

7.72 — konstrukcja plastyczna

Praca doktorska

43 / 1984

Cao Van Phuong

**DUŻE UGIĘCIA
SZTYWNO-PLASTYCZNYCH
POWŁOK WALCOWYCH
PODDANYCH IMPULSOWEMU CIŚNIENIU**

43/1984

P. 269



WARSZAWA 1984

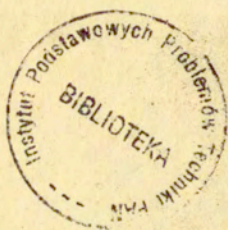
<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca doktorska

data obrony 15 maja 1975

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 października 1983 r.



56990



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 130 egz. Ark. wyd. 3,6. Ark. druk. 5.
Oddano do drukarni w grudniu 1984 r.
Nr zamówienia 37/85

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Spis treści

1. Wprowadzenie
 - 1.1.stęp
 - 1.2. cel pracy
 - 1.3. sformułowanie zagadnienia
2. Sformułowanie problemu matematycznego
 - 2.1. założenia podstawowe
 - 2.2. kinematyka
 - 2.3. wprowadzenie równań ruchu powłoki
 - 2.4. leżymiarowa postać równań dla powłoki walcowej
 - 2.5. warunek plastyczności i stowarzyszone prawo płynięcia
 - 2.6. Typy obciążeń
 - 2.7. sformułowanie problemu dynamiki plastycznej powłoki walcowej
3. Rozwiązanie zagadnień początkowych brzegowych przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski
 - 3.1. Neciągłości
 - 3.2. Przypadek małych ugięć
 - 3.3. Statyczny problem przypadku dużych ugięć
 - 3.4. Problem dynamiczny - przypadek błonowy
 - 3.5. Problem dynamiczny - przypadek ogólny
4. Sformułowanie i przybliżona analiza problemu przy wykorzystaniu warunku plastyczności Hubera-Misesa
 - 4.1. Równanie ruchu w przemieszczeniach
 - 4.2. Metoda rozwiązania
 - 4.3. Przypadek małych ugięć
 - 4.4. Przypadek dużych ugięć
5. Końcowe uwagi, wnioski
6. Bibliografia
7. Dodatek
Program na maszynie cyfrową ODRA 1204

1. Wprowadzenie

1.1. Wstęp

Istnieje już dosyć bogata literatura omawiająca zagadnienia dynamiki konstrukcji niesprężystych. W zakresie dynamicznej plastyczności można wyróżnić dwa typy zagadnień. Jeden z nich dotyczy badania powstawania i rozprzestrzeniania się lokalnych plastycznych odkształceń, które pojawiają się przy wysokim poziomie naprężeń. Badania na ten temat prowadzone są analitycznie i doświadczalnie przez wielu autorów, a zagadnienie jest w pewnym stopniu podobne do tego jakie rozpatruje się studiując rozchodzenie się fal w ośrodkach sprężystych. Wiele wyników z badań zagadnień tego typu można znaleźć między innymi w pracach [6, 7, 8, 23, 32, 39, 49] .

Inną grupę zagadnień stanowi badanie spowodowanych przez wysokie obciążenia plastycznych odkształceń konstrukcji. Przy gwałtownym obciążeniu konstrukcji stan równowagi nie istnieje a w przypadku dostatecznych wysokich ciśnień rozpoczyna się jej ruch. Jeśli taki ruch trwa przez pewien czas, to zmiany geometrii konstrukcji mogą być znaczne i nie będzie ona mogła spełniać dalej swojej funkcji. Dlatego też badania końcowych ugięć i czasu trwania ruchu impulsowo obciążonej konstrukcji mają duże znaczenie w praktyce.

Największe trudności napotyka się przy rozpatrywaniu zagadnień dynamicznej plastyczności w stanie giętko-membranowego naprężenia przy dużych ugięciach. W przypadkach tych mamy do rozwiązania układ nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, dla których brak jest dotychczas dobrze opracowanych metod analitycznych. Dzięki szybkiemu rozwojowi technik obliczeniowych w ostatnich latach można było pokonać te trudności przez opracowanie metod numerycznych bądź ogólniejszych bądź tylko odpowiednich dla rozwiązania konkretnego zagadnienia. Szereg prac poświęconych jest opracowaniu metod numerycznego całkowania równań różniczkowych cząstkowych o więcej niż dwóch zmiennych, które pozwalają rozwiązywać wiele płaskich i osiowo-symetrycznych problemów brzegowych dla ośrodków sprężysto-plastycznych [6, 9, 10, 23, 40, 42, 43, 50, 58] . oraz

sprężysto-lepkoplastycznych [7], [49] .

Podobne efektywne metody różnicowe zaproponowane zostały dla konstrukcji cienkościennych o dowolnym kształcie [43, 46] .
Badaniom tym w mniejszym stopniu towarzyszyły studia nad opracowaniem odpowiednich metod analitycznych, które pozwoliłyby w stosunkowo prosty sposób wyznaczyć podstawowe parametry procesu dynamicznego. Główne zadanie w dynamicznej analizie konstrukcji plastycznych polega na tym, że na ciało sztywno-plastyczne działają siły zewnętrzne P oraz siły wewnętrzne, które spełniają warunki brzegowe początkowe i równania ruchu oraz warunek plastyczności.

Za pomocą stowarzyszonego prawa pąknięcia i związków geometrycznych musimy szukać końcowego ugięcia $U_i^{\bar{\tau}} = U_i^{\bar{\tau}}(x_{\bar{\tau}})$, odpowiadającego chwili $\bar{\tau}$, kiedy prędkość odkształcenia $\dot{U}_i(x_{\bar{\tau}}) = 0$. Dzięki temu ze względu na całkowicie dysypatywny charakter materiału sztywno-plastycznego $\bar{\tau}$ jest skończony i pozwala nam obliczyć górną lub dolną granicę ugięcia.

Szereg ważnych materiałów konstrukcyjnych wykazuje efekty lepkie przy nagłych i intensywnych obciążeniach. Wielu autorów prowadzi badania wpływu efektów lepkich na trwałe ugięcie przy dynamicznym obciążeniu [55, 56, 57, 70, 75] . Wiele wyników przedstawia praca [74] Wierzbickiego. W pracy tej za pomocą równania konstytutywnego proponowanego przez Perzynę [56] autor zbudował ogólną teorię i przedstawił rozwiązania kilku reprezentatywnych brzegowych zagadnień oraz konfrontację wyników z danymi doświadczalnymi dla konstrukcji z materiału sprężysto-lepko-plastycznego. Zaproponował także metody przybliżone, które pozwalają na proste a zarazem efektywne oszacowanie podstawowych parametrów procesu dynamicznego. Model z materiału sztywno-plastycznego stosowany był w szeregu problemach dla belek i płyt powłok w ramach teorii nośności granicznej [12, 17, 44, 59, 60] . W zakresie dynamiki sztywno-plastycznych konstrukcji poświęconych jest wiele prac, między innymi [1, 2, 19, 22, 25, 27, 31, 34, 37, 41, 45, 48, 52, 64, 68] .

Przegląd literatury głównych wyników z dziedziny dynamiki konstrukcji sztywno-plastycznych ograniczony będzie do zagad-

nieniom tym poświęcono w ostatnich latach wiele uwagi rozpoczynając od badań Lee i Symonds'a [66] przeprowadzonych w 1952 roku. Autorzy rozpatrywali belkę zamocowaną poddaną w środku rozpiętości działaniu gwałtownie przyłożonej siły skupionej. Przy odpowiedniej intensywności obciążenia belka przekształca się w mechanizm.

Zgodnie z zasadą D'Alemberta w tej fazie belkę można rozpatrywać w stanie równowagi pod ciśnieniem w środku i siły inercji. Maksymalny zginający moment będzie w środku belki. Niszczące obciążenie określa się jako to obciążenie, przy którym zginający moment w środku belki przyjmuje wartość graniczną. Natomiast przy wysokim obciążeniu belka zaczyna obrotowe przyspieszenie względem swego środka. W tym przypadku autorzy obliczyli prędkość obrotu belki jako funkcję od czasu dla danego obciążenia. Warto zaznaczyć, że dla dostatecznego wysokiego obciążenia tworzą się przeguby plastyczne, które przesuwają się wzdłuż belki w miarę upływu czasu. W ten sposób badanie tego przypadku będzie bardzo skomplikowane. Pełne złamanie osi belki przedstawia się jako parametr czasu i obciążenia. Przy odpowiedniej kombinacji tych parametrów pełne złamanie osi belki może być dostatecznie małe, można więc rozpatrywać belkę przydatną do dalszej eksploatacji. Wyniki dalszych badań zagadnień belek można znaleźć także w innych pracach autorów [11, 65, 67]. Hopkins i Prager [22] oraz Wang i Hopkins [77] rozpatrywali sztywno-plastyczną, cienką, swobodnie podpartą płytę oraz sztywno-plastyczną, cienką, zamocowaną płytę obciążoną symetrycznym impulsem. Materiał płyty jest sztywno-idealnie-plastyczny i podporządkowany warunkowi plastyczności Treski, przy rozpatrywaniu zagadnień autorzy przyjmowali założenie, że płyta jest cienka. Zgodnie z tymi założeniami autorz. wyeliminowali styczne naprężenia normalne do powierzchni płyty. Dużo ciekawych wyników analitycznych i doświadczalnych badań płyty pod impulsowym ciśnieniem można znaleźć w pracach [3, 4, 10, 24, 34, 35, 45, 64].

Powłokom sztywno-plastycznym poświęcono wiele uwagi. Podstawowe studia nad tym problemem można znaleźć między innymi w pracach [28, 30] Hodge'a, którzy zbudował ogólną teorię i

rozwiązywał początkowo-brzegowe zagadnienie cienkich powłok wykonanych z materiału sztywno-plastycznego i poddanych równomiernemu impulsowi ciśnienia. Zgodnie z założeniem, że powłoka jest cienka oraz obwódowa krzywizna K_4 przyjmuje wartość zerową, autor wyeliminował także moment M_4 . Rozpatrywanie zagadnienia było przeprowadzone w stanie płaskiego naprężenia bez uwzględnienia siły rozciągania N_x przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski. Przy wysokim obciążeniu autor zakłada, że powłoka łamie się. Każda z powstałych części pracuje w odpowiednim stanie naprężen. Ta więc między ciśnieniami powłoki istnieją przeguby plastyczności, które poruszają się względem czasu, przy czym czas trwania ruchu w powłoce określa się w zależności od położenia przegubu. W pracy [75], z uwagi na fakt, że między obciążeniami a plastycznym odkształceniem istnieje zależność, autor proponuje dla wyznaczenia końcowego ugięcia w środku powłoki, przybliżoną metodę, dzięki której uzyskano rozwiązanie dla powłoki cylindrycznej obciążonej symetrycznie. Rozwiązanie to przedstawiono w postaci iloczynu kwadratu impulsu oraz w rozwiązaniu otrzymanym w przypadku stałego obciążenia. Wyniki badań tego problemu można znaleźć także w pracach [28, 31, 37, 40, 69]. W pracach tych autorzy rozpatrywali początkowo-brzegowe zagadnienie w ramach liniowej teorii i w stanie płaskich naprężeń bez uwzględnienia siły rozciągania N_x przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski.

W ostatnich latach obserwuje się wzrost zainteresowania zachowaniem się powłok plastycznych w zakresie dużych ugięć. Pierwsze studia dotyczące statyki powłok uwzględniające zmiany geometrii konstrukcji wskutek odkształcenia plastycznego znajdują się w pracach Lepika [44], Duszek i Sawczuka [18, 16, 60]. Przeprowadzili oni dyskusję upraszczających założeń w teorii początkowego płynięcia powłok z materiału sztywno-plastycznego. Konsekwentną teorię dużych ugięć powłok sztywno-plastycznych podała Duszek [16, 14]. W pracach tych autorka przeprowadziła analizę równań cienkich powłok dla skończonych deformacji w opisie Lagrange'a. Ważnym wnioskiem tych prac jest twierdzenie, że dla "umiarkowania dużych przemieszczeń" tzn. przemieszczeń rzędu grubości powłoki prawo płynięcia i defi-

nicja uogólnionych naprężeń mogą być przyjęte w tej samej postaci jak w teorii liniowej nieskończenie małych przemieszczeń. Natomiast równanie równowagi i związki geometryczne wymagają odpowiednich modyfikacji. Szczegółowe rozwiązania [13, 14] pokazały, że zmiana geometrii ma istotny wpływ na udźwig konstrukcji.

Przejście od stanu zgięciowego w stan blonowy następuje przy ugięciach nie większych od grubości ścianki powłoki.

Badan wpływu zmian geometrii powłoki na jej zachowanie pod działaniem obciążeń dynamicznych jest jeszcze niewiele [37, 40].

W pracy [37] Jones prowadzi badania sztywno-plastycznej powłoki zamkniętej, poddanej impulsowemu ciśnieniu przy wykorzystaniu stowarzyszonego prawa płynięcia dla każdej odpowiadającej części powierzchni plastyczności autor przyjmuje pole prędkości odkształceń. Dzięki temu dla każdej części powłoki autor znajduje trwałe ugięcie, a w pracy 40 Kir przy wykorzystaniu przybliżonego liniowego warunku plastyczności proponował rozwiązania zagadnienia sztywno-plastycznej powłoki zamkniętej, poddanej stałemu ciśnieniu w postaci wielomianu czwartego stopnia ze współczynnikami zależącymi jako funkcja od czasu i uzyskał rozwiązanie dla przypadku siły rozciągania $N_K = \frac{1}{2}$, przy czym wszystkie wyniki tych prac są tylko przybliżone ze szczególnym przypadkiem przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski.

1.2. Cel pracy

Z analizy dotychczasowych studiów na temat dynamiki powłok z materiału sztywno-plastycznego wynika, że brak jest w literaturze rozwiązań dotyczących zachowania się powłok plastycznych przy dużych ugięciach, w szczególności w przypadku stosowania warunku plastyczności Treski oraz warunku plastyczności Hubera-Misesa.

Znane rozwiązania uwzględniające zmianę geometrii konstrukcji ograniczają się do rozpatrywania zachowania się powłok podlegających warunkowi plastyczności, tzw. "ograniczonego

współdziałania". W przybliżeniach tego typu rzeczywistość powierzchnia graniczna jest zastąpiona przez układ dwóch warunków plastyczności - jednego dla sił błonowych i drugiego dla momentów. W efekcie rozpatruje się więc konstrukcję bardziej "wytrzymałą" i z tego względu trwałe ugięcia mogą być w rezultacie ocenione z niedomiarem. Istnieje zatem potrzeba rozwiązania zagadnień przy zastosowaniu właściwych warunków plastyczności.

Określenie zdeformowanej postaci powłoki po uderzeniu ciśnienia jest ważne w wielu dziedzinach zastosowań technicznych a głównie w energetyce i przemyśle chemicznym. Jak wykazały studia nad zachowaniem się powłok pod działaniem obciążeń statycznych uwzględnianie zmian geometrii wpływa w sposób istotny na wielkość przenoszonych obciążeń. Niezbędne jest więc przestudiowanie zagadnienia w nieliniowym sformułowaniu.

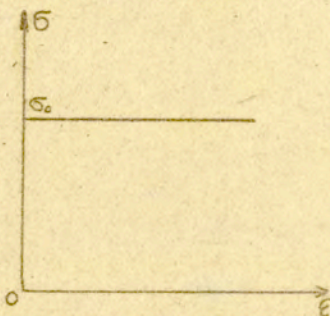
Celem obecnej pracy jest zbudowanie teorii geometrycznie nieliniowego zachowania się powłok plastycznych przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski i warunku plastyczności Hubera-Misesa oraz przybliżonego rozwiązania kilku reprezentatywnych problemów początkowo-brzegowych w przypadku różnych typów impulsowego ciśnienia. Zamierzamy również poszukiwać odpowiednich praktycznych metod wyznaczania końcowych trwałych ugięć konstrukcji z materiału sztywno-plastycznego. Jednym z zadań obecnej pracy jest także przeprowadzenie dyskusji i porównań wyników otrzymanych w przypadku stosowania równań teorii liniowej i nieliniowej, porównanie różnic pomiędzy wynikami otrzymanymi przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski, a rezultatami otrzymanymi przy wykorzystaniu nieliniowego warunku plastyczności Hubera-Misesa. Otrzymane rozwiązania umożliwiają także dokonanie oceny wpływu niektórych parametrów jak np. długości powłoki czy grubości ścianki na końcowe ugięcie i na czas trwania ruchu cząstek powłoki.

Rozpatrywane zagadnienia opisywane są nieliniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Stwarza to wielkie trudności w rozwiązywaniu i narzuca konieczność stosowania metod przybliżonych oraz techniki numerycznej. W ramach rozpatrywanej tu teorii średnio dużych ugięć również zmiany krzywizny obwodowej są pomijalne małe a co w rezultacie pozwala wyeliminować moment

obwodowy z rozważań na temat uplastycznienia powłok.

1.3. Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrujemy takie typy cienkościennych konstrukcji, których przemieszczenie jest rzędu tego samego co grubość. Zgodnie z tym założeniem naprężenia równoległe do powierzchni powłok, a które dają w rezultacie momenty i siły błonowe znacznie przewyższają naprężenia, które są normalne do powierzchni powłok. Jako model materiału przyjmujemy sztywno-plastyczny schemat odkształcenia z pominięciem wzmocnienia /rys.1/



Rys.1. Model materiału sztywno-plastycznego

Dla złożonych stanów naprężenia modelowi temu przypisujemy warunki plastyczności Treski lub Hubera-Misesa. Jako równanie zagadnienia rozpatrywać będziemy w odniesieniu do konfiguracji nieodkształconej. Komplet równań problemu składa się z równań ruchu, związków geometrycznych nieliniowej teorii, warunku plastyczności i prawa płynięcia. Ponieważ sztywno-plastyczny model umożliwia powstanie pewnych nieciągłości dopuszczamy wystąpienie ruchomych przegubów plastycznych.

W nieliniowym sformułowaniu możliwe jest prześledzenie przejścia powłoki ze stanu zgięciowego do stanu membranowego w miarę narastania ugięć. Zagadnienie tego typu zostanie przedyskutowane dla przypadku warunku plastyczności Treski. Dla kompletności wykładu przedstawimy również wyprowadzenie równań,

w szczególności kompletnego układu równań ruchu i związków kinematycznych. Równania te zostaną wyspecyfikowane dla przypadków powłok walcowych i sferycznych. W części szczegółowej rozpatrywać będziemy zachowanie się powłok pod działaniem kilku typów impulsu ciśnienia, przeprowadzać szczegółowo obliczenia dla przypadku impulsu prostokątnego. Zaproponowana zostanie metoda rozwiązywania zagadnień dynamiki wykorzystująca możliwość rozdzielenia zmiennych.

2. Sformułowanie problemu matematycznego

2.1. Założenia podstawowe

Rozpatrujemy powłoki cienkie i stosujemy oznaczenia jak na rysunku 2. Przyjmujemy te same założenia co Duszek 16, a mianowicie :

- a/ stosuje się założenia o prostych normalnych a więc rozkład przemieszczeń w ściance powłoki jest liniowy i wyraża się w sposób następujący:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} U_{\alpha} &= V_{\alpha}(x^i, t) + z \varphi_{\alpha}(x^i, t) \\ U_3 &= W(x^i, t) + z \varphi_3(x^i, t) \end{aligned}$$

- b/ wpływ naprężeń normalnych działających na powierzchnie równoległe do powierzchni środkowej może być pominięty

$$(2.2) \quad \sigma_{33} = 0$$

- c/ powłoka jest cienka i spełnia następujący warunek:

$$(2.3) \quad (H/A)^n \ll 1$$

przy czym przyjmujemy $n = 1$, zaś A jest mniejszym z głównych promieni krzywizny powierzchni środkowej.

