

- 1.2. — metoda elementów skończonych
- 2.2. — mechanika ośrodków ciągłych
- 5.2.8. — teoria fizyczna, mechanizmy
- 5.3.12. — teoria fizyczna, dyslokacji
- 5.4.2. — termolepkosprężystość
- 5.4.3. — termolepkoplastyczność

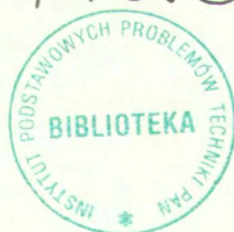
PRACA HABILITACYJNA

Paweł Dłużewski

KONTYNUALNA TEORIA DYSLOKACJI
JAKO TEORIA KONSTITUTYWNEGO
MODELOWANIA SKOŃCZONYCH,
SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH DEFORMACJI

13/1996

P. 269

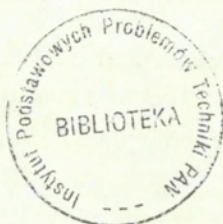


WARSZAWA 1996

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 sierpnia 1996 r.

PRACA WYBILANSOWANA



56559

Praca habilitacyjna
recenzent Prof. dr hab. Jan Sławianowski



Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 5,50 Ark. druk. 7,25
Oddano do drukarni we wrześniu 1996 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul. Jasna 1

<http://rcin.org.pl>

Paweł Dłużewski
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
ul. Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa

Kontynualna teoria dyslokacji jako teoria konstytutywnego modelowania skończonych, sprężysto–plastycznych deformacji

Streszczenie

Niniejsza praca dotyczy modelowania konstytutywnego skończonych, sprężysto–plastycznych deformacji. Jako prawo plastycznego płynięcia wykorzystano tu równanie zaczerpnięte z kontynuальной teorii defektów. W pracy założono, że gęstość energii swobodnej zależy od skończonej, tensorowej miary gęstości dyslokacji. Wykorzystując to podstawowe założenie i stosując metody termodynamiki określono termodynamiczne siły napędowe rządzące ruchem pola dyslokacji. Otrzymane rozwiązanie analityczne może być wykorzystane do modelowania ruchu takich defektów jak dyslokacje, defekty punktowe, niskokątowe granice ziarn itp. Praca zawiera również wyniki obliczeń numerycznych uzyskane przy zastosowaniu metody elementów skończonych. Sformułowany algorytm numeryczny odpowiada modelowaniu sprężysto–plastycznych deformacji przy wykorzystaniu kontynuальной teorii dyslokacji.

Konieczność wprowadzenia definicji zorientowanego kontinuum spowodowała przyjęcie nieco odmiennych założeń matematycznych niż te, które się zwykle stosuje w klasycznej mechanice kontinuum. Stąd też cały drugi rozdział został poświęcony omówieniu podstawowych założeń matematycznych dotyczących m. in. definicji przestrzeni wektorowej, iloczynu wektorowego i innych niezbędnych pojęć z zakresu algebry wektorów i tensorów. Zostały również omówione własności geometryczne przestrzeni orientacji — w tym jej struktura riemannowska, teleparalelizm, symbole koneksji odpowiadające kątom Eulera i składowe tensorów zakrzywienia i skrzywienia przestrzeni orientacji.

W rozdziale poświęconym geometrii i kinematyce zorientowanego kontinuum zostały zdefiniowane miary zakrzywienia kontinuum. Przedstawiono szczegółową dyskusję tensorowych związków zachodzących pomiędzy miarami zakrzywienia stosowanymi w różnych

szczególnych teoriach zorientowanego kontinuum, takich jak ośrodek Cosserat i kontynu-
alna teoria dyslokacji. Między innymi omówiono relacje tensorowe zachodzące pomiędzy
tensorami zakrzywienia i wykrzywienia zorientowanego kontinuum oraz miarami spręży-
stego i plastycznego zakrzywienia kontinuum.

Rozdział 4 jest poświęcony związkom kontynualnej teorii dyslokacji z mechaniką zo-
rientowanych ośrodków ciągłych. W rozdziale tym wychodząc z definicji tensora gęstości
dyslokacji pokazano, że tensor ten jest niczym więcej jak tylko jedną z wielu różnych miar
plastycznego zakrzywienia zorientowanego kontinuum. Omówiono również podstawowe
równania wyróżniające kontynualną teorię dyslokacji spośród innych teorii zorientowa-
nego kontinuum.

Termodynamicznym podstawom kontynualnej teorii dyslokacji jest poświęcony roz-
dział 5. Przedstawiono w nim nowe rozwiązanie analityczne dla termodynamicznych sił
napędowych na polu defektów struktury. Rozwiązanie to uwzględnia zależność energii
swobodnej od tensora gęstości dyslokacji.

W kolejnym rozdziale poświęconym zastosowaniu metody elementów skończonych zo-
stał przedstawiony algorytm numeryczny oraz wyniki obliczeń komputerowych. Algorytm
ten łączy w sobie wzajemne sprzężenia pomiędzy zagadnieniem modelowania przepływu
dyslokacji i zagadnieniem modelowania deformacji sprężysto-plastycznych.

Ze względu na zawilości rachunkowe związane z koniecznością dowodzenia wielu no-
wych zależności, oraz w celu uzyskania zwięzłej i przejrzystej formy pracy, autor zde-
cydował się na umieszczenie w dodatku A części bardziej istotnych i mniej oczywistych
dowodów. Dodatek B zawiera spis publikacji autora.

Podziękowanie

Niniejsza praca została wykonana w ramach projektu badawczego KBN nr 7T07A01009
pt. *Wykorzystanie tensorowych miar defektów struktury do opisu mechanicznych własno-
ści materiałów*. Wyrazy podziękowania autor składa kolegom z Samodzielnej Pracowni
Teorii Materiałów Niesprężystych za wiele wspólnych dyskusji na temat zastosowania
kontynualnej teorii dyslokacji jako teorii niesprężystej deformacji materiałów.

W tym miejscu autor chciałby również wyrazić swój szacunek i wdzięczność tym
wszystkim, którzy przyczynili się do tego, że IPPT jest tak bogatym źródłem wiedzy
na temat kontynualnej teorii dyslokacji i innych, pokrewnych teorii konstytutywnego mo-
delowania. Przebywanie na co dzień w tym ośrodku było fundamentem, na którym mogła
powstać obecna praca.

Warszawa 9 września 1996 r.

Paweł Dłużewski

Spis treści

1	Wstęp	7
1.1	Cel i zakres pracy	8
2	Podstawowe pojęcia i definicje	11
2.1	Przestrzeń wektorowa (V)	11
2.2	Przestrzeń wektorowa styczna do rozmaitości	14
2.2.1	Różniczkowanie kowariantne	15
2.3	Przestrzeń orientacji (\mathcal{O}^3)	16
2.3.1	Przestrzeń orientacji jako przestrzeń Riemanna	16
2.3.2	Baza wektorowa styczna	17
2.3.3	Niesymetryczne koneksje	19
2.3.4	Pochodne kowariantne po zmianie orientacji	21
2.4	Przestrzeń położeń (E^3)	23
2.4.1	Pochodna kowariantna po zmianie położenia	23
2.4.2	Różniczkowanie zmian położenia	24
2.5	Operatory pola tensorowego	25
3	Kinematyka zorientowanego kontinuum	29
3.1	Ruch zorientowanego kontinuum	29
3.2	Gradyenty deformacji	33
3.2.1	Klasyczny gradient deformacji	33
3.2.2	Gradyenty pól orientacji	34
3.2.3	Obroty i dystorsje	34
3.2.4	Warunek zgodności przemieszczeń	35
3.2.5	Warunek zgodności obrotów	39
3.3	Sprężyste i plastyczne dystorsje	41
3.3.1	Warunek zgodności przemieszczeń	43
3.3.2	Warunek zgodności obrotów	48
3.4	Miary prędkości deformacji	48
4	Kontynualna teoria defektów	51
4.1	Zakrzywienie plastyczne, a tensor gęstości dyslokacji	52
4.1.1	Zakrzywienie plastyczne, a granice ziarn	58
4.2	Podstawowe równania kontynualnej teorii dyslokacji	59
4.3	Defekty punktowe	61
4.3.1	Miary gęstości defektów punktowych	61
4.3.2	Prawo bilansu defektów punktowych	62

4.4	Ruch defektów punktowych i dyslokacji	63
4.5	Dysklinacje i defekty wyższych rzędów	64
5	Termodynamiczne podstawy kontynualnej teorii dyslokacji	66
5.1	Prawa bilansu	67
5.2	Równanie konstytutywne dla energii swobodnej	68
5.3	Siły napędowe na polu dyslokacji	70
5.4	Równania konstytutywne dla ruchu defektów	71
5.5	Jednoczesny ruch wielu, różnych pól defektów	71
6	Zastosowanie metody elementów skończonych	73
6.1	Liniowa kontynualna teorii dyslokacji	74
6.1.1	Układy równań i liczba niewiadomych	76
6.2	Algorytm numeryczny	78
6.3	Program komputerowy	79
6.4	Opis rozwiązanego przykładu	80
6.5	Dyskusja uzyskanych wyników numerycznych	85
6.5.1	Inne próby komputerowej symulacji	86
6.5.2	Wnioski z komputerowej symulacji	87
6.5.3	Dalsze możliwości rozwoju algorytmu numerycznego	88
7	Podsumowanie	89
A	Wyprowadzenia równań i komentarze	97
B	Wykaz publikacji autora	111

Rozdział 1

Wstęp

Rzeczony inżynierii materiałowej oraz technologii wytwarzania materiałów stał się przyczyną wzrostu zainteresowania zagadnieniami wpływu mikrostruktury na własności fizyczne materiałów. Zainteresowanie to jest również związane z postępowaniem w zakresie metod obserwacji struktury materiałów. Obecnie metody te pozwalają na obserwację pojedynczych defektów struktury, a nawet obserwację ułożenia atomów wokół defektów. Wyniki badań eksperymentalnych dostarczają więc całą gamę bardzo szczegółowych danych dotyczących geometrii struktury materiałów. Niemniej, praktyczne wykorzystanie tych danych napotyka na barierę związaną z brakiem matematycznych metod, które pozwalałyby na efektywne modelowanie obserwowanych procesów ewolucji mikrostruktury. Stąd też, pomimo tak olbrzymich możliwości obserwacji struktury materiałów, nadal jednym z podstawowych narzędzi służących do praktycznego modelowania sprężysto–plastycznych deformacji pozostaje mechanika kontinuum. Z drugiej jednak strony klasyczne teorie plastyczności nie dają możliwości opisu wielu, nawet bardzo podstawowych procesów sprężysto–plastycznej deformacji. Między innymi dotyczy to zagadnień związanych z reorientacją mikrostruktury, np. procesów formowania się granic ziarn w kryształach, czy zagadnienia koincydencji granic. Opis tego typu zagadnień wymaga wprowadzenia do mechaniki kontinuum odpowiednich miar pozwalających na matematyczny opis wpływu reorientacji mikrostruktury na energię wewnętrzną materiału. Stało się to powodem podjęcia przez autora badań nad teorią zorientowanego kontinuum. Tego typu teoria daje możliwość opisu wspomnianych zjawisk. Wymaga ona jednak wprowadzenia dodatkowych miar deformacji materiału pozwalających ująć w kategoriach matematycznych, te podstawowe własności stanu materiału, które decydują o procesie reorientacji bądź reorganizacji mikrostruktury.

W pracy zdecydowano się na opis procesu deformacji w zakresie tzw. skończonych (dużych) deformacji. Takie podejście wiąże się z koniecznością stosowania złożonych wzorów matematycznych, niemniej daje ono dodatkowe możliwości, np:

- uwzględnia zmiany konfiguracji ciała,
- pozwala zbilansować energię na zamkniętych cyklach deformacji.

To właśnie bilansowanie energii jest żelazną weryfikacją odpowiadającą na pytanie: na ile dana, niekiedy na pierwszy rzut oka bardzo atrakcyjna, miara deformacji rzeczywiście nadaje się do modelowania konstytutywnego. Czy też wspomniana miara prowadzi jedynie do modeli konstytutywnych typu perpetum mobile — nie bilansujących energii na zamkniętych cyklach deformacji.

1.1 Cel i zakres pracy

Motywacją do podjęcia niniejszych badań były zainteresowania autora miarami zakrzywienia kontinuum oraz szerokie możliwości wykorzystania tych miar. Możliwości te tkwią m. in. w modelowaniu procesów sprężysto–plastycznej deformacji materiałów takich, jak procesy formowania się niskoenergetycznych struktur kryształów ze względu na rozkład orientacji sieci.

Z drugiej zaś strony już na podstawie wcześniejszych badań, m. in. NYE'A (1953), KAFADARA i ERINGENA (1971), oraz własnych DŁUŻEWSKI (1991a,b, 1993, 1996) autor zdawał sobie sprawę z tego, że istnieje wiele różnych miar zakrzywienia kontinuum. Miary te są wykorzystywane m. in. w teorii ośrodków polarnych oraz w kontynualnej teorii dyslokacji. Stąd też pojawił się pierwszy cel pracy jakim była odpowiedź na pytanie: *jakie relacje tensorowe zachodzą pomiędzy różnymi miarami zakrzywienia materiału?* Wiązało się to z koniecznością przedstawienia pewnego jednolitego podejścia matematycznego, na podstawie którego można by, w stosunkowo naturalny sposób, sklasyfikować miary zakrzywienia stosowane w zakresie skończonych deformacji. Taką matematyczną próbą sklasyfikowania tych miar jest rozwijana tu koncepcja zorientowanego sprężysto–plastycznego kontinuum. Tak więc celem pracy było m. in. sklasyfikowanie podstawowych miar zakrzywienia i odpowiedź na pytanie: *jakie tensorowe związki zachodzą między różnymi miarami zakrzywienia w zakresie skończonych deformacji?*

Poważnym problemem matematycznym na jaki napotyka się przy podejmowaniu próby sklasyfikowania miar zakrzywienia struktury materiału jest różnorodność sposobów matematycznego opisu rozkładów orientacji kontinuum. Jedni autorzy wykorzystują tu tensory trzeciego rzędu, np. definiują zakrzywienie kontinuum w oparciu o gradient tensora obrotów, np. TOUPIN (1964). Inni stosują tensory drugiego rzędu otrzymywane poprzez odpowiednie zwężenia wspomnianych tensorów trzeciego rzędu, bądź też definiują tensory zakrzywienia w zupełnie inny sposób, np. próbując wykorzystywać różnego rodzaju współrzędne kątowe np. KAFADAR i ERINGEN (1971). Jeszcze inni poszukują możliwości wykorzystania innych parametryzacji przestrzeni orientacji, np. za pomocą kwaternionów, wektorów obrotu, parametrów Rodriguesa itp., porównaj ARGYRIS (1982), PIETRASZKIEWICZ i BADUR (1983), MORAWIEC (1990), BLINOWSKI (1994), KUMAR i DAWSON (1996).

Autor zdecydował się na wykorzystanie kątów Eulera traktując je tylko jako jeden z przykładów krzywoliniowego układu współrzędnych na przestrzeni orientacji. W literaturze poświęconej skończonym deformacjom ośrodków zorientowanych istnieje wiele przykładów, gdzie brak znajomości rachunku tensorowego w zakresie stosowania kątów jako współrzędnych krzywoliniowych (postać tensora metrycznego, różnego typu koneksje, teleparalelizm, postać tensora skręcenia przestrzeni) były powodem tego, że próby definiowania tensorów zakrzywienia w oparciu o współrzędne kątowe kończyły się niepowodzeniem. Posługiwanie się w niniejszej pracy kątami Eulera jako współrzędnymi krzywoliniowymi na przestrzeni orientacji pociągnęło za sobą konieczność przedstawienia istotnych tu własności przestrzeni orientacji. Bez opanowania tych podstaw nie byłoby możliwe udowodnienie wielu ważnych związków dotyczących różniczkowania kątów Eulera, np. udowodnienie związku (3.71) (str. 98).

Wykorzystując przestrzeń orientacji do określania tensorów zakrzywienia kontinuum nie sposób pominąć zagadnienia tensorów zakrzywienia samej przestrzeni orientacji, tym bardziej, że wielu autorów zajmujących się kontynualną teorią dyslokacji identyfikuje ten-

sory zakrzywienia ciała z tensorami zakrzywienia przestrzeni, porównaj KONDO (1952), BILBY (1960), ŻÓRAWSKI (1963) GAIROLA (1972), TRZĘSOWSKI (1994a,b). Przy takim podejściu to nie ciało deformując się zmienia swoje położenie i kształt w pewnym ustalonym układzie współrzędnych w przestrzeni fizycznej, ale to układ współrzędnych wraz z przestrzenią (!) deformuje się, a w związku z tym przestrzeń fizyczna przechodzi w pewną trójwymiarową, zakrzywioną przestrzeń. Tego typu (abstrakcyjne) teorie dyslokacji nie są przedmiotem niniejszej pracy. Tym bardziej, że na ogół nie ma w nich ani słowa o siłach działających na pole dyslokacji nie mówiąc już o termodynamice, modelowaniu konstytutywnym, czy o rozwiązywaniu konkretnych problemów brzegowych. Z reguły w tego typu teoriach poświęconych geometrii pojęcie plastycznej deformacji materiału w ogóle nie występuje (!), a tensor gęstości dyslokacji jest tam traktowany jedynie jako pewna miara niekompatybilności pozwalająca na przeniesienie rozważań ze „zbyt ubogiej” przestrzeni euklidesowej do znacznie bogatszej, abstrakcyjnej, trójwymiarowej, zakrzywionej przestrzeni zwanej przestrzenią materialną. Tak więc warto tu jeszcze raz mocno podkreślić, że poza wspólnie wykorzystywaną nazwą *Nieliniowej kontynuualnej teorii dyslokacji* obecna praca niewiele ma wspólnego z tego typu geometrycznymi teoriami opisu trójwymiarowych, zakrzywionych, przestrzeni „materialnych”.

