n^2}.$$

Aby znaleźć wyrażenie dla składowych kowariantnych tensora metrycznego wykorzystajmy jeszcze raz związek /A.4/ do produktu

$$\underline{\varphi}_{,\alpha} \cdot \underline{\varphi}_{,\beta} = (\underline{1}_s - n \underline{b}^0) \underline{\varphi}_{,\alpha}^0 \cdot (\underline{1}_s - n \underline{b}^0) \underline{\varphi}_{,\beta}^0$$

Korzystając z symetrii tensora krzywizny \underline{b}° i związku Cayleya-Hamiltona, otrzymamy

$$/A.8/ \quad \underline{\Psi}_{, \alpha} \cdot \underline{\Psi}_{, \beta} = g_{\alpha\beta} = (1 - n^2 K_g^{\circ}) g_{\alpha\beta}^{\circ} - 2n(1 - nK_m^{\circ}) b_{\alpha\beta}^{\circ}.$$

Z równości

$$\underline{\Psi}_{, \alpha} \cdot \underline{b} \underline{\Psi}_{, \beta} = \underline{\Psi}_{, \alpha} \cdot \underline{b}^{\circ} (1_s - n \underline{b}^{\circ}) \underline{\Psi}_{, \beta}$$

wyznaczamy składowe kowariantne $b_{\alpha\beta}$, jak następuje

$$b_{\alpha\beta} = \underline{\Psi}_{, \alpha} \underline{b} \underline{\Psi}_{, \beta} = (1_s - n \underline{b}^{\circ}) \underline{\Psi}_{, \alpha}^{\circ} \underline{b}^{\circ} \underline{\Psi}_{, \beta}^{\circ} = b_{\alpha}^{\circ\delta} g_{\delta\beta}^{\circ} - n b_{\beta}^{\circ\gamma} b_{\alpha}^{\circ} g_{\delta\gamma}^{\circ}.$$

Ostatni związek po zastosowaniu równości /ze wzoru Cayleya-Hamiltona/

$$b_{\delta}^{\alpha} b_{\beta}^{\delta} - 2K_m b_{\beta}^{\alpha} + K_g \delta_{\beta}^{\alpha} = 0$$

przyjmiemy poszukiwaną postać

$$/A.9/ \quad b_{\alpha\beta} = (1 - 2K_m n) b_{\alpha\beta}^{\circ} + n K_g^{\circ} g_{\alpha\beta}^{\circ}.$$

Posiadając powyższe zależności nie trudno wykazać, że

$$\det (g_{\alpha\beta}) = \det (1_s - n \underline{b}^{\circ}) \det (g_{\alpha\beta}^{\circ})$$

/A.10/

$$\det (b_{\alpha\beta}) = \det (1_s - n \underline{b}^{\circ}) \det (b_{\alpha\beta}^{\circ}).$$

Spoglądając na wyprowadzone powyżej relacje między niezmiennikami geometrii reprezentantów $s(t)$ i $s(t_0)$ rodziny powierzchni równoległych zauważamy, że w pewnych sytuacjach zbiór $\{s(t)\}_{t \in I}$ może przestać spełniać warunki definicji rodziny regularnych powierzchni w kontinuum.

Spróbujmy rozpatrzeć takie sytuacje.

Związki /A.4/, /A.6/, /A.7/ i /A.10/ zawierają wyraz $\det (1_s - n \underline{b}^{\circ})$. Jego zerowanie prowadzi do następujących

osobliwości powierzchni $s(t)$, $t > t_0$:

a/ utraty regularności przedstawienia powierzchni, gdy

$$\Psi_{,\alpha} = (1_s - n b^0) \Psi_{,\alpha}^0 = 0,$$

b/ nieograniczonego wzrostu jednej z krzywizn powierzchni,

c/ zerowanie się elementarnego pola powierzchni, gdy $\det(g_{\alpha\beta}) = 0$.

Punkty zerowania się tego wyznacznika są punktami osobliwymi powierzchni lub jej parametryzacji.

Punktami osobliwymi^{12/} mogą być ostrza powierzchni, ogniskowe, /ang. termin - focus/ w rodzaju wierzchołka stożka, bądź też, gdy jest ich nieskończenie wiele i układają się w pewne krzywe /kaustyki/, mogą stanowić krawędzie, wzdłuż których powierzchnie się zalamują /krawędź zwrotu^{13/}/.

Zerowanie się wyznacznika tensora $1_s - n b^0$ oznacza, że liczba n^{-1} jest wartością własną tensora b^0 , a tym samym jest jedną z krzywizn głównych powierzchni $s(t_0)$. Zgodnie z przyjętą definicją /A.2/ funkcja $n(t)$, $t > t_0$, przy założeniu dodatniej wartości n_0 , jest dodatnia.

W ten sposób wykazaliśmy słuszność następującego sprostowania.

LEMAT A. Tylko powierzchnia $s(t_0)$ o obu krzywiznach głównych niedodatnich nie wywołuje w żadnej chwili czasu $t > t_0$ osobliwości a/ - c/.

Warunek na niedodatnie krzywizny główne powierzchni $s(t_0)$ można zapisać następująco^{14/}

/A.11/ $K_M^c < 0$ i $K_G^a > 0$

12/ Interesujące dla nas są punkty osobliwe powierzchni, a nie jej parametryzacji.

13/ Por. GÖRTZ [1965].