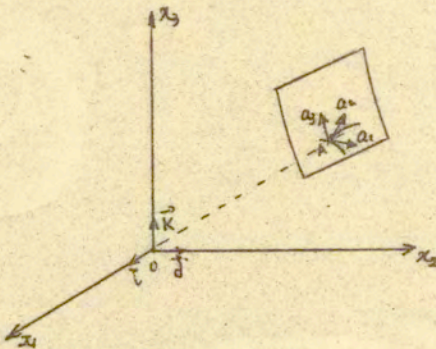
- d/ wpływ odkształceń poprzecznych na wartość energii

dysypowanej jest pomijalnie małe.
Wymaganie to zostanie spełnione gdy:

$$(2.4) \quad \int_{-H}^H E_{\alpha\beta} dz = 0$$

2.2. Kinematyka

Zgodnie z założeniem 2.1. dalszą analizę ograniczymy do takiej klasy deformacji powłoki, która charakteryzuje się liniowym rozkładem przemieszczeń poprzez grubość ścianki. Jak wskazuje analiza przeprowadzona w pracy [15] wpływ nieliniowych członów na energię dysypowaną jest rzędu $(H/A)^2$ lub $(H/L)^2$ w porównaniu do jedności. Wobec założenia 2.3. o cienkości powłoki, przyjęty liniowy rozkład przemieszczeń wydaje się być uzasadniony, co znacznie upraszcza związki opisujące ruch powłoki



Rys. 2

W mechanice ośrodków ciągłych konfiguracja ciała jest opisywana przez ciągły model matematyczny, w którym punkty geometryczne identyfikują się z położeniami cząstek materialnych danego ciała. Gdy takie ciało zmienia swoją konfigurację wskutek oddziaływań fizycznych, zakładamy, że zmiana ta jest

ciągła. Znaczy to, że punkty będące sąsiednimi przed odkształceniem pozostają sąsiednimi po odkształceniu. Niech układ współrzędnych wybrany będzie jak na rys.2. Jeżeli przez x^A i a^i oznaczymy odpowiednio materialne i przestrzenne współrzędne, zaś przez G_{AB} i g_{ij} tensory metryczne odpowiednich baz, to dla ortogonalnych układów współrzędnych zachodzi $G_{A3} = g_{\alpha 3} = 0$;

$G_{33} = g_{\beta\beta} = 1$ w przyjętym układzie współrzędnych linie parametryczne $x^A = \text{const}$ ($a^i = \text{const}$) tworzą siatkę na powierzchni środkowej, zaś x^3 (a^3) oznacza współrzędną odmierzoną w kierunku zewnętrznej normalnej do powierzchni środkowej. Ograniczymy rozpatrywanie deformacji określonych związkami:

$$(2.5) \quad x^B = x^B(a^r) \quad ; \quad x^3 = z = a^3$$

oraz $E_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} = 0$ co oznacza specjalne stany odkształceń, zachodzące bez zmiany grubości powłoki, symbolem \parallel oznaczymy kowariantne różniczkowanie w bazie o tensorze metrycznym G_{AB} . Gradient deformacji wyraża się przez gradient przemieszczenia w sposób:

$$(2.6) \quad a_{,k}^k = g_M^k (\varepsilon_k^M + U_{\parallel k}^M) \quad ; \quad g_M^k = g_M^k G_M^k$$

Natomiast symbolem \perp oznaczymy różniczkowanie kowariantne w bazie związanej z powierzchnią środkową. Tensor odkształcenia Greena określony jest w sposób:

$$(2.7) \quad 2E_{\alpha\beta} = (a_{\perp\alpha}^i a_{\perp\beta}^j g_{ij} - G_{\alpha\beta}) = \\ = U_{\alpha\parallel\beta} + U_{\beta\parallel\alpha} + G_{\perp M} U_{\parallel\alpha}^R U_{\parallel\beta}^M$$

Dla powłok, w celu dalszych uproszczeń, składowe tensora Greena napiszemy w następującej postaci:

$$(2.8) \quad 2E_{\alpha\beta} = U_{\alpha\parallel\beta} + U_{\beta\parallel\alpha} + U_{\perp\parallel\alpha}^{\perp} U_{\parallel\beta}^{\perp} + U_{\perp\parallel\alpha}^3 U_{\parallel\beta}^3 \\ 2E_{\alpha 3} = U_{\alpha\parallel 3} + U_{\alpha\parallel 3} + U_{\perp\parallel 3}^{\perp} U_{\parallel 3}^{\perp} + U_{\perp\parallel 3}^3 U_{\parallel 3}^3 \\ 2E_{33} = 2U_{\perp\parallel 3} + U_{\perp\parallel 3}^{\perp} U_{\parallel 3}^{\perp} + U_{\perp\parallel 3}^3 U_{\parallel 3}^3$$

Różniczkując wyrażenie 2.8 względem czasu otrzymujemy tensor prędkości odkształcenia Greensa w postaci:

$$\begin{aligned}
 2\dot{E}_{\alpha\beta} &= \dot{U}_{\parallel\beta} + \dot{U}_{\parallel\alpha} + \dot{U}_{\parallel\beta}^{\dagger} U_{\parallel\alpha} + U_{\parallel\beta}^{\dagger} \dot{U}_{\parallel\alpha} + \dot{U}_{\parallel\alpha} U_{\parallel\beta}^3 + U_{\parallel\alpha} \dot{U}_{\parallel\beta}^5 \\
 (2.9) \quad 2\dot{E}_{\alpha 3} &= \dot{U}_{\parallel\alpha} + \dot{U}_{\parallel 3} + \dot{U}_{\parallel 3}^{\dagger} U_{\parallel\alpha} + U_{\parallel 3}^{\dagger} \dot{U}_{\parallel\alpha} + \dot{U}_{\parallel 3} U_{\parallel\alpha}^3 + U_{\parallel 3} \dot{U}_{\parallel\alpha}^5 \\
 2\dot{E}_{33} &= 2\dot{U}_{\parallel 3} + \dot{U}_{\parallel 3}^{\dagger} U_{\parallel 3} + U_{\parallel 3}^{\dagger} \dot{U}_{\parallel 3} + \dot{U}_{\parallel 3} U_{\parallel 3}^3 + U_{\parallel 3} \dot{U}_{\parallel 3}^5
 \end{aligned}$$

Wprowadzając założenie 2.1. i ograniczając się do członów pierwszego stopnia względem Z otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 2E_{\alpha\beta} &= V_{\parallel\beta} + V_{\parallel\alpha} + V_{\parallel\alpha} V_{\parallel\alpha}^{\dagger} + W_{\parallel\alpha} W_{\parallel\beta} + Z (\varphi_{\parallel\beta} + \varphi_{\parallel\alpha} + V_{\parallel\alpha} \varphi_{\parallel\alpha}^{\dagger} + \\
 &\quad + \varphi_{\parallel\alpha} V_{\parallel\beta}^{\dagger} + W_{\parallel\alpha} \varphi_{\parallel\beta} + \varphi_{\parallel\alpha} W_{\parallel\beta}) \\
 (2.10) \quad 2E_{\alpha 3} &= \varphi_{\alpha} + W_{\parallel\alpha} + \varphi_{\alpha} V_{\parallel\alpha}^{\dagger} + \varphi_{\alpha} W_{\parallel\alpha} + Z (\varphi_{\parallel\alpha} + \varphi_{\alpha} \varphi_{\parallel\alpha}^{\dagger} + \varphi_{\alpha} \varphi_{\parallel\alpha}) \\
 2E_{33} &= 2\varphi_3 + \varphi_3 \varphi_3^{\dagger} + \varphi_3 \varphi_3^5
 \end{aligned}$$

Różniczkowanie Kowariantne tensorów przestrzennych można wyrazić przez wielkości określone na powierzchni środkowej przy pomocy związków:

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad V_{\alpha\parallel\beta} &= V_{\alpha\parallel\beta} - B_{\alpha\beta} W \\
 W_{\parallel\alpha} &= W_{\parallel\alpha} + B_{\alpha}^{\beta} V_{\beta} \\
 V_{\alpha\parallel 3} &= V_{\alpha\parallel 3}
 \end{aligned}$$

przy czym $B_{\alpha\beta}$, to symbol Christoffela drugiego rodzaju, który w układzie kartezjańskim jest równy zeru. Wówczas składowe tensora odkształceń Greensa 2.10 przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad 2E_{\alpha\beta} &= 2V_{\alpha\parallel\beta} - 2B_{\alpha\beta} W + V_{\parallel\alpha} V_{\parallel\beta} - 2B^{\dagger}(\alpha V_{\parallel\beta}) W + B_{\alpha}^{\dagger} B_{\beta} W^2 + \\
 &\quad W_{\parallel\alpha} W_{\parallel\beta} + 2B^{\dagger}(\alpha V_{\parallel\beta}) - B_{\alpha}^{\dagger} V_{\parallel\beta} B_{\beta}^{\dagger} V_{\beta} + Z [2\varphi_{\alpha\parallel\beta} - 2B_{\alpha\beta} \varphi_3 - \\
 &\quad 2B^{\dagger}(\alpha V_{\parallel\beta}) + 2B_{\alpha}^{\dagger} B_{\beta} W + 2V_{\parallel\alpha}^{\dagger}(\alpha \varphi_{\parallel\beta}) - 2B^{\dagger}(\alpha \varphi_{\parallel\beta}) W + \\
 &\quad 2B^{\dagger}(\alpha B_{\beta} W \varphi_3) - 2B^{\dagger}(\alpha V_{\parallel\beta}) \varphi_3 + 2W_{\parallel\alpha} \varphi_{\parallel\beta} + 2B^{\dagger}(\alpha V_{\parallel\beta} \\
 &\quad \varphi_{\parallel\beta}) + 2B^{\dagger}(\beta W_{\parallel\alpha}) V_{\beta} + 2B^{\dagger}(\alpha B_{\beta}^{\dagger} V_{\beta} \varphi_{\beta})]
 \end{aligned}$$

$$2E_{\alpha\beta} = W_{1\alpha} \varphi_{\beta} + B_{\alpha}^{\beta} V_{\varphi} + V_{1\alpha}^{\beta} \varphi_{\varphi} - B_{\alpha}^{\beta} \varphi_{\varphi} W + W_{1\alpha} \varphi_{\beta} + \\ B_{\alpha}^{\beta} V_{\varphi} \varphi_{\beta} + Z [\varphi_{\beta 1\alpha} + B_{\alpha}^{\beta} \varphi_{\varphi} + \varphi_{\alpha}^{\beta} \varphi_{\varphi} - B_{\alpha}^{\beta} \varphi_{\varphi} \varphi_{\beta} + \\ \varphi_{\beta 1\alpha} \varphi_{\beta} + B_{\alpha}^{\beta} \varphi_{\varphi} \varphi_{\beta}]$$

$$2E_{33} = 2\varphi_3 + \varphi_{1\alpha}^2 + \varphi_3^2$$

Powyższa postać składowych tensora odkształceń jest dosyć skomplikowana, aby mogła być stosowana w praktyce. W pracy [16] Duszek przeprowadziła klasyfikację poszczególnych przypadków deformacji w zależności od przyjętego rzędu różnych wielkości np. stosunek między długością L , a promieniem A , grubością H , a promieniem, ugięciem W , a promieniem. Odkształcenia poszczególnych warstw powłoki można określić w zależności od tensora wydłużeń powierzchni środkowej $\lambda_{\alpha\beta}$, oraz tensora krzywizny powierzchni środkowej $K_{\alpha\beta}$

$$(2.13) \quad E_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} + Z K_{\alpha\beta}$$

Ograniczymy się do rozpatrzenia przypadku, gdy powłoka jest cienka, tzn. gdy stosunek grubości powłoki do najmniejszego promienia krzywizny jest wielkością ξ pomijalną w stosunku do jedności.

Jeżeli porównamy wyrażenie 2.13 z wyrażeniem 2.12 z uwzględnieniem przyjętego wcześniej założenia $(H/A) \ll 1$ i pominiemy wszystkie czony wyższego rzędu, to dochodzimy do następujących przypadków:

Pełna analiza stopnia dokładności tego problemu przedstawiona jest w pracy [16]. Związki odpowiadające przypadkowi 2 były wyprowadzone i zastosowane przy rozpatrywaniu zagadnienia dużych ugięć powłok plastycznych w pracach [13, 15]. Dla dalszego rozpatrywania naszego zagadnienia stosujemy te związki dla przypadku powłoki walcowej w układzie walcowych

tablica 1.

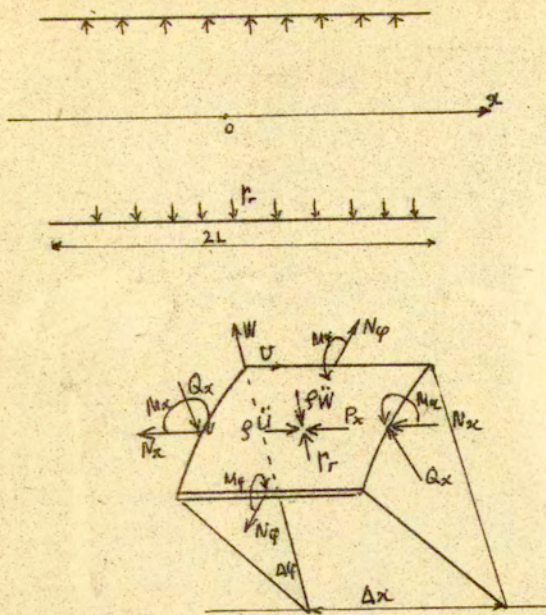
Przypadek	H/A	L/A	W/A	V/A	stopień dokład.	$\lambda_{\alpha\beta}$	$K_{\alpha\beta}$
1	ε^2	ε	ε^2	ε^3	$\varepsilon^2 \ll 1$	$V(\alpha \beta) - B_{\alpha\beta} W + \frac{1}{2} W_{ \alpha} W_{ \beta}$	$-W_{ \alpha\beta}$
2	ε^2	ε	ε^3	ε^4	$\varepsilon^3 \ll 1$	$V(\alpha \beta) - B_{\alpha\beta} W + \frac{1}{2} W_{ \alpha} W_{ \beta}$	$-W_{ \alpha\beta} - B_{\alpha\beta} \varphi$ $-B_{\alpha}^{\beta} V_{\beta \alpha}$
3	ε^3	ε	ε^2	ε^4	$\varepsilon^3 \ll 1$		$\varphi(\alpha \beta)$ $\varphi_{\beta}(\delta_{\alpha}^{\beta} - B_{\alpha}^{\beta} W) =$ $W_{ \alpha}$

χ , κ , φ wyrażonym na rys.3, otrzymujemy związki geometryczne w sposób:

$$\begin{aligned}
 (2.14) \quad \lambda_{xx} &= U_{\kappa}' + \frac{1}{2} (W')^2 \\
 \lambda_{\varphi\varphi} &= \frac{W}{A} \\
 K_{\alpha\alpha} &= W'' \quad ; \quad K_{\varphi\varphi} = 0 \\
 \lambda_{x\varphi} &= 0 \quad \quad \quad K_{x\varphi} = 0
 \end{aligned}$$

2.3. Wyprowadzenie równań ruchu powłoki

W celu wyprowadzenia równania ruchu w ogólnej postaci w zależności od tensorów powierzchniowych w teorii powłok zwanych także siłami wewnętrznymi, posłużymy się funkcją dysypacji. Z analizy rzędu wielkości poszczególnych składowych wynika, że dla przypadków 1 i 2 z tablicy 1, wielkości $G^{\alpha\beta} W_{|\beta} W_{|\alpha}$ w porównaniu do jedności oraz $E_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} W_{|\alpha}$ w porównaniu do $E_{\alpha\alpha}$ są rzędu członów pomijalnych. Korzystając z założenia 2.4. z uwzględnieniem nieściśłego materiału i postulując symetryczny rozkład



Rys. 3a,b

\int_{-H}^H względem powierzchni środkowej, dochodzimy do wzoru na jednostkową dysypację w postaci:

$$\begin{aligned}
 (2.15) \quad D &= \int_{-H}^H (S^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta} + Z S^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) dz \\
 &= \int_{-H}^H N^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

Zgodnie ze zwykle stosowaną definicją wypadkowych sił i momentów w powłoce mamy :

$$\begin{aligned}
 (2.16) \quad N^{\alpha\beta} &= \int_{-H}^H S^{\alpha\beta} dz \\
 M^{\alpha\beta} &= \int_{-H}^H S^{\alpha\beta} z dz
 \end{aligned}$$

$$Q = \int_{-H}^H \delta^{\alpha\beta} dz$$

przy czym przyjmujemy założenia 2.3., że stosunek grubości do promienia jest rzędu pomijalnego.

Przedstawione powyżej powierzchniowe tensory sił wewnętrznych odnoszą się do konfiguracji pierwotnej. Z wyrażenia 2.15 wynika, że $\lambda_{\alpha\beta}$ oraz $K_{\alpha\beta}$ określone w tabelicy 1 w przypadku 1,2 są uogólnionymi prędkościami odkształceń.

W celu uzyskania równań ruchu elementu powłoki najpierw napiszemy równanie w ogólnej postaci za pomocą zasady Hamiltona. Polega ona na tym, że całka względem czasu z funkcji Lagrange'a w przedziale czasu od τ_0 do τ_1 osiąga wartość ekstremalną dla rzeczywistego ruchu spośród wszystkich dopuszczalnych przemieszczeń przygotowanych znikających po pierwsze w chwilach τ_0, τ_1 we wszystkich punktach ciała i po drugie na S_u , gdzie przemieszczenia są z góry dane w ciągu całego przedziału τ_0, τ_1 . Zasada ta wyraża się następująco:

$$(2.17) \quad \delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} (L) d\tau = 0$$

gdzie L jest funkcją Lagrange'a

$$(2.18) \quad L = U - K + A$$

przy czym K przedstawia energię kinetyczną

$$(2.19) \quad K = \frac{\rho H}{2} \iint_S [\dot{V}_i \dot{V}_i + \dot{W}^2 + \frac{H}{8} \dot{\varphi}_\alpha \dot{\varphi}_\alpha] ds$$

zaś przez "kropkę" oznaczamy pochodną względem czasu. U jest energią potencjalną, a A sumą elementarnych prac zewnętrznych wszystkich sił działających na ciało.