Czytelnik może jednak postawić uzasadnione pytanie: *Jeśli tak to na jakich podstawach teoretycznych oparta jest niniejsza praca wykorzystująca przecież pojęcie nieliniowej kontynuualnej teorii dyslokacji?* Korzenie tej pracy sięgają do prac: NYE'A (1953), TEODOSIU (1970), MANDELA (1972), częściowo do wczesnych prac KRÖNERA (1955, 1958) i MURY (1968).

Przeglądając prace z zakresu tak rozumianej kontynuualnej teorii dyslokacji można zauważyć, że na ogół, unika się w nich założenia, iż gęstość energii materiału zależy od tensora gęstości dyslokacji, porównaj np. KRÖNER (1981), KOSEVICH (1979), MURA (1969), IGNACZAK i RAO (1993). W tym wypadku wyjątek stanowią ośrodki polarne, gdzie zależność gęstości energii swobodnej od tensora gęstości dyslokacji prowadzi do różnego rodzaju naprężeń momentowych, porównaj np. NAGHDI i SRINIVASA (1994). W innych przypadkach, aby zbilansować dodatkowe człony pojawiające się w prawie zachowania energii postuluje się dodatkowe prawa bilansu, np. prawa bilansu mikropędu i mikromomentu pędu, porównaj np. ERICKSEN (1983), RYMARZ (1989, 1990) oraz LE & STUMPF (1996a).

W pokrewnej teorii, jaką jest kontynuualna teoria defektów, aby uzyskać rozwiązanie uwzględniające zależność energii od gęstości defektów, wprowadza się dodatkowe założenia, np. postuluje się prawo bilansu defektów, porównaj DŁUŻEWSKI (1996), bądź postuluje się prawo bilansu dla sił konfiguracyjnych wykonujących pracę na przemieszczeniach defektów, porównaj np. GURTIN (1995).

Wyżej wymienione prace dotyczą głównie ostatnich lat. Pomimo, że prace te znacznie różnią się między sobą, to łączy je jednak wspólne przekonanie o tym, że zbilansowanie energii zależnej od miar gęstości defektów wymaga wprowadzenia dodatkowego prawa bilansu, bądź założenia niesymetrycznej postaci tensora naprężeń. O ile wiadomo autorowi rozprawy, w kontynuualnej teorii dyslokacji, formułowanej na gruncie klasycznych praw bilansu i symetrycznej sprężystości, nie prezentowano dotychczas rozwiązań dotyczących określenia sił napędowych generowanych zależnością energii swobodnej od tensora gęstości dyslokacji. Ten niedostatek wytyczył cel obecnej pracy w zakresie termodynamiki. Celem tym było zbilansowanie termodynamicznych sił napędowych na polu dyslokacji przy jednoczesnym zachowaniu trzech podstawowych założeń:

1. gęstość energii swobodnej zależy od tensora gęstości dyslokacji,
2. tensor naprężeń jest symetryczny,
3. analiza jest prowadzona przy uwzględnieniu tylko (!) klasycznych praw bilansu, tzn. bilansu masy, pędu, momentu pędu, energii i nierówności entropii.

Pod pojęciem zbilansowania termodynamicznych sił napędowych na polu dyslokacji jest tu rozumiane nie tylko określenie wszystkich składowych tych sił, ale pokazanie również, że istnieją równania konstytutywne dla ruchu dyslokacji, które zapewniają spełnienie pierwszego i drugiego prawa termodynamiki.

Z punktu widzenia praktycznego wykorzystania kontynualnej teorii dyslokacji autor postawił sobie za cel zastosowanie wspomnianej teorii do rozwiązania problemu początkowo-brzegowego. Ze względu na rozwój metod komputerowych zastosowano metodę elementów skończonych.

Rozdział 2

Podstawowe pojęcia i definicje

W niniejszej pracy kontynuacja teorii dyslokacji jest traktowana jako pewien przypadek szczególny zorientowanego kontinuum. Bieżący rozdział jest poświęcony omówieniu podstawowych pojęć z zakresu algebry tensorowej, analizy i geometrii. W następnym rozdziale na gruncie zdefiniowanych tu pojęć zostanie podana matematyczna definicja ruchu zorientowanego kontinuum. Z punktu widzenia mechaniki koncepcja zorientowanego kontinuum jest blisko związana z teorią ośrodków Cosserat, niemniej, o ile za podstawę ośrodków Cosserat uznaje się tzw. naprężenia momentowe, o tyle za podstawę ośrodka zorientowanego przyjmuje się założenie dotyczące istnienia dodatkowego stopnia swobody ruchu dopuszczającego możliwość obrotu cząstek kontinuum (niezależnego od pola przemieszczeń). Stąd też w kategoriach tak rozumianego zorientowanego kontinuum mieszczą się nie tylko teorie naprężeń momentowych, ale cała grupa innych modeli konstytutywnych, a w tym kontynuacja teorii dyslokacji oraz teorie modelujące tzw. spin plastyczny.

Niniejszy rozdział podzielony jest na cztery zasadnicze części, z których pierwsza dotyczy przestrzeni wektorowej, druga związków tak zdefiniowanej przestrzeni wektorowej z różniczkową, trzecia geometrii orientacji, a czwarta dotyczy opisu położenia cząstek zorientowanego kontinuum. Pewnym uzupełnieniem jest tu podrozdział 2.5 prezentujący przyjętą w pracy notację dla operatorów pól tensorowych.

2.1 Przestrzeń wektorowa (V)

W zakresie rachunku tensorowego spotyka się na ogół dwa sposoby definiowania wektorów. Pierwszy z nich (zdaniem autora bardziej elegancki) wprowadza pojęcie wektora i przestrzeni wektorowej na gruncie algebry, porównaj np. BOWEN i WENG (1976a), SKALMIERSKI (1977), KOMOROWSKI (1978). W tego typu definicjach nie używa się pojęcia krzywoliniowego układu współrzędnych, czy też pojęcia różniczkowej. Drugi sposób definiowania wektorów, niezwykle popularny w mechanice i fizyce kontinuum, łączy (miesza) pojęcia z zakresu algebry i geometrii definiując wektory na podstawie praw transformacji dla układów współrzędnych, porównaj EISENHART (1949), SCHOUTEN (1951), SYNGE i SCHILD (1964), ERICKSEN (1960), ERINGEN (1971), MARSDEN i HUGHES (1983). W niniejszej pracy, aby podkreślić różnicę między algebrą tensorową, a analizą tensorową i geometrią, zdefiniowano przestrzeń wektorową na gruncie algebry, a dopiero w dalszej kolejności omówiono ewentualny związek tak zdefiniowanej przestrzeni wektorowej z różniczkową.

Definicja przestrzeni wektorowej Przestrzeń wektorową na ogół utożsamia się z przestrzenią liniową zdefiniowaną bądź to na ciele liczb rzeczywistych bądź to na ciele liczb zespolonych. Nie oznacza to jednak, że nie można przyjąć innej definicji. Z punktu widzenia rachunku tensorowego można go budować również na innych, mniej lub bardziej ogólnych strukturach algebraicznych, takich jak moduł czy wektorowa przestrzeń euklidesowa, porównaj np. BOURBAKI (1956), RYCHLEWSKI (1996). Ze względu na fizyczną stronę zagadnienia nasze zastosowanie algebry tensorowej będzie się ograniczać jedynie do takiej struktury algebraicznej, w której istnieje jednoznacznie zdefiniowany iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy. Stąd też przyjmujemy następującą definicję przestrzeni wektorowej:

Definicja 2.1 *Przestrzeń wektorową nazywać będziemy przestrzeń unitarną zorientowaną określoną na ciele liczb rzeczywistych.*

Pod pojęciem przestrzeni unitarnej zorientowanej rozumiana jest struktura algebraiczna złożona z przestrzeni liniowej, na której zostały dodatkowo określone: iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy. Bardziej dokładna definicja przestrzeni unitarnej zorientowanej pociąga za sobą konieczność zdefiniowania innych struktur algebraicznych takich jak grupa, pierścień, ciało itd., dlatego też przyjmujemy tu klasyczne definicje powyższych struktur za ogólnie dostępną monografią KOMOROWSKIEGO (1978).

Iloczyn skalarny Włączenie iloczynu skalarnego do definicji przestrzeni wektorowej powoduje, że nie będziemy tu mówić o wektorze kontrawariantnym, np. v^k , należącym do przestrzeni liniowej L i o wektorze do niego dualnym v_k należącym do innej przestrzeni liniowej L^* , ale będziemy mówić o ko- i o kontra-wariantnej reprezentacji wektora v należącego do przestrzeni wektorowej V . Reprezentacje te będą zdefiniowane jako

$$v^k \stackrel{df}{=} v \cdot e^k \quad (2.1)$$

$$v_k \stackrel{df}{=} v \cdot e_k \quad (2.2)$$

gdzie \cdot oznacza iloczyn skalarny podczas gdy wektory e_1, \dots, e_n i odpowiednio e^1, \dots, e^n tworzą wzajemnie przeciwne bazy wektorowe $\{e_k\}$ i $\{e^k\}$ w V , tzn.

$$e_k \cdot e^l = \delta_{kl} \quad (2.3)$$

gdzie δ_{kl} jest Deltą Kroneckera. Oznacza to, że

$$v, e_1, \dots, e_n, e^1, \dots, e^n \in V \quad (2.4)$$

Wykorzystując iloczyn skalarny oraz w/w bazy wektorowe wprowadzimy pojęcie tensora podstawowego przestrzeni wektorowej (fundamental tensor).

Definicja 2.2 *Tensorom podstawowym przestrzeni wektorowej V nazywać będziemy następujący tensor*

$$g \stackrel{df}{=} (e^k \cdot e^l) e_k \otimes e_l \quad (2.5)$$

gdzie \otimes oznacza iloczyn tensorowy.

Iloczyn tensorowy wektorów jest tu rozumiany w sensie klasycznym, porównaj np. KOMOROWSKI (1978) str. 81. Przestrzeń unitarna na ciele liczb rzeczywistych jest niekiedy nazywana wektorową przestrzenią euklidesową. Należy tu jednak podkreślić zasadniczą różnicę między wektorową przestrzenią euklidesową, która jest strukturą algebraiczną, a punktową przestrzenią euklidesową, która jest strukturą geometryczną. Niekiedy można spotkać się z opinią, że różnica ta dotyczy jedynie nazewnictwa i ma raczej znaczenie czysto formalne. Różnica ta ma w mechanice swoje poważne konsekwencje rachunkowe w postaci dwóch różnych sposobów różniczkowania, np. przy obliczaniu gradientów deformacji, porównaj np. (2.76) i (2.77) (str. 24).

Iloczyn wektorowy W klasycznym podejściu do opisu ruchu kontinuum wykorzystuje się przestrzeń euklidesową. Tak zdefiniowana przestrzeń nie jest przestrzenią zorientowaną, co oznacza, że nie można poprawnie zdefiniować w niej iloczynu wektorowego. Niemożliwość ta wynika z faktu nierozróżniania prawo- i lewoskrętnych baz wektorowych. Z punktu widzenia algebry wprowadzenie pojęcia orientacji przestrzeni wektorowej prowadzi do zdefiniowania innej struktury algebraicznej jaką jest zorientowana przestrzeń euklidesowa, porównaj np. KOMOROWSKI (1978). W podręcznikach z zakresu mechaniki kontinuum fakt ten jest często lekceważony.

W wypadku klasycznego kontinuum zastosowanie iloczynu wektorowego można ograniczyć do matematycznego wyrażenia globalnej postaci prawa zachowania momentu pędu, które i tak prowadzi tam jedynie do symetrii tensora naprężeń Cauchy'ego. Innymi słowy, w klasycznym sformułowaniu możemy pominąć prawo bilansu momentu pędu zakładając jednocześnie a priori symetrię tensora naprężeń. Co więcej, jeśli nawet zachowamy postać globalną tego prawa to orientacja przestrzeni wektorowej nie ma i tak żadnego znaczenia (poza poprawnością definicji iloczynu wektorowego), gdyż w klasycznej mechanice kontinuum prawo bilansu momentu pędu sprowadza się jedynie do żądania, aby odpowiedni iloczyn wektorowy był równy zeru. W wypadku zorientowanego kontinuum, nie mamy już takiego komfortu, gdyż wielokrotnie zmuszeni jesteśmy używać iloczynu wektorowego, a w ten sposób otrzymywane wielkości wektorowe i tensorowe nie są równe zeru! Stąd też ich orientacja ma dla nas fundamentalne znaczenie. Na zakończenie rozważań na temat iloczynu wektorowego zdefiniujemy tensor alternacji.

Niech $\otimes^m V^n$ oznacza m -tą potęgę tensorową n -wymiarowej przestrzeni wektorowej.

Definicja 2.3 *Tensorom alternacji przestrzeni wektorowej V^n nazywać będziemy taki tensor $e \in \otimes^n V^n$, którego reprezentacja w dowolnej bazie wektorowej $\{e_k\}$ w V^n spełnia zależność*

$$e^{k_1 \dots k_n} \stackrel{df}{=} \pm \frac{\epsilon_{k_1 \dots k_n}}{\sqrt{g}} \quad (2.6)$$

gdzie \pm jest znakiem zgodnym z orientacją bazy wektorowej, $\epsilon_{k_1 \dots k_n}$ jest symbolem permutacji, zaś g jest wyznacznikiem z kowariantnej reprezentacji tensora podstawowego.

Orientacja przestrzeni wektorowej pozwala nam na określenie tylko jednego (!) tensora alternacji o ściśle określonej walencji i nie determinuje tensorów alternacji w podprzestrzeniach. Wprowadza to dodatkową różnicę między symbolami permutacji a tensorem alternacji — nawet przy zastosowaniu jedynie ortonormalnych baz wektorowych. Oczywiście, zgodnie z przyjętą przez nas definicją przestrzeni wektorowej następujący obiekt

$$e_{k_1 \dots k_n} = \pm \epsilon_{k_1 \dots k_n} \sqrt{g} \quad (2.7)$$

jest dla nas tylko inną reprezentacją tensora e — reprezentacją w tzw. kobazie.

Omówiona wyżej przestrzeń wektorowa będzie nam służyć do opisu lokalnych własności części kontinuum, natomiast do opisu zmian geometrii całego kontinuum będziemy używać różniczkowości różniczkowych.

2.2 Przestrzeń wektorowa styczna do rozmaitości

W tradycyjnej analizie tensorowej budowanej na rozmaitościach różniczkowych rezygnuje się zazwyczaj z wektorów bazowych zadawanych w sposób jawny (zadawanych w postaci składowych w pewnym ortonormalnym układzie współrzędnych) zastępując je operatorami różniczkowymi typu $\frac{\partial}{\partial x^a}$. Takie podejście jest w pewnym sensie próbą uogólnienia geometrii Riemanna, której piękno i elegancja polega m. in. na tym, że cała analiza tensorowa może być w niej prowadzona na reprezentacjach tensorów z pominięciem terminu *wektory bazowe*, porównaj np. EISENHART (1949). W naszym wypadku natomiast, nie tylko reprezentacje tensorów i symbole koneksji, ale również wektory bazowe będziemy określać w sposób jawny — nawet dla zakrzywionych przestrzeni, porównaj np. układ (2.26) definiujący wektory styczne do przestrzeni orientacji. Tego typu podejście jest niekiedy nazywane metodą reperu ruchomego, porównaj np. CARTAN (1936), SKWARCZYŃSKI (1993).

Definicja 2.4 *Będziemy mówić, że na n -wymiarowej rozmaitości różniczkowej \mathcal{M}^n jest określony reper ruchomy $\{e_k(x)\}$ jeśli dla dowolnych dwóch układów współrzędnych $\{x^k\}$ i $\{x^{k'}\}$ na \mathcal{M}^n będą określone różniczkowalne funkcje*

$$e_k(x) : \mathcal{M}^n \ni x \rightarrow e_k \in V \quad (2.8)$$

$$e_{k'}(x) : \mathcal{M}^n \ni x \rightarrow e_{k'} \in V \quad (2.9)$$

i funkcje te będą spełniać następujące prawo transformacji

$$e_{k'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} e_k \quad (2.10)$$

gdzie $k = 1, \dots, n$, $k' = 1, \dots, n$, natomiast V oznacza przestrzeń wektorową.

Zauważmy, że w w/w definicji nie sprecyzowaliśmy wymiaru przestrzeni V . Niemniej z warunku (2.10) wynika, że $\dim V \geq \dim \mathcal{M}^n$.

Typowym przykładem kiedy $\dim V > \dim \mathcal{M}^n$ jest teoria powłok, gdzie reper może składać się z dwóch trójwymiarowych wektorów ruchomych stycznych do współrzędnych krzywoliniowych na powłoce. Dla ustalonego x_0 wektory te rozpinają (generują) dwuwymiarową przestrzeń wektorową styczną do powłoki. Inny przykład reperu składającego się z trzech dziewięciowymiarowych wektorów G , został wspomniany w przypisach na str. 18. W wypadku gdy $\dim V = \dim \mathcal{M}^n$ reper ruchomy może określać jednoznacznie przesunięcie równoległe wektorów na \mathcal{M}^n , tzw. teleparalelizm (distantparalelizm) porównaj np. ERINGEN (1971), str. 137.