14/ Należy pamiętać, że krzywizna średnia zmienia znak przy zmianie orientacji powierzchni.

Spostrzeżenie to jest oczywiste, jeśli przedstawimy wyznacznik tensora $\underline{1}_g - n \underline{b}^0$ w postaci wielomianu dodatniej zmiennej n :

$$\det(\underline{1}_g - n \underline{b}^0) = 1 - 2 K_n^0 n + K_g^0 n^2.$$

W języku geometrii powierzchni warunki /A.11/ wyrażają fakt, że powierzchnia $s(t_0)$ nie posiada punktów hiperbolicznych^{15/}. Przykładami takiej powierzchni są sfera i elipsoida.

Aby odrzucić możliwość występowania punktów osobliwych parametryzacji powierzchni $s(t)$, $t > t_0$, $t \in I$ należy założyć, że w przedstawieniu parametrycznym powierzchni $s(t_0)$, wektory styczne $\underline{\psi}_{,1}^0, \underline{\psi}_{,2}^0$ nie mają kierunków głównych, tzn. że nie jest prawdziwe globalnie na powierzchni $s(t_0)$ żadne z równań

$$\underline{b}^0 \underline{\psi}_{,\alpha}^0 = k^0 \underline{\psi}_{,\alpha}^0$$

z dodatnią k^0 .

Przypomnijmy, że punkt powierzchni $s(t_0)$ o krzywiznie średniej K_n^0 jest punktem kulistym /umbilikalnym wg GOETZA [1965, s.236], koleowym, ombilicznym, wg RADZISZEWSKIEGO [1973, s.114], jeśli^{16/}

$$\underline{b}^0 = K_n^0 \underline{1}_g.$$

W punkcie kulistym drugi tensor metryczny jest proporcjonalny do pierwszego tensora metrycznego, obie krzywizny główne są równe.

Stąd wyносimy, że jeśli powierzchnia $s(t_0)$ posiada punkt kulisty o dodatniej krzywiznie K_n^0 , to dla wartości

15/ Jest to tylko warunek konieczny niewystępowania osobliwości a/ - c/.

16/ Tzn. w punkcie kulistym drugi tensor metryczny jest kulisty.

$n(t) = (K_n^0)^{-1}$ formułuje się ostrze, albowiem w punkcie tym oba wektory styczne powierzchni $s(t)$ zerują się.

Zbierzmy wszystkie możliwe przypadki powierzchni $s(t_0)$, prowadzące do osobliwości a/ - c/ :

- jedna z krzywizn głównych jest ujemna,
- powierzchnia jest rozwijalna /tzn. $K_G^0 = 0$ / o dodatniej krzywiznie głównej,
- powierzchnia $s(t_0)$ jest minimalna i nie jest płaskoziemą.

Przeprowadźmy interpretację przypadków występowania osobliwości a/ - c/ w języku trajektorii normalnych.

Spójrzmy na funkcję

$$/A.12/ \quad \underline{x} = \underline{\psi}(t, l^1, l^2) \quad (t, l^1, l^2) \in I \times U,$$

jako odwzorowanie obszaru otwartego $I \times U$, $U \subset E^2$, na pewien obszar V w E^3 . Zgodnie z założeniem, transformacja ta jest różniczkowalna i jej odpowiednie pochodne są następujące

$$/A.13/ \quad \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} = u_n \underline{n}, \quad \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial l^1} = \underline{\psi}_{,1}, \quad \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial l^2} = \underline{\psi}_{,2}.$$

Pochodne transformacji odwrotnej do /A.12/ znajdujemy wykorzystując związki /A.13/ i relacje

$$\frac{\partial l^\alpha}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial l^\alpha} = 1, \quad \frac{\partial t}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial l^\alpha}{\partial l^\beta} = \delta_\beta^\alpha, \quad \frac{\partial t}{\partial l^\alpha} = 0$$

a mianowicie

$$/A.14/ \quad \frac{\partial t}{\partial \underline{x}} = \frac{n}{u_n}, \quad \frac{\partial l^1}{\partial \underline{x}} = \underline{\psi}^1, \quad \frac{\partial l^2}{\partial \underline{x}} = \underline{\psi}^2.$$

Związki /A.14/ są dobrze zdefiniowane jeśli \tilde{J} , jacobian przekształcenia /A.12/, jest nieznikający. Innymi słowy, gdy odwzorowanie obszaru $I \times U$ na V jest wzajemnie jednoznaczne; jednej trójce (t, l^1, l^2) odpowiada jeden i tylko jeden punkt

\underline{x} . Skoro punkt $(l^1, l^2) = \text{const}$ porusza się w czasie t po trajektorii normalnej (linii prostej), odmienny punkt $(\bar{l}^1, \bar{l}^2) = \text{const}$ nie może w tym samym czasie zajmować tego samego miejsca $\underline{x} = \underline{\psi}(t, l^1, l^2)$. Jeśli zdarzy się, że $\underline{\psi}(t, \bar{l}^1, \bar{l}^2) = \underline{\psi}(t, l^1, l^2)$ dla dwóch różnych par $(\bar{l}^1, \bar{l}^2) \neq (l^1, l^2)$, to oznaczać to będzie, że trajektorie normalne przetną się.

Ten geometrycznie oczywisty fakt utraty jednoznaczności przy znikającym wyznaczniku może być poparty następującym rozumowaniem.