Zgodnie z założeniem 2.2 energia potencjalna wynosi:

$$(2.20) \quad U = \iiint_{S-H} [\delta^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} + 2\delta^{\alpha\beta} E_{\alpha 3}] dz \cdot ds$$

Suma elementarnych prac wszystkich zewnętrznych sił działających na ciało jest natomiast :

$$(2.21) \quad A = \iint_S [P^{\alpha\beta} \delta v_\alpha + q \delta w + \mathcal{L}^{\alpha\beta} \delta \varphi_\alpha] ds + \int_C [N^{\alpha\beta} \delta v_\alpha + \kappa \delta w + \eta^{\alpha\beta} \delta \varphi_\alpha] dc$$

gdzie C jest konturem pierwotnej konfiguracji, na którym działają zewnętrzne siły $N^{\alpha\beta}$, κ , $\eta^{\alpha\beta}$ przedstawiające odpowiednią siłę błonową, siłę poprzeczną i moment brzegowy. Zgodnie z definicją 2.16 sił wypadkowych energia potencjalna 2.20 po podstawieniu składowych odkształceń wynosi

$$(2.22) \quad U = \iint_S \{ [N^{\alpha\beta} (V_{\alpha\beta\gamma} + V_{\beta\gamma\alpha} + V_{\gamma\alpha\beta} + (W_{\gamma\kappa} + B_{\gamma\beta} V^\gamma) \times (W_{\beta\gamma} + B_{\gamma\beta} V^\gamma))] + M^{\alpha\beta} [\varphi_{\beta|\alpha} + \varphi_{\alpha|\beta} + V_{\gamma\alpha}^\beta \varphi_{\beta\gamma} + B_{\beta\gamma} \varphi_{\beta\gamma} + \beta_\beta^\gamma (W_{\gamma\kappa} + B_{\gamma\beta} V^\gamma) \varphi_\beta + B_{\alpha\gamma}^\beta (W_{\beta\gamma} + B_{\beta\gamma} V^\gamma) \varphi_\beta] + Q^{\alpha\beta} [W_{\beta\gamma} + B_{\beta\gamma} V^\gamma + \varphi_\beta + \varphi_\beta^\gamma V_{\alpha\beta\gamma}] \} ds$$

Całkując 2.22 przez części znajdujemy wariacje δU_{v_α} , δU_w , $\delta U_{\varphi_\alpha}$ a także $\delta \int_C \kappa dz$. Wynoszą one:

$$(2.23) \quad \delta U_{v_\alpha} = \int_C [N^{\alpha\beta} (\delta v_\alpha + V_{\beta\gamma\alpha}^\delta) n_\alpha + M^{\alpha\beta} \varphi_{\beta\alpha}^\delta u_\alpha + \varphi_{\alpha\beta}^\delta Q^{\alpha\beta} u_\alpha] \delta v_\alpha dc - \iint_S [N_{\beta\alpha}^{\alpha\beta} + (V_{\beta\gamma\alpha}^\beta N^{\alpha\beta})_{|\beta} - B_{\beta\gamma}^\alpha (W_{\gamma\kappa} + B_{\gamma\beta} V^\gamma) N^{\alpha\beta} + (\varphi_{\beta\gamma}^\beta M^{\alpha\beta})_{|\beta} - B_{\beta\gamma}^\alpha B_{\alpha\gamma}^\beta \varphi_\alpha M^{\alpha\beta} - B_{\alpha\gamma}^\beta Q^{\alpha\beta} - (\varphi_{\beta\gamma}^\beta Q^{\alpha\beta})_{|\alpha}] \delta v_\alpha ds$$

$$(2.24) \quad \delta U_w = \int_C [Q^{\alpha\beta} u_\alpha + (W_{\beta\gamma} + B_{\beta\gamma} V^\gamma) N^{\alpha\beta} u_\alpha + B_{\alpha\gamma}^\beta M^{\alpha\beta} \varphi_{\beta\gamma}^\delta n_\beta] \times \delta w dc + \iint_S [Q_{\beta\alpha}^{\alpha\beta} + B_{\beta\gamma} N^{\alpha\beta} + B_{\beta\gamma}^\alpha V_{\beta\gamma} N^{\alpha\beta} + (N^{\alpha\beta} (W_{\beta\gamma} + B_{\beta\gamma} V^\gamma))]_{|\alpha} + (M^{\alpha\beta} B_{\alpha\gamma}^\beta \varphi_\beta)_{|\beta} + B_{\beta\gamma}^\alpha M^{\alpha\beta} \varphi_{\beta\gamma}^\delta + B_{\alpha\gamma}^\beta \varphi_\beta Q^{\alpha\beta}] \delta w ds$$

$$(2.25) \quad \delta U_{\varphi\alpha} = \int [M^{\alpha\beta}(\delta_{\alpha}^{\phi} - V_{\parallel\alpha}^{\phi})u_{\beta}] \delta\varphi_{\alpha} dc + \\ \iiint [M_{\parallel\alpha}^{\alpha\beta} - Q^{\alpha} - V_{\parallel\alpha}^{\beta}Q^{\alpha} - (M^{\alpha\beta}V_{\parallel\alpha}^{\beta})_{\parallel\phi} - \\ B_{\alpha}^{\beta}M^{\alpha\phi}(W_{\parallel\phi} + B_{\phi}^{\beta}\varphi^{\alpha})] \delta\varphi_{\alpha} ds.$$

Natomiast wariancja energii kinetycznej wyraża się następująco:

$$(2.26) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} K dt = \frac{\rho H}{2} \iiint [\dot{V}^{\alpha}\delta v_{\alpha} + \dot{W}\delta W + \frac{H}{\sigma}\dot{\varphi}^{\alpha}\delta\varphi_{\alpha}] ds + \\ \frac{\rho H}{2} \iiint [\ddot{V}^{\alpha}\delta v_{\alpha} + \ddot{W}\delta W + \frac{H^2}{\sigma}\ddot{\varphi}^{\alpha}\delta\varphi_{\alpha}] ds dt.$$

Podstawiając wszystkie otrzymane wyrażenia 2.22., 2.23., 2.24., 2.25., 2.26 w wyjściowe równanie 2.27 otrzymujemy równanie wariacyjne:

$$(2.27) \quad \iiint_{t_0}^{t_1} \iiint [N_{\parallel\alpha}^{\alpha\beta} + (V_{\parallel\alpha}^{\beta}N^{\alpha\beta})_{\parallel\beta} - B_{\phi}^{\beta}(W_{\parallel\alpha} + B_{\alpha}^{\beta}\varphi^{\phi})N^{\alpha\phi} + (\varphi_{\parallel\alpha}^{\beta}M^{\alpha\beta})_{\parallel\phi} - \\ B_{\phi}^{\beta}B_{\alpha}^{\phi}M^{\alpha\phi} - B_{\alpha}^{\phi}Q^{\alpha} - (\varphi^{\beta}Q^{\alpha})_{\parallel\alpha} + S\frac{H}{2}\dot{V}^{\alpha} + P^{\alpha}] \delta v_{\alpha} ds dt + \\ + \iiint_{t_0}^{t_1} \iiint [Q_{\parallel\alpha}^{\alpha} + B_{\alpha\parallel\phi}^{\phi}N^{\alpha\beta} + B_{\beta}^{\phi}M^{\alpha\beta}\varphi_{\phi\parallel\alpha} + B_{\beta}^{\phi}V_{\alpha\parallel\phi}N^{\alpha\beta} + (N^{\alpha\beta}(W_{\parallel\beta} + \\ B_{\beta}^{\phi}\varphi^{\phi}))_{\parallel\alpha} + (M^{\alpha\beta}B_{\alpha}^{\phi}\varphi_{\phi})_{\parallel\beta} + B_{\alpha}^{\beta}\varphi_{\beta}Q^{\alpha} + S\frac{H}{2}\ddot{W} + q_r] \\ \delta W ds dt + \\ \iiint_{t_0}^{t_1} \iiint [M_{\parallel\alpha}^{\alpha\beta} - Q^{\alpha} - V_{\parallel\alpha}^{\beta}Q^{\alpha} - (M^{\alpha\beta}V_{\parallel\alpha}^{\beta})_{\parallel\phi} - B_{\alpha}^{\beta}M^{\alpha\phi}(W_{\parallel\phi} + B_{\phi}^{\beta}\varphi^{\alpha}) + \\ \frac{\rho H^3}{12}\ddot{\varphi}^{\alpha} + \alpha^{\alpha}] \delta\varphi_{\alpha} ds dt + \\ \iiint_{t_0}^{t_1} \iiint [M^{\alpha\beta}(\delta_{\alpha}^{\phi} + V_{\parallel\alpha}^{\phi})u_{\beta} + N^{\alpha\beta}\varphi_{\parallel\alpha}^{\beta}u_{\alpha} + \varphi^{\alpha}Q_{\parallel\alpha}^{\beta} + N^{\alpha}] \delta v dt dc + \\ \iiint_{t_0}^{t_1} \iiint [Q^{\alpha}u_{\alpha} + (W_{\parallel\alpha} + B_{\alpha}^{\phi}\varphi^{\phi})N^{\alpha\beta}u_{\beta} + B_{\alpha}^{\beta}M^{\alpha\beta}\varphi_{\phi}u_{\beta} + \kappa] \delta W dt dc + \\ \iiint_{t_0}^{t_1} \iiint [M^{\alpha\beta}(\delta_{\alpha}^{\phi} + V_{\parallel\alpha}^{\phi})u_{\beta} + \eta_{\alpha}^{\alpha}] \delta\varphi_{\alpha} dt dc$$

przy czym wszystkie czony wariacyjne , , są dowolne, a więc każde wyrażenie podcałkowe w 2.27 musi być zerem. Stąd wynika następujący układ równań ruchu:

$$\begin{aligned}
 & N_{|\alpha}^{\alpha\beta} + (V_{||\alpha}^{\beta} N^{\alpha\beta})_{|\beta} - B_{\phi}^{\beta} (W_{|\alpha} + B_{\alpha}^{\beta} \varphi^{\phi}) N^{\alpha\beta} + (\varphi_{|\alpha}^{\beta} M^{\alpha\beta})_{|\beta} - \\
 & B_{\phi}^{\beta} B_{\alpha}^{\beta} M^{\alpha\beta} - B_{\alpha}^{\beta} Q^{\alpha} - (\varphi^{\beta} Q^{\alpha})_{|\alpha} + \frac{\rho H}{2} \ddot{V}^{\alpha} + P^{\alpha} = 0 \\
 (2.28) \quad & Q_{|\alpha}^{\alpha} + B_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + B_{\beta}^{\alpha} V_{\alpha||\beta} N^{\alpha\beta} + (M^{\alpha\beta} (W_{|\beta} + B_{\beta}^{\alpha} \varphi^{\beta}))_{|\alpha} + \\
 & (M^{\alpha\beta} B_{\alpha}^{\beta} \varphi^{\beta})_{|\beta} + B_{\beta}^{\alpha} M^{\alpha\beta} \varphi_{|\alpha} + B_{\alpha}^{\beta} \varphi_{|\beta} Q^{\alpha} + \frac{\rho H}{2} \ddot{W} - q_r = 0 \\
 & M_{|\alpha}^{\alpha\beta} - Q^{\alpha} - V_{||\alpha}^{\beta} Q^{\alpha} - (M^{\alpha\beta} V_{||\alpha}^{\beta})_{|\beta} - B_{\alpha}^{\beta} M^{\alpha\beta} (W_{|\alpha} + B_{\alpha}^{\beta} \varphi^{\alpha})_{|\alpha} \\
 & + \rho I \ddot{\varphi}^{\alpha} + \mathcal{L} = 0
 \end{aligned}$$

gdzie
$$I = \frac{H^3}{12}$$

Natomiast warunki brzegowe wyrażają się następująco:

$$\begin{aligned}
 & N^{\alpha\beta} (\delta_{\alpha}^{\beta} + V_{||\alpha}^{\beta}) u_{\alpha} + M^{\alpha\beta} \varphi_{|\alpha}^{\beta} u_{\alpha} + \varphi^{\alpha} Q^{\beta} u_{\alpha} + N^{\alpha} = 0 \\
 (2.29) \quad & Q^{\alpha} u_{\alpha} + (W_{|\alpha} + B_{\alpha}^{\beta} \varphi^{\beta}) N^{\alpha\beta} n_{\alpha} + B_{\alpha}^{\beta} M^{\alpha\beta} \varphi_{|\alpha} n_{\beta} + \kappa = 0 \\
 & M^{\alpha\beta} (\delta_{\alpha}^{\beta} + V_{||\alpha}^{\beta}) M_{\beta} + q^{\alpha} = 0
 \end{aligned}$$

Dla przypadków 1,2 z tabelicy 1 otrzymujemy układ równań ruchu w postaci:

$$\begin{aligned}
 (2.30) \quad & M_{|\alpha}^{\alpha\beta} - Q^{\alpha} + q^{\alpha} + \rho I \ddot{\varphi} = 0 \\
 & N_{|\alpha}^{\alpha\beta} - B_{\alpha}^{\beta} Q^{\alpha} - (\varphi^{\beta} Q^{\alpha})_{|\alpha} + P_{\alpha} + \frac{\rho H}{2} \ddot{V}^{\alpha} = 0 \\
 & Q_{|\alpha}^{\alpha} - B_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} - (M^{\alpha\beta} (W_{|\beta} + B_{\beta}^{\alpha} \varphi^{\beta}))_{|\alpha} + \frac{\rho H}{2} \ddot{W} - q_r = 0
 \end{aligned}$$

2.4. Bezwymiarowa postać równań dla powłoki walcowej

W przypadku symetrycznej cylindrycznej cienkiej powłoki, której grubość jest rzędu samego przemieszczenia wszystkie siły, które są normalne do powierzchni środkowej są małe i możemy je pominąć.

Z obrotowej krzywizny $K_{\varphi} = 0$ wynika, że moment obrotowy M_{φ}

jest równy zero. Wówczas wyrażenie dysypacji 2.23 przyjmuje prostszą postać:

$$(2.31) \quad D = \left\{ [U_x' + \frac{1}{2}(W')^2] N_x + W'' M_x + \frac{W}{A} N_y \right\}$$

Natomiast równanie ruchu 2.30 przekształca się w następujące równania:

$$(2.32) \quad \begin{aligned} N_x' + P_x - \rho H \ddot{U} &= 0 \\ Q_x' - (N_x W')' + \frac{N_y}{A} - q_r + \frac{\rho H}{2} \ddot{W} &= 0 \\ M_x' - Q_x + \rho I \ddot{\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

Dla dalszego, wygodniejszego rozpatrywania zagadnienia wprowadzimy wszystkie wielkości w postaci bezwymiarowej. Tak więc:

$x, w, u, a^2, n_x, m_x, m_y, p_x, p_r, \tau$ oznaczymy kolejno w sposób:

$$(2.33) \quad \begin{aligned} x &= \frac{x}{L}; & w &= \frac{W}{A}; & u &= \frac{U}{L} \\ a^2 &= \frac{\rho A H}{2\sigma_0 \tau_0}; & b^2 &= \frac{\rho H}{2\sigma_0 \tau_0}; & p_x &= \frac{P_x}{2\sigma_0 H} \\ p_r &= \frac{A q_r}{2\sigma_0 H}; & m_x &= \frac{M_x}{M_0}; & m_y &= \frac{N_y}{N_0} \\ n_y &= \frac{N_y}{N_0}; & M_0 &= \sigma_0 H^2; & N_0 &= 2\sigma_0 H \\ \tau &= \frac{t}{t_0} \end{aligned}$$

Wyrażenie dysypacji 2.31 wyraża się w postaci bezwymiarowej w następujący sposób:

$$(2.34) \quad d = \frac{D}{2\sigma_0 H} = \left\{ [u_x' + \frac{1}{2}(\frac{A}{L})^2 (w')^2] n_x + \frac{w''}{2\beta} m_x + w m_y \right\}$$

przy czym

$$\beta = \frac{L^2}{A H} \quad R = \frac{A}{H}$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych i wyrugowaniu siły poprzedniej wyrażające oznaczenia w 2.33., równanie 2.34 przyjmuje postać,

$$(2.35) \quad \begin{aligned} u_x' + b^2 \ddot{u} + P_x &= 0 \\ m_x'' - 2R(u_{xx} w'' + u_x' w') + 2\beta(n_\varphi - f_r) + a^2 \ddot{w} &= 0 \end{aligned}$$

Natomiast związki geometryczne w tym przypadku przedstawiają się w sposób:

$$(2.36) \quad \begin{aligned} \lambda_x &= u_x' + \frac{1}{2} \left(\frac{A}{L}\right)^2 (w')^2 \\ \lambda_\varphi &= w \\ \kappa_x &= \frac{w''}{2\beta}, \quad \kappa_\varphi = 0 \end{aligned}$$

Różniczkując wyrażenie 2.36 względem czasu otrzymujemy:

$$(2.37) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= \dot{u}_x' + \left(\frac{A}{L}\right)^2 w' \dot{w}' \\ \dot{\lambda}_\varphi &= \dot{w} \\ \dot{\kappa}_x &= \frac{\dot{w}''}{2\beta}, \quad \dot{\kappa} = 0 \end{aligned}$$

2.5. Warunek plastyczności i stowarzyszone prawo płynięcia

Przy rozpatrywaniu problemów nośności granicznej powłok plastycznych wymagane jest wyrażenie przyjętego warunku plastyczności w postaci funkcji sił wewnętrznych $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, Q^α występujących w powłoce. Warunek ten można sformułować bezpośrednio w wielkościach uogólnionych lub określić przez zastosowanie odpowiednich transformacji do warunku plastyczności wyrażonego w składowych tensora naprężenia.

W wielu przypadkach przy zbudowaniu warunku plastyczności musimy zwracać uwagę na wpływ sił poprzecznych, ponieważ przy obciążeniach w postaci sił skupionych występują w konstrukcji duże siły poprzeczne [63].

Analiza zachowania się powłok plastycznych przy dużych przemieszczeniach w opisie Lagrange'a wymaga również wyspecyfikowania warunku plastyczności. Wyniki badania w pracy [16] wykazują, że dla cienkich powłok zgodnie z założeniami upraszczającymi odnoszącymi się do teorii przybliżonych scharakteryzowanych w tablicy 1 postać warunku plastyczności pozostaje taka sama

jak w opisie Eulera. Dlatego w dalszym ciągu tej pracy będziemy stosować dla powłoki warunek plastyczności Treski w postaci otrzymanej przez Hodg'a [26], oraz warunek plastyczności Hubera-Misesa przedyskutowany przez Sawczuka i Rychlewskiego [62].

Stosować będziemy wielkości bezwymiarowe.

Dla ciała idealnie plastycznego naprężenia uogólnione muszą spełniać graniczny warunek wyrażony w postaci :

$$(2.38) \quad f(m^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}, q^\alpha) = 0$$

Zakładamy, że warunek graniczny jest potencjałem plastyczności, wtedy stowarzyszone prawo płynięcia wyraża się następująco:

$$(2.39) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_{\alpha\beta} &= \mu \frac{\partial f}{\partial m^{\alpha\beta}} \\ \dot{k}_{\alpha\beta} &= \mu \frac{\partial f}{\partial u^{\alpha\beta}} \\ \dot{\psi}_\alpha &= \mu \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \end{aligned}$$

Warto zaznaczyć, w teorii plastyczności stowarzyszone prawo płynięcia odgrywa ważną rolę. Jak prawo Hooke'a w liniowej teorii sprężystości, daje związek pomiędzy naprężeniami a odkształceniami, stowarzyszone prawo płynięcia w teorii plastyczności daje związek między szybkością odkształcenia a naprężeniami.

Ponieważ dla cienkiej walcowej powłoki, w ramach rozpatrywanej teorii, mamy $K_\varphi = 0$ moment obwodowy nie wykonuje pracy w trakcie deformacji plastycznych.

W związku z tym może być traktowany jako reakcja i nie występować w związkach granicznych [26, 50].

Geometrycznie oznacza to, że powierzchnię graniczną możemy przedstawić w przestrzeni trójwymiarowej o ogólnej postaci:

$$(2.40) \quad f(n_\kappa, m_\kappa, n_\varphi) = 0$$

Tego typu powierzchnię graniczną stosować będziemy również w teorii średnich ugięć będącej przedmiotem studiów w tej pracy.

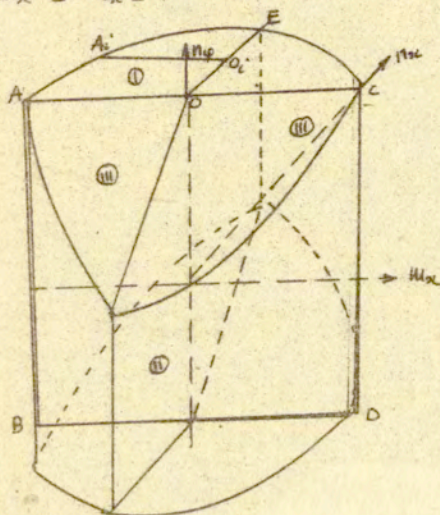
części traktującej o powłoce walcowej pełnościenniej jako warunek plastyczności przyjęto powierzchnię opisaną na powierzchni granicznej Treski dla cylindrycznych powłok podanych w pracy 26, /rys.4/.

Poszczególne obszary powierzchni plastyczności ponumerowane na rys. 4 określone są następującymi związkami:

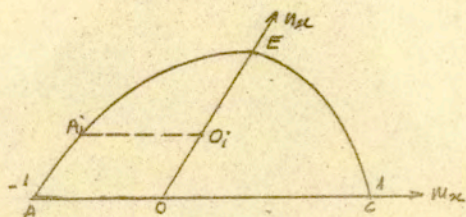
$$(2.41) \quad \begin{aligned} \text{I}^{\pm} & \quad n_{\varphi} = \pm 1 \\ \text{II}^{\pm} & \quad n_{\varphi} - M_{\alpha} = \pm 1 \\ \text{III}^{\pm} & \quad M_{\alpha} = \pm (1 - M_{\alpha}^2) \end{aligned}$$

Warunek ten zastosowany był w analizie powłok plastycznych w pracach [12, 15]. Na rys. 4b przedstawiony jest wykres przekroju tej powierzchni granicznej, przy czym:

$$(2.41a) \quad \begin{aligned} n_{\varphi} &= 1 \\ M_{\alpha} &= M_{\alpha}^2 \pm 1. \end{aligned}$$



Rys. 4a



Rys. 4b

Warunek plastyczności Hubera-Misesa przedstawia się w postaci:

$$(2.42) \quad 2f(\sigma^{\alpha\beta}) = 3\sigma^{\alpha\beta}\sigma^{\gamma\delta}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} - (\sigma^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta})^2 = 2\sigma_0^2$$

Korzystając ze stowarzyszonego prawa płynięcia oraz wprowadzając definicję naprężeń uogólnionych możemy przedstawić warunek plastyczności przy pomocy uogólnionych naprężeń w parametrycznej postaci [33, 60].