Reper ruchomy jest bardzo silnym narzędziem pozwalającym np. na zdefiniowanie metryki, symboli przesunięcia, koneksji, tensora alternacji i wielu wielu innych obiektów na rozmaitości różniczkowej, porównaj np. (2.28, 2.29, 2.33, 2.34, 2.35) i (2.36). Prawa transformacji dla tego typu obiektów stały się inspiracją dla matematyków do sformułowania całych oddzielnych teorii geometrycznych opartych np. na tensorze metrycznym, na symbolach koneksji itd.

Definicja 2.5 *Będziemy mówić, że na rozmaitości \mathcal{M}^n została określona funkcja wektorowa*

$$v(x) : \mathcal{M}^n \ni x \longrightarrow v \in V \quad (2.11)$$

jeśli:

1. *będzie dany reper ruchomy $\{e_k(x)\}$ na \mathcal{M}^n taki, że $e_k \in V$,*
2. *dla dowolnego układu współrzędnych $\{x^k\}$ na \mathcal{M}^n będzie danych n funkcji*

$$v^k(x) : \mathcal{M}^n \ni x \longrightarrow v^k \in V \quad (2.12)$$

takich, że

$$v = v^k e_k \quad (2.13)$$

gdzie V jest ciałem (liczb) na którym została określona przestrzeń wektorowa V .

W naszych zastosowaniach ograniczymy się do ciała liczb rzeczywistych.

2.2.1 Różniczkowanie kowariantne

W wielu pracach, aby zapewnić matematyczną ścisłość używanej notacji, do oznaczania pochodnych wykorzystuje się kropki, przecinki, średniki, dwukropki itp. W naszym wypadku, aby notacja była jak najprostsza, a jednocześnie ścisła matematycznie umawiamy się, że sens użycia przecinka zależeć będzie od obiektu w stosunku do którego został on użyty, i tak:

- w wypadku mapy oznaczał on będzie pochodną cząstkową, tzn. jeśli x i y będą punktami w współrzędnych x^k i y^l na odpowiednich rozmaitościach, zaś $x(y)$ będzie różniczkowalnym odwzorowaniem (mapą) to

$$x^k_{,l} \stackrel{df}{=} \frac{\partial x^k}{\partial y^l} \quad (2.14)$$

- w wypadku zaś gdy x będzie wektorem stycznym do rozmaitości różniczkowej w punkcie y to przecinek oznaczał będzie pochodną kowariantną typu

$$x^k_{,l} \stackrel{df}{=} \frac{\partial x^k}{\partial y^l} + x^m \Gamma_{ml}{}^k \quad (2.15)$$

gdzie

$$\Gamma_{ml}{}^k \stackrel{df}{=} \frac{\partial e_m}{\partial y^l} \cdot e^k \quad (2.16)$$

Tak zdefiniowane symbole koneksji mogą być niesymetryczne. Jest to źródłem wielu nieporozumień, gdyż koncepcja niesymetrycznych symboli koneksji nie mieści się w kategoriach klasycznej geometrii Riemanna.

2.3 Przestrzeń orientacji (\mathcal{O}^3)

2.3.1 Przestrzeń orientacji jako przestrzeń Riemanna

W porównaniu z klasyczną mechaniką kontinuum opis ruchu zorientowanego kontinuum wymaga wprowadzenia dodatkowych pojęć z zakresu opisu zmian orientacji. Niezmiernie cenna jest tu dla nas teoria ruchu bryły sztywnej. Nie oznacza to jednak, że zorientowane kontinuum to zespół połączonych brył sztywnych. Cechą wspólną jest tu tylko to, że jednym z parametrów opisujących konfigurację zorientowanego kontinuum jest funkcja opisująca orientację jego cząstek.

W wypadku bryły sztywnej można wykazać, że wszystkie orientacje bryły tworzą przestrzeń Riemanna o stałej, jednostkowej krzywiznie, zostało to np. pokazane w pracy autora (DŁUŻEWSKI, 1991a). W takim wypadku, jeśli założyć, że układ kątów Eulera $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ tworzy krzywoliniowy układ współrzędnych na przestrzeni orientacji, wtedy tensor metryczny opisujący odległość w przestrzeni orientacji przyjmuje postać

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos\varphi^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Zgodnie z geometrią Riemanna tensor ten generuje koneksję riemannowską opisaną symbolami Christoffela

$$\{\gamma_{\alpha\beta}\} \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial \varphi^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial \varphi^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \varphi^\delta} \right) \quad (2.18)$$

W przypadku bryły sztywnej można również pokazać, że każdy jej obrót wokół nieruchomej osi zakreśla w przestrzeni orientacji linię geodezyjną, a długość tej linii, w sensie Riemanna, to nic innego jak właśnie kąt (w radianach) o który obracana jest bryła. Innymi słowy, mówiąc językiem geometrii różniczkowej każdy obrót wokół nieruchomej osi, opisany równaniem $\varphi^i = \varphi^i(t)$, spełnia równanie linii geodezyjnej

$$\frac{d^2 \varphi^\alpha}{dt^2} + \{\alpha_{\beta\gamma}\} \frac{d\varphi^\beta}{dt} \frac{d\varphi^\gamma}{dt} = 0 \quad (2.19)$$

Kąt α o który zostaje obrócona bryła jest określony jako

$$\alpha = \int_{l_0}^{l_1} \sqrt{g_{\beta\gamma} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial l} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial l}} dl \quad (2.20)$$

gdzie

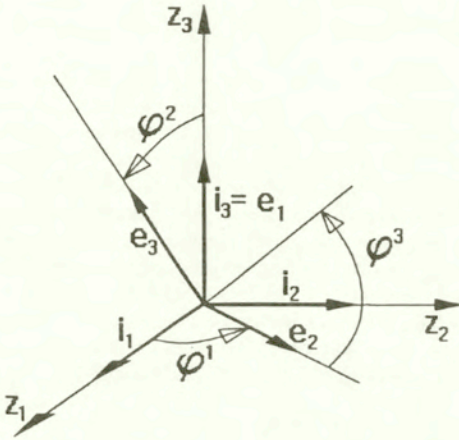
$$l = l(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) \quad (2.21)$$

W przypadku przestrzeni Riemanna, tensor krzywizny Riemanna-Christoffela jest zdefiniowany jako

$$K_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \stackrel{df}{=} \frac{\partial \{\alpha\beta\}}{\partial \varphi^\gamma} - \frac{\partial \{\alpha\gamma\}}{\partial \varphi^\beta} + \{\alpha\beta\} \{\epsilon_\gamma\}^\delta - \{\alpha\gamma\} \{\epsilon_\beta\}^\delta \quad (2.22)$$

W przypadku przestrzeni o stałej krzywiznie spełnia on dodatkową zależność

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta} = b (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \quad (2.23)$$



Rys. 2.1 Baza wektorowa e_α styczna do układu kątów Eulera $\{\varphi^\alpha\}$

gdzie $K_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\delta\epsilon} K_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon$, patrz np. EISENHART (1949). Różniczkując tensor metryczny (2.17) i symbole koneksji (2.18), a następnie podstawiając otrzymane wyrażenia odpowiednio do (2.22) i (2.23) łatwo można pokazać, że $b = +1$. Stąd wynika, że przestrzeń orientacji z tensorem metrycznym (2.17) tworzy przestrzeń Riemanna o stałej, jednostkowej krzywiznie równej $+1$.

2.3.2 Baza wektorowa styczna

Można zauważyć za SKALMIERSKIM (1977), że wektor prędkości kątowej, opisujący ruch bryły sztywnej, może być rozłożony w bazie wektorowej stycznej do kątów Eulera, tzn. jeśli ruch obrotowy bryły sztywnej jest opisany zależnością $\varphi^\alpha = \varphi^\alpha(t)$ wtedy wektor prędkości kątowej można rozłożyć na

$$\omega = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \quad (2.24)$$

gdzie¹

$$\omega^\alpha = \frac{d\varphi^\alpha}{dt} \quad (2.25)$$

natomiast

$$e_\alpha = \begin{cases} e_1 = i_3 \\ e_2 = \cos\varphi^1 i_1 + \sin\varphi^1 i_2 \\ e_3 = \sin\varphi^1 \sin\varphi^2 i_1 - \cos\varphi^1 \sin\varphi^2 i_2 + \cos\varphi^2 i_3 \end{cases} \quad (2.26)$$

patrz rys.2.1. Związek (2.24) możemy zapisać również w postaci następującej formy różniczkowej

$$d\phi = d\varphi^1 e_1 + d\varphi^2 e_2 + d\varphi^3 e_3 \quad (2.27)$$

¹Porównaj SCHOUTEN (1951), wzór (1 α) str. 211.

gdzie infinitezymalny wektor chwilowego obrotu $d\phi = \omega dt$ jest niezmienniczy względem wyboru układu współrzędnych na \mathcal{O}^3 . O niezmienniczości tej decyduje wektor prędkości kątowej $\omega = \omega(t)$.

Powyższe relacje oznaczają, że wektory e_α określają bazę wektorową styczną do krzywoliniowego układu współrzędnych $\{\varphi^\alpha\}$, a więc rozpinają (generują) one przestrzeń wektorową styczną V^3 . Nie jest to oczywiście jedyny sposób określenia przestrzeni wektorowej stycznej do rozmaiłości różniczkowej kątów Eulera. Inny sposób zdefiniowania takiej przestrzeni zaproponował np. BLINOWSKI² (1994a,b). Zagadnienie definiowania bazy stycznej przypomina nieco problem wprowadzania różnego rodzaju metryk na rozmaiłości różniczkowej kątów Eulera. Niemniej pomimo dużych możliwości jakie daje nam w tym zakresie geometria różniczkowa oddzielnym zagadnieniem pozostaje to na ile dany sposób zdefiniowania przestrzeni wektorowej stycznej do kątów Eulera jest użyteczny z punktu widzenia zastosowań, np. w mechanice czy fizyce materiałów.

Wykorzystując wektory bazy stycznej (2.26) można pokazać, że kątowy tensor metryczny (2.17) oraz tensor alternacji (2.7) spełniają zależności

$$g_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot e_\beta \quad (2.28)$$

$$e_{\alpha\beta\gamma} = e_\alpha \cdot (e_\beta \times e_\gamma) \quad (2.29)$$

W takim wypadku tensor całkowitego obrotu jest określony jako

$$Q = Q^{\varphi^3} Q^{\varphi^2} Q^{\varphi^1} \quad (2.30)$$

gdzie każdy z obrotów wokół kolejnego z kątów Eulera jest opisany następującym tensorem obrotu

$$Q^{\varphi^\alpha} = e_\alpha \otimes e_\alpha + \cos \varphi^\alpha (g - e_\alpha \otimes e_\alpha) - \sin \varphi^\alpha e e_\alpha \quad (2.31)$$

Łatwo sprawdzić, że wektory bazy przeciwnej do (2.26) są określone w następujący sposób

$$e^\alpha = \begin{cases} e^1 = -\frac{\sin \varphi^1 \cos \varphi^2}{\sin \varphi^3} i_1 + \frac{\cos \varphi^1 \cos \varphi^2}{\sin \varphi^3} i_2 + i_3 \\ e^2 = \cos \varphi^1 i_1 + \sin \varphi^1 i_2 \\ e^3 = \frac{\sin \varphi^1}{\sin \varphi^2} i_1 - \frac{\cos \varphi^1}{\sin \varphi^2} i_2 \end{cases} \quad (2.32)$$

stąd też reprezentacje mieszane oraz kontrawariantna reprezentacja tensora podstawowego są określone jako

$$g_\alpha^\beta = e_\alpha \cdot e^\beta \quad (2.33)$$

$$g^{\alpha\beta} = e^\alpha \cdot e^\beta \quad (2.34)$$

² BLINOWSKI zdefiniował przestrzeń wektorową styczną za pomocą następującej formy różniczkowej

$$dQ = d\varphi^1 G_1 + d\varphi^2 G_2 + d\varphi^3 G_3$$

gdzie

$$G_\alpha = \frac{dQ}{d\varphi^\alpha}$$

W tej definicji tensory obrotu są traktowane jako elementy przestrzeni liniowej (dziewięciowymiarowe wektory). Ze sposobu zdefiniowania wektorów bazowych G_α wynika automatycznie, że wektory te generują symetryczną, riemannowską koneksję na rozmaiłości kątów Eulera, porównaj (2.16). Warto tu zauważyć, że nie istnieje analogiczna definicja wektorów (2.26), np. $e_\alpha = \frac{d\phi}{d\varphi^\alpha}$, gdzie ϕ byłoby trójwymiarowym wektorem obrotu określonym w podobny sposób jak e_α w (2.26), czy Q w (2.30) i (2.31).

2.3.3 Niesymetryczne koneksje

Niezależnie od zorientowanej przestrzeni Riemanna jaką możemy zbudować na rozmaitości różniczkowej kątów Eulera możemy również zdefiniować na tej rozmaitości dodatkową, niesymetryczną koneksję zapewniającą tzw. teleparalelizm. W tym celu, wykorzystując przestrzeń wektorową styczną V^3 , możemy zdefiniować następujące symbole koneksji

$$\Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha \stackrel{df}{=} \frac{\partial e_\beta}{\partial \varphi^\gamma} \cdot e^\alpha \quad (2.35)$$

$$\Gamma_{\beta\gamma\alpha} \stackrel{df}{=} \frac{\partial e_\beta}{\partial \varphi^\gamma} \cdot e_\alpha \quad (2.36)$$

gdzie wektory e^α i e_β spełniają (2.3), porównaj np. EISENHART (1927), ERINGEN (1971), DŁUŻEWSKI (1993). Z praktycznego punktu widzenia w/w symbole koneksji możemy traktować jako reprezentacje wektorów $\Gamma_{\alpha\beta} \in V^3$. W przypadku kątów Eulera otrzymujemy następujący układ wektorów koneksji

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi^1 i_1 + \cos \varphi^1 i_2 & 0 & 0 \\ \cos \varphi^1 \sin \varphi^2 i_1 + \sin \varphi^1 \sin \varphi^2 i_2 & \sin \varphi^1 \cos \varphi^2 i_1 - \cos \varphi^1 \cos \varphi^2 i_2 - \sin \varphi^2 i_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Z punktu widzenia przestrzeni V^3 powyższe wektory koneksji spełniają liniowe prawa transformacji, tzn. wprowadzając zamiast układu wektorów bazowych $\{i_k\}$ układ $\{i_{k'}\}$ otrzymujemy dla składowych

$$\Gamma_{\alpha\beta k'} = A_{k'}{}^k \Gamma_{\alpha\beta k} \quad (2.38)$$

gdzie

$$i_{k'} = A_{k'}{}^k i_k \quad (2.39)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta k} = \Gamma_{\alpha\beta} \cdot e_k \quad (2.40)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta k'} = \Gamma_{\alpha\beta} \cdot e_{k'} \quad (2.41)$$

Obserwując jednak transformację wektorów $\Gamma_{\alpha\beta}$ wywołaną zmianą układu współrzędnych kątowych $\{\varphi^\alpha\}$ można zauważyć, że w przeciwieństwie do transformacji wektorów bazy stycznnej

$$e_{\alpha'} = A_{\alpha'}{}^\alpha e_\alpha \quad (2.42)$$

otrzymujemy

$$\Gamma_{\alpha'\beta'} \neq A_{\alpha'}{}^\alpha A_{\beta'}{}^\beta \Gamma_{\alpha\beta} \quad (2.43)$$

gdzie

$$A_{\alpha'}{}^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \varphi^{\alpha'}} \quad (2.44)$$

Oznacza to, że z punktu widzenia analizy tensorowej prowadzonej wyłącznie na rozmaitości różniczkowej (tzn. na reprezentacjach tensorów) reprezentacje $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ i $\Gamma_{\alpha\beta}$ nie mogą być traktowane jako tensory, ale jedynie jako pewne symbole zwane symbolami koneksji. Dla kątów Eulera niezerowe symbole koneksji są określone w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}{}^1 &= \operatorname{ctg} \varphi^2 \\ \Gamma_{21}{}^3 &= -\frac{1}{\sin \varphi^2} & \Gamma_{213} &= -\sin \varphi^2 \\ \Gamma_{31}{}^2 &= \sin \varphi^2 & \Gamma_{312} &= \sin \varphi^2 \\ \Gamma_{32}{}^1 &= -\frac{1}{\sin \varphi^2} & \Gamma_{321} &= -\sin \varphi^2 \\ \Gamma_{32}{}^3 &= \operatorname{ctg} \varphi^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

pozostałe symbole koneksji są równe zero, porównaj np. BUNGE (1982), MORAWIEC (1990). Podobnie jak i reprezentacje tensorów, symbole koneksji podlegają ściśle określonym prawom transformacji. Łatwo pokazać, że symbole wprowadzone wzorami (2.45) spełniają te ogólnie znane prawa transformacji dla symboli koneksji. Warto zauważyć, że powyższe symbole są niesymetryczne, tzn. że $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \neq \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$. Można również pokazać, że używając tych symboli otrzymujemy zerowy tensor krzywizny Riemanna-Christoffela, którego reprezentacja spełnia zależność analogiczną do (2.22), tzn.