Policzmy wyznacznik \tilde{J} :

$$/A.15/ \quad \tilde{J} = \det \left(\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial (t, l^1, l^2)} \right) = (\underline{\psi}_{,1} \times \underline{\psi}_{,2}) \cdot \underline{u}_n \quad n = \det(g_{\alpha\beta}) \underline{u}_n.$$

Tak więc istotne osobliwości a/ - c/ występują wtedy, gdy trajektorie normalne przecinają się.

Wyznacznik $\det(g_{\alpha\beta})$ może być interpretowany jako pole powierzchni przekroju elementarnej "rurki" ograniczonej przez trajektorie (proste) normalne z powierzchnią $s(t)$. Skoro $u_n \neq 0$, warunek zerowania się wyznacznika \tilde{J} oznacza, że pole powierzchni tego przekroju równa się zeru.

Z rys.7 łatwo widać, że gdy powierzchnia $s(t_0)$ nie jest wypukła zawsze należy oczekiwać, że dla skończonej wartości n proste normalne przetną się.

Przedstawiony tutaj przypadek rodziny powierzchni równoległych wraz z analizą pojawiających się osobliwości jest wstępem do ogólnej sytuacji rodziny powierzchni poruszających się. Dla tej ogólnej powierzchni poruszającej się mogą istnieć krzywe (promienie) niekoniecznie prostoliniowe trajektorie normalne o podobnych własnościach do tych, które powyżej były dyskutowane. W rozdziale VI monografii autora [1980], poświęconym kinematycznej teorii fal teorii promieni, pokazano jak można uogólnić wyprowadzone tutaj wyniki /por. WRIGHT [1973]/.

DODATEK B

Pochodna niezmiennicza

Przedstawienie dla pól tensorowych w zapisie indeksowym wzorów /1.43/, /1.44/, a także dalej otrzymanych związków /2.4/' , /2.12/' wymaga dodatkowego komentarza. Rozpatrzmy najprostsz y przypadek zmiennego w osie pola wektorowego $\underline{f} = f^i \underline{e}_i$. Jeśli układ współrzędnych w E^3 nie jest kartezyjski ortogonalny, to wektory bazowe \underline{e}_i , nie są stałe w przestrzeni, zmieniają się od punktu do punktu. Oznaczając przez Γ^k_{ij} symbole Christoffela tego układu otrzymamy

$$/B.1/ \text{ grad } \underline{f} \equiv \frac{\partial}{\partial x^j} (f^i \underline{e}_i) \otimes \underline{e}^j = (f^i_{,j} + \Gamma^i_{jl} f^l) \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j = f^i_{,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j .$$

Jeśli teraz wprowadzimy przepisem /1.30/' funkcję wektorową $\underline{\tilde{f}}$ na peruszającej się powierzchni S , to

$$/B.2/ \frac{\partial \underline{\tilde{f}}}{\partial t^\alpha} = \left(\frac{\partial \tilde{f}^l}{\partial t^\alpha} + \Gamma^l_{j\alpha} \tilde{f}^j \quad \frac{\partial \psi^j}{\partial t^\alpha} \right) \underline{e}_i .$$

Pochodną przemieszczeniową pola wektorowego \underline{f} można zapisać

$$\frac{\delta \underline{f}}{\delta t} = \frac{\delta f^l}{\delta t} \underline{e}_l + f^i \frac{\delta \underline{e}_i}{\delta t} .$$

Wektory bazowe nie zależą od czasu, więc

$$/B.3/ \frac{\delta \underline{e}_i}{\delta t} = \text{grad } \underline{e}_i \frac{\delta \psi}{\delta t} = u_n \Gamma^k_{il} n^l \underline{e}_k ,$$

gdź

$$/B.4/ \frac{\delta \psi}{\delta t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} - c^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial t^\alpha} = u_n \underline{n} = u_n n^l \underline{e}_l .$$

W efekcie otrzymujemy

$$/B.5/ \quad \frac{\delta f}{\delta t} = \left(\frac{\delta f^i}{\delta t} + \Gamma_{jk}^i f^j u_n n^k \right) \underline{e}_i .$$

Przyjmując następujące oznaczenie dla nawiasu^{17/}

$$/B.6/ \quad \frac{df^i}{\delta t} = \frac{\delta f^i}{\delta t} + u_n \Gamma_{jk}^i f^j n^k$$

i pamiętając, że

$$\frac{\delta f^i}{\delta t} = \frac{\partial f^i}{\partial t} + u_n f_{,ij}^i n^j ,$$

dostajemy

$$/B.7/ \quad \frac{df^i}{\delta t} = \frac{\partial f^i}{\partial t} + u_n \left(f_{,ik}^i + \Gamma_{jk}^i f^j \right) n^k .$$

Zajmiemy się teraz pochodną przemieszczeniową funkcji \tilde{f} . Zgodnie ze spostrzeżeniem /B.2/ możemy napisać

$$\frac{\delta \tilde{f}}{\delta t} = \frac{\delta \tilde{f}^i}{\delta t} \underline{e}_i + \tilde{f}^i \frac{\delta \underline{e}_i}{\delta t} .$$

Ze względu na wyprowadzony uprzednie związek /B.4/ oraz definicję /1.31/ otrzymamy /por. BOWEN i WANG [1971] /

$$/B.8/ \quad \frac{\delta \tilde{f}}{\delta t} = \left(\frac{\delta \tilde{f}^i}{\delta t} + \Gamma_{jk}^i \tilde{f}^j u_n n^k \right) \underline{e}_i$$

lub też

$$/B.9/ \quad \frac{\delta \tilde{f}}{\delta t} = \left(\frac{\partial \tilde{f}^i}{\partial t} - c^\alpha \frac{\partial \tilde{f}^i}{\partial t^\alpha} + u_n \Gamma_{jk}^i \tilde{f}^j n^k \right) \underline{e}_i .$$

17/ THOMAS [1961, s.53] wielkość $df^i/\delta t$ nazywa pochodną niezmienniczą, /por. też BRAUN [1974] /.