Dla cylindrycznych cienkich powłok, gdy

$$K_{\varphi} = 0 \quad K_{\varphi x} = 0 \quad \lambda_{\varphi} = 0$$

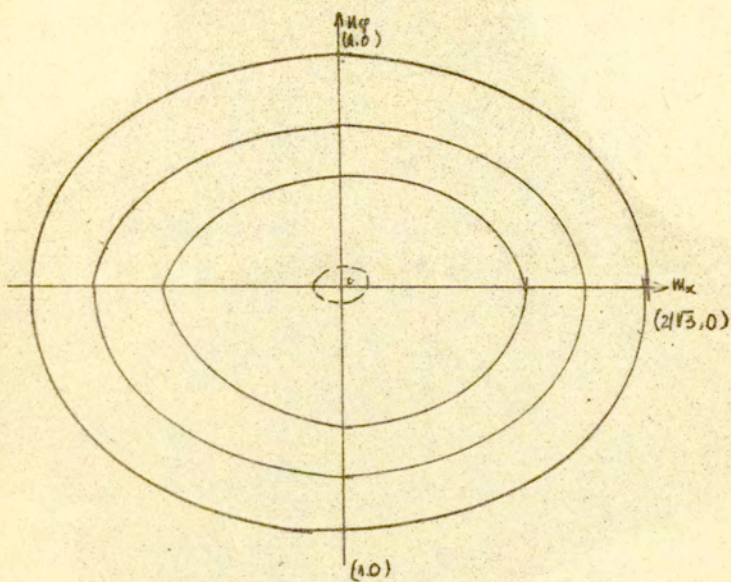
wtedy mamy:

$$(2.43) \quad n_x^2 - n_x n_{\varphi} + n_{\varphi}^2 + \frac{9}{4} n_{\varphi x}^2 = 1$$

Powierzchnia graniczna 2.43 wyrażona jest na rys. 5a. W przypadku braku osiowych sił n_x warunek 2.43 przyjmuje postać

$$(2.44) \quad n_{\varphi}^2 + \frac{9}{4} n_{\varphi x}^2 = 1$$

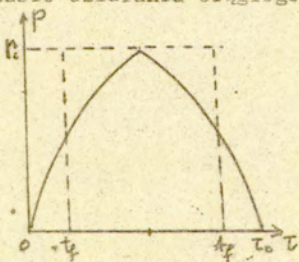
Dotychczas nie znamy w literaturze rozwiązań dynamiki plastycznych powłok przy dużych ugięciach i przy wykorzystaniu warunków plastyczności 2.41 oraz 2.43, które wykorzystujemy w obecnej pracy.



Rys. 5

2.6. Typy obciążeń

Impulsowe ciśnienia rozumiemy jako obciążenia działające w krótkim czasie w stałym kierunku i nie mające więcej niż jedno maksimum w czasie działania ciągłego /rys.6/:



Rys. 6

Takie typy obciążeń charakteryzują się trzema parametrami, a mianowicie:

- czas działania τ_0 ,
- kształt impulsu $f(\tau)$,
- największa wielkość P_0 lub impuls siły.

$$(2.45) \quad P = P_0 \int_0^{\tau_0} f(\tau) d\tau$$

Dla przeprowadzenia badania wpływu kształtu impulsu ciśnienia na końcowy czas i końcowe ugięcie powłoki będziemy rozpatrywali następujące typy impulsów:

- prostokątny

$$(2.46) \quad P_r = \begin{cases} P_0 & 0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ 0 & \tau > \tau_0 \end{cases}$$

- trójkątny

$$(2.47) \quad P_r = \begin{cases} \frac{2\tau}{\tau_0} P_0 & 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\tau_0 \\ 2\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) P_0 & \frac{1}{2}\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ 0 & \tau > \tau_0 \end{cases}$$

- wykładniczy

$$(2.48) \quad P_r = P_0 e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

2.7. Równanie problemu dynamiki plastycznej powłoki walcowej

Rozpatrzmy zachowanie się walcowej skończonej powłoki. Przyjmujemy w układ współrzędnych walcowych x, r, φ tak jak to pokazano na rys. 3, 3a, przy czym początek układu przyjęty jest w środku nieodkształconej środkowej powierzchni powłoki. Długość powłoki - $2L$, promień A , grubość H . Materiał powłoki jest nieściśliwy, idealnie-szttywno-plastyczny i spełnia warunek plastyczności Hubera-Misesa 2.43 lub warunek plastyczności Treski 2.41. Powłoka jest cienka, przy

czym przemieszczenie w kierunku radialnym jest rzędu grubości H , a przemieszczenie U w kierunku tworzącej jest małe w porównaniu z ugięciem.

Założenie to wyraża się w następującej nierówności:

$$(2.49) \quad U \ll W \approx H \ll L \approx A.$$

Powłoka poddana jest impulsowemu ciśnieniu wewnętrznemu działającemu w kierunku radialnym. Zakładamy, że przemieszczenie U w kierunku tworzącej x jest małe w porównaniu z ugięciem W i że możemy je pominąć, jak również jego prędkość i przemieszczenie \dot{U}, \ddot{U} oraz prędkość nachylenia \dot{U}' , przy czym przyjmujemy to założenie do dalszego rozpatrywania zagadnienia w obecnej pracy.

Równanie ruchu w postaci bezwymiarowej przyjmuje następującą postać:

$$(2.50) \quad M_x'' - 2R n_x W'' + 2\beta (n_\varphi - p_r) = -a^2 \ddot{w}$$

$$n_x' = 0$$

Z równania tego wynika, że siła rozciągania n_x musi być stała wzdłuż osi x , która pokrywa się z osią powłoki. Równanie 2.50 przy nieobecności siły rozciągania przechodzi w równanie ruchu ważne dla przypadku małych ugięć:

$$(2.51) \quad M_x'' + 2\beta (n_\varphi - p_r) = -a^2 \ddot{w}$$

W stanie błonowego naprężenia wyrażenie 2.50 przyjmuje postać:

$$(2.52) \quad \ddot{w} - \frac{2R}{a^2} W'' + \frac{2\beta}{a^2} (1 - p_r) = 0$$

Ruch ustaje wtedy, gdy prędkość w danym punkcie osiągnie wartość zerową. W ten sposób otrzymujemy następujący warunek dla wyznaczania wartości końcowego czasu t_f :

$$(2.53) \quad (\dot{w})_{t=\tau_f} = 0$$

Związki kinetyczne mają postać:

$$(2.54) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= \left(\frac{A}{L}\right)^2 \dot{w}' w' \\ \dot{\lambda}_\varphi &= \dot{w} \\ \dot{\kappa}_x &= \frac{\dot{w}''}{2\beta}, \quad \dot{\kappa}_\varphi = 0 \end{aligned}$$

Korzystając ze stowarzyszonego prawa płynięcia 2.39 do przekroju I, III - plastyczności Treski 2.41 ze znakiem /+/-/ otrzymujemy następujące związki:

$$(2.55) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= -2\mu u_x \\ \dot{\kappa}_x &= \mu, \quad \mu \geq 0 \end{aligned}$$

Dla warunku plastyczności Hubera-Misesa 2.43 mamy następujące związki:

$$(2.56) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= \mu (2u_x - u_\varphi) \\ \dot{\lambda}_\varphi &= \mu (2u_\varphi - u_x) \\ \dot{\kappa}_{xc} &= \frac{3}{2} \mu u_x \end{aligned}$$

Warunki brzegowe

- dla powłoki posiadającej na końcu swobodne podparcie mamy następujące warunki brzegowe:

$$(2.57) \quad \begin{aligned} M_x(-l\tau) = M_x(l\tau) = 0 & \quad u(0\tau) = 1 \\ W(l\tau) = W(-l\tau) = 0 \end{aligned}$$

- dla powłoki zamocowanej mamy:

$$(2.58) \quad \begin{aligned} M_x(-l\tau) = M_x(l\tau) = -1 \\ W(\pm l\tau) = 0 \end{aligned}$$

- warunki początkowe:

$$(2.59) \quad W(x_0) = \dot{W}(x_0) = 0$$

$$W^{(0)}(x\tau_0) = W^{(0)'}(x\tau_0)$$

przy: $\dot{W}^{(0)'}(x\tau_0) = \dot{W}^{(0)''}(x\tau_0)$

$$\tau = \tau_0$$

W ten sposób równanie 2.49 połączone z warunkiem plastyczności 2.41 oraz 2.43 ze stowarzyszonego prawem płynięcia 2.55 oraz

2.56 oraz z szybkością odkształceń 2.54 i z warunkami ciągłości, warunkami początkowymi i brzegowymi daje nam zamknięty układ równań. Z układu tego będziemy wyznaczać końcowy czas i końcowe ugięcie w powłoce.

3. Rozwiązanie zagadnień początkowych brzegowych przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski.

3.1. Nieciągłości

Jeżeli stan naprężeń w całej powłoce odwzorowuje się na określonej części powierzchni granicznej, to wyznaczenie momentów sił błonowych oraz ugięć nie przedstawia naogół trudności. Jednak w wielu zagadnieniach powłoka dzieli się na szereg obszarów, z których każdy charakteryzuje się innym stanem naprężenia, tzn. odpowiada innej powierzchni granicznej. Liczba obszarów i położenie ich granic może być zależne od czasu, a na granicy obszarów mogą występować nieciągłości niektórych wielkości. Dlatego konieczne jest ustalenie związków między mechanicznymi wielkościami po dwóch stronach przegubów rozgraniczających obszary, charakteryzujących się odmiennymi stanami naprężenia. Położenie przegubu plastyczności ξ zależy od czasu. Ponieważ przy $X = \xi(\tau)$ ugięcie musi być ciągle a także pochodna ugięcia W' musi być ciągła, stąd wynika następujący związek określający prędkość $\dot{\xi}(\tau)$ poruszania się przegubu:

$$(3.1) \quad [\dot{W}] + \dot{\xi}(\tau) [W'] = 0$$

gdzie nawias kwadratowy oznacza skok odpowiedniej wielkości na linii nieciągłości. Prędkość \dot{W} musi być ciągła w przegubie, plastycznym, natomiast nachylenie W' może być tam nieciągłe. Jeśli proces odkształcenia jest niestacjonarny, to przez przegub plastyczności nachylenie W' musi być ciągłe: stąd wynika następujący warunek:

$$(3.2) \quad [\dot{W}'] + \dot{\xi}(\tau) [W''] = 0$$

Z warunku ciągłości prędkości \dot{W} w przegubie plastycznym

otrzymujemy:

$$(3.3) \quad [\ddot{W}] + \dot{\xi}(\tau)[W'] = 0$$

Przyspieszenie \ddot{W} musi więc być ciągle przy przejściu przez stacjonalny przegub plastyczności, natomiast zeruje się w niestacjonalnym przegubie plastyczności. Wynika stąd, że \dot{W}' w przegubie stacjonarnym może doznawać nieciągłości. Warunek dynamicznej równowagi wymaga jeszcze, aby w przegubie zachodziła ciągłość momentu zginającego M_x . Warunek ten wynika z równania 2.32, gdyż:

$$(3.4) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_x^{x+\Delta x} [M'_x - Q_x - \rho I \ddot{\varphi}] dx = 0$$

Ponieważ granica stanu siły poprzecznej Q_x oraz siły bezwładności $\rho I \ddot{\varphi}$ równa jest zero, mamy więc:

$$(3.5) \quad [M_x] = 0$$

Różniczkując wyrażenie 3.5 względem czasu otrzymujemy następujący warunek dynamicznej równowagi dla momentów:

$$(3.6) \quad [\dot{M}_x] + \dot{\xi}(\tau)[M'_x] = 0$$

3.2. Przypadek małych ugięć

W celu wykazania różnic pomiędzy liniową a nieliniową teorią powłok w zastosowaniu do zagadnień dynamiki rozpatrujemy najpierw przypadek małych ugięć uzyskując m.in. rozwiązanie dla powłoki walcowej przegubowo podpartej na końcach. Rozpatrujemy powłokę z materiału sztywno-plastycznego spełniającego warunek plastyczności Treski 2.41., rysunek 4. Najpierw rozważmy przypadek takich intensywnych obciążeń, że w stanie naprężeń w niej odpowiadającym odcinkowi OA na wieloboku plastyczności $f(u_{xy}, u_{\varphi}) = 0$. Mamy wówczas następujący układ równań plastyczności i ruchu:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} M_x'' + 2\beta(1-\nu_r) &= -\alpha^2 \ddot{W} \\ M_y &= 1 \quad ; \quad M_{rc} = 0 \end{aligned}$$

Należy je rozwiązać przy warunkach początkowych i brzegowych 2.57., 2.58., 2.59 i warunkach ciągłości 3.1., 3.6. Ponieważ metoda rozwiązania tego zagadnienia jest szczegółowo omówiona przez Hodgę [28] nie będziemy podawać tu poszczególnych etapów a przytoczymy tutaj jedynie wyniki:

- statyczna nośność graniczna wynosi dla powłoki swobodnie podpartej:

$$(3.8) \quad P_{st} = 1 + \frac{1}{\beta}$$

- oraz dla powłoki zamocowanej:

$$(3.9) \quad P_{st} = 1 + \frac{2}{\beta}$$

W tym ostatnim przypadku profil naprężenia odpowiada odcinkowi AC /rys.4/. Ze stowarzyszonego prawa płynięcia wynika, że prędkość krzywizny dla powłoki $M_y=1$ jest równa zero, a więc dla określenia pola prędkości ugięć mamy następujące równanie:

$$(3.10) \quad \dot{W}'' = 0$$

Całkując równanie 3.10 z warunkiem brzegowym otrzymujemy:

$$(3.11) \quad \dot{W}(x\tau) = \dot{A}(\tau)(1-x)$$

Jeśli podstawimy 3.11 w równanie 3.7 po całkowaniu i wykorzystaniu warunków brzegowych 2.57., 2.58 otrzymujemy następujące wyrażenia dla momentów i dla ugięcia w pierwszej fazie równomiernego obciążenia ν_r w przedziale $[0 \tau_0]$:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} M_x &= \frac{1}{4} \{ [\beta(\nu_r-1) + 1] x^3 + [\beta(\nu_r-1) - 3] x^2 \} + 1 \\ W'(x\tau) &= \frac{3}{2\alpha^2} (\beta(\nu_r-1) + 1) (1+x) \tau^2 \\ M_{rc} &= -\frac{1}{2} [2 + \beta(\nu_r-1)] (3+x) x^2 + \beta(\nu_r-1) x^2 + 1 \\ W(x\tau) &= \frac{3}{2\alpha^2} [2 + \beta(\nu_r-1)] (1+x) \tau^2 \end{aligned}$$

W drugiej fazie obciążenia, tzn. przy $\tau \geq \tau_0$ $p_r = 0$. W przypadku prostokątnego impulsu plastyczne odkształcenie postępuje dalej a stan naprężeń i prędkość określają następujące wzory:

$$\begin{aligned}
 m_x &= \frac{1}{4} \left\{ [(\beta-1)x^3 + (3+\beta)x^2] \right\} + 1 \\
 (3.13) \quad W(x, \tau) &= \frac{3}{2\alpha^2} \left[-(1+\beta)\tau^2 + 2\beta p_r \tau_0 \tau + p_r \beta \tau_0^2 \right] (1+x) \\
 m_x &= -\beta x^2 - \frac{1}{2}(2-\beta)(1-x)x^2 + 1 \\
 W(x, \tau) &= \frac{3}{2\alpha^2} \left[-(2+\beta)\tau^2 + 2\beta p_r \tau_0 \tau + 2\beta p_r \tau_0^2 \right] (1+x)
 \end{aligned}$$

Wykorzystując warunek 2.53 znajdujemy końcowy czas trwania ruchu w powłoce w postaci:

$$(3.14) \quad \tau_f = \frac{\beta p_0 \tau_0}{1+\beta} \qquad \tau_f = \frac{\beta p_0 \tau_0}{2+\beta}$$

Podstawiając 3.14 w wyrażenie na ugięcie otrzymujemy wartość końcowego ugięcia w środku powłoki:

$$\begin{aligned}
 (3.15) \quad W(0, \tau_f) &= \frac{3\beta}{\alpha^2} \left[\frac{\beta p_r}{1+\beta} - 1 \right] p_r \tau_0^2 \\
 W(0, \tau_f) &= \frac{3\beta}{\alpha^2} \left[\frac{\beta p_r}{2+\beta} - 1 \right] p_r \tau_0^2
 \end{aligned}$$

Zgodnie z warunkami zagadnienia druga pochodna momentu zginającego przy $x=0$ nie może być dodatnia, to znaczy:

$$m_x'' \leq 0$$

Stąd wynikają następujące warunki dla obciążenia:

- w przypadku powłoki swobodnie podpartej:

$$(3.16) \quad p_0 \leq \bar{p}_r \approx p_0 + \frac{2}{\beta}$$

- dla powłoki zamocowanej:

$$(3.17) \quad p_0 \leq \bar{p}_r \approx p_0 + \frac{4}{\beta}$$

Przy rozpatrywaniu zamocowanej powłoki pracującej w stanie naprężenia AC warunki brzegowe przyjmowane w pracy [28] są

następujące: $M_x = 1$, $M_\varphi \in [-1, 1]$. Wtedy część powłoki od -1 do $-\xi$ pozostaje sztywna

$$(3.18) \quad \dot{W}(x\tau) = 0$$

Druga część natomiast od $-\xi$ do 0 znajduje się w stanie naprężenia odpowiadającego punktowi A , rys. 4. W tym stanie naprężenia prędkość krzywizny jest równa zeru, a więc mamy:

$$(3.19) \quad \dot{W}''(x\tau) = 0$$

Jeżeli całkujemy równanie 3.19., to otrzymujemy następujące wyrażenie na prędkość odkształcenia:

$$(3.20) \quad \dot{W}(x\tau) = \dot{A}x + \dot{B}$$

Po przeprowadzeniu obliczenia otrzymujemy rozkład momentu zginającego w drugiej fazie w postaci:

$$(3.21) \quad M_x = -\frac{\alpha^2}{6} \ddot{A} x^3 + \left(\beta + \frac{\alpha^2}{2} \ddot{B}\right) x^2 + Cx + D$$

gdzie \ddot{A} , \ddot{B} , C , D wyznaczone są z warunków brzegowych i warunków ciągłości.

W rezultacie otrzymujemy:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} \ddot{A} &= -\frac{24}{\alpha^2} \xi^{-3} \\ \ddot{B} &= \frac{1}{\alpha^2} (2\beta + 12\xi^{-2}) \\ C &= 0 \quad ; \quad D = 1 \end{aligned}$$

przy czym wykorzystując z warunku ciągłości 3.18 przy $x = \xi$ mamy:

$$(3.23) \quad \dot{A}\xi + \dot{B} = 0$$

Różniczkując 3.23 względem czasu z uwzględnieniem \ddot{A} , \ddot{B} ze wzorów 3.22 otrzymujemy:

$$(3.24) \quad \dot{\bar{\zeta}}(\tau) = -\frac{1}{a^2} (2\beta + 12\bar{\zeta}^{-2})$$

Jeżeli różniczkujemy 3.24 względem czasu, to otrzymujemy następujące równanie:

$$(3.25) \quad \ddot{\bar{\zeta}}(\tau) = 0$$

Rozpatrzmy obecnie stan w chwili $\tau_0 = 1$. Wówczas:

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{\zeta}}(1) = \dot{B}(1) &= \frac{3}{a^2} (\nu_r - \nu_0) \\ \bar{\zeta}(1) &= 1. \end{aligned}$$

Podstawiając 3.26 w wyrażenie 3.24 przy $\tau_0 = 1$, otrzymujemy następujące równania dla wyznaczenia $\bar{\zeta}(\tau)$, przy czym $\bar{\zeta}(1) = 1$:

$$(3.27) \quad \dot{\bar{\zeta}}(\tau) = -\frac{2}{3} \left(\frac{1 + 6/\beta}{\nu_r - \nu_0} \right)$$

Całkowanie powyższego równania daje:

$$(3.28) \quad \bar{\zeta}(\tau) = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{1 + 6/\beta}{\nu_r - \nu_0} \right) (\tau - 1)$$

Ruch w powłoce zostaje w momencie, kiedy ruchomy przegub osiąga środek powłoki. Czas końcowy przyjmuje następującą wartość:

$$(3.29) \quad \tau_f = 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\nu_r - \nu_0}{1 + 6/\beta} \right)$$

Poprzednie rozwiązania są spełnione przy warunkach 3.16., 3.17 i takie obciążenia nazywają się obciążeniami średnimi.