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \stackrel{df}{=} \frac{\partial}{\partial\varphi^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}{}^\delta - \frac{\partial}{\partial\varphi^\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\delta + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}{}^\delta - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\beta}{}^\delta \quad (2.46)$$

Związki pomiędzy tensorami Riemanna-Christoffela \mathbf{K} i \mathbf{R} są ogólnie znane, patrz np. (4.4.11) w ERINGEN (1971). Warto tu zaznaczyć, że zerowanie się tensora \mathbf{R} nie oznacza bynajmniej, że przestrzeń orientacji jest płaska (taki wniosek byłby natomiast prawdziwy w przypadku $\mathbf{K} = \mathbf{0}$). Oznacza natomiast, że stosując symbole Γ określamy jednoznacznie przesunięcie równoległe wektorów swobodnych na \mathcal{O}^3 , tzw. teleparalelizm. Kończąc dyskusję istotnych dla nas własności przestrzeni \mathcal{O}^3 warto jeszcze wspomnieć o tensorze skręcenia przestrzeni \mathcal{O}^3 (torsion tensor),

$$\Omega_{\alpha\beta}{}^\gamma \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma - \Gamma_{\beta\alpha}{}^\gamma) \quad (2.47)$$

porównaj np. EISENHART (1927), ERINGEN (1971). Dla układu kątów Eulera otrzymujemy następujące, niezerowe składowe

$$\begin{aligned} \Omega_{12}{}^1 &= -\Omega_{21}{}^1 = -\frac{\text{ctg } \varphi^2}{2} \\ \Omega_{12}{}^3 &= -\Omega_{21}{}^3 = -\frac{1}{2\sin \varphi^2} \\ \Omega_{13}{}^2 &= -\Omega_{31}{}^2 = -\sin \varphi^2 \\ \Omega_{23}{}^1 &= -\Omega_{32}{}^1 = -\frac{1}{2\sin \varphi^2} \\ \Omega_{23}{}^3 &= -\Omega_{32}{}^3 = -\text{ctg } \varphi^2 \\ \Omega_{123} &= -\Omega_{213} = \frac{\sin \varphi^2}{2} \\ \Omega_{312} &= -\Omega_{132} = \frac{\sin \varphi^2}{2} \\ \Omega_{231} &= -\Omega_{321} = \frac{\sin \varphi^2}{2} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Zauważmy, że w reprezentacji kowariantnej składowe Ω przyjmują wartości:

- dla wskaźników tworzących permutację dodatnią: $\frac{\sin \varphi^2}{2} = \frac{\sqrt{\beta\alpha\beta}}{2}$,
- dla ujemnej permutacji wskaźników: $-\frac{\sqrt{\beta\alpha\beta}}{2}$,
- a dla pozostałych równą zero.

Ze względu na ujemną (!) orientację bazy wektorowej stycznej do układu kątów Eulera oznacza to, że tensor skręcenia przestrzeni \mathcal{O}^3 jest równy

$$\Omega = -\frac{1}{2}\mathbf{e} \quad (2.49)$$

porównaj (16) str. 211 SCHOUTEN (1951). W zasadzie wynik ten nie powinien być dla nas szczególnym zaskoczeniem, gdyż przestrzeń \mathcal{O}^3 jest przestrzenią o stałej krzywiznie, a więc można było się spodziewać, że tensor trzeciego rzędu Ω jest tensorem izotropowym. Fakt ten potwierdziliśmy jedynie „na piechotę” wykonując rachunki dla jego odpowiednich składowych. W dalszej części pracy tensor ten zostanie wykorzystany do udowodnienia związków (3.71) - (3.75) (str. 98).

2.3.4 Pochodne kowariantne po zmianie orientacji

W mechanice kontinuum pochodne kowariantne po zmianie orientacji mają głównie zastosowanie do opisu ewolucji tekstur, porównaj np. MORAWIEC (1990), DŁUŻEWSKI (1991), GAMBIN (1991). W takim wypadku zakłada się, że w danym punkcie kontinuum $x \in E^3$ znajduje się cały rozkład orientacji cząstek kontinuum, porównaj również ZIABICKI (1990). W niniejszej pracy uwaga jest skupiona na prostszym przypadku, w którym uwzględnia się tylko jedną orientację w punkcie x . Przypadek ten dotyczy: ośrodków Cosserat, teorii dyslokacji, ośrodków mikromorficznych itp., jakkolwiek może on być również traktowany jako punkt wyjścia do poprawnego sformułowania matematycznych podstaw opisu procesu ewolucji tekstur. Stąd też rozważania na temat pochodnych po zmianie orientacji moglibyśmy pominąć, jednak ze względu na ważność tego typu obiektów dla zrozumienia własności geometrycznych przestrzeni orientacji rozważania na ten temat zostały tu uwzględnione.

Poprzednio pokazaliśmy, że na przestrzeni orientacji możemy zdefiniować symbole koneksji w różny sposób. Stąd też można różnie zdefiniować pochodną kowariantną. Łatwo np. pokazać, że z punktu widzenia analizy tensorowej oba, następujące obiekty o wzajemnie różnych składowych

$$\omega^{\alpha}_{,\beta} \stackrel{df}{=} \frac{\partial \omega^{\alpha}}{\partial \varphi^{\beta}} + \omega^{\gamma} \{\gamma\beta\}^{\alpha} \quad (2.50)$$

$$\omega^{\alpha}_{,\beta} \stackrel{df}{=} \frac{\partial \omega^{\alpha}}{\partial \varphi^{\beta}} + \omega^{\gamma} \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \quad (2.51)$$

transformują się kowariantnie ze względu na wskaźnik β . Z fizycznego punktu widzenia sens pochodnej kowariantnej ma dla nas tylko pochodna $\omega^{\alpha}_{,\beta}$. Aby to pokazać przedyskutujemy sens fizyczny pochodnej kowariantnej wektora prędkości kątowej. Dla ustalenia uwagi założymy np., że ewolucja tekstury w jednofazowym polikryształe jest opisana rozkładem prędkości kątowej

$$\omega = \omega(\varphi, t) \quad (2.52)$$

gdzie $\varphi \in \mathcal{O}^3$. Pochodną kowariantną tego wektora zdefiniujemy jako

$$\omega_{,\beta} \stackrel{df}{=} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi^{\beta}} \quad (2.53)$$

Również i w tym wypadku łatwo dowieść, że powyższy obiekt transformuje się kowariantnie ze względu na zmianę współrzędnej φ^{β} . Wektor ω należy do przestrzeni wektorowej stycznej do przestrzeni orientacji dlatego też, aby go poprawnie zróżniczkować musimy zróżniczkować nie tylko jego reprezentację, ale również bazę, w której ta reprezentacja została zapisana. W takim wypadku otrzymujemy

$$\omega_{,\beta} = \frac{\partial(\omega^{\gamma} e_{\gamma})}{\partial \varphi^{\beta}} = \frac{\partial \omega^{\gamma}}{\partial \varphi^{\beta}} e_{\gamma} + \omega^{\gamma} \frac{\partial e_{\gamma}}{\partial \varphi^{\beta}} \quad (2.54)$$

natomiast rozkładając ω w kobazie e^{γ} otrzymujemy

$$\omega_{,\beta} = \frac{\partial(\omega_{\gamma} e^{\gamma})}{\partial \varphi^{\beta}} = \frac{\partial \omega_{\gamma}}{\partial \varphi^{\beta}} e^{\gamma} + \omega_{\gamma} \frac{\partial e^{\gamma}}{\partial \varphi^{\beta}} \quad (2.55)$$

Traktując $\omega_{,\beta}$ jako wektor z przestrzeni wektorowej stycznej policzmy jego składowe

$$\omega^{\alpha}_{,\beta} \stackrel{df}{=} \omega_{,\beta} \cdot e^{\alpha} \quad (2.56)$$

$$\omega_{\alpha,\beta} \stackrel{df}{=} \omega_{,\beta} \cdot e_{\alpha} \quad (2.57)$$

Podstawiając związki (2.54) i (2.55) otrzymujemy

$$\omega^{\alpha}_{,\beta} = \frac{\partial \omega^{\gamma}}{\partial \varphi^{\beta}} g^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\gamma} \frac{\partial e_{\gamma}}{\partial \varphi^{\beta}} \cdot e^{\alpha} \quad (2.58)$$

$$\omega_{\alpha,\beta} = \frac{\partial \omega_{\gamma}}{\partial \varphi^{\beta}} g^{\gamma}_{\alpha} + \omega_{\gamma} \frac{\partial e^{\gamma}}{\partial \varphi^{\beta}} \cdot e_{\alpha} \quad (2.59)$$

Ostatni iloczyn skalarny w (2.58) to nic innego jak symbol niesymetrycznej koneksji $\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}$. Różniczkując z kolei iloczyn skalarny $e_{\gamma} \cdot e^{\alpha} = \delta_{\gamma}^{\alpha}$ po $d\varphi^{\beta}$ łatwo również dowieść, że ostatni iloczyn skalarny w (2.59) to nic innego jak $-\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$. Stąd też równania (2.58) i (2.59) mogą być zapisane w następującej, dobrze znanej formie

$$\omega^{\alpha}_{,\beta} = \frac{\partial \omega^{\alpha}}{\partial \varphi^{\beta}} + \omega^{\gamma} \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \quad (2.60)$$

$$\omega_{\alpha,\beta} = \frac{\partial \omega_{\alpha}}{\partial \varphi^{\beta}} - \omega_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad (2.61)$$

Ponieważ celem naszym nie jest stosowanie jakiegś abstrakcyjnej geometrii, ale poprawne różniczkowanie wektorów i tensorów (uwzględniające różniczkowanie zmiennych baz wektorowych), toteż w niniejszej pracy zamiast symboli Christoffela używać będziemy symboli koneksji Γ zapewniających taki właśnie sposób kowariantnego różniczkowania, porównaj definicje (2.16) i (2.18).

Druga pochodna kowariantna po zmianie orientacji Zgodnie z przyjętą przez nas metodą określania pochodnej kowariantnej, pod pojęciem drugiej pochodnej kowariantnej wektora ω rozumiemy następujący obiekt

$$\omega_{,\alpha\beta} \stackrel{df}{=} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^{\alpha} \partial \varphi^{\beta}} = \frac{\partial^2 (\omega^{\gamma} e_{\gamma})}{\partial \varphi^{\alpha} \partial \varphi^{\beta}} \quad (2.62)$$

stąd, ze względu na możliwość swobodnego przesuwania wektorów na \mathcal{O}^3 (teleparalelizm), otrzymujemy natychmiast

$$\boxed{\omega^{\gamma}_{,\alpha\beta} = \omega^{\gamma}_{,\beta\alpha}} \quad (2.63)$$

gdzie reprezentacje kontrawariantne drugiej pochodnej wektora ω mogą być określone w analogiczny sposób jak reprezentacje pierwszej pochodnej, porównaj (2.53)-(2.60).

Warto tu może wspomnieć o innej pochodnej kowariantnej generowanej za pomocą symboli Christoffela (2.18). Stosowanie różniczkowania kowariantnego opartego na symbolach koneksji riemannowskiej prowadzi natomiast do następującej zależności

$$\omega^{\gamma}_{;\alpha\beta} = \omega^{\gamma}_{;\beta\alpha} + K_{\alpha\beta\delta}^{\gamma} \omega^{\delta} \quad (2.64)$$

porównaj (2.22). Niekiedy, wykorzystując ten związek, błędnie się sugeruje, że w wypadku stosowania zakrzywionych przestrzeni Riemanna, warunki zgodności dla zorientowanego kontinuum nie mogą być spełnione, porównaj np. *compatibility condition* w MARS DEN i HUGHES (1983) oraz „nasz” warunek zgodności obrotów zapisany w dwóch równoważnych formach (3.70) i (3.71), str. 40.

2.4 Przestrzeń położeń (E^3)

W niniejszej pracy do opisu położenia i ruchu zorientowanego kontinuum będziemy wykorzystywać przestrzeń położeń określoną jako trójwymiarowa zorientowana punktowa przestrzeń euklidesowa.

2.4.1 Pochodna kowariantna po zmianie położenia

Poprzednio dyskutowany był przypadek pochodnej kowariantnej wektora po zmianie orientacji, porównaj (2.24), (2.52). Tego typu pochodne występują często przy analizie tekstur.

W przypadku zorientowanego kontinuum mamy jednak nieco inną sytuację. Wtedy na ogół orientacja cząstki nie zależy od jej położenia w przestrzeni orientacji, ale zależy od jej położenia w przestrzeni E^3 . W takim wypadku, zamiast (2.52), wektor prędkości kątovej jest opisany zależnością

$$\omega = \omega(x, t) \quad (2.65)$$

gdzie $x \in E^3$. Zupełnie analogicznie do wyprowadzenia (2.53)-(2.61) otrzymujemy

$$\omega_{,k} = \frac{\partial(\omega^\alpha e_\alpha)}{\partial x^k} = \omega^\alpha_{,k} e_\alpha = \omega_{\alpha,k} e^\alpha \quad (2.66)$$

gdzie

$$\omega^\alpha_{,k} = \frac{\partial \omega^\alpha}{\partial x^k} + \omega^\beta \Gamma_{\beta k}^\alpha \quad (2.67)$$

$$\omega_{\alpha,k} = \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^k} - \omega_\beta \Gamma_{\alpha k}^\beta \quad (2.68)$$

natomiast odpowiednie symbole koneksji są określone jako

$$\Gamma_{\beta k}^\alpha \stackrel{df}{=} \frac{\partial e_\beta}{\partial \varphi^\gamma} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \cdot e^\alpha \quad (2.69)$$

$$\Gamma_{\beta k\alpha} \stackrel{df}{=} \frac{\partial e_\beta}{\partial \varphi^\gamma} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \cdot e_\alpha \quad (2.70)$$

Z punktu widzenia klasycznej terminologii, porównaj np. TRUESDELL i TOUPIN (1960), moglibyśmy powiedzieć, że powyższe symbole koneksji są symbolami dwupunktowymi. Dla porządku warto tu może wspomnieć o tym, że jeśli wektor prędkości kątovej ω rozłożymy w sposób klasyczny w bazie e_k stycznej do $\{x^k\}$ wtedy otrzymamy klasyczne, dobrze znane zależności

$$\omega^l_{,k} \stackrel{df}{=} \frac{\partial \omega^l}{\partial x^k} + \omega^m \Gamma_{mk}^l \quad (2.71)$$

$$\omega_{l,k} \stackrel{df}{=} \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} - \omega_m \Gamma_{lk}^m \quad (2.72)$$

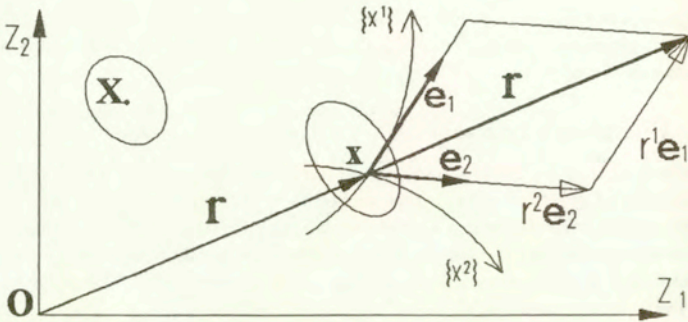
gdzie

$$e_l \stackrel{df}{=} \frac{\partial r}{\partial x^k} \quad (2.73)$$

co prowadzi natychmiast do

$$\Gamma_{kl}^m = \Gamma_{lk}^m = \{^m_{kl}\} \quad (2.74)$$

porównaj x i r na rys.2.2.



Rys. 2.2 Rozkład wektora \mathbf{r} w bazie stycznej do układ wsp. $\{x^k\}$ w punkcie $\mathbf{x}(x^1, \dots, x^n)$

2.4.2 Różniczkowanie zmian położenia

Wracając do kwestii różniczkowania zmian położenia cząstek warto podkreślić, że w klasycznym podejściu \mathbf{x} oznacza położenie cząstki (punktu), natomiast x^k nie oznacza k -tej składowej wektora \mathbf{x} , ale współrzędne \mathbf{x} w krzywoliniowym układzie współrzędnych w przestrzeni położenia. Jakkolwiek, możemy również określić położenie punktu \mathbf{x} , za pomocą wektora \mathbf{r} łączącego punkt \mathbf{x} z wybranym początkiem ortonormalnego układu współrzędnych $\{z_k\}$. Z teoretycznego punktu widzenia wektor \mathbf{r} możemy przedstawić w bazie wektorowej stycznej do E^3 w punkcie \mathbf{x} . W takim wypadku jeśli mapa $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ lub równoważnie funkcja wektorowa $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{X}, t)$ opisuje ruch zwykłego kontinuum to odpowiadać temu ruchowi gradient deformacji

$$\mathbf{F} = F^k_K \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{E}^K \quad (2.75)$$

może być zdefiniowany dwojako; np. poprzez zdefiniowanie jego reprezentacji jako

$$F^k_K \stackrel{df}{=} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \quad (2.76)$$

lub równoważnie jako, patrz rys.2.2,

$$F^k_K \stackrel{df}{=} \frac{\partial r^k}{\partial X^K} + r^m \Gamma_{mK}^k \quad (2.77)$$

gdzie Γ_{mK}^k są dwupunktowymi symbolami koneksji spełniającymi związek

$$\Gamma_{mK}^k \stackrel{df}{=} \frac{\partial x^l}{\partial X^K} \Gamma_{ml}^k \quad (2.78)$$

gdzie z kolei Γ_{lm}^k są klasycznymi symbolami Christoffela dla układu współrzędnych $\{x^k\}$, porównaj (2.73), (2.16) i wyprowadzenie (2.60) (str. 22).