W obecnym przypadku pochodna $d/\delta t$ działająca na funkcję określoną na powierzchni s ma postać

$$\text{/B.10/} \quad \frac{d\tilde{f}^i}{\delta t} = \frac{\partial \tilde{f}^i}{\partial t} - c^\alpha \tilde{f}_{,\alpha}^i + u_n \Gamma_{jk}^i \tilde{f}^j \cdot n^k.$$

Dla funkcji wektorowej $\underline{g} = g^i \underline{e}_i$ zmiennych t, \underline{x} i l^α wyprowadzone związki /B.7/ i /B.10/ prowadzą do ogólniejszej postaci

$$\text{/B.11/} \quad \frac{\delta g(t, x, l^2)}{\delta t} = \left(\frac{\partial g^i}{\partial t} + u_n (g_{;j}^i + \Gamma_{jk}^i g^j) n^k - c^\alpha g_{,\alpha}^i \right) \underline{e}_i.$$

Nie następująca poważnych trudności wyprowadzenie odpowiednich związków dla wielkości tensorowych określonych nie tylko w bazie \underline{e}_i lecz i w bazie dualnej \underline{e}^j przestrzeni E^3 . Niech $\underline{T} = T^i_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j$ jest zależnym od czasu polem tensorem w E^3 , wtedy

$$\text{/B.12/} \quad \frac{\delta \underline{T}}{\delta t} = \left\{ \frac{\delta T^i_j}{\delta t} + u_n (\Gamma_{lk}^i T_j^l - \Gamma_{jk}^m T_m^i) n^k \right\} \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j$$

$$= \left\{ \frac{\partial T^i_j}{\partial t} + u_n (T_{j;k}^i + \Gamma_{lk}^i T_j^l - \Gamma_{jk}^m T_m^i) n^k \right\} \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j.$$

Jeśli zauważymy, że

$$T_{jk}^i = T^i_{jk} + \Gamma_{kl}^i T_j^l - \Gamma_{jk}^m T_m^i,$$

to ostatni związek, ze względu na symetrię $\Gamma_{kl}^n = \Gamma_{lk}^n$ będzie można zapisać następująco:

$$\text{/B.13/} \quad \frac{\delta \underline{T}}{\delta t} = \left(\frac{\partial T^i}{\partial t} + u_n T_{j;k}^i n^k \right) \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j,$$

gdzie

$$\text{/B.14/} \quad T_{j;k}^i = T^i_{j,k} + 2(\Gamma_{kl}^i T_j^l - \Gamma_{jk}^m T_m^i).$$

Wykorzystując to oznaczenie, rezultat /B.7/ możemy zapisać jak następuje

$$/B.15/ \quad \frac{df^l}{\delta t} = \frac{\partial f^l}{\partial t} + u_n f^l_{:k} n^k,$$

gdzie teraz

$$/B.16/ \quad f^l_{:k} \equiv f^l_{,k} + 2 \Gamma^l_{kl} f^l.$$

Dotąd wyprowadzone relacje pozwalają w następujący sposób zdefiniować niezmienniczą pochodną przemieszczeniową $\delta / \delta t$

$$/B.17/ \quad \frac{df^{\dot{i}j\dots}}{\delta t} \equiv \frac{\partial f^{\dot{i}j\dots}}{\partial t} + u_n f^{\dot{i}j\dots}_{:p} n^p$$

dla składowych $f^{\dot{i}j\dots}_{kl\dots}$ dowolnej funkcji tensorowej $f(t, \underline{x})$.
Przy jej pomocy pochodna przemieszczeniowa $\delta / \delta t$ może być zapisana w notacji wskaźnikowej następująco

$$/B.18/ \quad \frac{\delta}{\delta t} (f^{\dot{i}j\dots}_{kl\dots} e_i \otimes e_j \otimes \dots \otimes e^k \otimes e^l \otimes \dots) \\ = \frac{df^{\dot{i}j\dots}_{kl\dots}}{\delta t} e_i \otimes e_j \otimes \dots \otimes e^k \otimes e^l \otimes \dots$$