Następnie rozpatrzmy przypadek, gdy na powłokę działają wysokie obciążenia $\nu_r \gg \nu_0$. Zakładamy, że powłoka łamie się tak jak to pokazuje rys. 7, wtedy jedna część powłoki od -1 do $-\bar{\zeta}$ znajduje się w stanie naprężenia odpowiadającego odcinkowi OA . Natomiast druga część powłoki od $-\bar{\zeta}$ do 0 znajduje się w stanie naprężenia odpowiadającego punktowi A .

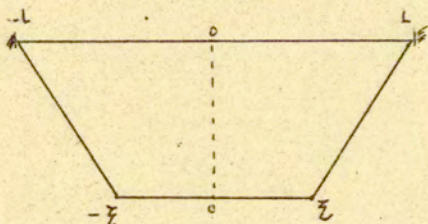
Dla pierwszej części, zgodnie ze stowarzyszonym prawem płynięcia, prędkość krzywizny w tym stanie jest równa zero, więc:

$$(3.30) \quad \dot{W}''(x\tau) = 0$$

Dla drugiej części powłoki mamy:

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \mu_{11}'' &= 0 & \mu_x &= -1 \\ \dot{W}''(x\tau) &= \frac{2\beta}{a^2} (|\nu_r - 1) \end{aligned}$$

przy czym schemat rys. 7 możemy przyjąć dla rozpatrywanego zagadnienia powłoki zamocowanej i powłoki swobodnie podpartej. Rozpatrzmy przypadek powłoki swobodnie podpartej. Wyniki badań tego przypadku można znaleźć w pracy 29 .



Rys. 7

Tak więc, dla pierwszej części powłoki mamy następujące pole prędkości odkształcenia:

$$(3.32) \quad \dot{W}^{(0)}(x\tau) = W_0(\tau) \left(\frac{x+l}{1-\xi(\tau)} \right)$$

Natomiast pole prędkości dla części drugiej jest następujące:

$$(3.33) \quad \dot{W}^{(0)}(x\tau) = \frac{2\beta}{a^2} (|\nu_r - 1)$$

Rozpatrujemy równania ruchu 3.7., 3.23., 3.24 w dwóch fazach, mianowicie:

- pierwsza faza, to faza odciążenia w przedziale czasu od 0 do τ_0 ,

- druga faza, to faza odciążenia od momentu

pole prędkości odkształceń w tej fazie wynosi: $\tau \gg \tau_0$

$$(3.34) \quad \dot{W}^{(1)}(x, \tau) = \frac{2\beta}{a^2} (-\tau + \tau_r)$$

W celu uzyskania rozwiązania rozpatrzmy najpierw część powłoki od -1 do $-\xi$. Dla pierwszej fazy podstawiając 3.32 w równanie ruchu 3.7 i po całkowaniu otrzymujemy następujące wyrażenia momentu zginającego:

$$(3.35) \quad M_x = \beta(\tau_r - 1)x^2 - \frac{\alpha^2 \ddot{W}_0^{(1)}(\tau)}{6} \cdot \frac{\beta + x}{1 - \xi} x^2 + Cx + D$$

przy czym stałe całkowania $\ddot{W}_0^{(1)}(\tau)$, C , D podlegają wyznaczeniu z warunków brzegowych i warunków ciągłości $M_x(-\xi) = 0$,

$M_x(-1) = 0$, $M_x(0) = 1$. Mają one postać:

$$(3.36) \quad \begin{aligned} \ddot{W}_0^{(1)}(\tau) &= \frac{2\beta}{\alpha^2} (\tau_r - 1) \\ C &= 1 + \frac{\beta(\tau_r - 1)(2 - \xi)}{3(1 - \xi)} \\ D &= 1 \end{aligned}$$

przy czym w tej fazie ξ_0 nie zależy od czasu, ale musi zależeć od obciążenia τ_r i wielkość ta określa się tak aby pochodna momentu względem współrzędnej x w punkcie $x = -\xi_0$ zerowała się. Stąd więc otrzymujemy równanie dla wyznaczenia ξ_0 w następującej postaci:

$$(3.37) \quad \xi_0^2 + \frac{5(\tau_r - 1) + 3/\beta}{5(\tau_r - 1)} \xi_0 - \frac{\tau_r - 1 + 1/\beta}{5(\tau_r - 1)} = 0$$

Całkujemy wyrażenia 3.36 i wykorzystując warunki początkowe, otrzymujemy:

$$(3.38) \quad W_0^{(1)}(\tau) = \frac{\beta}{a^2} (\tau_r - 1) \tau^2$$

Przejdziemy teraz do analizy drugiej fazy: $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_f$. W tej fazie wielkość $\xi(\tau)$ maleje od wartości $\xi(\tau_0)$ do wartości

$\xi(\tau_f) = 0$. Rzeczywiście, gdy założymy, że stan A realizuje się w pobliżu środka powłoki, to z wyrażenia na podstawie którego było wyprowadzone równanie 3.38 wynika, że środkowa część powłoki zmniejsza swój zasięg od chwili $\tau = \tau_0$.

Jeśli τ pozostawało stałe, to energia kinetyczna powłoki byłaby także stała. Jest to niezgodne z faktem, że przy plastycznym odkształceniu musi nastąpić rozpraszanie energii. Jeśli podstawimy wyrażenie 3.34 w równanie ruchu, to po całkowaniu otrzymamy:

$$(3.39) \quad \eta x = -\beta x^2 - \frac{\beta(\beta+g)x^2}{6(1-\xi)} + cx + D$$

Przy wykorzystaniu warunku ciągłości 3.1 dla ugięcia, dochodzimy do następującego wyrażenia dla wyznaczania ξ , oraz końcowego czasu ruchu powłoki:

$$(3.40) \quad \dot{\xi}(\tau) = \frac{\tau^2 - \tau_0\tau + \nu_r\tau_0 - \nu_r\tau}{\nu_r - 1}$$

Przypomnijmy, że $\dot{\xi}$ jest równa zero w momencie $\tau_0 = \tau_f$; w ten sposób dla określenia końcowego czasu z wyrażenia 3.40 wynika następujące równanie:

$$(3.41) \quad \tau_f^2 - (\nu_r + 1)\tau_f + \nu_r = 0$$

którego rozwiązaniem jest:

$$(3.42) \quad \tau_f = \nu_r$$

Widzimy więc, że dla powłoki swobodnie podpartej w przypadku wysokiego obciążenia czas trwania ruchu jest proporcjonalny do obciążenia. Warto też zaznaczyć, że wynik 3.42 może być otrzymany na innej drodze. Jeśli nas interesuje tylko końcowy czas i końcowe ugięcie w środku powłoki, wtedy wystarczy rozpatrywać drugą część powłoki od $-\xi$ do 0.

Tak więc dla tej części w pierwszej fazie mamy następujące wyrażenie:

$$(3.43) \quad W_0^{(1)} = \frac{\beta}{a^2} (\nu_r - 1) \tau^2$$

Natomiast w drugiej fazie, gdy obciążenie dąży do zera, ruch w powłoce dalej kontynuuje się. W tej fazie pole prędkości ugięcia przedstawia się następująco:

$$(3.44) \quad \dot{W}_0^{(II)}(\tau) = \frac{2\beta}{a^2} (\tau - \nu_r \tau_0)$$

Natomiast wyrażenie końcowego ugięcia wynosi:

$$(3.45) \quad W_0^{(II)}(\tau) = \frac{\beta}{a^2} (\tau^2 - 2\nu_r \tau_0 \tau + \nu_r^2 \tau_0^2)$$

Jeśli wykorzystamy warunek 2.53 do wyrażenia 3.44 to otrzymamy taki sam wynik jak przy 3.42. Podstawiając wyrażenie na końcowy czas w wyrażenie określające ugięcie otrzymamy końcowe ugięcie w środku powłoki w następującej postaci:

$$(3.46) \quad W_0^{(II)}(\tau_f) = \frac{\beta}{a^2} (\nu_r - 1) \nu_r \tau_0^2$$

3.3. Statyczny problem przypadku dużych ugięć

Dotychczas rozpatrywaliśmy powłokę pracującą w stanie naprężeń odpowiadających odcinkowi AC na powierzchni przedstawionej na rys. 4. W tym stanie obecna jest tylko siła rozciągania $n_x = 0$ oraz $n_\varphi = 1$ $m_x \in [-1, 1]$. Przejdziemy teraz do przypadku, gdy w powłoce działa siła $m_x \neq 0$, a której wielkość zależy od ugięcia w środku powłoki. Najpierw rozpatrzmy przypadek statycznego obciążenia. W przypadku tym równanie równowagi przyjmuje postać:

$$(3.47) \quad m_x'' - 2R n_x W'' + 2\beta(1 - \nu_r) = 0$$

Nie będziemy zatrzymywać się dłużej nad tym problemem, bo w pracach Duszek [13] oraz Duszek i Sawczuka [14] dosyć szczegółowo przeprowadzone zostało badanie tego zagadnienia. Wyniki tych badań wykazały, że zależność między siłą rozciągania n_x ugięciem w środku powłoki i obciążeniem przedstawia się następująco:

$$(3.48) \quad \phi = 2R n_x w_0(\tau) + n_x^2 + \beta (n_r - 1) - 1 = 0$$

przy czym siła n_x przyjmuje maksymalne wartości wtedy, kiedy ϕ spełnia następujący warunek:

$$(3.49) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n_x} = 0$$

Korzystając z warunku 3.49 znajdujemy:

$$(3.50) \quad n_x = R w_0(\tau)$$

Podstawiając wyrażenie 3.50 w zależność 3.48 otrzymujemy statyczne obciążenia w następującej postaci:

$$(3.51) \quad n_r = 1 + \frac{1 + R w_0(\tau)}{\beta}$$

W przypadku błonowego stanu naprężeń statyczne obciążenie wynosi:

$$(3.52) \quad n_r = 1 + \frac{2R w_0(\tau)}{\beta}$$

3.4. Problem dynamiczny - przypadek błonowy

Jeżeli będziemy rozpatrywać powłokę pracującą w stanie naprężeń odpowiadających punktowi E na powierzchni granicznej przedstawionej na rys. 4 wtedy zagadnienia 2.50., 2.57., 2.59 przechodzą do zagadnienia 2.52., które było otrzymane dla błonowego stanu naprężenia $m_x = m_\varphi = 0$, $n_x = n_\varphi = 1$

$$(3.53) \quad \ddot{W}(x\tau) - \frac{2R}{a^2} W''(x\tau) = \frac{2\beta}{a^2} (p_r - 1)$$

w ten sposób w stanie błonowego naprężenia zagadnienie dynamiki powłoki z materiału sztywno-plastycznego opisywane jest równaniem analogicznym do równania drgań. Rozwiązania zagadnienia dynamiki sztywno-plastycznej membrany nie znaleźliśmy w literaturze, aczkolwiek problem wydaje się stosunkowo prosty.

Rozwiązania równania 3.53 będziemy szukać w postaci następującej:

$$(3.54) \quad W(x\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{0n}(\tau) X_n(x)$$

przy czym $X_n(x)$ jest układem ortogonalnych funkcji zależących tylko od współrzędnych x i spełniających warunki brzegowe. Natomiast $W_{0n}(\tau)$ jest układem funkcji zależących tylko od czasu i spełniających warunki początkowe. W zagadnieniu dynamiki należy poszukiwać funkcji $W_{0n}(\tau)$ tak, aby warunki zadania były spełnione.

Podstawiając wyrażenie 3.54 w równanie 3.53 po rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(3.55) \quad \begin{aligned} X_n''(x) + \frac{a^2 \lambda^2}{2R} X_n(x) &= 0 \\ \ddot{W}_{0n}(\tau) + \lambda^2 W_{0n}(\tau) &= f_n(\tau) \end{aligned}$$

gdzie $f_n(\tau)$ określa się w sposób:

$$(3.56) \quad f_n(\tau) = \int_0^1 \frac{2\beta}{a^2} (p_r - 1) X_n(x) dx$$

Rozwiązanie pierwszego z równań przedstawia się następująco:

$$(3.57) \quad X_n(x) = \cos \frac{a\lambda n}{\sqrt{2R}} x ; \quad \lambda^2 = \frac{n\pi\sqrt{2R}}{2L}$$

Natomiast rozwiązanie równania drugiego ma postać:

$$(3.58) \quad W_0(\tau) = W_{0u}(\tau_0) \cos \lambda_u \tau + \dot{W}_{0u}(\tau_0) \sin \lambda_u \tau + \\ + \frac{1}{\lambda_u} \int_0^{\tau} f_u(\tau) \sin \lambda_u (\tau - \tau^*) d\tau^*$$

W przypadku, gdy w powłoce działa równomiernie impulsowe obciążenie 2.46 wtedy będziemy rozpatrywali zagadnienie 3.55 w dwóch fazach.

Pierwsza faza odnosi się do przedziału czasu $(0, \tau_0)$ i dotyczy obciążenia. Po całkowaniu wyrażenia 3.58 i wykorzystaniu warunku początkowego otrzymujemy:

$$(3.59) \quad W_0(\tau) = \sum_{k=1}^m \frac{4RB}{k^2 \pi^2 a^2} \left\{ (P_r - 1) (1 - \cos \lambda_u \tau_0) \right\}$$

Druga faza, to faza odciążenia. W momencie $\tau = \tau_0$ obciążenie zeruje się, lecz ruch konstrukcji trwa dalej. Tak więc w momencie, gdy $\tau = \tau_0$ odkształcenie oraz prędkość odkształcenia muszą być ciągłe, tzn. muszą one spełniać warunki 2.59. W ten sposób po całkowaniu 3.58 przy wykorzystaniu warunku 2.59 dochodzimy do następującego wyrażenia:

$$(3.60) \quad W_0(\tau) = \sum_{k=1, \dots, m} \frac{4BR}{k^2 \pi^2 a^2} \left\{ [(P_r - 1) [(\cos \lambda_u \tau_0 - 1) \cos \lambda_u \tau + \sin \lambda_u \tau_0 \sin \lambda_u \tau]] + [1 - \cos \lambda_u (\tau - \tau_0)] \right\}$$

Podstawiając otrzymane wyrażenie 3.60 oraz 3.59 w 3.54. dochodzimy do następującej postaci:

$$(3.61) \quad W(x, \tau) = \sum_{n=1} \frac{4BR}{k^2 \pi^2 a^2} \left\{ (P_r - 1) [(\cos \lambda_u \tau_0 - 1) \cos \lambda_u \tau + \sin \lambda_u \tau_0 \sin \lambda_u \tau] + (1 - \cos \lambda_u (\tau - \tau_0)) \right\} \cdot \cos \frac{n\pi x}{2L}$$

Wykorzystując warunek 2.53 do wyrażenia 3.61 znajdujemy końcowy czas ruchu powłoki:

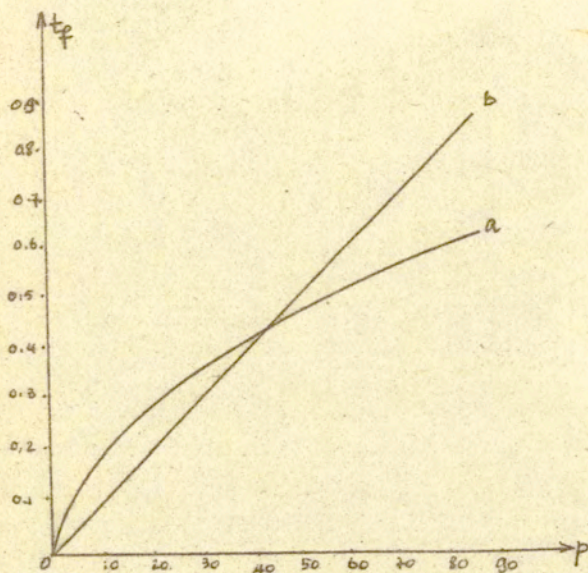
$$(3.62) \quad \tau_f = \sum_{n=1, \dots, m} \tau_{fn} = \sum \frac{1}{\lambda_u} \frac{(P_r - 1) (\cos \lambda_u \tau_0 - 1) + \cos \lambda_u \tau_0}{P_r \sin \lambda_u \tau_0}$$

Podstawiając 3.62 w wyrażenie 3.61 otrzymujemy końcowe ugięcie w środku powłoki i wyraża się ono następująco:

$$(3.63) \quad W(0, \tau_f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\beta R}{n^2 \pi^2 \alpha^2} \left\{ (p_r - 1) [(\cos \lambda_n \tau_0 - 1) \cos \lambda_n \tau_f + \sin \lambda_n \tau_0 \sin \lambda_n \tau_f] + (1 - \cos \lambda_n (\tau_f - \tau_0)) \right\}$$

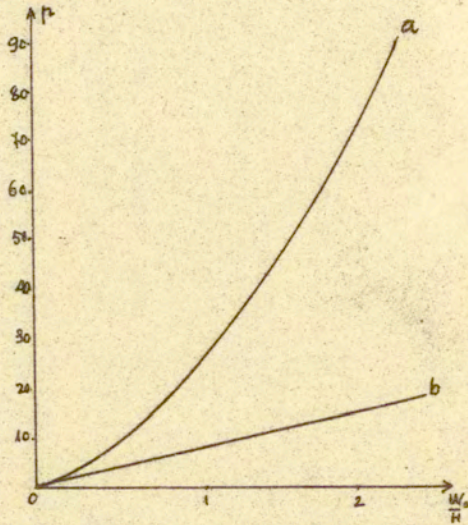
Numeryczne rozwiązania wyrażen 3.59., 3.60 przedstawiają rysunki 8a,b oraz porównania z rozwiązaniami otrzymanymi w teorii małych ugięć z danym parametrem $\beta = (10)^2 / 5 \times 2$ oraz $\mu = 1$. Na rysunku 9 przedstawione są wyniki obliczeń końcowego ugięcia powłoki, zależącego od osi x , z różnymi wariantami impulsowych obciążeń oraz parametrem β .

Rysunek 10a,b pokazuje zależność rozwiązań 3.59., 3.60 od liczby n . Wyniki obliczeń wykazały, że rozwiązania 3.59., 3.60 są stateczne i pierwsze przybliżenie jest dostatecznie dokładne, ponieważ wyniki obliczeń wykazały, że różnica pomiędzy pierwszym przybliżeniem a pozostałym przybliżeniem jest bardzo mała /pokazano to na rys. 10a,b/.



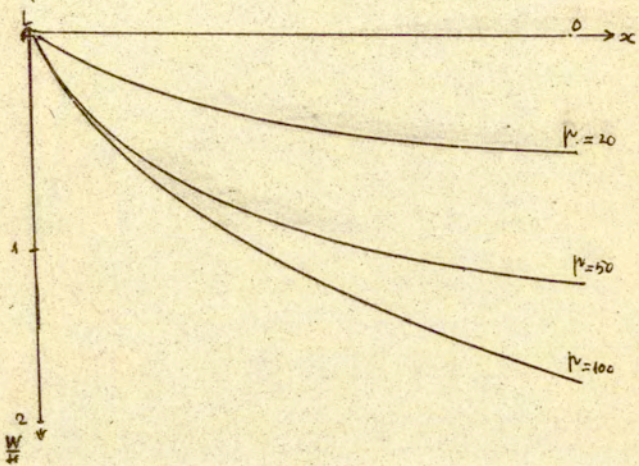
Rys. 8a

- a - wynik obliczenia końcowego czasu otrzymanego wg teorii bionowego stanu naprężeń przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski z parametrem $\beta = (10)^2 / 5 \times 2$
- b - wynik obliczenia końcowego czasu wg teorii liniowej.