Innymi słowy zgodnie z przyjętą konwencją możemy napisać

$$\boxed{F^k{}_K = x^k{}_{,K} = r^k{}_{,K}} \quad (2.79)$$

pomimo, że

$$x^k \neq r^k \quad (2.80)$$

porównaj rys.(2.2). Ostatnie równanie ma również swój odpowiednik w zapisie absolutnym, tzn.

$$x_{,K} = r_{,K} \quad (2.81)$$

gdzie

$$x_{,K} \stackrel{df}{=} x^k{}_{,K} e_k \quad (2.82)$$

$$r_{,K} \stackrel{df}{=} r^k{}_{,K} e_k \quad (2.83)$$

Tak więc $x_{,K}, r_{,K} \in V^3$, podczas gdy $x^k, r^k \in V^3$ (V^3 - ciało liczb). Stąd też, o ile możemy napisać ogólnie (2.80) o tyle następujący zapis

$$x \neq r \quad (2.84)$$

nie ma sensu bo $x \in E^3$, a $r \in V^3$. Warto tu jednak dodać, że interpretacja gradientu deformacji jako pochodnej kowariantnej wektora nie jest ogólnie poprawna, a często spotykane definiowanie wektorów bazy stycznej za pomocą zależności typu

$$e_l \stackrel{df?}{=} \frac{\partial x}{\partial x^k} \quad (2.85)$$

lub analogicznie

$$e_\alpha \stackrel{df?}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi^\alpha} \quad (2.86)$$

może prowadzić do nonsensownych rezultatów, np. podstawiając (2.86) do (2.35) można by dojść do błędnego wniosku, że $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}{}^\gamma$. Nonsensowność ta wynika np. z faktu, że φ i x nie są wektorami, ale punktami na rozmaitościach o współrzędnych krzywoliniowych $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ i x^1, x^2, x^3 ; porównaj zależność (2.77) i rys.2.2.

2.5 Operatory pola tensorowego

W ostatnim podrozdziale zdefiniowaliśmy pochodne kowariantne wektorów z przestrzeni wektorowej stycznej do zorientowanych rozmaitości riemannowskiej, porównaj np. (2.66). Zupełnie analogicznie można określić pochodne kowariantne pola tensorowego

$$t = t(x, t) \quad (2.87)$$

Stąd też w wypadku tensora drugiego rzędu możemy napisać następującą relację

$$t_{,k} = \frac{\partial(t^{ij} e_i \otimes e_j)}{\partial x^k} \quad (2.88)$$

$$= \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^k} e_i \otimes e_j + t^{ij} \frac{\partial e_i}{\partial x^k} \otimes e_j + t^{ij} e_i \otimes \frac{\partial e_j}{\partial x^k} \quad (2.89)$$

$$= \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^k} e_i \otimes e_j + t^{ij} \left[\left(\frac{\partial e_i}{\partial x^k} \cdot e^m \right) e_m \right] \otimes e_j + t^{ij} e_i \otimes \left[\left(\frac{\partial e_j}{\partial x^k} \cdot e^m \right) \cdot e_m \right] \quad (2.90)$$

$$= t^{ij}{}_{,k} e_i \otimes e_j \quad (2.91)$$

gdzie jak łatwo zauważyć reprezentacja $t^{ij}{}_{,k}$ tensora $t_{,k}$ jest określona następującym równaniem

$$t^{ij}{}_{,k} = \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^k} + t^{lj}\Gamma_{lk}{}^i + t^{im}\Gamma_{mk}{}^j \quad (2.92)$$

porównaj (2.58), (2.60) i (2.35).

Tak określoną pochodną kowariantną wykorzystywać będziemy do definiowania operatorów pola takich jak dywergencja, wirowość i gradient. W naszym wypadku jeśli t będzie tensorem z przestrzeni będącej n -tą potęgą tensorową trójwymiarowej przestrzeni wektorowej V^3 , x będzie punktem na trójwymiarowej zorientowanej rozmaitości riemannowskiej, a t liczbą rzeczywistą zwaną czasem, to pod pojęciem gradientu, wirowości i dywergencji pola tensorowego (2.87) będziemy rozumieć odpowiednio

$$\text{grad } t \stackrel{df}{=} t_{,k} \otimes e^k \quad (2.93)$$

$$\text{curl } t \stackrel{df}{=} t_{,k} \times e^k \quad (2.94)$$

$$\text{div } t \stackrel{df}{=} t_{,k} \cdot e^k \quad (2.95)$$

co oznacza, że

$$\text{div } t \in \bigotimes^{n-1} V^3 \quad (2.96)$$

$$t, t_{,k}, \text{curl } t \in \bigotimes^n V^3 \quad (2.97)$$

$$\text{grad } t \in \bigotimes^{n+1} V^3 \quad (2.98)$$

Stąd też, w odróżnieniu od klasycznych definicji w naszym wypadku:

1. operator *curl* jest zdefiniowany dla funkcji tensorowej o dowolnej walencji i wyrażenie $\text{curl } t$ jest traktowane jako tensor o tej samej walencji co t , porównaj definicje operatorów *rot* i *curl* w ERINGEN (1971);
2. pochodna kowariantna tensora t jest traktowana jako tensor o tej samej walencji co t , a nie jako tensor o walencji $n + 1$.

Ostatnia uwaga ma znaczenie nie tylko formalne, gdyż to czy pochodna kowariantna wektora jest wektorem czy tensorem drugiego rzędu decyduje praktycznie o sposobie dalszego kowariantnego różniczkowania. Na ogół zagadnieniu temu nie poświęca się wiele uwagi myląc niekiedy pochodną kowariantną z gradientem wektora. Rachunkowe różnice w sposobie kowariantnego różniczkowania pochodnej kowariantnej wektora i gradientu wektora zostały pokazana w tablicy 2.1 (str. 28).

W wielu pracach można spotkać się z nieco inną terminologią traktującą pochodną z gradientu jako tzw. pochodną kowariantną całkowitą, a pochodną kowariantną z pochodnej kowariantnej jako np. cząstkową pochodną kowariantną z gradientu, porównaj np. ERICKSEN (1960). W naszym wypadku umówiliśmy się, że rezultat różniczkowania zależy od tego, w stosunku do jakiego obiektu różniczkowanie kowariantne zostało zastosowane. Tak więc zgodnie z przyjętą konwencją $\omega^{\alpha,\beta,\gamma}$ oznacza kontrawariantną reprezentację drugiej pochodnej kowariantnej wektora, podczas gdy $\omega^{\alpha,\beta,\gamma}$ oznacza reprezentację mieszaną pochodnej kowariantnej z gradientu o reprezentacji $\omega^{\alpha,\beta}$, porównaj wzory wykonawcze na liczenie obu pochodnych — tablica 2.1. Oczywiście, ze względu na często spotykane

zerowe skrzywienie (torsion) różniczkowych człony, o których tu mowa, są na ogół równe zero. Niemniej zdarzają się wyjątki, porównaj np. dowód (3.71) (str. 98), a wtedy te subtelne różnice stają się bardzo istotne i praktycznie decydują o tym czy jesteśmy wtedy w stanie posłużyć się krzywoliniowym układem współrzędnych na „skręconej” przestrzeni.

W dalszej części pracy ruch ciała będziemy opisywać z wykorzystaniem konfiguracji porównawczej. Wtedy ruch ten będzie opisany za pomocą odwzorowania

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.99)$$

porównaj rys.2.2. Stąd też będziemy również wykorzystywać różniczkowanie pola tensorowego

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \quad (2.100)$$

Dla odróżnienia operatorów pola po zmianie położenia $d\mathbf{x}$ i $d\mathbf{X}$, będziemy stosować następujące oznaczenia

$$\overline{\text{grad}} \mathbf{t} \stackrel{df}{=} \mathbf{t}_{,K} \otimes \mathbf{E}^K \quad (2.101)$$

$$\overline{\text{curl}} \mathbf{t} \stackrel{df}{=} \mathbf{t}_{,K} \times \mathbf{E}^K \quad (2.102)$$

$$\overline{\text{div}} \mathbf{t} \stackrel{df}{=} \mathbf{t}_{,K} \cdot \mathbf{E}^K \quad (2.103)$$

gdzie pochodna kowariantna po $d\mathbf{X}$ jest traktowana jako pochodna cząstkowa z funkcji złożonej (2.100), tzn.

$$\mathbf{t}_{,K} = \frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial X^K} \quad (2.104)$$

wektory $\{\mathbf{E}^K\}$ stanowią natomiast bazę dualną w stosunku do bazy wektorowej $\{\mathbf{E}_K\}$ — stycznej do układu współrzędnych w punkcie \mathbf{X} . W analizie matematycznej funkcje (2.87) i (2.100) oznaczane są zwykle innymi symbolami. W takim wypadku nie ma specjalnej potrzeby wprowadzania dwóch różnych oznaczeń operatorów, tzn. pisanych małymi i dużymi literami. W niniejszej pracy przyjmujemy natomiast inną konwencję polegającą na oznaczaniu tych funkcji tym samym symbolem, kosztem wprowadzenia dwóch różnych oznaczeń dla operatorów pola tensorowego.

Na zakończenie naszych rozważań na temat operatorów pola tensorowego zauważmy, że w/w operatory są związane ze sobą następującymi przekształceniami tożsamościowymi

$$\overline{\text{grad}} \mathbf{t} = \text{grad } \mathbf{t} \mathbf{F} \quad (2.105)$$

$$\overline{\text{curl}} \mathbf{t} = \text{curl} (\mathbf{t} \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{F}^{-T} \det \mathbf{F} \quad (2.106)$$

$$\overline{\text{div}} \mathbf{t} = \text{div} (\mathbf{t} \mathbf{F}^T \det \mathbf{F}^{-1}) \det \mathbf{F} \quad (2.107)$$

gdzie $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$. W mechanice kontinuum związek (2.107) jest często nazywany tożsamością Piola.

Pochodna kowariantna^a

z pochodnej kowariantnej wektora: $v_{,i} = v^k_{,i} e_k$	z gradientu wektora: $\text{grad } v = v^k_{,i} e_k \otimes e^i$	z gradientu mapy: ^b $F = x^k_{,i'} e_k \otimes e^{i'}$
$v(x) : M \ni x \rightarrow v \in V$		
Koneksja stosowana w pracy	$v^k_{,i,m} = v^k_{,i,m} - 2v^k_{,n} \Omega_{i,m}^n$	$x^k_{,i',m'} = x^k_{,m',i'} - 2x^k_{,n'} \Omega_{i',m'}^{n'}$
Koneksja riemanna nowska	$v^k_{,i,m} = v^k_{,i,m} + v^n R_{n,i,m}^k$	$x^k_{,i',m'} = x^k_{,m',i'}$
Koneksja euklidesowa	$v^k_{,i,m} = v^k_{,i,m}$	$x^k_{,i',m'} = x^k_{,m',i'}$
Koneksja afiniczna	$v^k_{,i,m} = v^k_{,i,m} + v^n R_{n,i,m}^k$	$x^k_{,i',m'} = x^k_{,m',i'} - 2x^k_{,n'} \Omega_{i',m'}^{n'}$

^a $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ - rozmaitości różniczkowe,

V - przestrzeń wektorowa styczna do \mathcal{M} i \mathcal{M}' ,

Ω - tensor skrzywienia rozmaitości \mathcal{M} , porównaj (2.47),

Ω' - tensor skrzywienia rozmaitości \mathcal{M}' ,

R - tensor zakrzywienia rozmaitości \mathcal{M} , porównaj (2.22).

^b Porównaj np. wprowadzenie zależności (3.71), str. 98.

Tablica 2.1 Porównanie symetrii innych pochodnych kowariantnych dla różnych typów koneksji

Rozdział 3

Kinematyka zorientowanego kontinuum

W teorii równań konstytutywnych matematyczny opis kinematyki ruchu kontinuum odgrywa podstawową rolę, gdyż to jakie zostaną przyjęte stopnie swobody ruchu kontinuum, decyduje później o rozkładzie sił wykonujących pracę na założonych stopniach swobody. W konsekwencji prowadzi to do konieczności postawienia takiej ilości równań konstytutywnych, która pozwoli na jednoznaczne modelowanie procesów o zadanej kinematyce ruchu. W mechanice kontinuum nie zawsze poświęca się temu zagadnieniu dostatecznie dużo uwagi. Można podać wiele przykładów, gdzie w ramach klasycznych założeń dotyczących kinematyki ruchu i praw bilansu próbuje się dodać ad hoc różne związki konstytutywne dotyczące np. spinu plastycznego, zależności energii od gradientów odkształceń itp.

W niniejszej pracy przyjęto założenie, że sam opis zmian konfiguracji ciała obejmuje nie tylko określenie pola przemieszczeń, ale wymaga określenia dodatkowego pola — pola obrotu cząstek kontinuum. Ma to swoje konsekwencje m. in. w konieczności uwzględnienia dodatkowych miar deformacji i skoniugowanych z nimi miar sił termodynamicznych. Wbrew powszechnej opinii wcale nie musi to prowadzić do teorii ośrodków Cosserat (tzn. teorii naprężeń momentowych). Termodynamiczne szczegóły tego zagadnienia będą omawiane w rozdziale 5, natomiast obecny rozdział jest poświęcony ogólnym, matematycznym podstawom opisu kinematyki ośrodka, w którym dopuszcza się istnienie obrotu cząstek kontinuum. Oczywiście to na ile w danej teorii obrót ten jest niezależny od pola przemieszczeń pozostawiamy tu sprawą otwartą. O tym decydują podstawowe równania konkretnej teorii zorientowanego kontinuum, porównaj np. równanie (4.45) w kontynuualnej teorii dyslokacji (str. 59).

3.1 Ruch zorientowanego kontinuum

W klasycznym podejściu do opisu ruchu kontinuum wykorzystuje się przestrzeń euklidesową. Brak wyróżnienia lewo i prawoskrętnych baz wektorowych w przestrzeni euklidesowej powoduje, że na tego typu strukturze algebraicznej nie można zdefiniować iloczynu wektorowego jako działania wewnętrznego, w wyniku którego otrzymujemy wektor. Problem ten wynika z konieczności użycia orientacji bazy wektorowej do poprawnego zdefiniowania iloczynu wektorowego. Podobne problemy powstają z definiowaniem tensora alternacji, zwanego również tensorem permutacji, porównaj np. ERINGEN (1971). Niektórzy autorzy piszą wręcz jedynie o symbolach permutacji lub o uogólnionych del-

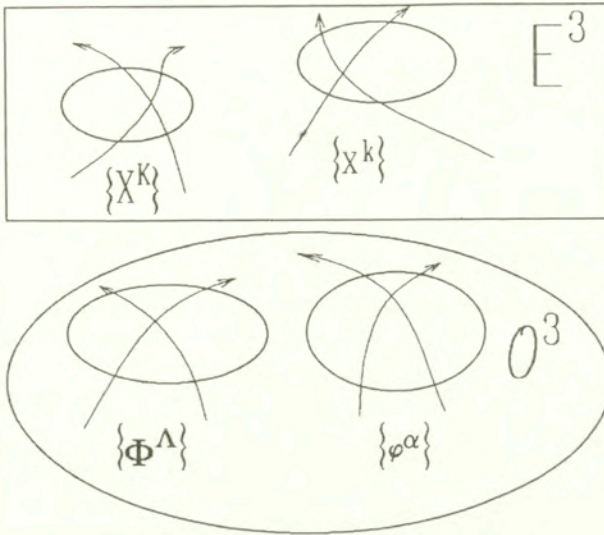
tach Kroneckera, co ma niejako podkreślać nietensorowy charakter iloczynu wektorowego, porównaj np. BOWEN i WANG (1976). Wiąże się to ze zmianą znaku reprezentacji tensora alternacji wraz ze zmianą orientacji bazy wektorowej. Aby ominąć ten problem, a jednocześnie podkreślić związek tensora permutacji z rachunkiem tensorowym, niektórzy autorzy utrzymują, że tensor permutacji należy jedynie do specyficznej klasy tensorów, zwanych tensorami kartezyjskimi, które transformują się zgodnie z prawami transformacji jedynie w przypadku obrotu układu współrzędnych, porównaj np. SYNGE i SCHILD (1949).

Z punktu widzenia klasycznej mechaniki kontinuum to zamieszanie w algebrze tensorów nie ma większego znaczenia. Nie pozwala ono na wprowadzenie operacji iloczynu wektorowego jako działania wewnętrznego, w wyniku którego otrzymujemy wektor. Warto jednak zauważyć, że w wypadku klasycznego (symetrycznego) kontinuum iloczyn wektorowy jest niezbędny jedynie do sformułowania globalnej postaci prawa zachowania momentu pędu. Stąd też w podręcznikach mechaniki kontinuum problem sformułowania globalnej formy prawa bilansu momentu pędu wiąże się z koniecznością dodatkowej dyskusji iloczynu wektorowego jako operacji, w wyniku której otrzymujemy obiekt wektorowy zwany momentem pędu. Gwoli usprawiedliwienia warto tu jednak dodać, że w klasycznej mechanice kontinuum niekonsekwencja ta nie ma istotnego znaczenia (poza poprawnością definicji iloczynu wektorowego), gdyż lokalna postać prawa zachowania momentu pędu prowadzi tam jedynie do warunku zerowania się iloczynu wektorowego — a więc orientacja wektora o zerowej długości nie ma żadnego znaczenia.