BIBLIOGRAFIA

- ACHENBACH, J.D., Wave propagation in elastic solids, North-Holland Publ.Co., American Elsevier, Amsterdam-New York 1973 /jest rejskie tłumaczenie/.
- BALABAN, M.M., GREEN, A.E., NAGHDI, P.M., Acceleration waves in elastic-plastic materials, Int.J. Engng. Sci., 8, 315-335, 1970.
- BALTOV, A., Problemy dynamiczne w infinytezymalnej teorii termoplastycznosci, /w:/ Termoplastycznosc, Jablonna 18-27.VI.1973 /red. P.Perzyna/, Ossolineum, Wroclaw 1975.
- BEJDA, J., Dynamika plaskiego stanu odkształcenia, /w:/ Zastosowania lepkeplastyčnosti, P. Perzyna, J.Klepaczko, J.Bejda, W.K. Nowacki, T.Wierzbiński, 117-171, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk 1971.
- BEJDA, J., Propagation of two-dimensional strong discontinuity waves in an elastic-viscoplastic medium, Arch.Mech., 24, 3, 337-344, 1972.
- BLAND, D.R., Dilatations waves and shocks in large displacement isentropic elasticity, J.Mech. Phys. Solids, 12, 245-267, 1964.
- BLAND, D.R., Nonlinear dynamic elasticity, Ginn Blaisdell Boston, Massachusetts 1970 /jest rejskie tłumaczenie/.
- BOREJKO, P., Reflection and refraction of an acceleration wave at boundary between two nonlinear materials, Arch.Mech., 31, 3, 373 - 384, 1979.
- BOWEN, R.M., CHEN, P.J., Acceleration waves in anisotropic thermoelastic materials with internal state variables, Acta Mech., 15, /1-2/, 95-104, 1972.

- BOWEN, R.M., CHEN, P.J., McCARTHY, M.F., Thermodynamic influences on the behavior of curved shock waves in elastic fluids and the vorticity jumps, *J.Elasticity*, 6 /4/, 369-382, 1976.
- BOWEN, R.M., WANG, C.-C, Acceleration waves in inhomogeneous isotropic elastic bodies, *Arch.Rat.Mech. Anal.*, 38 /1/, 13-45, 1970, Cerrigendum 40, 403, 1971.
- BOWEN, R.M., WANG, C.-C., On displacement derivatives, *Quart. Appl.Math.*, 29, 29-39, 1971a.
- BOWEN, R.M., WANG, C.-C., Thermodynamic influences on acceleration waves in inhomogeneous isotropic bodies with internal state variables, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 41 /4/, 287-318, 1971b.
- BRAUN, M., Zur Ausbreitung von Unstetigkeitsflächen in therme-elastischen Stoffen, *Praca dokterska, Universität Stuttgart* 1974.
- BURGER, W., Schwache Unstetigkeiten in räumlichen stationären Strömungen von Gasen mit Thermodynamischer Relaxation, *ZAMM*, 48 /5/, T 185-187, 1968.
- CHADWICK, P., CURRIE, P.K., The propagation and growth of acceleration waves in heat-conducting elastic materials, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 49 /2/, 137-158, 1972.
- CHADWICK, P., POWDRILL, B., Singular surfaces in linear thermoelasticity, *Int.J.Engng.Sci.*, 3, 561-595, 1965.
- CHEN, P.J., Thermodynamic influences on the propagation and growth of acceleration waves in elastic materials, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 31, 228-254, 1968a.
- CHEN, P.J., The growth of acceleration waves in arbitrary form in homogeneously deformed elastic materials, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 30 /1/, 81-89, 1968b.
- CHEN, P.J., Growth and decay of waves in solids, v: *Handbuch der Physik*, t.VIa/3, 303-402, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973.

- CHEN, P.J., Selected topics in wave propagation, Noordhoff International Publishing, Leyden 1976.
- CHEN, P.J., GURTIN, M.E., Growth and decay of one-dimensional shock waves in fluids with internal state variables, Phys.Fluids, 14 /6/, 1091-1094, 1971.
- CHEN, P.J., WRIGHT, T.W., Three-dimensional shock waves and their behavior in elastic fluids, Meccanica, J. Italian Assoc.Theor.Appl.Mech., 10 /4/, 232-238, 1975.
- CHRISTOFFEL, E.B., Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten, Ann. Mat., 8 /2/, 81-113, 1877.
- CHU, B.T., Finite amplitude waves in incompressible perfectly elastic materials, J.Mech.Phys. Solids, 12 /1/, 45-57, 1964.
- CHU, B.T., Transverse shock waves in incompressible perfectly elastic materials, J.Mech.Phys. Solids, 15 /1/, 1-14, 1967.
- CLIFTON, R.J., Solutions of wave problems in inelastic materials, /w:/ Dynamika ośrodków niesprężystych, Jabłonna 8-13.V.1972 /red. P.Perzyna/, Ossolineum, Wrocław 1974.
- COLEMAN, B.D., GURTIN, M.E., Waves in materials with memory, Part IV, Thermodynamics and the velocity of general acceleration waves, Arch.Rat. Mech.Anal., 19 /5/, 317-330, 1965.
- COLEMAN, B.D., GURTIN, M.E., Growth and decay of discontinuities in fluids with internal state variables, Phys.Fluids, 10 /7/, 1454-1458, 1967.
- COLEMAN, B.D., GURTIN, M.E., HERRERA, I.R., TRUESDELL, C., Wave propagation in dissipative materials, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1965.
- COURANT, R., FRIDRICHS, K.O., Supersonic flow and shock waves, Interscience Publishers, New York 1948. /Jest rosyjskie tłumaczenie/.
- CURRIE, P.K., A note on shock waves in elastic Hadamard and Green materials, J.Appl.Math.Phys., ZAMP,

22 /2/, 355-359, 1971.