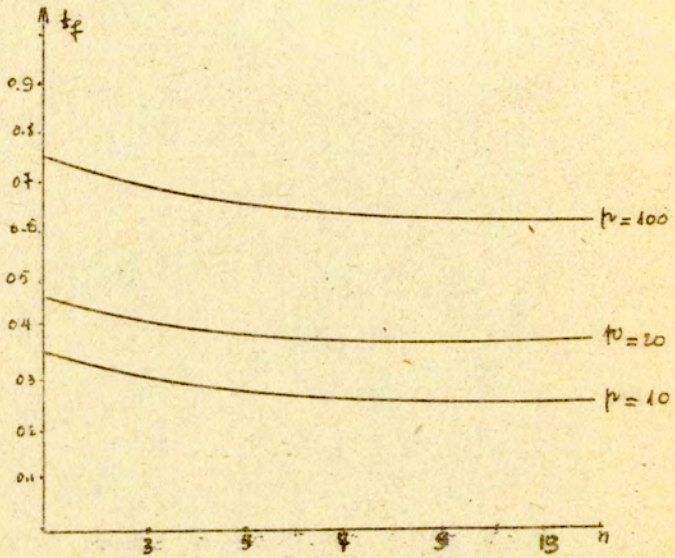
Rys. 8b

- a - wynik obliczenia końcowego ugięcia wg teorii błonowego stanu naprężenia przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski.
- b - wynik obliczenia końcowych ugięć wg teorii małych ugięć z parametrem $\beta = (10)^2 / 5 \times 1$



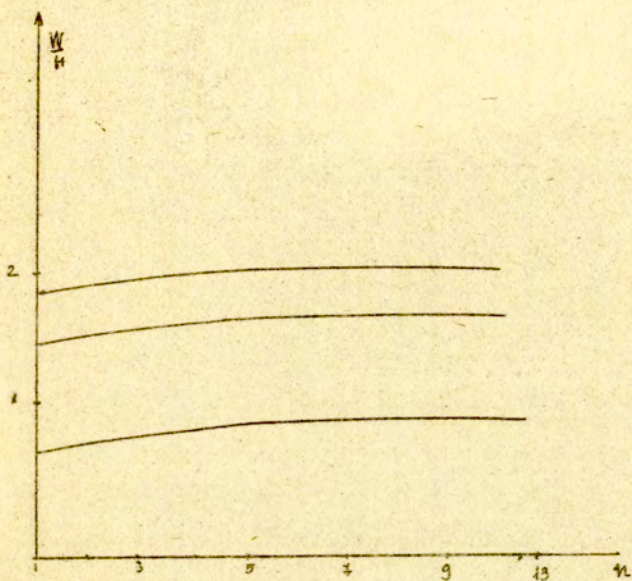
Rys. 9

Koncowe ugięcie powłok poddanych impulsowemu ciśnieniu
 $\nu_r = 2, 5, 10$ oraz z parametrem $\beta = (\lambda c)^2 / 5 \lambda L$.



Rys. 10a

Końcowy czas obliczony wg teorii błonowego stanu naprężenia
w zależności od liczby n z parametrem $\beta = (10)^2/5 \times 2$.



Rys. 10b

Końcowe ugięcie obliczone wg teorii błonowego stanu naprężenia
w zależności od liczby n z parametrem $\beta = (10)^2/5 \times 2$

3.5. Problem dynamiczny, przypadek ogólny

W przypadku, gdy powłoka znajduje się w stanie naprężeń odpowiadających punktom A' , jak to pokazano na rys.4, nie możemy postąpić w sposób, który jest stosowany w teorii małych ugięć. Trudność polega na tym, że brak warunków dla określenia położenia przegubu plastyczności $\xi(\tau)$, tzn. nie możemy określić czasu trwania ruchu oraz końcowego ugięcia. Tak jak mówiliśmy poprzednio, dla określenia czasu trwania ruchu oraz końcowego ugięcia w środku powłoki możemy rozpatrywać tylko część w środku, która znajduje się w stanie naprężeń odpowiadających punktom A na krzywej \overline{AEC} /rys.4/. Tak więc w tym przypadku możemy zakładać, że cała powłoka znajduje się w stanie naprężeń odpowiadających punktom A' na powierzchni granicznej przedstawionej na rys.4. W stanie tych naprężeń mamy:

$$(3.64) \quad \begin{aligned} m_x &= n_x^2 - 1 \\ n_\varphi &= 1 \end{aligned}$$

Wykorzystując stowarzyszone prawo płynięcia do stanu naprężeń 3.60 otrzymamy związki 2.56. Porównując wyrażenie 2.56 z wyrażeniem 2.55. oraz po zwróceniu uwagi na to, że druga pochodna zginającego momentu w tym stanie naprężeń jest równa zero i uwzględniając poprzednie założenie o pominiętych małych przesunięciach u w kierunku tworzącej OC , otrzymujemy następujący układ równań:

$$(3.65) \quad \begin{aligned} 2\mu_1 n_x &= \left(\frac{A}{L}\right)^2 \dot{W} \dot{W}' \\ \mu_1 &= \frac{\dot{W}''}{2\beta} \\ \mu_2 &= \dot{W} \\ \dot{W} \left(2 \frac{2R}{a^2} n_x W''(\tau) \right) &= \frac{2\beta}{a^2} (r-1) \end{aligned}$$

Po wyeliminowaniu z tych równań współczynnika otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
 (3.66) \quad n_x &= n_x^2 - 1 \\
 n_y &= 1 \\
 n_z &= 2R \frac{W' \dot{W}'}{W''} \\
 \ddot{W}(x\tau) - \frac{2R}{a^2} n_x W''(x\tau) &= \frac{2\beta}{a^2} (p_r - 1)
 \end{aligned}$$

Warto pamiętać, że przy rozpatrywaniu równań tego problemu zakładamy, że cały czas powłoka znajduje się w stanie naprężenia AE. Tak więc otrzymane rozwiązanie zagadnienia odnosi się tylko do tego stanu naprężenia.

W celu uzyskania prostych wyrażeń na trwałe uzięcie i czas trwania ruchu w powłoce będziemy szukać rozwiązania 3.66 w postaci 3.54. Dla pierwszego przybliżenia otrzymujemy:

$$(3.67) \quad W(x\tau) = W_0(\tau) X(x)$$

przy czym $X(x)$ jest ortogonalną funkcją współrzędnych spełniającą warunki brzegowe, a $W_0(\tau)$ jest funkcją zależącą tylko od czasu i uwzględniając warunek ortogonalności znajdujemy:

$$\begin{aligned}
 (3.68) \quad n_x &= 2R W_0(\tau) \left(\frac{X'^2}{X''} \right) \\
 \ddot{W}_0(\tau) - \int_0^A \frac{4R^2}{a^2} \frac{X'^2}{X''} dx W_0(\tau) &= \int_0^A \frac{2\beta}{a^2} (p_r - 1) X dx
 \end{aligned}$$

przy czym zwracając uwagę na to, że siły rozciągania w rozpatrywanym zagadnieniu zależą tylko od czasu, a więc stosunek $\frac{X'^2}{X''}$ musi być równy stałej. Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
 (3.69) \quad a \quad n_x &= \frac{2R}{\lambda^2} W_0(\tau) \\
 b \quad X''(x) - \lambda^2 X'^2(x) &= 0 \\
 c \quad \ddot{W}_0(\tau) - \int_0^A \frac{4R^2}{\lambda^2 a^2} \frac{X'^2}{X''} dx W_0(\tau) &= f(\tau) \\
 d \quad n_y &= 1 \quad m_x = m_x^2 - 1
 \end{aligned}$$

W tym układzie pojawiają się czony nieliniowe w wyrażeniach b, c, d. Z tego układu musimy wyznaczyć czas trwania ruchu w powłoce oraz siły τ , $M_x, W_0(\tau), M_x, X(x)$. Z wyrażenia 3.69 możemy wyznaczyć krytyczne impulsowe obciążenia jako funkcje ugięcia i przyspieszenia. Dla stanu błonowego naprężeń otrzymujemy:

$$(3.70) \quad p_r = 1 + \frac{\ddot{W}_0(\tau) - 2RW_0(\tau)/a^2}{2\beta}$$

oraz dla przypadku ogólnego:

$$(3.71) \quad p_r = 1 + \frac{\ddot{W}_0(\tau) - (2R/a^2)W_0^2(\tau)}{2\beta \int_0^1 X dx}$$

Całkując 3.69 przy wykorzystaniu warunków brzegowych znajdujemy:

$$(3.72) \quad \begin{aligned} X(x) &= \ln(2+x) \\ \lambda &= \pm 1 \end{aligned}$$

Rozpatrzmy teraz równania 3.69.; jeśli przedstawimy pochodną kwadratu funkcji $W_0(\tau)$ w następujący sposób:

$$(3.73) \quad \frac{d\dot{W}_0^2}{d\tau} = 2\ddot{W}_0(\tau) \frac{dW_0}{d\tau} = 2 \left[f(\tau) - \frac{4R^2}{a^2} W_0^2(\tau) \right] \frac{dW_0}{d\tau}$$

gdzie
$$f(\tau) = \int_0^1 \frac{2\beta}{a^2} (p_r - 1) X dx$$

wtedy czas trwania ruchu w powłoce określa się całką eliptyczną, która wyraża się w następujący sposób:

$$(3.74) \quad \tau = \int_{W_0(\tau)}^{W_0(\tau)} \frac{dW_0(\tau)}{\sqrt{\int_{W_0(\tau_0)}^{W_0(\tau)} \left[f(\tau) - \frac{4R^2}{a^2} W_0^2(\tau) \right] dW_0(\tau)}}$$

W ten sposób 3.74 daje nam zależność między czasem trwania ruchu a ugięciem $W_0(\tau)$. Stąd jeżeli zadane jest τ , to możemy określić $W_0(\tau)$.

4. Sformułowanie i przybliżone analiza problemu przy wykorzystaniu warunku plastyczności Hubera-Misesa.

4.1. Równanie ruchu w przemieszczeniach

Rozpatrzmy teraz zagadnienie sztywno-plastycznej powłoki spełniającej warunek plastyczności Hubera-Misesa 2.43 przedstawiony na rys.4a, b. Jeżeli wykorzystamy stowarzyszone prawo płynięcia do warunku plastyczności Hubera-Misesa, to otrzymamy wyrażenie 2.56.. Porównując wyrażenie 2.56 z wyrażeniem 2.54 otrzymujemy zależności między siłami wewnętrznymi a polem prędkości odkształceń w następującej postaci:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mu (2n_x - n_\varphi) &= \left(\frac{A}{L}\right)^2 \dot{W}'\dot{W}' \\ \mu (2n_\varphi - n_x) &= \dot{W} \\ 3\mu m_x &= \frac{\dot{W}''}{\beta} \end{aligned}$$

Z wyrażenia 4.1. znajdujemy wewnętrzne siły w zależności od przemieszczeń:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} n_x &= \left(2\left(\frac{A}{L}\right)^2 \dot{W}'\dot{W}' + \dot{W}\right) \mu^{-1} \\ n_\varphi &= \left(\left(\frac{A}{L}\right)^2 \dot{W}'\dot{W}' + 2\dot{W}\right) \mu^{-1} \\ m_x &= \dot{W}'' (3\mu\beta)^{-1} \end{aligned}$$

Podstawiając wyrażenia z 4.2 w warunek plastyczności 2.43 otrzymujemy:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \mu &= (\mathcal{L})^{\frac{1}{2}} \\ \mathcal{L} &= \left(A^2 - AB + B^2 + \frac{1}{4}C^2\right) \end{aligned}$$

gdzie A , B , C przedstawiają następujące wielkości:

$$\begin{aligned}
 A &= 2\left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + \dot{W} \\
 (4.4) \quad B &= \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + 2\dot{W} \\
 C &= \dot{W}'' \beta^{-1}
 \end{aligned}$$

Przy wykorzystaniu 4.2., 4.3., 4.4 znajdujemy wszystkie potrzebne wielkości , , , jeżeli podstawimy je w równaniu 2.50., to dojdziemy do następującej zależności:

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad & 4C''(\mathcal{L})^{5/2} - 4C'(\mathcal{L}')(\mathcal{L})^{3/2} - 2C(\mathcal{L}'')(\mathcal{L})^{3/2} - \\
 & 3C(\mathcal{L}')(\mathcal{L})^{1/2} - 2RA(\mathcal{L})^{5/2}W'' + 2\beta B(\mathcal{L})^{5/2} - \\
 & 2\beta r_r(\mathcal{L})^3 = -a^2(\mathcal{L}')^3 \ddot{W}
 \end{aligned}$$

W rezultacie otrzymamy równanie ruchu powłoki w postaci przemieszczeniowej, a mianowicie:

$$\begin{aligned}
 (4.6) \quad & 4\dot{W}'' \left\{ 2\left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + \dot{W} \right\}^2 - \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + \dot{W} \left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + 2\dot{W} \right\} + \\
 & \left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + 2\dot{W} \right\}^2 + (4\beta)^{-1} \dot{W}''^2 \right\}^{5/2} - \\
 & 4\dot{W}'' \left\{ 2\left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + \dot{W} \right\}^2 - 2\left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + \dot{W} \left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + 2\dot{W} \right\} + \\
 & \left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + 2\dot{W} \right\}^2 + (4\beta)^{-1} \dot{W}''^2 \right\}^{3/2} \times \left\{ 2\left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + \dot{W} \right\} \times \\
 & \left\{ 2\left(\frac{A}{L}\right)^2 (\dot{W}'' \dot{W}' + \dot{W}' \dot{W}'') + \dot{W}' \right\} + 2\left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 (\dot{W}' \dot{W}' + \dot{W}' \dot{W}'') + 2\dot{W}' \right\} \times \\
 & \left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + 2\dot{W} \right\} - 2\left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 (W \dot{W}'' + \dot{W}' \dot{W}'') + 2\dot{W}' \right\} \left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + \dot{W} \right\} + \\
 & (2\beta^2)^{-1} \dot{W}'' \dot{W}'' \right\} - 2\beta^{-1} \dot{W}'' \left\{ 2\left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + \dot{W} \right\} \times \\
 & \left\{ 2\left(\frac{A}{L}\right)^2 (W \dot{W}''' + 2W \dot{W}'' + \dot{W}' \dot{W}''') + \dot{W}'' \right\} + \\
 & 2\left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + 2\dot{W} \right\} \left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 (W \dot{W}'' + 2W \dot{W}' + \dot{W}' \dot{W}''') + 2\dot{W}'' \right\} + \\
 & 2\left\{ 2\left(\frac{A}{L}\right)^2 (\dot{W}'' \dot{W}' + \dot{W}' \dot{W}'') + \dot{W}' \right\}^2 + 2\left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 (\dot{W}' \dot{W}' + \dot{W}' \dot{W}'') + \right. \\
 & \left. 2\dot{W}' \right\} - \left\{ 2\left(\frac{A}{L}\right)^2 (\dot{W}'' \dot{W}' + 2\dot{W}' \dot{W}'' + \dot{W}' \dot{W}''') + \dot{W}'' \right\} \left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + 2\dot{W} \right\} - \\
 & \left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + 2\dot{W} \right\} \left\{ 2\dot{W}'' \dot{W}'' + W \dot{W}'' \right\} + 2\dot{W}'' \left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + \dot{W} \right\} + \\
 & (2\beta)^{-1} (\dot{W}'' \dot{W}'' + \dot{W}''^2) \right\} \times \left\{ 2\left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + \dot{W} \right\}^2 - \left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + \dot{W} \right\} \times \\
 & \left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + 2\dot{W} \right\} + \left\{ \left(\frac{A}{L}\right)^2 W \dot{W}' + 2\dot{W} \right\}^2 + (4\beta)^{-1} \dot{W}''^2 \right\}^{3/2} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{3}{\beta} \dot{w}'' \left\{ 2 \left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + \dot{w} \right\} \left(2 \left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}'' \dot{w}' + \dot{w}' \dot{w}'' \right) + \dot{w}' + \\
 & 2 \left(\left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + 2 \dot{w} \right) \left(\left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}'' + \dot{w}'' \dot{w}' \right) + 2 \dot{w}' - \\
 & \left(2 \left(\frac{A}{E} \right)^2 \left(\dot{w}'' \dot{w}' + \dot{w}' \dot{w}'' \right) + \dot{w}' \right) \left(\left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + 2 \dot{w} \right) - \\
 & \left(2 \left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + \dot{w} \right) \left(\left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}'' \dot{w}' + \dot{w}'' \dot{w}' \right) + 2 \dot{w}' + (2\beta)^{-1} \dot{w}'' \dot{w}''' \} \times \{ \\
 & \left(2 \left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + \dot{w} \right)^2 - \left(\left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + 2 \dot{w} \right) \left(2 \left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + \dot{w} \right) + \\
 & \left(\left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + 2 \dot{w} \right)^2 + (4\beta^2)^{-1} \dot{w}''^2 \} \frac{1}{2} - \\
 & 2R \cdot \left\{ \left(2 \left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + \dot{w} \right) \right\} \times \left\{ \left(2 \left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + \dot{w} \right)^2 - \right. \\
 & \left. \left(2 \left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + \dot{w} \right) \left(\left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + 2 \dot{w} \right) + \left(\left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + 2 \dot{w} \right)^2 + \right. \\
 & \left. (4\beta^2)^{-1} \dot{w}''^2 \right\} \frac{5}{2} \dot{w}'' + \\
 & 2\beta \left\{ \left(\left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + 2 \dot{w} \right) \right\} \left\{ \left(\left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + 2 \dot{w} \right)^2 - \left(\left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + 2 \dot{w} \right) \right. \\
 & \left. \left(2 \left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + \dot{w} \right) + \left(2 \left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + \dot{w} \right)^2 + (4\beta^2)^{-1} \dot{w}''^2 \right\} \cdot \frac{3}{2} \dot{w} + \\
 & \alpha^2 \left\{ \left(2 \left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + \dot{w} \right)^2 - \left(\left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + 2 \dot{w} \right) \times \left(2 \left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + \dot{w} \right) + \right. \\
 & \left. \left(\left(\frac{A}{E} \right)^2 \dot{w}' \dot{w}' + 2 \dot{w} \right)^2 + (4\beta^2)^{-1} \dot{w}''^2 \right\} \frac{3}{2} \dot{w} \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

W przypadku, gdy rozpatrywaliśmy zagadnienie 2.50 tylko na powierzchni granicznej odpowiadającej przekrojowi wyrażonemu na rys.5 tzn. przypadek małych ugięć, wtedy dochodzimy do następującego równania:

$$(4.7) \quad 4c''(\mathcal{L})^{\frac{5}{2}} - 4c'(\mathcal{L}')(\mathcal{L})^{\frac{3}{2}} - 2c(\mathcal{L}'')(\mathcal{L})^{\frac{3}{2}} + 2\beta B(\mathcal{L})^{\frac{5}{2}} - 2\beta(\mathcal{L})^3 \frac{3}{2} + \alpha^2(\mathcal{L})^3 \dot{w} = 0$$

gdzie w przypadku tym \mathcal{L} , c , B wynoszą:

$$(4.8) \quad \begin{aligned}
 c &= \dot{w}'' \beta^{-1} \\
 c'' &= \dot{w}'''' \beta^{-1} \\
 B &= \dot{w}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= (\dot{w}^2 + (4\beta^2)^{-1} \dot{w}''^2) \\ Q' &= 2\dot{w}\dot{w}' + (2\beta^2)^{-1} \dot{w}''\dot{w}''' \\ Q'' &= (2\dot{w}\dot{w}'' + \dot{w}'^2) + (2\beta^2)^{-1} (\dot{w}''\dot{w}'''' + \dot{w}'''^2) \end{aligned}$$

4.2. Metoda rozwiązania

Dotychczas brak jest analitycznej, a nawet numerycznej metody do rozwiązania zagadnienia 4.6. Postaramy się przez analizę zjawisk oraz wyników doświadczeń zaproponować odpowiednią metodę przybliżonego rozwiązania naszego zagadnienia. Najpierw sformułujemy kilka szczegółowych uwag:

- dotychczasowe wyniki badań analitycznych i doświadczalnych cylindrycznej plastycznej skończonej powłoki mającej długość $2L$ pod impulsowym ciśnieniem pokazują, że ekstremalne deformacje pojawiają się w środku powłoki. Tak więc przy wyborze metody rozwiązania zagadnienia musimy uwzględnić ten fakt.

- Siła rozciągania N_x w rozpatrywanym zadaniu zależała od ugięcia w środku powłoki i przedstawia się jako funkcja uwikłana od czasu.

- Moment zginający przyjmuje największe znaczenie w środku powłoki.

W ten sposób środek powłoki przy warunkach rozpatrywanego zagadnienia przedstawia się jako najważniejszy punkt o szczególnym charakterze, w którym konieczne jest przeprowadzenie badania. Wracając do poprzednich uwag, najpierw musimy wybrać funkcje ugięcia, tak, aby nie tylko były spełnione warunki brzegowe, ale także, aby funkcja ta musiała przyjąć ekstremalne znaczenie w środku powłoki, tzn. funkcja ta musi spełniać następujący warunek:

$$(4.9) \quad \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

Za pomocą odpowiedniego wyboru funkcji ugięcia sprowadzimy

zagadnienie do równania ruchu w środku powłoki. Równanie to zależy wówczas tylko od jednej zmiennej, mianowicie od czasu. Dzięki temu możemy sprowadzić zagadnienie 4.6 do zadania o poszukiwaniu ugięcia oraz o poszukiwaniu końcowego czasu i końcowego ugięcia w środku powłoki.