W wypadku zorientowanego kontinuum musimy wielokrotnie wykorzystywać iloczyn wektorowy na poziomie lokalnych równań opisujących ruch i dynamikę zorientowanego kontinuum. W ten sposób otrzymywane wielkości wektorowe nie są równe zeru! Stąd też ich orientacja ma dla nas podstawowe znaczenie. W naszym wypadku, do opisu ruchu zorientowanego kontinuum będziemy używać znacznie bardziej złożonej struktury geometrycznej niż ma to miejsce w wypadku symetrycznego kontinuum. Nasza struktura geometryczna będzie się składać z:

1. Trójwymiarowej zorientowanej punktowej przestrzeni euklidesowej nazywanej tu przestrzenią położeń. Opis istotnych dla nas własności tej przestrzeni został przedstawiony w podrozdziale 2.4. Oznaczać ją będziemy przez E^3 .
2. Trójwymiarowej zorientowanej przestrzeni Riemanna o krzywiznie równej jeden. Przestrzeń ta wyposażona jest dodatkowo w niesymetryczne koneksje zapewniające teleparalelizm, patrz podrozdział 2.3. Przestrzeń tą nazywamy tu przestrzenią orientacji cząstek zorientowanego kontinuum i oznaczamy jako O^3 .
3. Trójwymiarowej zorientowanej przestrzeni wektorowej stycznej do E^3 i O^3 . Przestrzeń tą oznaczać będziemy jako V^3 . Szczegółową dyskusję tak określonej przestrzeni wektorowej przedstawiono w podrozdziale 2.1.

Warto podkreślić, że w naszym wypadku terminy *przestrzeń wektorowa* i *przestrzeń liniowa* nie są wzajemnie równoważne. Różnice te są istotne m. in. dla poprawnego zdefiniowania tensora alternacji, bazy wektorowej dualnej oraz ko- i kontrawariantnych reprezentacji wektorów i tensorów. Problemy te zostały częściowo omówione w podrozdziale 2.1. Ze względu na styczność V^3 do E^3 i do O^3 tensor podstawowy $g \in V^3 \otimes V^3$



Rys. 3.1 Układy współrzędnych na E^3 i O^3 (rysunek poglądowy)

może być rozłożony względem dowolnej bazy wektorowej stycznej do układu współrzędnych na E^3 lub O^3 , np. tensor ten może być rozłożony na

$$g = g_{kl} e^k \otimes e^l = g_{\alpha\beta} e^\alpha \otimes e^\beta = g_{KL} e^K \otimes e^L = g_{\Theta\Lambda} e^\Theta \otimes e^\Lambda \quad (3.1)$$

gdzie $e^k, e^\alpha, e^K, e^\Theta \in V^3$, tzn. bazy te należą do tej samej przestrzeni wektorowej, a reprezentacje $g_{kl}, g_{\alpha\beta}, g_{KL}, g_{\Theta\Lambda}$ pełnią rolę tensorów metrycznych odpowiednio w układach współrzędnych $\{x^k\}, \{\varphi^\alpha\}$ na E^3 i $\{\Phi^\Theta\}$ na O^3 , patrz rys.3.1. Łatwo zauważyć, że styczność ta nie jest ograniczona do ściśle określonych punktów np. x_0 na E^3 i φ_0 na O^3 , ale ma charakter globalny i zależność (3.1) może być spełniona dla dowolnie wybranych punktów na E^3 i O^3 . Innymi słowy zależność ta oznacza, że nie tylko teleparalelizm (distant parallelism) jest określony w E^3 i O^3 , ale „dodatkowy” paralelizm (interspace parallelism) pomiędzy E^3 i O^3 jest również określony jednoznacznie.

Obecne rozważania zakończymy kilkoma definicjami. Pierwsza z nich dotyczyć będzie kontinuum.

Definicja 3.1 Pod pojęciem kontinuum (ciała prostej) rozumiemy będziemy otwarty zbiór B w przestrzeni położeń E^3 (porównaj podrozdział 2.4).

Oczywiście nie jest to jedyny sposób definiowania kontinuum. W/w definicja została zaczerpnięta z monografii MARDEN HUGHES (1983), str. 25.

Definicja 3.2 Pod pojęciem zorientowanego kontinuum rozumiemy takie kontinuum B , na którym została określona następująca różniczkowalna funkcja

$$\varphi = \varphi_B(x) \quad (3.2)$$

gdzie $x \in B$ i $\varphi \in \mathcal{O}^3$. Wielkość φ nazywać będziemy orientacją cząstki zorientowanego kontinuum, lub krótko orientacją cząstki.

Do zdefiniowania deformacji zorientowanego kontinuum wykorzystamy klasyczne podejście oparte na koncepcji konfiguracji porównawczej. Jednakże na to, aby dany zbiór otwarty $B_0 \subset E^3$ był konfiguracją porównawczą zorientowanego kontinuum B musimy określić rozkład orientacji na B_0 . Stąd też będziemy zakładać, że funkcja

$$\Phi = \Phi(X) \quad (3.3)$$

gdzie $\Phi \in \mathcal{O}^3$, $X \in B_0$, opisuje rozkład orientacji cząstek w konfiguracji porównawczej B_0 .

Definicja 3.3 Pod pojęciem ruchu zorientowanego kontinuum B (względem nieruchomej konfiguracji porównawczej B_0) rozumiemy będziemy dwa odwzorowania (mapy):

$$x = x(X, t) \quad (3.4)$$

$$\varphi = \varphi(x, t) \quad (3.5)$$

gdzie $x \in B$, $X \in B_0$, $\varphi \in \mathcal{O}^3$, $t \in \mathbb{R}$. Zakładamy, że oba powyższe odwzorowania są różniczkowalne, a (3.4) jest dodatkowo odwracalne ze względu na x i X .

Kinematyka pseudokontinuów Cosserat W teorii równań konstytutywnych wyróżnia się klasy materiałów zwane materiałami pierwszego, drugiego i wyższych stopni. Ta terminologia jest szczególnie stosowana w zakresie opisu tzw. hipersprężystych ośrodków, porównaj np. TRUESDELL i NOLL (1965). Dotyczy ona stopni (rzędów) gradientów deformacji, które są wykorzystywane do definiowania miar odkształceń materiału. Większość modeli konstytutywnych wykorzystuje jedynie pierwszy gradient deformacji rozumiany jako pochodna pierwszego rzędu z funkcji $x(X, t)$ po zmianie położenia X . Niekiedy, w literaturze można znaleźć mylne sugestie, że ośrodki zorientowane to materiały drugiego stopnia (second grade materials), porównaj np. TRUESDELL i TOUPIN (1960), gdzie jako przykład pokazany jest model autorstwa Toupin. W modelu tym do określenia pola obrotów wykorzystywane jest tradycyjne pole przemieszczeń! Oczywiście tego typu modele, zwane niekiedy pseudokontinuumami Cosserat lub materiałami Cosserat ze związanymi obrotami, niewiele mają wspólnego z kinematyką ośrodków zorientowanych i rzeczywiście są one niczym więcej jak tylko ośrodkami typu przemieszczeniowego, w których wykorzystano wyższe gradienty pola przemieszczeń. Dla tego typu materiałów bardziej odpowiednia wydaje się nazwa materiały z naprężeniami momentowymi, porównaj np. SOKOŁOWSKI (1972).

Podstawową ideą ośrodków zorientowanych jest dodatkowe pole obrotów cząstek kontinuum — niezależne od pola przemieszczeń. Takie założenie odnośnie kinematyki ruchu kontinuum wiąże się z poważnymi konsekwencjami z punktu widzenia geometrii, kinematyki i termodynamiki ruchu tego typu ośrodka. Wymaga ono bowiem uwzględnienia dodatkowych miar deformacji (np. miar zakrzywienia), skoniugowanych z nimi miar sił termodynamicznych i postawienia dodatkowych równań (!) konstytutywnych tak, aby zapewnić jednoznaczność opisu konstytutywnego dla kontinuum o zadanej kinematyce ruchu.

W niniejszej pracy ograniczymy nasze rozważania do materiałów zorientowanych pierwszego stopnia, a więc do takich, w których zakłada się, że do opisu stanu deformacji materiału wystarczą pierwsze gradienty pól przemieszczeń i obrotów.

3.2 Gradienty deformacji

3.2.1 Klasyczny gradient deformacji

W teorii ośrodków zorientowanych możemy zdefiniować gradient deformacji przemieszczeniowej w klasyczny sposób, a więc wykorzystując mapę $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ tensor gradientu deformacji jest zdefiniowany w następujący sposób

$$\mathbf{F} \stackrel{df}{=} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^K = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.6)$$

gdzie $\mathbf{x}, \mathbf{X} \in E^3$ i $\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^K \in V^3$.

W geometrii różniczkowej pojęcie pochodnej kowariantnej jest ściśle zdefiniowane i dotyczy „specyficznego” sposobu różniczkowania wektorów stycznych do rozmaitości. Specyficzność ta polega na uwzględnianiu członów wynikających ze zmiany bazy stycznej do rozmaitości, patrz symbole koneksji. Ze względu na to, że przestrzeń położeń (euklidesowa punktowa) jest przestrzenią płaską możemy położenie \mathbf{x} określić jednoznacznie za pomocą wektora swobodnego \mathbf{r} , porównaj rys.2.2, który możemy następnie rozłożyć w bazie wektorowej stycznej do rozważanej rozmaitości. Ta może nieco sztuczna konstrukcja pokazuje jednak zasadniczą różnicę pomiędzy reprezentacją gradientu deformacji jako pochodnej cząstkowej krzywoliniowych współrzędnych, a jego reprezentacją w formie pochodnej kowariantnej pewnego wektora, porównaj (2.76) i (2.77). Warto tu może dodać, że to czy dany wektor lub tensor jest kontra- czy kowariantny dotyczy algebry tensorów i z formalnego punktu widzenia jako część algebry może być rozważane niezależnie od jakichkolwiek rozmaitości różniczkowych, porównaj np. KOMOROWSKI (1978).

W klasycznej mechanice continuum opartej na (nie zorientowanej) przestrzeni euklidesowej wyznacznik z tensora jest utożsamiany z wyznacznikiem z jego reprezentacji i tak np. zmianę objętości materiału określa się jako

$$\frac{dv}{dV} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} \det \mathbf{F} \quad (3.7)$$

gdzie g i G oznaczają wyznaczniki z reprezentacji tensora podstawowego w układach współrzędnych $\{x^k\}$ i $\{X^K\}$ odpowiednio w punktach \mathbf{x} i \mathbf{X} , natomiast $\det \mathbf{F}$ jest wyznacznikiem z reprezentacji (macierzy) F^k_K .

W naszym wypadku, ze względu na uwzględnianie orientacji przestrzeni euklidesowej wykorzystamy tensor alternacji do zdefiniowania wyznacznika z tensora \mathbf{F} i przyjmujemy, że

$$\det \mathbf{F} \stackrel{df}{=} \frac{1}{6} e_{klm} e^{KLM} F^k_K F^l_L F^m_M \quad (3.8)$$

gdzie e_{klm} i e^{KLM} są odpowiednimi reprezentacjami tensora alternacji, porównaj (3.1). Tak zdefiniowany wyznacznik jest niezależny od użytej bazy wektorowej, a stąd zmiana objętości materiału jest u nas określona po prostu jako

$$\frac{dv}{dV} = \det \mathbf{F} \quad (3.9)$$

porównaj (3.7).

3.2.2 Gradienty pól orientacji

Zgodnie z przyjętą przez nas definicją ruchu zorientowanego kontinuum ruch ten jest opisany przez dwa niezależne odwzorowania (3.4) i (3.5). Włączenie pola orientacji do opisu ruchu kontinuum powoduje, że możemy zdefiniować odpowiednie gradienty tego pola, i tak: przestrzenny gradient pola orientacji jest zdefiniowany w następujący sposób

$$\kappa \stackrel{df}{=} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^k} e_\alpha \otimes e^k = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.10)$$

gdzie φ^α są krzywoliniowymi współrzędnymi kątowymi i określają one orientację cząstek kontinuum w konfiguracji aktualnej, zgodnie z (3.5). W zastosowaniach dotyczących deformacji kryształów tensor ten jest nazywany tensorem Nye'a. NYE w (1953) roku wykorzystał taki właśnie tensor do określenia związków tensora gęstości dyslokacji z tensorem zakrzywienia orientacji sieci kryształu, porównaj zależność (4.22).

Z matematycznego punktu widzenia interpretacja gradientu orientacji κ jako pochodnej kowariantnej pewnego wektora ϕ nie jest możliwa. Ze względu na zakrzywienie przestrzeni \mathcal{O}^3 nie możemy określić wektora stycznego ϕ , porównaj \mathbf{r} na rys.2.2, a tym bardziej nie możemy zdefiniować funkcji wektorowej, której pochodną kowariantną byłoby κ . Oczywiście pochodne cząstkowe ze współrzędnych położenia na rozności spełniają odpowiednie prawa transformacji, ale nie oznacza to bynajmniej, że są one pochodnymi kowariantnymi jakiegoś wektora, np. o składowych ϕ^α . Krzywoliniowe współrzędne φ^α nie są reprezentacją wektora i nie transformują się zgodnie z prawami transformacji dla składowych wektorów. Z drugiej zaś strony, w geometrii termin pochodnej kowariantnej jest jednoznacznie zdefiniowany i dotyczy on specyficznego różniczkowania wektorów i tensorów określonych na przestrzeni wektorowej stycznej. W klasycznej mechanice kontinuum opartej na przestrzeniach z riemannowską koneksją (zanurzalnych w płaskich przestrzeniach) różnice te są trudne do zauważenia. Stają się one jednak wiążące w wypadku przestrzeni z niemannowską koneksją, kiedy to same prawa transformacji nie oznaczają, że istnieje odpowiedni wektor ϕ .

Wróćmy jednak do problemu gradientów pola orientacji. Dotychczas zdefiniowaliśmy gradient rozkładu pola orientacji w konfiguracji aktualnej, porównaj (3.5) i (3.10). Zupełnie analogicznie możemy zdefiniować gradient rozkładu pola orientacji w konfiguracji porównawczej. Wykorzystując (3.3) otrzymujemy¹

$$\bar{\kappa}_0 \stackrel{df}{=} \frac{\partial \Phi^\Theta}{\partial X^K} e_\Theta \otimes e^K = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.11)$$

3.2.3 Obroty i dystorsje

W przypadku zorientowanego kontinuum oprócz mapy $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ opisującej pole przemieszczeń mamy do dyspozycji dodatkowe informacje o orientacji cząstek w konfiguracji porównawczej i aktualnej. Stąd też zamiast dokonywać czysto matematycznej operacji: tzw. rozkładu polarnego

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (3.12)$$

¹Oznaczenie $\bar{\kappa}_0$ zarezerwowaliśmy w tym wypadku dla miary wyrażającej to samo zakrzywienie, ale w konfiguracji aktualnej, porównaj (3.48)

na ortogonalny tensor „obrotu” \mathbf{R} i symetryczny tensor rozciągnięć \mathbf{U} możemy rozłożyć gradient deformacji \mathbf{F} na obrót cząstki kontinuum \mathbf{Q} i jej deformację \mathbf{F}_c

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{F}_c \quad (3.13)$$

gdzie tensor \mathbf{F}_c jest nazywany tensorem deformacji Cosserat, tensorem dystorsji lub po prostu współobrotowym tensorem deformacji, porównaj np. ERINGEN i KAFADAR (1976). Ortogonalny tensor obrotu \mathbf{Q} jest tu opisany czysto geometryczną zależnością

$$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}(\varphi, \Phi) \quad (3.14)$$

Innymi słowy, zakładamy, że tensor obrotu jest jednoznacznie określony na podstawie zależności geometrycznych, np. na podstawie kątów Eulera Φ^1, Φ^2, Φ^3 i $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ opisujących odpowiednio orientację tej samej cząstki w konfiguracji początkowej i w konfiguracji aktualnej. W wypadku klasycznego kontinuum niekiedy rozkłada się gradient deformacji na lewy tensor deformacji Cauchy-Greena i obrót. Analogicznie, w wypadku zorientowanego kontinuum możemy rozłożyć \mathbf{F} na lewy tensor Cosserat \mathbf{F}_c i obrót, tzn.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c\mathbf{Q} \quad (3.15)$$

W naszych rozważaniach dotyczących modelowania konstytutywnego ruchu zorientowanego kontinuum skupiać będziemy uwagę na miarach deformacji niezależnych od obrotu cząstki, stąd też będziemy wykorzystywać prawy tensor deformacji Cosserat.