- CURRIE, P.A., Shock waves in homogeneously-strained incompressible elastic materials: the Mooney-Rivlin material, *Acta Mech.*, 14, 53-58, 1972.
- CURRIE, P.K., HAYES, M., Longitudinal and transverse waves in finite elastic strain, Hadamard and Green materials, *J.Inst.Math.Appl.*, 5, 140-161, 1969.
- DORIA, M.L., BOWEN, R.M., Growth and decay of curved acceleration waves in chemically reacting fluids, *Phys.Fluids*, 13, 867-876, 1970.
- DUNWOODY, J., One-dimensional shock waves in heat conducting materials with memory, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 47 /2/, 117-148, 1972.
- ERICKSEN, J.L., On the propagation of waves in isotropic incompressible perfectly elastic materials, *J.Rat.Mech.Anal.*, 2, 329-337, 1953.
- ERINGEN, A.C., *Mechanics of continua*, Wiley, New York 1967.
- ERINGEN, A.C., *Basic principles, /w:/ Continuum physics*, A.C. Eringen /ed./ T.II, 1-127, Academic Press, New York-San Francisco-London 1975.
- ERINGEN, A.C., SUHUBI, E.S., *Elastodynamics, t.I, Finite motions*, Academic Press, New York and London 1974.
- GERMAIN, P., Shock waves, jump relations, and structure, /w:/ *Advances in Applied Mechanics*, 12, 131-194, 1972.
- GOETZ, A., *Geometria różniczkowa*, PWN, Warszawa 1965.
- GREEN, W.A., The growth of plane discontinuities propagating into a homogeneously deformed elastic material, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 16 /1/, 79-88, 1964.
- GREEN, W.A., The growth of plane discontinuities propagating into a homogeneously deformed elastic material, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 12 /1/, 20-23, 1965.

- GURTIN, M.E., WALSH, E.K., Extrinsicly induced acceleration waves in elastic bodies, *J. Acoust. Soc. Am.*, 41, 1320-1324, 1967.
- GUTER, R.S., KUDRIAWCEW, L.D., LEWITAN, B.M., Elementy teorii funkcji, PWN, Warszawa 1967.
- HADAMARD, J., Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique 1903 Chelsea Publishing Company, New York 1949.
- HANYGA, A., Współczesna termodynamika ośrodków ciągłych, PWN, Warszawa 1979.
- HANYGA, A., Nieliniowe teorie propagacji fal: fale proste i uderzeniowe, /w:/ Fizyka wnętrza ziemi, R. Teisseyre /red./, PWN, Warszawa 1980.
- HAYES, W.D., The vorticity jump across a gasdynamic discontinuity, *J. Fluid Mech.*, 2 /6/, 595-600, 1957.
- HILL, R., Acceleration waves in solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 10 /1/, 1-16, 1962.
- HUECKEL, T., On plastic flow of granular and rocklike materials with variable elasticity moduli, *Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn.*, 22, 8, 405-414, 1975.
- HUECKEL, T., Coupling of elastic and plastic deformations of bulk solids, *Meccanica, J. Italian Assoc. Theor. Appl. Mech.*, 11, 4, 227-235, 1976.
- HUGONIOF, H., Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits, *J. Ecole polytech.*, 57, 3-97, 1887; 58, 1-125, 1889.
- HUILGOL, R.R., Growth of plane shock waves in materials with memory, *Int. J. Engng. Sci.*, 11, 1, 75-86, 1973.
- IGNACIAK, J., Thermoelasticity with finite wave speeds - A survey, *Proc. Conf. Thermal Stresses*, March 19-21, 1980, Virginia Polyt. Inst. State University, Blacksburg, U.S.A.
- KENNEDY, J.E., NUNZIATO, J.W., Shock wave evolution in a chemically reacting solid, *J. Mech. Phys. Solids*, 24 / 2/3 /, 107-124, 1976.

- KOSIŃSKI, W., Behaviour of the acceleration and shock waves in materials with internal state variables, *Int.J.Non-Linear Mech.*, 9 /6/, 481-499, 1974.
- KOSIŃSKI, W., One-dimensional shock waves in solids with internal state variables, *Arch.Mech.*, 27, /3/, 445-448, 1975a.
- KOSIŃSKI, W., Thermal waves in inelastic bodies, *Arch. Mech.*, 27, /5-6/, 733-748, 1975b.
- KOSIŃSKI, W., Analiza jednowymiarowych fal uderzeniowych i przyspieszenia w ośrodku niesprężystym, *Mech.Teor.Stoc.*, 14 /1/, 95-126, 1976.
- KOSIŃSKI, W., PERZYNA, P., Analysis of acceleration waves in material with internal parameters, *Arch. Mech.*, 24 /4/, 629-642, 1972.
- KOSIŃSKI, W., Fracture effects in the propagation of a shock wave through a bulk solid, *Arch.Mech.*, 32 /3/, 451-463, 1980.
- KOSIŃSKI, W., SZMIT, K., On waves in elastic materials at low temperatures, cz.I. Hyperbolicity in thermoelasticity, cz.II. Principal waves, *Bull. Acad.Pol.Sci., Sér.Sci.techn.*, 25 /1/, 17-32, 1977.
- KOSIŃSKI, W., Wstęp do teorii osobliwości pola i analizy fal, PWN, Poznań 1980.
- KOTCHINE, N.E., Sur la théorie des ondes de choc dans un fluide, *Rend.Circ.Mat.Palermo*, 50, 305-344, 1926.
- KOČIN, N.E., Vektornoe iscisljenje i nacala tenzornogo iscisljenja, *Izd.Nauka, Moskva* 1965.
- KUKUDŽANOV, V., On the propagation of strong discontinuity waves in an elastic-viscoplastic medium /w:/ *Dynamika ośrodków niesprężystych*, Jabłonna 8-13.V.1972, red. P.Perzyna, Ossolineum, Wrocław 1974.
- KUKUDŽANOV, V.N., On wave propagation in a coupled thermo-elastic-plastic medium, *Arch.Mech.*, 29 /2/, 325-338, 1977.