Będziemy szukali funkcji ugięcia w następującej postaci rozdzielonej zmiennej 3.54. W celu poszukiwania prostego wyrażenia trwałego ugięcia oraz czasu trwania ruchu rozpatrujemy dla pierwszego przybliżenia, mianowicie:

$$(4.10) \quad W(x, \tau) = W_0(\tau) X(x)$$

przy czym zgodnie z poprzednią analizą funkcja $X(x)$ przyjmuje postać:

$$(4.11) \quad X(x) = (1 - x^2)^2$$

Przypomnijmy jednak, że x jest tutaj wielkością bezwymiarową przy czym $X(x)$ jest funkcją zależącą od współrzędnego i automatycznie spełniającą warunki brzegowe. Natomiast $W_0(\tau)$ - to funkcja zależąca tylko od czasu i spełniająca warunki początkowe. Naszym zadaniem teraz jest tylko określić funkcje $W_0(\tau)$ tak, aby spełniały one warunki zagadnienia. Musimy dodać, że dzięki wybranej funkcji ugięcia w postaci 4.11 nie tylko możemy rozpatrywać zagadnienia w środku powłoki, ale we wszystkich miejscach tam, gdzie chcemy: przy czym równanie ruchu będzie miało inne współczynniki. Oznacza to, że amplitudy są różne w różnych miejscach. Jest to istotne ograniczenie proponowanej metody. W tym przypadku nie możemy stosować warunku ortogonalności. Trudność ta polega na tym, że wyrażenia współczynników równania 4.5 oraz 4.7 są nieliniowe wyższego rzędu i znajdują się pod pierwiastkami, co uniemożliwia nam całkowanie. Metoda, którą stosujemy tutaj z punktu widzenia ścisłej matematycznej jest niestateczna. Nie możemy stosować jej bez ograniczeń warunków wynikających z konkretnych zagadnień, ponieważ w teorii różniczkowych cząstkowych równań nie było udowodnione twierdzenie o rozpa-

trywaniu rozwiązania w jednym punkcie. W tym przypadku, wyjątkowo, pozwolimy sobie stosować tę metodę bez uwzględnienia warunku ortogonalności, ponieważ powłoka jest cienka i skończona, oraz długość i promień powłoki są tego samego rzędu. Możemy więc stwierdzić, że w rozpatrywanej powłoce nie istnieje punkt osobliwości. Jeżeli różniczkujemy 4.11 względem współrzędnego α , to znajdujemy wszystkie potrzebne pochodne, które wyrażają się w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 \dot{W}'(\alpha\tau) &= -4\dot{W}_0(\tau)(1-\alpha^2)\alpha \\
 \dot{W}''(\alpha\tau) &= -4\dot{W}_0(\tau)(1+3\alpha^2) \\
 \dot{W}'''(\alpha\tau) &= -24\dot{W}_0(\tau)\alpha \\
 \dot{W}^{IV}(\alpha\tau) &= -24\dot{W}_0(\tau)
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

4.3. Przypadek małych ugięć

W tym punkcie rozpatrujemy powłokę pracującą w stanie naprężeń wyrażających się we wzorze 2.44 przy czym $\eta_{qc} = 1$, wykres którego przedstawiony jest na rys.5b. W tym stanie naprężeń jeśli zgodnie z wyborem funkcje ugięcia były przepro-ważone w punkcie 4.12., to rozwiązanie równania 4.7 sprowadza się do zagadnienia o poszukiwaniu końcowego czasu trwania ruchu oraz końcowego ugięcia w środku powłoki. Fizyczne równanie ruchu w powłoce w tym przypadku wyraża się w następujący sposób:

$$\ddot{W}_0(\tau) = \frac{2B}{a^2} (P_r - \gamma(\alpha))
 \tag{4.13}$$

$$\gamma(\alpha) = \left[4C_*''(Q_*)^{5/2} - 4C_*(Q_*')(Q_*)^{3/2} - 2C_*(Q_*'')(Q_*)^{3/2} + 2\beta B_*(Q_*)^{5/2} \right] (c\beta)^{-1}$$

gdzie

Symbolem (*) oznaczamy wielkości po wprowadzeniu rozdzielonej zmiany. Zależą one tylko od współrzędnego α i wyrażają się

w sposób:

$$\begin{aligned}
 C_* &= -4(1+3x^2) \\
 C_*'' &= -24 \\
 (4.14) \quad B_x &= (1-x^2)^2 \\
 \mathcal{L}_* &= \left[(1-x^2)^4 + \frac{4}{\beta^2} (1+3x^2)^2 \right] \\
 \mathcal{L}_*' &= \left[-8(1-x^2)^3 x - \frac{48}{\beta^2} (1+3x^2)x \right] \\
 \mathcal{L}_*'' &= \left[-8(1-x^2)^3 + 48x^2(1-x^2) - \right. \\
 &\quad \left. 48(\beta^2)^{-1} (1+9x^2) \right] \\
 (\mathcal{L}_*)^{3/2} &= \left[(1-x^2)^4 + 4(\beta^2)^{-1} (1+3x^2)^2 \right]^{3/2} \\
 (\mathcal{L}_*)^{5/2} &= \left[(1-x^2)^4 + 4(\beta^2)^{-1} (1+3x^2)^2 \right]^{5/2} \\
 \beta &= l^2 (AH)^{-1} \\
 a^2 &= \rho_{AH} (2\sigma_0 t_0^2)^{-1}
 \end{aligned}$$

Najpierw rozpatrzmy przypadek równomiernego impulsowego ciśnienia w przedziale czasu $0 \tau_0$. Kształt tego impulsu wyraża się wzorem 2.46. W tym przypadku rozwiążemy zagadnienia 4.13 w dwóch fazach.

Pierwsza faza - to faza obciążenia $p_r = \text{const}$ w przedziale czasu $[0 \tau_0]$. Korzystając z warunków początkowych 2.59 i po całkowaniu 4.13 otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$(4.15) \quad W_0^{(1)}(\tau) = \frac{\beta}{a^2} (\nu_r - \gamma) \tau^2$$

Faza druga - faza odciążenia, w chwili $\tau = \tau_0$ obciążenie ν_r spada do zera, ale ruch w powłoce trwa w dalszym ciągu. A więc w tym momencie ugięcie oraz prędkość ugięcia W , \dot{W} muszą być ciągłe, tzn. muszą one spełniać warunki 2.59. Stąd, korzystając z warunku 2.59 i po całkowaniu 4.13 przy $\nu_r = 0$ znajdujemy amplitudę w drugiej fazie w następującej postaci:

$$(4.16) \quad W_0^{(II)}(\tau) = [-\gamma \tau^2 + 2\nu_r \tau_0 \tau - \nu_r \tau_0^2] \frac{\beta}{a^2}$$

Jeżeli wprowadzimy warunek 2.53 do wyrażenia 4.16 to otrzymamy końcowy czas w następującej postaci:

$$(4.17) \quad \tau_f = \frac{\nu_r \tau_0}{\gamma(x)}$$

Podstawiając wyrażenie końcowego czasu 4.17 w wyrażenie 4.16 znajdujemy końcowe ugięcie powłoki w następującej postaci:

$$(4.18) \quad W(x\tau_f) = \frac{\beta}{a^2} \nu_r \left(\frac{\nu_r}{\gamma(x)} - 1 \right) (1 - x^2)^2$$

Rozwiązanie to ma postać podobną do rozwiązania otrzymanego przez Hodge [28]. Oba rozwiązania różnią się tylko współczynnikiem. W celu uzyskania prostego wyrażenia końcowego czasu i trwałego ugięcia w środku powłoki zamiast w wyrażeniu (4.17) i

(4.18) x , podstawimy 0. Otrzymamy wtedy:

$$(4.19) \quad \tau_f = \frac{\beta^2 \nu_r (1 + 4\beta^{-2})^{3/2} \cdot \tau_0}{\beta^2 (1 + 48\beta^{-2})(1 + \beta^{-2}) + 32(1 + 4\beta^{-2})}$$

$$W(0\tau_f) = \beta a^{-2} \nu_r \left(\frac{\nu_r}{\gamma_0} - 1 \right) \tau_0 = W_{max}$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta^2 (1 + 48\beta^{-2})(1 + \beta^{-2}) + 32(1 + 4\beta^{-2})}{\beta^2 (1 + \beta^{-2})^{3/2}}$$

Rozpatrzmy teraz zagadnienie opisane równaniem 4.13 w przypadkach gdy impulsowe obciążenia mają kształt trójkątny, jak określa to 2.47. W przypadku tym musimy rozpatrywać to zagadnienie w trzech fazach, a mianowicie: pierwsza faza, w której obciążenie jest proste i rośnie w przedziale czasu $(0 \tau_{\frac{1}{2}})$ - druga faza, gdy obciążenie maleje i dąży do zera w przedziale czasu $(\tau_{\frac{1}{2}} \tau_0)$, oraz w ostatniej fazie, gdy $\tau \geq \tau_0$ obciążenie jest równe zero.

Przypomnijmy jeszcze, że między fazami odkształcenie oraz prędkość odkształcenia muszą być ciągłe, tzn. muszą spełniać warunek 2.59 w momentach, gdy $\tau = \tau_0/2$ oraz $\tau = \tau_0$. Tak więc w pierwszej fazie $(0 \tau_0/2)$ przy wykorzystaniu początkowych warunków 2.59 oraz po całkowaniu równania 4.13 przy $\alpha = 0$ znajdujemy:

$$(4.20) \quad W_0^i(\tau) = \frac{\beta}{\alpha^2} \left\{ \nu \tau^3 (3\tau_0)^{-1} + \gamma_0 \tau^2 \right\}$$

W fazie drugiej obciążenie maleje, a w chwili $\tau = \tau_0/2$ ugięcie oraz prędkość ugięcia muszą być ciągłe.

Korzystając z warunku 2.59., po całkowaniu 4.13 otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$(4.21) \quad W_0^{(u)}(\tau) = \frac{\beta}{\alpha^2} \left\{ [2(1-\tau)(3\tau_0)^{-1} + \gamma_0] \tau^2 + \frac{3}{4} \nu \tau_0 \tau + \frac{1}{8} \nu \tau_0^2 \right\}$$

Faza trzecia: w tej fazie przy $\tau = \tau_0$ obciążenie przyjmuje wartość zerową. Analogicznie do poprzedniej fazy, przy wykorzystaniu warunku 2.59 w momencie $\tau = \tau_0$ po całkowaniu 4.13 znajdujemy:

$$(4.22) \quad W_0^{(u)}(\tau) = \frac{\beta}{\alpha^2} \left\{ \gamma_0 \tau^2 - \frac{5}{4} \nu \tau_0 \tau - \frac{7}{6} \nu \tau_0^2 \right\}$$

Jeżeli wykorzystamy warunek 2.53., to znajdziemy końcowy czas:

$$(4.23) \quad \tau_f = \frac{5}{4} \mu_r \tau_0 \cdot \gamma_0^{-4}$$

Podstawiając 4.22 w wyrażenie 4.21 znajdujemy końcowe ugięcie w postaci:

$$(4.24) \quad W_0(\tau_f) = \frac{\beta}{a^2} \left(\frac{25}{16} \frac{\mu_r}{\gamma_0} - \frac{4}{6} \right) \mu_r \tau_0^2$$

W przypadku potęgowego impulsu, który wyraża się we wzorze 2.48 obciążenie ciągle maleje. Korzystając z warunku początkowego 2.59 po całkowaniu znajdujemy:

$$(4.25) \quad W_0(\tau) = \frac{2\beta^2}{a^2} \left\{ \mu_r \bar{e}^{\frac{\tau}{\tau_0}} \tau_0^2 - \gamma_0 \frac{\tau^2}{2} \right\}$$

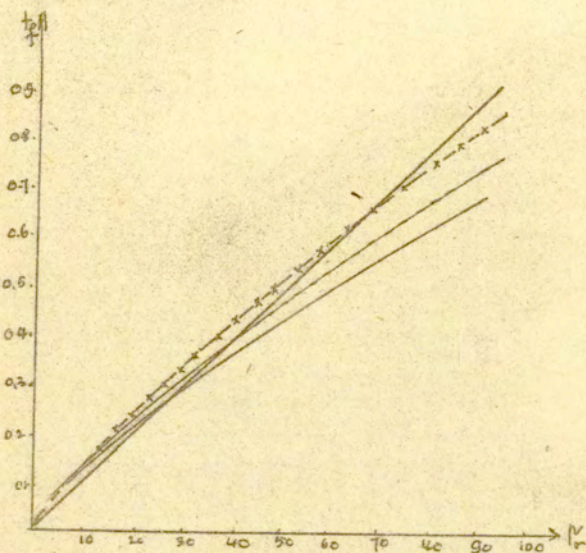
Jeżeli wykorzystamy warunek 2.53 do wyrażenia 4.25 to otrzymamy końcowy czas w postaci:

$$(4.26) \quad \tau_f = \frac{\mu_r \tau_0}{\gamma_0 e}$$

Końcowe ugięcie wynosi:

$$(4.27) \quad W_0(\tau_f) = \frac{2\beta^2}{a^2} \left\{ \mu_r \bar{e}^{-\frac{\tau_f}{\tau_0}} \tau_0^2 - \frac{\gamma_0 \tau_f^2}{2} \right\}$$

Wyniki obliczeń końcowych ugięć i czas trwania ruchu w środku powłoki są przedstawione na rys.11a,b. Wyniki te wykazały, że kształty impulsowych ciśnień nie mają zbyt dużego wpływu na trwałe ugięcia.

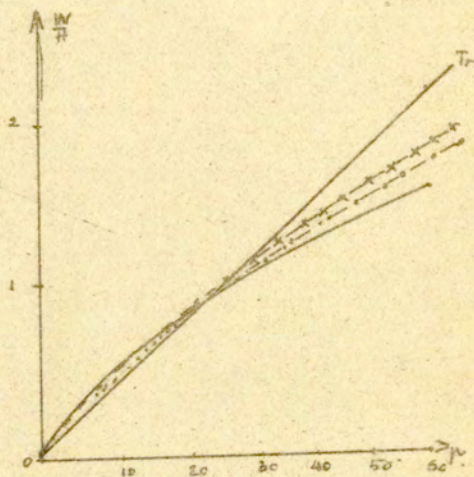


Rys.11a

Wyniki obliczeń końcowego czasu zależących od kształtów impulsowych ciśnień.

— - linie prosta przedstawia wynik otrzymany w przypadku stałego impulsowego ciśnienia przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski,

- - numeryczne obliczenia wg wzorów 4.19., 4.23., 4.26. otrzymane przy wykorzystaniu warunku plastyczności Hubera-Misesa.



Rys. 11b

Obliczone wyniki wg wzorów 4.18., 4.24 oraz 4.27.
w zależności od końcowego ugięcia w środku powłoki i różnymi
typami obciążeń z parametrem $\beta = 10^3/5 \times 2$ — wykres prostej
linii z literą Tr przedstawia się jako rozwiązanie otrzymane
przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski w przypadku
małych ugięć.

4.4. Przypadek dużych ugięć

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy powłoka znajduje się w stanie naprężeń spełniających warunek plastyczności, który wyraża się wzorem 2.43. Korzystając z poprzedniego omówienia metody, równanie ruchu środka powłoki można zapisać w następującej postaci:

$$\ddot{W}_0(\tau) + \alpha^2 W(\tau) = \frac{2\beta}{\alpha^2} \left[\nu_r - 2 \left(1 + \frac{2\mu}{\beta} \right) \left(3 + \frac{\mu}{\beta} \right) + \frac{4\mu}{\beta^2} \left(1 + \frac{\mu}{\beta} \right) \right] \left(3 + \frac{\mu}{\beta} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (4.28)$$

gdzie

$$\alpha^2 = \left[8 \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 \left(3 + \frac{\mu}{\beta} \right) + 24 (\epsilon)^2 \right] \left[\beta^2 \alpha^2 \left(3 + \frac{\mu}{\beta} \right) \right]^{-\frac{3}{2}}$$

Rozwiązanie równania 4.28 ma postać:

$$W_0(\tau) = W_0(\tau_0) \cos \alpha \tau + \dot{W}_0(\tau_0) \sin \alpha \tau + \frac{2\beta}{\alpha} \int_0^{\tau} \left\{ \left[\nu_r - 2 \left(1 + \frac{2\mu}{\beta} \right) \left(3 + \frac{\mu}{\beta} \right) + \frac{4\mu}{\beta^2} \left(1 + \frac{\mu}{\beta} \right) \right] \times \left[3 + \frac{\mu}{\beta} \right]^{-\frac{3}{2}} \right\} \sin \alpha (\tau - \tau^*) d\tau^* \quad (4.29)$$

Zajmiemy się teraz przypadkiem stałego obciążenia w przedziale czasu $[0, \tau_0]$. Analogicznie do poprzedniego sposobu, całkujemy wyrażenie 4.28 w dwóch fazach. Pierwsza faza - $0 \leq \tau \leq \tau_0$. Korzystając z warunku początkowego 2.59 i całkując 2.53 otrzymujemy:

$$W_0(\tau) = \frac{2\beta}{\alpha} \left\{ \nu_r - \left[\left(1 + \frac{2\mu}{\beta} \right) \left(3 + \frac{\mu}{\beta} \right) + \frac{4\mu}{\beta^2} \left(1 + \frac{\mu}{\beta} \right) \right] \times \left[3 + \frac{\mu}{\beta} \right]^{-\frac{3}{2}} \right\} [1 - \cos \alpha \tau] \quad (4.30)$$

Druga faza - w momencie $\tau = \tau_0$ obciążenie ν_r spada do zera. Całkując 4.29 znajdujemy:

$$(4.31) \quad W_0^{(n)}(\tau) = W_0(\tau_0) \cos \alpha \tau + \dot{W}_0(\tau_0) \sin \alpha \tau + (1 - \cos \alpha (\tau - \tau_0)) \times \\ \frac{4\beta}{\alpha} \left\{ \left[\left(1 + \frac{2\lambda}{\beta^2}\right) \left(3 + \frac{4}{\beta^2}\right) + \frac{4\lambda}{\beta^2} \left(1 + \frac{2}{\beta^2}\right) \right] \times \right. \\ \left. \left[3 + \frac{4}{\beta^2} \right]^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

W chwili $\tau = \tau_0$ ugięcie i prędkość ugięcia muszą być ciągłe. Przy wykorzystaniu warunku 2.59 otrzymujemy:

$$(4.32) \quad W_0(\tau_0) = \frac{\beta}{2\alpha} (1 - \cos \alpha \tau_0) \cdot v_r \\ \dot{W}_0(\tau_0) = \frac{\beta}{2\alpha} \sin \alpha \tau_0 \cdot v_r$$

Podstawiając 4.32 w wyrażenie 4.31 otrzymujemy:

$$(4.33) \quad W_0^{(n)}(\tau) = \frac{\beta}{2\alpha} \left\{ \left[(1 - \cos \alpha \tau_0) \cos \alpha \tau + \sin \alpha \tau_0 \sin \alpha \tau \right] v_r + \right. \\ \left. 8 \left[\left(1 + \frac{2\lambda}{\beta^2}\right) \left(3 + \frac{4}{\beta^2}\right) + \frac{4\lambda}{\beta^2} \left(1 + \frac{2}{\beta^2}\right) \right] \times \right. \\ \left. \left[1 - \cos \alpha (\tau - \tau_0) \right] \times \left[3 + \frac{4}{\beta^2} \right]^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

Korzystając z warunku 2.53 znajdujemy końcowy czas trwania ruchu w powłoczce w następującej postaci:

$$(4.34) \quad \tau_f = \frac{1}{\alpha} \arccos \left\{ \left[\left(3 + \frac{4}{\beta^2}\right)^{\frac{3}{2}} (1 - \cos \alpha \tau_0) v_r + \right. \right. \\ \left. \left. 8 \left[\left(1 + \frac{2\lambda}{\beta^2}\right) \left(3 + \frac{4}{\beta^2}\right) + \frac{4\lambda}{\beta^2} \left(1 + \frac{2}{\beta^2}\right) \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \left(1 + \frac{2}{\beta^2}\right) \right] \left[3 + \frac{4}{\beta^2} \right]^{-\frac{3}{2}} \sin \alpha \tau_0 \right\}$$

Podstawiając 4.34 w wyrażenie 4.33 otrzymujemy końcowe ugięcie w postaci:

$$(4.35) \quad W_0(\tau_f) = \frac{\beta}{2\alpha} \left\{ \left[(1 - \cos \alpha \tau_0) \cos \alpha \tau_f + \sin \alpha \tau_0 \sin \alpha \tau_f \right] v_r + \right. \\ \left. + 8 \left[\left(1 + \frac{2\lambda}{\beta^2}\right) \left(3 + \frac{4}{\beta^2}\right) + \frac{4\lambda}{\beta^2} \left(1 + \frac{2}{\beta^2}\right) \right] \times \right. \\ \left. \left[1 - \cos \alpha (\tau_f - \tau_0) \right] \times \left[3 + \frac{4}{\beta^2} \right]^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

W celu porównania różnicy pomiędzy wynikami otrzymanymi wg teorii małych ugięć a otrzymanymi wg teorii dużych ugięć przy wykorzystaniu warunku plastyczności Hubera-Misesa przedstawiamy na rys. 12a,b wyniki obliczeń końcowego czasu trwania ruchu środka powłoki w zależności od obciążenia P_x .