3.2.4 Warunek zgodności przemieszczeń

Wykorzystując rozkład (3.13) gradientu deformacji przemieszczeniowej na obrót cząstki kontinuum i jej deformację możemy warunek zgodności

$$F_{K,L}^k = F_{L,K}^k \quad (3.16)$$

wyrazić w następującej postaci

$$(Q_M^k F_c^M K),L = (Q_N^k F_c^N L),K \quad (3.17)$$

różniczkując wyrażenia w nawiasach otrzymujemy

$$Q_{M,L}^k F_c^M K + Q_M^k F_c^M K_{,L} = Q_{N,K}^k F_c^N L + Q_N^k F_c^N L_{,K} \quad (3.18)$$

W tym wypadku możemy wykorzystać zależność wyprowadzoną przez DŁUŻEWSKIEGO (1991b), na pochodną kowariantną $\mathbf{Q}(\varphi, \Phi)$ ze względu na $d\mathbf{X}$, porównaj równania ruch (3.4), (3.5) i (3.3),

$$Q_{M,L}^k = -\varphi^{\alpha}_{,L} e_{\alpha}^k Q_M^i - \Phi^{\Theta}_{,L} e_{\Theta M}^N Q_N^k \quad (3.19)$$

w omawianej zależności e_{α}^k i $e_{\Theta M}^N$ oznaczają odpowiednie reprezentacje tensora alternacji. Podstawiając ostatnią zależność do (3.18) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & (-\varphi^{\alpha}_{,L} e_{\alpha}^k - \Phi^{\Theta}_{,L} e_{\Theta M}^N Q_N^k Q_M^i) F_c^i K + Q_M^k F_c^M K_{,L} = \\ & = (-\varphi^{\beta}_{,K} e_{\beta}^k - \Phi^{\Lambda}_{,K} e_{\Lambda H}^A Q_H^k Q_M^A) F_c^m L + Q_M^k F_c^M L_{,K} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Warto tu zaznaczyć, że tensor alternacji jest tensorem izotropowym. Oznacza to, że jest on obiektywny ze względu na sztywny obrót. Wykorzystując

$$e_{\Theta M}{}^N Q_{\alpha}{}^{\Theta} Q_i{}^M Q_N^k = e_{\alpha i}{}^k \quad (3.21)$$

a następnie mnożąc (3.20) przez $\bar{F}^1 K_p$ i przez $\bar{F}^1 L_r$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & (-\varphi^{\alpha}{}_{,r} + \Phi^{\Theta}{}_{,L} Q_{\Theta}^{\alpha} \bar{F}^1 L_r) e_{\alpha}{}^k{}_p + Q_M^k F_C^M{}_{K,r} \bar{F}^1 K_p = \\ & = (-\varphi^{\beta}{}_{,p} + \Phi^{\Lambda}{}_{,K} Q_{\Lambda}^{\beta} \bar{F}^1 K_p) e_{\beta}{}^k{}_r + Q_N^k F_C^N{}_{L,p} \bar{F}^1 L_r \end{aligned} \quad (3.22)$$

Mnożąc ostatnie równanie przez e^{spr} łatwo pokazać, że

$$-\varphi^{\alpha}{}_{,m} e_{\alpha}{}^k{}_l e^{nml} + \Phi^{\Theta}{}_{,M} \bar{F}^1 M_m Q_{\Theta}^{\alpha} e_{\alpha}{}^k{}_l e^{nml} = Q_L^k F_C^L{}_{N,i} \bar{F}^1 N_O Q_j^O e^{nji} \quad (3.23)$$

W naszych dalszych rozważaniach bardzo ważną rolę odegrają związki tensorowe pomiędzy dwoma różnymi miarami zakrzywienia α i κ . Wykorzystując za NYE'EM związek

$$e_{\alpha}{}^k{}_l e^{nml} = g_{\alpha}{}^n g^{km} - g_{\alpha}{}^m g^{kn} \quad (3.24)$$

można pokazać, że

$$\alpha = -\kappa^T + \text{tr } \kappa^T \mathbf{1} \quad (3.25)$$

$$\kappa = -\alpha^T + \frac{1}{2} \text{tr } \alpha^T \mathbf{1} \quad (3.26)$$

Oznacza to, że tak zdefiniowana miara α jest niczym więcej jak tylko jedną z możliwych miar zakrzywienia kontinuum. Wykorzystując powyższe związki założymy, że lewa strona (3.23) definiuje następujące, tensorowe miary kątowe początkowego i końcowego (zakrzywienia) kontinuum:

$$\alpha^{kn} \stackrel{df}{=} -\varphi^{\alpha}{}_{,m} e_{\alpha}{}^k{}_l e^{nml} \quad (3.27)$$

$$\alpha_{\circ}^{kn} \stackrel{df}{=} -\Phi^{\Theta}{}_{,M} \bar{F}^1 M_m Q_{\Theta}^{\alpha} e_{\alpha}{}^k{}_l e^{nml} \quad (3.28)$$

podczas gdy prawa strona wspomnianego równania definiuje miarę zakrzywienia wywołaną współobrotową deformacją cząstek kontinuum

$$\alpha_C \stackrel{df}{=} -Q \text{grad} F_C \times (Q F_C)^{-1} \quad (3.29)$$

gdzie \times oznacza podwójny iloczyn: skalarny po pierwszych indeksach i wektorowy po drugich, porównaj (3.23). Tak więc warunek zgodności przemieszczeń (3.23) może być zapisany w następującej formie

$$\boxed{\alpha = \alpha_{\circ} + \alpha_C} \quad (3.30)$$

Sposób, w jaki została zdefiniowana powyżej miara α_C różni się zasadniczo od metody stosowanej dotychczas. Dotychczas, w zakresie skończonych deformacji nie definiowano na ogół tensora zakrzywienia z wykorzystaniem miar kątowych, ale bezpośrednio na podstawie tensora obrotów. Wynikało to z przekonania, że miary kątowe, jak np. kąty Eulera, nie tworzą różnicowości riemannowskiej, na której moglibyśmy definiować tensory, stąd też

wszelkie tensory zakrzywienia, zwane często *wryness tensors*, były definiowane w oparciu o tensor obrotu lub bardziej ogólnie w oparciu o dodatkowy gradient opisujący nie tylko obrót cząstki, ale również jej mikrodeformację, np. deformację układu directorów. Najprostsze podejście polegało na utożsamianiu tensora wykrzywienia (wryness tensor) z pochodną kowariantną tensora gradientu mikrodeformacji. Prowadziło to do opisu zakrzywienia kontinuum przy pomocy tensorów trzeciego (!) rzędu, porównaj np. definicję tensora wykrzywienia stosowaną przez TRUESDELL i TOUPIN (1960) i KRÖNERA (1960). W takim wypadku tensor wykrzywienia miał $3^3 = 27$ składowych, musiał więc posiadać pewne dodatkowe ograniczenia, np. wykazywał antysymetrię po dwóch wskaźnikach. W 1971 roku KAFADAR i ERINGEN² zastosowali nowoczesne jak na owe czasy podejście, w którym zastosowali dwuwskaźnikowy tensor wykrzywienia

$$\Gamma \stackrel{df}{=} -\frac{1}{2} \mathbf{Q} \times \overline{\text{grad}} \mathbf{Q} \quad (3.34)$$

Zobaczymy więc jaką definicję naszego tensora α_C mogliśmy uzyskać stosując metodę KAFADARA i ERINGENA. Tak więc pomijając zależność (3.19) możemy bezpośrednio pomnożyć (3.18) przez \bar{F}^1_K , \bar{F}^1_L i przez e^{pmn} otrzymując w efekcie równanie

$$Q^k_{M,n} F_C^M K \bar{F}^1_K e^{pmn} + Q^k_M F_C^M K_{,n} \bar{F}^1_K e^{pmn} = 0 \quad (3.35)$$

co po wykorzystaniu zależności

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}_C^{-1} \mathbf{Q}^T \quad (3.36)$$

daje nam związek

$$Q^k_{M,n} Q_m^M e^{pmn} + Q^k_M F_C^M K_{,n} \bar{F}^1_K e^{pmn} = 0 \quad (3.37)$$

na jego podstawie zdefiniowalibyśmy tensor zakrzywienia α_C jako

$$\alpha_C = \text{grad} \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}^T \quad (3.38)$$

natomiast warunek zgodności przemieszczeń zapisalibyśmy w postaci

$$\alpha_C + \mathbf{Q} \text{grad} \mathbf{F}_C \times (\mathbf{Q} \mathbf{F}_C)^{-1} = 0 \quad (3.39)$$

Dla porównania KAFADAR i ERINGEN (1971) otrzymali warunek zgodności przemieszczeń odpowiadający równaniu

$$\Gamma \times \mathbf{F}_C - \overline{\text{curl}} \mathbf{F}_C = 0 \quad (3.40)$$

²KAFADAR i ERINGEN podjęli również próbę wprowadzenia do opisu zorientowanego kontinuum miar kątowych. Warto tu zwrócić uwagę na fakt, że przestrzeń orientacji jest zakrzywioną przestrzenią Riemanna o stałej jednostkowej krzywiznie. KAFADAR i ERINGEN (1976) ignorując nieświadomie ten fakt próbowali wprowadzić prostoliniowy układ współrzędnych kątowych proponując następujące zależności, porównaj ich równania (1.2.19) i (1.2.20),

$$Q^k_K = [\cos \theta g^k_i + (1 - \cos \theta) n^k n_i - \sin \theta c^k_{im} n^m] g^i_K \quad (3.31)$$

$$\theta \stackrel{??}{=} \sqrt{\phi_k \phi^k} \quad (3.32)$$

$$n^k = \frac{\phi^k}{\theta} \quad (3.33)$$

Prawdopodobnie jednak zdając sobie sprawę z tego, że taki opis nie jest do końca zbadany autorzy ci, pomimo rozważania współrzędnych kątowych, zdecydowali się na zdefiniowanie tensora wykrzywienia (wryness tensor) nie w oparciu o współrzędne kątowe, ale w oparciu o tensor obrotu, tzn. w oparciu o (3.34) zamiast (3.54).

gdzie \times oznacza podwójny iloczyn wektorowy: odpowiednio po pierwszych i po drugich wskaźnikach, porównaj (1.3.21a) w ERINGEN i KAFADAR (1976), gdzie tensor deformacji Cosserat jest równoważny

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{F}_C^T \quad (3.41)$$

Dla nas jednak tensor α_C jest zdefiniowany nie zależnością (3.38), ale (3.29). Powyższe rozważania pokazują, że ze względu na równanie zgodności przemieszczeń ten sam tensor zakrzywienia możemy zdefiniować przy pomocy dwóch zupełnie różnych relacji tensorowych, co więcej, można znaleźć jeszcze dwa inne związki definiujące tensor α_C , mianowicie wykorzystując tożsamościowe przekształcenia

$$\text{grad } \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q} \text{ grad } \mathbf{Q}^T \quad (3.42)$$

$$\text{grad } \mathbf{F}_C \mathbf{F}_C^{-1} = -\mathbf{F}_C \text{ grad } \mathbf{F}_C^{-1} \quad (3.43)$$

otrzymujemy w rezultacie aż cztery różne związki definiujące tensor α_C :

$$\alpha_C = -\mathbf{Q} \text{ grad } \mathbf{F}_C \times (\mathbf{Q} \mathbf{F}_C)^{-1} \quad (3.44)$$

$$= \mathbf{Q} \mathbf{F}_C \text{ grad } \mathbf{F}_C^{-1} \times \mathbf{Q}^T \quad (3.45)$$

$$= \text{grad } \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}^T \quad (3.46)$$

$$= \mathbf{Q} \text{ curl } \mathbf{Q}^T \quad (3.47)$$

Powróćmy jednak do związków między odpowiednimi miarami zakrzywienia z grupy tensorów α i κ . Dzięki relacjom zauważonym przez NYE'Ą (3.25) i (3.26) możemy zdefiniować następujące tensory zakrzywienia

$$\kappa_C \stackrel{df}{=} -\alpha_C^T + \frac{1}{2} \text{tr } \alpha_C^T \mathbf{1} \quad (3.48)$$

$$\kappa_o \stackrel{df}{=} -\alpha_o^T + \frac{1}{2} \text{tr } \alpha_o^T \mathbf{1} \quad (3.49)$$

Zauważmy, że w ten sposób zdefiniowaliśmy w konfiguracji aktualnej miarę κ_o wyrażającą to samo zakrzywienie kontinuum co miara $\bar{\kappa}_o$ w konfiguracji początkowej. Porównując wzory (3.49), (3.28) i (3.11) otrzymujemy następujące prawo transformacji

$$\bar{\kappa}_o = \mathbf{Q}^T \kappa_o \mathbf{F} \quad (3.50)$$

Przez analogię prawo to pozwala nam również zdefiniować następujące tensory

$$\bar{\kappa} \stackrel{df}{=} \mathbf{Q}^T \kappa \mathbf{F} \quad (3.51)$$

$$\bar{\kappa}_C \stackrel{df}{=} \mathbf{Q}^T \kappa_C \mathbf{F} \quad (3.52)$$

Ze względu na definicję κ i $\bar{\kappa}_o$ można pokazać (str. 97), że

$$\bar{\kappa}_K^\Theta = Q_\alpha^\Theta \varphi_{,\alpha,K}^\alpha \quad (3.53)$$

$$\bar{\kappa}_C^\Theta = Q_\alpha^\Theta \varphi_{,\alpha,K}^\alpha - \Phi^\Theta_K \quad (3.54)$$

a miara Γ wykorzystywana w teorii ośrodków polarnych przez ERINGENA i KAFADARA (1976) to nic innego jak właśnie $\bar{\kappa}$, co możemy zapisać w postaci

$$\Gamma \equiv \bar{\kappa} \quad (3.55)$$

zostało to pokazana przez DŁUŻEWSKIEGO w (1993). We wspomnianej pracy autor zastąpił miarę Γ dwoma miarami \mathcal{D} i \mathcal{F}_o , które zgodnie z przyjętą tu metodą oznaczania tensorów krzywizny są równoważne odpowiednio

$$\mathcal{D} \equiv \bar{\kappa}_C \quad (3.56)$$

$$\mathcal{F}_o \equiv \bar{\kappa}_o \quad (3.57)$$

można również pokazać, że wykorzystując miary κ_C i $\bar{\kappa}_C$ zależność (3.19) możemy zapisać w następujących postaciach (str. 97)

$$\text{grad } Q^T = -Q^T \times \kappa_C \quad (3.58)$$

$$\overline{\text{grad}} Q = +Q \times \bar{\kappa}_C \quad (3.59)$$

Jak już wspomnieliśmy wcześniej jeden z tensorów z grupy $\alpha_{...}$ ma sens fizyczny tensora gęstości dyslokacji. Tensor ten podlega ściśle określonym prawom transformacji, porównaj podrozdział 4.1. Stąd też, uprzedzając nieco wspomniane rozważania na temat tensora gęstości dyslokacji, na obecnym etapie rozważań założymy ad hoc następujące prawo transformacji dla tensorów z grupy α

$$\bar{\alpha}_{...} \stackrel{df}{=} F^{-1} \alpha_{...} F^{-T} \det F \quad (3.60)$$

Warto zauważyć, że założone tu prawo transformacji to skądinąd dobrze nam znane prawo transformacji łączące np. tensor naprężeń Cauchego σ z drugim tensorem Piola-Kirchoffa $\bar{\sigma}$!

Reasumując dotychczasowe rozważania na temat ogólnych praw transformacji zauważmy, że dowolne miary zakrzywienia typu $\alpha_{...}$ i $\kappa_{...}$ oraz $\bar{\alpha}_{...}$ i $\bar{\kappa}_{...}$ są ze sobą związane za pomocą następujących praw transformacji

$$\alpha_{...} = -\kappa_{...}^T + \text{tr } \kappa_{...}^T \mathbf{1} \quad (3.61)$$

$$\kappa_{...} = -\alpha_{...}^T + \frac{1}{2} \text{tr } \alpha_{...}^T \mathbf{1} \quad (3.62)$$

$$\bar{\alpha}_{...} = F^{-1} \alpha_{...} F^{-T} \det F \quad (3.63)$$

$$\bar{\kappa}_{...} = Q^T \kappa_{...} F \quad (3.64)$$

gdzie na podstawie dotychczasowych rozważań trzy kropki ... możemy zastąpić: spacją, o lub C.