- LANDAU, L., LIFSZIC, E., Elektrodynamika ośrodków ciągłych, PWN, Warszawa 1960.
- LICHTENSTEIN, L., Grundlagen der Hydromechanik, Springer-Verlag, Berlin 1929.
- MANDEL, J., Ondes plastiques dans un milieu indéfini à trois dimensions, J.Éc., 1 /1/, 3-30, 1962.
- MANDEL, J., Nations générales sur les ondes, /w:/ Mechanical waves in solids, J. Mandel, L. Brun /eds./, 1-62, CISM Courses and Lectures, 222, Springer-Verlag, Vien-New York 1976.
- MANDEL, J., BRUN, L., /ed./, Mechanical waves in solids, CISM Courses and Lectures, 222, Springer-Verlag, Vien-New York 1976.
- MAXWELL, J.C., On the dynamical theory of gases, Phil. Trans. Royal Soc. London, 157, 49, 1867.
- MCCARTHY, M.F., Singular surfaces and waves, /w:/ Continuum physics, A.C. Eringen /ed./, t.II, 449-521, Academic Press, New York-San Francisco-London 1975.
- MIHAILESCU, M., SULICIU, I., Finite and symmetric thermo-mechanical waves in materials with internal state variables, Int.J.Solids Struct., 12, 12, 559-575, 1976.
- NOWACKI, W., Dynamic problems of thermoelasticity, PWN, Warszawa 1975.
- NOWACKI, W., Ondes dans les milieux continus généralisés, /w:/ Mechanical waves in solids, J.Mandel, L.Brun /eds./, 255-292, CISM Courses and Lectures, 222, Springer-Verlag, Vien-New York 1976.
- NOWACKI, W.K., Zagadnienia falowe w teorii plastyczności, PWN, Warszawa 1974./Są tłumaczenia angielskie i rosyjskie/.
- NOWACKI, W.K., Propagation des ondes en sol elasto-viscoplastique /w:/ Problems non - linéaires en mécanique, red. W.K. Nowacki, PWN, Poznań 1980.

- NUNZIATO, J.W., WALSH, E.K., SCHULER, K.W., BARKER, L.M.,
Wave propagation in nonlinear viscoelastic solids, /w:/ Handbuch der Physik,
t. VIa/4, 1-108, Springer-Verlag, Berlin-
-Heidelberg-New York 1974.
- PERZYNA, P.,
Teoria lepkoplastycznosci, PWN, Warszawa
1966.
- PERZYNA, P.,
Termodynamika materialow niesprężystych,
PWN, Warszawa 1978.
- PERZYNA, P.,
Porównanie przewidywań teorii z resulta-
tami doświadczalnymi w zakresie falowych
problemów w ośrodkach niesprężystych,
/w:/ Analiza teoretyczna propagacji fal
naprężeń, SITP Naft., Opracowanie V -
- 144/79, Kraków 1979.
- PIAU, M.,
Ondes d'accélération dans les milieux
elastoplastiques viscoplastiques, J.Méc,
14 /1/, 1-38, 1975.
- RADZISZEWSKI, K.,
Wstęp do współczesnej geometrii różniczkowej,
PWN, Warszawa 1973.
- RANIECKI, B.,
Ordinary waves in inviscid plastic media,
/w:/ Mechanical waves in solids, J.Mandel,
L.Brun /eds./, 157-219, Springer-Verlag,
CISM Courses and Lectures, 222, Wien-New
York 1976.
- SCHULER, K.W., NUNZIATO, J., WALSH, E.K., Recent results in
non-linear viscoelastic wave propagation,
Int. J.Solids Struct., 9, 1237-1281, 1973.
- SPENCE, D.A.,
Nonlinear wave propagation in viscoelastic
materials, /w:/ Nonlinear elasticity, R.W.
Dickey /ed./, 365-396, Academic Press, New
York, London 1973.
- STOKES, G.G.,
On a difficulty in the theory of sound,
Phil. Mag., 22, 349-356, 1848.
- SUHUBI, E.S.,
The growth of acceleration waves of arbitrary
form in deformed hyperelastic materials,
Int.J.Engng.Sci., 8, 699-710, 1970.
- THOMAS, T.Y.,
The fundamental hydrodynamical equations
and shock conditions for gases, Math.Mag.,
22, 169-189, 1949.