Natomiast rys. 13 przedstawia wyniki obliczeń wg wzorów otrzymanych w obecnej pracy w porównaniu z wynikiem otrzymanym wg teorii nośności granicznej Duszek oraz Sawczuka [15]; przy czym w tym przypadku przyjmujemy czas trwania impulsowego ciśnienia równy $t_0 = 1$. Porównania te wykazały, że jeśli impulsowe ciśnienie kontynuuje się w krótkim czasie, to konstrukcja przyjmuje odkształcenia mniejsze niż wtedy, gdy impulsowe ciśnienie kontynuuje się w długim czasie.

5. Końcowe uwagi, wnioski

Na podstawie analizy uzyskanych rozwiązań i przeprowadzonych porównań możemy sformułować następujące uwagi i wnioski:

- różnica pomiędzy rozwiązaniami uzyskanymi przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski, a rozwiązaniami otrzymanymi wg obecnej teorii tak w przypadku małych ugięć jak i w przypadku dużych ugięć jest nie większa niż 10% /rys.12a,b/,
- wyniki obliczeń wykazały, że czas trwania ruchu w powłoce obliczony wg obecnej teorii z uwzględnieniem siły rozciągania N_x od zerowego obciążenia do pewnego obciążenia jest większy w porównaniu z wynikiem otrzymanym z obliczeń bez uwzględnienia siły rozciągania N_x . Poza tym obciążeniem np. w naszym przypadku przy $P_x \approx 5$ czas ten jest mniejszy. Fakt ten pokazuje nam, że do pewnego /wysokiego/ impulsowego ciśnienia elementy konstrukcji poruszają się bardzo szybko i od razu zatrzymują się. Natomiast końcowe ugięcie obliczone wg teorii liniowej przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski jest większe w porównaniu z wynikiem końcowego ugięcia obliczonym wg obecnej teorii. Zastosowana metoda pozwala upraszczać równanie problemu i doprowadzić je do możliwie najprostszej postaci rozwiązania. Szczególnie w przypadku

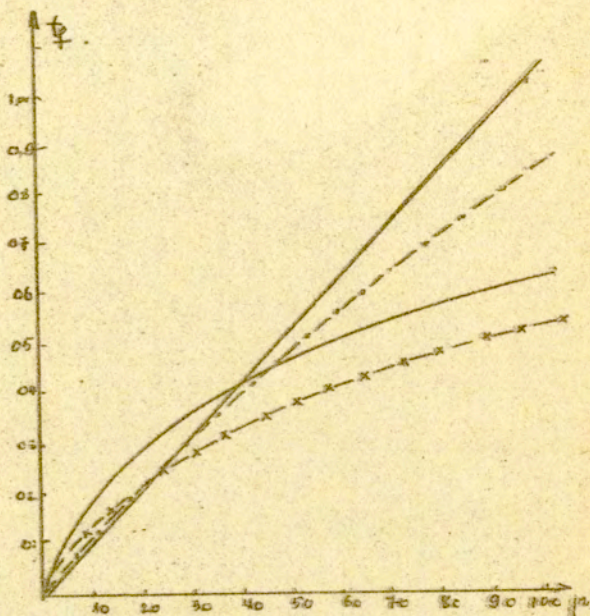
małych ugięć różnica pomiędzy wynikami otrzymanymi przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski, a wynikami uzyskanymi przy wykorzystaniu warunku plastyczności Hubera-Misesa jest mała.

Stąd więc możemy stwierdzić, że przy ograniczonych warunkach metoda ta jest dobra do rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia przy wykorzystaniu warunku plastyczności Hubera-Misesa, ponieważ różnica pomiędzy warunkami plastyczności Treski a Hubera-Misesa jest niewielka.

Warto podkreślić, że metoda rozwiązania zastosowana w przypadku Hubera-Misesa jest słuszna tylko przy takich ograniczonych warunkach rozpatrywanego zagadnienia. Jeżeli zastosujemy ją w przypadku np. długiej powłoki, to konieczne musimy jeszcze wymagać spełnienia warunku ortogonalności. Wyniki przedstawione są na rys.13 i wykazują, że jeśli ciśnienie występuje w krótkim czasie, to zmiana geometrii w konstrukcji jest niewielka. Fakt ten można wyjaśnić pojawieniem się siły bezwładności.

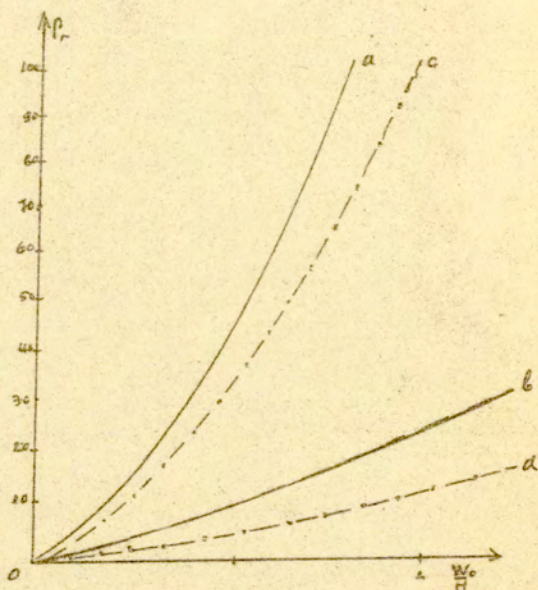
Uwagi końcowe

W obecnej pracy wyniki otrzymane w przypadku dużych ugięć przy wykorzystaniu warunku plastyczności Hubera-Misesa można rozpatrywać tylko jako przybliżone, ponieważ stosując rozdzielnie zmiennych rozpatrujemy tylko jeden punkt, a mianowicie środek powłoki i nie wykorzystujemy warunku ortogonalności, który daje nam średnią wartość rozwiązania. Tak więc dla dokładności musimy jeszcze znaleźć rozwiązania w innych punktach i porównać je z otrzymanym rozwiązaniem.



Rys. 12a

- Wyniki obliczeń czasu trwania ruchu w powłoce wg teorii ugięć a Guzych ugięć przy wykorzystaniu warunku plastyczności Treski,
- - Wyniki obliczeń czasu trwania ruchu w powłoce przy wykorzystaniu warunku plastyczności Hubera-Misesa z parametrem:



Rys. 12b

Wykres przedstawia obliczenia końcowych ugięć w środku powłoki z parametrem:

- a, b wyniki otrzymane przy wykorzystaniu warunku Bubera-Misesa wg teorii dużych i małych ugięć,
- c, d wyniki otrzymane przy wykorzystaniu warunku Treski wg teorii stanu błonowego naprężenia i małych ugięć.

References

1. Anderson R.W., and Lindberg H.E.,: "Dynamic pulse buckling of cylindrical shells under transient lateral pressure" A.I. A.A. J. 6, 589, 1968.
2. Abrahamson G.R., and Goodier J.N.,: "Dynamic plastic flow buckling of a cylindrical shell from uniform radial impulse" Proc. 4th U.S. Nat Congress on App.Mech. 939, 1962.
3. Aggarwal H.R., and Ablow C.M.: "Plastic beuding of an annular plate by uniform impulse" Int. J. Of Non-linear Mech. 6, 1, 69, 1971.
4. Batra R.C. and Dubey R.N.; "Impulsively loaded circular plates", Int. J. of Solid and Struc. 7, 8, 965, 1971.
5. Bondner S.R., Symonds P.S.: "Experimental and theoretical investigation of the plastic deformation of cantil ve beams Subjected to impulsive loading", J.App. Mech., 29, 719, 1961.
6. Bertholf L.D, Karnes C.H.: "Aisymetric elastic-plastic wave propagation 6061 - T6 aluminim bars of finite length", J.App. Mech., 36, 3, 1969.
7. Bejda J.: "Propagation of plane and axially Symmetric two-dimensional elastic-viscoplastic waves", Revue Roumaine des Sciences Tech. 15, 2, 1970.
8. Bejda J.: "Propagation of two-dimensional stress waves inelastic viscoplastic material", Proc. 12th International Congr. of Appl. Mech. Ed. M. Heutency, Berlin Springer 1969.
9. Clifton R.J.: "A difference method for plane problems in dynamic elasticity", Quart App. Math., 25, 1, 1967.
10. Cox A.D. and Morland L.W.: "Dynamic plastic deformations of Simply-Supported square plates" J.Mech.Phys. Solids 1, 229, 1969.
11. Cowper G.R. and Symonds P.S.: "Strain-hardening and strain-rate effects in the impact loading of cantilever beams". Tech.Rep. O.N.R. Contrac Non 562, 10, No 064-406, 1957.
12. Celledine C.R.: "Simple ideas in the large-deflection plastic theory of plates and slabs, Engineering plasticity", Ed. J.Heyman, F.A. Leckie, Cambridge University Press, 1968.

13. Duszek M.: "Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections", Arch. Mech. Stos. 18, 1966.
14. Duszek M. and Sawczuk A.: "Load deflexion relations of rigid-plastic cylindrical shells beyond the incipient collapse load", Int. J.Mech. SG 1970 vol.12, 839-849.
15. Duszek M.: "Plastic analysis of shallow spherical shells at moderately large deflections", I.U.TAM Symposim Theory Thin Shells Springer, Berlin 1969, 374-388.
16. Duszek M.: "Równanie teorii dużych ugięć powłok plastycznych", Prace IPPT IBTP RePOPIS 13/1971.
17. Donnell H.L.: "General thin shell displacement strain relations", Proc.4th U.S. Nat Congr. Appl.Mech. 1962 ASME New York 1963, 529-536.
18. Demir H.H. and Drucker D.C.: "An experimental study of cylindrical shells under ring loading", Progress in App. Mech., the Prager Anniversavy Volume, Macmillan, New York, 205, 1963.
19. Eason and Shield R.F.: "Dynamic loading of rigid-plastic cylindrical shells", J.of Mech. and Phys. of Solids, 4, 53-71, 1956.
20. Florence A.L.: "Clamped circular rigid-plastic plates under central blast loading", Int. J.Solids anet Struc., 2, 319, 1966.
21. Florence A.L.: "Circular plate under a uniformly distributed impulse", Int.J. Solids, Struc., 2, 37, 1966.
22. Hopkins H.G. and Prager W.: "On the dynamics of plastic circular plates" Z.A.M.P. J. of App.Math. Phys., 5, 317, 1954.
23. Hopkins H.G.: "The method of characteristics and its Application to the theory of stress waves in solids", Heyman, J. and Leckie F.A., edited by, Engn. plasticity, Cambridge, University Press, 277-315, 1968.
24. Hanagud, S., Ross B. and Sidnu : "Elastic-plastic Impact of plates", Israel, J. of Tech. 7, 1/2, 149, 1969.
25. Humphreys J.S.: "Experiments on dynamic plastic deformation of shallow circular arches", A.I. A.A.J. 4, 926, 1966.

26. Hodge P.G.: "Yield condition for rotationally Symmetric shells under rotationally Symmetric loading", J.App. Mech., 27, 1960.
27. Hodge P.G.: "The Mises yield condition for rotationally Symmetric shells", Quart. Appl. Math. 18, 305-311, 1961.
28. Hodge P.G.: "Impact pressure loading of rigid-plastic cylindrical shells", J. of the Mech. Phys. of Solids, 3, 176, 1955.
29. Hodge P.G.: "Ultimate dynamic load of a circular cylindrical shell". Proc.2nd Midwestern Conf. on Solid Mech., Lafayette ind 150, 1956.
30. Hodge P.G.: "Effect of 2nd conditions on dynamic loading of plastic shells", J. of Mech. phys. of Solids, 7, 258,1959.
31. Hodge P.G.: "The influence of blast characteristics on the final deformation of circular cylindrical shells", J.App. Mech., 23, 617, 1956.
32. Herranu W.: "Non linear stress waves in Metals in: Miklowitz", J. edited by, wave propagation in solids, New York, SAME, Publication 129, 1969.
33. Ilyushin A.A.: "Finite relation between forces and moments and their relation to the deformation of shells /in Russian/ Brikl. Mat. Mech., 9, 1945, 101-110.
34. Jones N.: "Impulsive loading of a Simply Supported circular rigid-plastic plate", J.Appl. Mech., 35, 1, 59-65, 1968.
35. Jones N.: "A theoretical study of the dynamic plastic behaviour of beams and plates with finite-deflections", Int. J. of Solids Struc., 7,8, 1007, Aug. 1971.
36. Jones N., Uran T.S., and Tekin S.A.: "The dynamic plastic behaviour of Puelly clamped rectangular plastic", Int.J. of Solids and Struc., 6, 12, 494 /Dec. 1970/.
37. Jones N.: "The influence of large deflections on the behaviour of rigid-plastic cylindrical shells loaded impulsively", J. of Appl. Mech., 37, 2, 416 /June 1970/.

38. Jones N., Griffin R.N., and Van Duzer R.E.: "An Experimental Study into the dynamic plastic behavior of wide beams and rectangular plates", Int. J. of Mech.Sci., 13,8, 721 /Aug. 1971/.
39. Janssen D.M., and Datta S.K.: "Propagation of weak waves in elastic-plastic solids" J.Mech.phys. solids, 20, 2, 1-18 /Niar 1972/.
40. Johnson J.N.: "An analysis of thermally-induced plane waves in elastic-plastic single crystals", J.Mech.phys., solids, 20, 367 No 6 /Dec. 1972/.
41. Kuzin P.A. and Shapiro G.S.: "On dynamic behavior of plastic structures", Ed. H.Gürzler proc. 11th Int. congress of Appl. Mech. Munich 1964 Springer Verlag, New York, 629, 1966.
42. Kaliszky S.: "Approximate solutions for impulsively loaded inelastic structures and continua", Int. J.Non linear Mech., 5, 143, 1970.
43. Leach J.W., Witmer E.A., Pian T.H.H.: "Numerical calculation technique for large elastic plastic transient deformations of thin shell", A.I. A.A.J., 6, 12, 2352-2359, 1969.
44. Lepik U.: "Large deflections of rigid plastic cylindrical shells under axial tension and external pressure", Nuclear engineering design 1966, 4, 29-38.
45. Lepik U.: "Dynamika kołowych i pierścieniowych płyt z materiału sztywno-plastycznego wrażliwego na prędkość odkształcenia", Příkladna Mechanika, 5, 1, 60-66, 1960.
46. Lec E.H. and Symonds P.S.: "Large plastic deformations of beams under transverse impact", J.App.Mech., 19, 308,1952.
47. Martin J.B. and Symonds P.S.: "Mode approximations for impulsively loaded rigid-plastic structures", Proc. Am. Soc. Civ. Engrs. 92, 43, 1966.
48. Martin J.B.: "Impulsive loading theorems of rigid-plastic Continua" Proc. Am.Soc.Civ. Eng., 90, 27, 1964.

49. Murakami S., Bejda J.: "Two-dimensional cylindrical problem of elastic-viscoplastic wave propagation", Arch.Mech., 23, 2, 199-211, 1971.
50. Mróz Z., Xubin-Ye.: "The load carrying capacities of symmetrically loaded spherical shells, Arch. Mech. Stos., 15, 245-266, 1963.
51. Morino L., Leech J.W.: "Numerical calculation technique for large elastic-plastic transient deformations of thin shells" J.App.Mech., 38, 2, 423, 1971.
52. Morales W.J. and GE Nevill Lower: "Founds on deformations of dynamically loaded rigid-plastic continua", ATAA Journal, 8, 2043, 1970.
53. Nemirowsky Y.V. and Mazalov V.N.: "Dynamic behavior of cylindrical shells strengthened with ring ribe Part I Infinitely long shell", Int. of solids x struc., 5, 817, 1969.
54. Nowiński J.L.: "Large amplitude ascilation of triangular plates" J.Franklin Inst., 273, 1965.
55. Perzyna P.: "Dynamic load carrying capacity of a circular plate", Arch. Mech. Stos., 10, 635, 1958.
56. Perzyna P.: "The constitutive for rate sensitive plastic materials" Quart Appl. Math., 20, 321-332, 1962.
57. Pabianek A.: "Dynamic loading of rigid-viscoplastic cylindrical shell", Arch., 21, 2, 199-211, 1969.
58. Robinson D.N.: "A displacement bound principle for elastic-plastic structures subjected to blast loading" J.Mech. x Physic of solids, 18, 65, 1970.
59. Sawczuk A.: "On formulation of large deflection theory for perfectly-plastic shells", App. Mech. Varna 1969.
60. Sawczuk A., Duszek M.: "Ozwiązках podstawowych teorii powłok plastycznych", Rozpr. Inż. 18, 4, 1970.
61. Sawczuk A., Hodge P.G.: "Comparison of yield conditions for circular cylindrical shells", J.Franklin Inst., 269, 5, 362-374, 1960.

62. Sawczuk A., Rychlewski J.: "On yield surfaces for plastic shells", Arch. Mech. Stos., 12, 29-53, 1960.
63. Shapiro G.S.: "On yield surfaces for ideally plastic shells" problems of Continuum Mechanics, SIAM. Philadelphia, 414-418, 1961.
64. Szapiro G.S.: "Uderzenie w sztywno-plastyczną płytę pierścieniową" PMM, 23, 1, 234-241, 1959.
65. Symonds P.S.: "Dynamic load characteristics in plastic bending of beams", J. of App. Mech., 475-484, 1953.
66. Lee E.H., Symonds P.S.: "Large plastic deformation of beams under transverse impact" J.Appl.Mech., 19, 308, 1953.
67. Symonds P.S., Jones N.: "Impulsive loading offurrlly clamped beams with finite plastic deflections and strain-rate sensitivity", Int.J.Mech. Sci., 14-49, 1972.
68. Sankaranarayanan R.: "On the dynamics of plastic spherical shells", J.Appl.Mech., 30-87, 1963.
69. Sankaranarayanan R.: "On the impact pressure loading of a plastic spherical", Cap. J. Appl. Mechanic., 33, 704, 1966.
70. Wierzbicki T.: "Bending of rigid-viscoplastic circular plates", Arch. Mech., 16, 5, 1964.
71. Wierzbicki T.: "Dynamics of rigid-viscoplastic circular plates", Arch.Mech., 17, 851, 1965.
72. Wierzbicki T.: "Impulsive loading of yield viscoplastic plates", Int. solids structures 3, 635-647, 1967.
73. Wierzbicki T.: "Large deflections of strain rate sensitive plate loaded impulsively", Arch.Mech., 21, 1, 67-79, 1969.
74. Wierzbicki T.: "Dynamika powłok lepkoplastycznych", Rozpr. Inż., 19,4, 667-730.

75. Wojewódzki W.: "Dynamic buckling of a viscoplastic cylindrical shell subjected to axial impact", Arch.Mech., 23, 1, 73-92, 1971.
76. Witmer B.A., Balmer H.A., Leech J.W., Pian T.H.H.: "Large dynamic deformations of beams, circular rings circular plates and shells", 1, 8, 1848-1857, 1963.
77. Wang A.J and Hopkins H.G.: "On the plastic deformation of built in circular plates under impulsive load", J.Mech.Physic solid, 3, 22, 1954.
78. Youngdahl C.K.: "Dynamic plastic deformation of circular cylindrical shells", Transactions of the ASME J.App.Mech., 1972, 746-750.
79. Youngdahl C.K.: "The Equivalence of dynamic loads for the final plastic deformation of a cube", Proceedings of the first International Conference on Pressure Vessel Technology CONF 690906 V. 1, 1969, 69-100.