- THOMAS, T.Y., Extended compatibility conditions for the study of surfaces of discontinuity in continuum mechanics, *J.Math.Mech.*, 6, 311-322, 907-908, 1957a.
- THOMAS, T.Y., The growth and decay of sonic discontinuities in ideal gases, *J.Math.Mech.*, 6 /4/, 455-469, 1957b.
- THOMAS, T.Y., Plastic flow and fracture in solids, Academic Press, New York and London 1961.
- THOMAS, T.Y., Concepts from tensor analysis and differential geometry, Academic Press, New York, London 1965.
- TING, T.C.T., Shock waves and weak discontinuities in anisotropic elastic-plastic media, /w/ The propagation of shock waves in solids, *Publ.Amer.Soc.Mech.Engineers & AMD*, vol.17, 41-64, New York 1976.
- TING, T.C.T., Plastic wave speeds in isotropically work hardening materials, *J.App.Mech.Trans. ASME*, 44, 68-72, 1977.
- TOKUOKA, T., Generalized Prandtl-Reuss plastic materials II. Characteristic surfaces and acceleration wave propagation, *Mem.Fac.Engng. Kyoto Univ.*, 32, 193-200, 1971.
- TOKUOKA, T., Thermo-acoustical waves in linear thermo-elastic materials, *J.Engng.Math.*, 7 /2/, 115-122, 1973a.
- TOKUOKA, T., Growth and decay of thermo-acoustical waves in thermo-plastic materials, *Trans. Jap.Soc.Aeron.Space Sci.*, 16 /33/, 143-159, 1973b.
- TOKUOKA, T., Thermo-acoustical waves in thermo-plastic materials, *J.Engng.Math.*, 8 /1/, 9-22, 1974.
- TOKUOKA, T., Acceleration waves in rate-type plastic material with general work-hardening, *Int.J.Non-linear Mech.*, 13 /4/, 199-204, 1978.

- TRUESDELL, C., General and exact theory of waves in finite elastic strain, Arch.Rat.Mech.Anal., 8, 263-296, 1964.
- TRUESDELL, C., TOUPIN, R.A., The classical field theories, /w:/ Handbuch der Physik, Band III/1, 226-793, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.
- VARLEY, E., Acceleration fronts in viscoelastic materials, Arch.Rat.Mech.Anal., 19 /3/, 215-225, 1965a.
- VARLEY, E., Simple waves in general elastic materials, Arch.Rat.Mech.Anal., 20 /5/, 309-328, 1965b.
- VARLEY, E., CUMBERBATCH, E., Non-linear theory of wave-front propagation, J.Inst.Maths.Applics., 1, 101-112, 1965.
- VARLEY, E., DUNWOODY, J., The effect of non-linearity at an acceleration wave, J.Mech.Phys.Solids, 11 /1/, 17-28, 1965.
- WANG, C.-C., TRUESDELL, C., Introduction to rational elasticity, Noordhoff Intern.Publ., Leyden 1973.
- WESOŁOWSKI, Z., Zagadnienia dynamiczne nieliniowej teorii sprężystości, PWN, Warszawa 1974.
- WESOŁOWSKI, Z., Acoustic wave in finitely deformed elastic material, Arch.Mech., 24 /6/, 793-801, 1972.
- WESOŁOWSKI, Z., Propagacja fali akustycznej w nieliniowym materiale sprężystym, /w:/ Dynamika układów sprężystych, Cz.Ważniak /red./ Ossolineum, Wrocław 1976.
- WESOŁOWSKI, Z., Strong discontinuity wave in initially strained elastic medium, Arch.Mech., 30 /3/, 1978.
- WESOŁOWSKI, Z., BÜRGER, W., Shock waves in incompressible elastic solids, Rheol.Acta, 16 /2/, 155-160, 1977.
- WEYL, H., Shock waves in arbitrary fluids, Comm. Pure Appl.Math., 2, 103-122, 1949.

- WHITHAM, G.B., Linear and nonlinear waves, A Wiley Interscience Publ., J. Wiley and Sons, New York, London, Sydney, Toronto 1974.
- WILMAŃSKI, K., Zarys termodynamiki ośrodków ciągłych, Prace IPPT, 6, 1975.
- WOŁOSZYŃSKA, K., Zagadnienia falowe w sprzężonej termolepkoplastyczności, Praca doktorska, Prace IPPT, Warszawa 1979.
- WRIGHT, T.W., Acceleration waves in simple elastic materials, Arch. Rat. Mech. Anal., 50 /4/, 237-277, 1973.

SPIS TREŚCI

	str.
Wstęp	3
1. Powierzchnia w kontinuum, jej geometria i kinematyka	8
1.1. Powierzchnia ruchoma w kontinuum	8
1.2. Pochodna przemieszczeniowa	17
2. Funkcje o nieciągłościach skokowych na ruchomej powierzchni	24
2.1. Powierzchnie nieciągłości funkcji	25
2.2. Geometryczne warunki zgodności	28
2.3. Kinematyczne warunki zgodności	32
3. Powierzchnia osobliwa dla funkcji ruchu	36
3.1. Materiałowy opis ruchomej powierzchni	36
3.2. Powierzchnia nieciągłości prędkości	41
3.3. Powierzchnia osobliwa drugiego rzędu	45
4. Równania bilansu kontinuum odkształcalnego	51
5. Fale akustyczne w ośrodku sprężystym przy niskich temperaturach	55
5.1. Równanie Maxwella-Cattaneo w termosprężystości	55
5.2. Warunek propagacji fali akustycznej	57
6. Fala uderzeniowa w ośrodku skalopodobnym modelowanym materiałem reologicznym	64
6.1. Ośrodek skalopodobny jako kontinuum reologiczne wrażliwe na historię zmiany objętości	64
6.2. Płaska fala uderzeniowa w ośrodku reologicznym wrażliwym na zmianę objętości właściwej	68
6.3. Efekt zniszczenia wywołany falą	74
7. Fala przyspieszenia w ośrodku sprężysto-lepkoplastycznym	77

Dodatek A. Rodzina powierzchni równoległych	84
Dodatek B. Pechodna niezmiennicza	93
Bibliografia	97