W dalszych rozważaniach zostaną wprowadzone kolejne miary zakrzywienia z grup $\alpha_{...}$ i $\kappa_{...}$, będą one również podlegać powyższym prawom transformacji. Warto dodać, że z powyższych praw transformacji wynika niestety, że

$$\bar{\alpha}_{...} \neq -\bar{\kappa}_{...}^T + \text{tr } \bar{\kappa}_{...}^T \mathbf{1} \quad (3.65)$$

$$\bar{\kappa}_{...} \neq -\bar{\alpha}_{...}^T + \frac{1}{2} \text{tr } \bar{\alpha}_{...}^T \mathbf{1} \quad (3.66)$$

3.2.5 Warunek zgodności obrotów

Problem kowariantnego sformułowania warunku zgodności obrotów w zapisie absolutnym, tzn. nie indeksowym, stwarza znacznie większe trudności niż warunek zgodności przemieszczeń. Powodem jest tu zakrzywienie przestrzeni orientacji wyrażające się brakiem

symetrii drugich pochodnych kowariantnych. Dla przykładu, łatwo pokazać używając np. ortonormalnego układu współrzędnych, że dyskutowany poprzednio warunek zgodności przemieszczeń (3.16) przyjmuje w zapisie absolutnym następującą postać

$$\overline{\text{curl}} \mathbf{F} = 0 \quad (3.67)$$

Stąd też, „na pierwszy rzut oka” mogłoby się wydawać, że warunki zgodności dla gradientów $\boldsymbol{\kappa}$ i $\overline{\boldsymbol{\kappa}}_0$ powinny mieć postać³

$$\text{curl } \boldsymbol{\kappa} \stackrel{?}{=} \mathbf{0} \quad (3.68)$$

$$\overline{\text{curl}} \overline{\boldsymbol{\kappa}}_0 \stackrel{?}{=} \mathbf{0} \quad (3.69)$$

niemniej można pokazać, że ze względu na zakrzywienie przestrzeni orientacji mamy co prawda warunek

$$\frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial x^l \partial x^k} = 0 \quad (3.70)$$

ale warunek ten zapisany przy użyciu pochodnej kowariantnej przyjmuje postać (porównaj str. 98)

$$\varphi^\alpha_{,k;l} - \varphi^\alpha_{,l;k} = 2\varphi^\beta_{,k}\varphi^\gamma_{,l}\Omega_{\beta\gamma}^\alpha \quad (3.71)$$

gdzie $\Omega_{\beta\gamma}^\alpha$ jest reprezentacją tensora skręcenia przestrzeni \mathcal{O}^3 , porównaj (2.47). Tak więc łatwo zauważyć, że zgodnie z przyjętą definicją operatora *curl* (2.94) oraz ze względu na zależność (2.49) warunki zgodności dla $\boldsymbol{\kappa}$ i $\overline{\boldsymbol{\kappa}}_0$ przyjmują odpowiednio postać (str. 98)

$$\text{curl } \boldsymbol{\kappa} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\kappa} \quad (3.72)$$

$$\overline{\text{curl}} \overline{\boldsymbol{\kappa}}_0 = -\frac{1}{2} \overline{\boldsymbol{\kappa}}_0 \times \overline{\boldsymbol{\kappa}}_0 \quad (3.73)$$

W teoriach ośrodków zorientowanych opartych na bezpośrednim zastosowaniu tensora obrotów (bez wykorzystywania współrzędnych kątowych), nie znajdziemy oczywiście warunków postaci (3.72) i (3.73), natomiast znajdziemy jeden warunek zgodności stawiany bezpośrednio dla tensora obrotów \mathbf{Q} lub dla tensorów wykrzywienia (wryness tensors – Γ). W naszym wypadku też otrzymamy taki warunek, ale warunek ten nie będzie bezpośrednio postulowanym warunkiem zgodności, ale jedynie pochodną warunków (3.72) i (3.73). W naszym wypadku, na podstawie dwóch niezależnych warunków zgodności (3.72) i (3.73), otrzymujemy dla tensora zmiany zakrzywienia $\boldsymbol{\kappa}_C$ następujący warunek (str. 99)

$$\text{curl } \boldsymbol{\kappa}_C = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}_C \times \boldsymbol{\kappa}_C \quad (3.74)$$

Łatwo pokazać, że warunek ten zapisany dla miary $\overline{\boldsymbol{\kappa}}_C$ przyjmuje postać (str. 98)

$$\overline{\text{curl}} \overline{\boldsymbol{\kappa}}_C = +\frac{1}{2} \overline{\boldsymbol{\kappa}}_C \times \overline{\boldsymbol{\kappa}}_C \quad (3.75)$$

Ostatni warunek był już wyprowadzony przez KAFADARA i ERINGENA (1971), oczywiście na innej drodze, tzn. z wykorzystaniem zależności

$$\mathbf{Q}_{,KL} = \mathbf{Q}_{,LK} \quad (3.76)$$

³Znak $\stackrel{?}{=}$ użyto w celu podkreślenia niepoprawnej postaci warunku.

porównaj np. warunek (3.78a) w ERINGEN i KAFADAR (1976) z naszym warunkiem (3.75).

Można zadać sobie jeszcze pytanie, czy nie istnieje jakaś prostsza, np. łatwiejsza do zapamiętania, forma zapisu warunku zgodności obrotów (3.74). Okazuje się, że jeśli zdefiniujemy następujące miary zakrzywienia (w lokalnej, izoklinicznej, nieodciążonej konfiguracji)

$$\tilde{\kappa}_C \stackrel{df}{=} Q^T \kappa_C Q \quad (3.77)$$

$$\tilde{\alpha}_C \stackrel{df}{=} Q^T \alpha_C Q \det Q \quad (3.78)$$

gdzie $\det Q = 1$ to wtedy wspomniany warunek zgodności obrotów może być wyrażony przy pomocy jednej z dwóch zależności (str. 101)

$$\widetilde{\text{curl}} \tilde{\kappa}_C = -\frac{1}{2} \tilde{\kappa}_C \times \tilde{\kappa}_C - \tilde{\kappa}_C \tilde{\kappa}_C^T + \tilde{\kappa}_C \text{tr} \tilde{\kappa}_C \quad (3.79)$$

$$\widetilde{\text{div}} \tilde{\alpha}_C = 0 \quad (3.80)$$

gdzie $\widetilde{\text{curl}}$ i $\widetilde{\text{div}}$ oznaczają odpowiednie pseudooperatory pola tensorowego z lokalnej izoklinicznej nieodciążonej konfiguracji, tzn. są one tak zdefiniowane, że w wypadku gdy konfiguracja lokalna stanie się globalną to wtedy wyrażenia te będą miały rzeczywiste sens odpowiednich operatorów pola tensorowego. Łatwo sprawdzić, że aby tak było wspomniane pseudooperatory pola tensorowego są określone w następujący sposób

$$\widetilde{\text{grad}} t \stackrel{df}{=} t_{,k} Q^k_K \otimes E^K \quad (3.81)$$

$$\widetilde{\text{curl}} t \stackrel{df}{=} t_{,k} Q^k_K \times E^K \quad (3.82)$$

$$\widetilde{\text{div}} t \stackrel{df}{=} \text{div}(t Q^T) \quad (3.83)$$

gdzie t jest dowolnym polem tensorowym, porównaj (2.105-2.107).

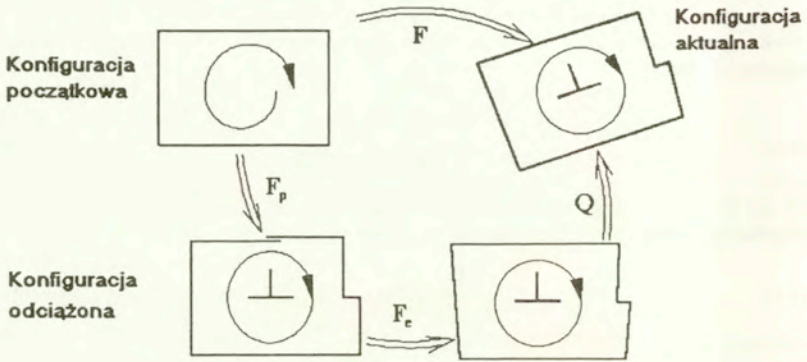
3.3 Sprężyste i plastyczne dystorsje

Podobnie jak w klasycznej mechanice kontinuum tak i w wypadku sprężysto–plastycznej deformacji zorientowanego kontinuum będziemy zakładać, że całkowity gradient deformacji \mathbf{F} można rozłożyć multiplikatywnie. W tym jednak wypadku wyróżnimy tensor obrotu oraz tensory deformacji sprężystej \mathbf{F}_e i plastycznej \mathbf{F}_p

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad (3.84)$$

Rozkład ten definiuje dwie dodatkowe, najczęściej lokalne konfiguracje pośrednie, patrz rys. 3.2. Konfiguracja nazwana na rysunku konfiguracją odciążoną jest nazywana również lokalną izokliniczną konfiguracją odciążoną — porównaj TEODOSIU (1970, 1992), jak również po prostu konfiguracją pośrednią — porównaj RICE (1971). W naszym wypadku, ze względu na wyróżnienie dwóch konfiguracji pośrednich konfiguracja, o której mowa, jest nazywana w skrócie konfiguracją odciążoną. Wprowadzenie tego formalnego rozkładu multiplikatywnego ma swoje konsekwencje matematyczne m. in. w postaci:

1. jednoznaczności rozkładu tensora krzywizny α_C na sprężystą i plastyczną część,



Rys. 3.2 Schemat rozważanych konfiguracji

2. dodatkowych warunków, które muszą spełniać te nowe tensory zakrzywienia, aby pola tensorowe $F_e(x, t)$ i $F_p(x, t)$ mogły istnieć.

Z punktu widzenia notacji stosowanej w ośrodkach polarnych tensor obrotu oraz tensory plastycznych i sprężystych deformacji powinniśmy oznaczyć odpowiednio jako ortogonalny tensor mikroruchów (mikromotion tensor) χ oraz sprężysty i plastyczny tensor Cosserat: C_e i C_p . W takim wypadku rozkład multiplikatywny (3.84) przyjmuje równoważną postać

$$F = \chi C_e C_p \quad (3.85)$$

gdzie

$$\chi \equiv Q \quad (3.86)$$

$$C_e \equiv F_e \quad (3.87)$$

$$C_p \equiv F_p \quad (3.88)$$

W mechanice ośrodków polarnych lokalne rozciągnięcie sieci kryształu nie jest identyfikowane z tensorem sprężystej deformacji Cosserat ani też z jego symetryczną częścią, ale jest ono opisywane tensorem mikrorozciągnięć. Rozciągnięcia te utożsamiano zazwyczaj z rozciągnięciem tzw. directorów. Stąd też w wielu modelach wykorzystujących directorzy zakładano, niejako w sposób naturalny, że directorzy mogą zmieniać swoją długość. Prowadziło to do uwzględniania dodatkowych sześciu (!) stopni swobody ruchu kontinuum, porównaj np. ERINGEN i KAFADAR (1976).

W przypadku stosowania współrzędnych kątowych opis pola obrotu cząstek kontinuum nie wymaga używania directorów. W modelu zaproponowanym przez autora obecnej pracy ewentualne mikrodeformacje struktury nie są modelowane poprzez zadawanie

dotychczasowych stopni swobody, ale poprzez wprowadzenie więzów kinematycznych uzależniających mikrodeformacje (np. rozciągnięcie sieci kryształu) od miar „zewnętrznej” deformacji cząstki zorientowanego kontinuum (tzn. miar jej dystorsji i zakrzywienia), porównaj DŁUŻEWSKI (1993). Cząstka kontinuum może być wtedy identyfikowana np. z reprezentatywnym obszarem zdeformowanej sieci kryształu. Na deformację takiego obszaru składa się nie tylko deformacja sieci, ale również np. sprężyste przemieszczenia i odkształcenia defektów sieci.

3.3.1 Warunek zgodności przemieszczeń

Ze względu na założony rozkład multiplikatywny (3.84) możemy wyrazić warunek (3.16) przy użyciu odpowiednich pochodnych kowariantnych tensorów obrotu i dystorsji. Podstawiając (3.84) do (3.16) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & Q^k_{M,L} F_e^M N F_p^N K + Q^k_O F_e^O P, L F_p^P K + Q^k_R F_e^R S F_p^S K, L = \\ & = Q^k_{A,K} F_e^A B F_p^B L + Q^k_C F_e^C D, K F_p^D L + Q^k_E F_e^E F F_p^F L, K \end{aligned} \quad (3.89)$$

W tym wypadku możemy wykorzystać zależność (3.19). Podstawiając wspomnianą zależność do (3.89) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & (-\varphi^\alpha_{,L} e_\alpha^k - \Phi^\Theta_{,L} e_{\Theta M}^N Q^k_N Q_l^M) F_l^k + Q^k_O F_e^O P, L F_p^P K + Q^k_R F_e^R S F_p^S K, L = \\ & = (-\varphi^\beta_{,K} e_\beta^k m - \Phi^\Lambda_{,K} e_{\Lambda A}^H Q^k_H Q_m^A) F^m_L + Q^k_C F_e^C D, K F_p^D L + Q^k_E F_e^E F F_p^F L, K \end{aligned} \quad (3.90)$$

Tensor alternacji jest tensorem izotropowym. Oznacza to, że jest on obiektywny ze względu na sztywny obrót. Wykorzystując

$$e_{\Theta M}^N Q_\alpha^\Theta Q_l^M Q^k_N = e_{\alpha l}^k \quad (3.91)$$

a następnie mnożąc (3.90) przez \bar{F}^{-1K}_p i przez \bar{F}^{-1L}_r otrzymujemy

$$\begin{aligned} & (-\varphi^\alpha_{,r} + \Phi^\Theta_{,L} Q^\alpha_\Theta \bar{F}^{-1L}_r) e_\alpha^k p + Q^k_O F_e^O P, r F_p^P K \bar{F}^{-1K}_p + Q^k_R F_e^R S F_p^S K, r \bar{F}^{-1K}_p = \\ & = (-\varphi^\beta_{,p} + \Phi^\Lambda_{,K} Q^\beta_\Lambda \bar{F}^{-1K}_p) e_\beta^k r + Q^k_C F_e^C D, p F_p^D L \bar{F}^{-1L}_r + Q^k_E F_e^E F F_p^F L, p \bar{F}^{-1L}_r \end{aligned} \quad (3.92)$$

Mnożąc ostatnie równanie przez e^{spr} łatwo pokazać, że

$$(-\varphi^\alpha_{,m} + \Phi^\Theta_{,M} \bar{F}^{-1M}_m Q^\alpha_\Theta) e_\alpha^k i e^{nmi} = Q^k_L F_e^L N, i \bar{F}^{-1N}_o Q_j^O e^{nji} + Q^k_p F_e^P R F_p^R K, p \bar{F}^{-1K}_r e^{nrp} \quad (3.93)$$

Prawa strona wspomnianego równania definiuje odpowiednio miary zakrzywienia sprężystego i plastycznego⁴

$$\alpha_e \stackrel{df}{=} -Q \text{grad} F_e \times (Q F_e)^{-1} \quad (3.94)$$

$$\alpha_p \stackrel{df}{=} -Q F_e \text{grad} F_p \times (Q F_e F_p)^{-1} \quad (3.95)$$

⁴Można pokazać, że w przypadku liniowej teorii wprowadzone tu miary odpowiadają odpowiednio

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \stackrel{df}{=} -\text{curl } \boldsymbol{\omega} \\ \alpha_o \stackrel{df}{=} -\text{curl } \boldsymbol{\omega}_o \\ \alpha_e \stackrel{df}{=} \text{curl } \boldsymbol{\varepsilon}_e \\ \alpha_p \stackrel{df}{=} \text{curl } \boldsymbol{\varepsilon}_p \end{array} \right. \quad \text{gdzie} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\omega} \approx Q - 1 \\ \boldsymbol{\omega}_o \approx Q_o - 1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_e \approx F_e - 1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p \approx F_p - 1 \end{array} \right. \quad \text{oraz} \quad \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_o + \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p = \nabla u \approx F - 1.$$

porównaj (3.29). Tak więc warunek zgodności przemieszczeń (3.16) może być zapisany w następującej formie

$$\alpha = \alpha_o + \alpha_e + \alpha_p \quad (3.96)$$

Wykorzystując związki (3.25) i (3.26) możemy zdefiniować miary zakrzywienia κ_e i κ_p jako

$$\kappa_e \stackrel{df}{=} -\alpha_e^T + \frac{1}{2} \text{tr} \alpha_e^T \mathbf{1} \quad (3.97)$$

$$\kappa_p \stackrel{df}{=} -\alpha_p^T + \frac{1}{2} \text{tr} \alpha_p^T \mathbf{1} \quad (3.98)$$

co prowadzi do zależności

$$\kappa = \kappa_o + \kappa_e + \kappa_p \quad (3.99)$$

gdzie κ_o zostało zdefiniowane już wcześniej za pomocą (3.11).

Na obecnym etapie nasze rozważania nie dotyczą bezpośrednio liniowej teorii dyslokacji, ale ogólnej, nieliniowej teorii sprężysto–plastycznych deformacji zorientowanego kontinuum. Niemniej, z formalnego punktu widzenia, możemy tu wykorzystać również wyniki J.M. BURGERSA (1939a,b) i przez analogię do wektora Burgersa możemy dla powierzchni s ograniczonej zamkniętym konturem „Burgersa” zdefiniować następujące wektory

$$\mathbf{b} \stackrel{df}{=} \int_s \alpha ds \quad (3.100)$$

$$\mathbf{b}_o \stackrel{df}{=} \int_s \alpha_o ds \quad (3.101)$$

$$\mathbf{b}_e \stackrel{df}{=} \int_s \alpha_e ds \quad (3.102)$$

$$\mathbf{b}_p \stackrel{df}{=} \int_s \alpha_p ds \quad (3.103)$$

Ze względu na (3.96) otrzymujemy

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_o + \mathbf{b}_e + \mathbf{b}_p \quad (3.104)$$

Na obecnym etapie rozważań możemy mówić jedynie o pewnym podobieństwie formalnym otrzymanych tu zależności z teorią dyslokacji, niemniej wyprzedzając nieco tok dalszych rozważań, warto już teraz zaznaczyć, że miara zakrzywienia plastycznego α_p oraz wektor \mathbf{b}_p to właśnie nic innego jak dobrze nam znane tensor gęstości dyslokacji i wektor Burgersa. Dowód tego stwierdzenia będzie omówiony w podrozdziale (4.1), porównaj np. (4.8) ÷ (4.15).

W podrozdziale dotyczącym tensorów zakrzywienia w ośrodkach Cosserat zauważyliśmy, że tensor zakrzywienia α_c może być zdefiniowany na podstawie czterech różnych związków tensorowych, (3.44)–(3.47). Z drugiej zaś strony łatwo zauważyć, że w przypadku sprężysto–plastycznej deformacji wspomniany tensor spełnia zależność

$$\alpha_c = \alpha_e + \alpha_p \quad (3.105)$$

Powstaje więc pytanie: czy każdy z tensorów sprężystego i plastycznego zakrzywienia α_e i α_p może być również określony za pomocą analogicznych czterech związków? — Tak. Zauważmy np., że

$$\mathbf{QF}_e \text{grad}(\mathbf{QF}_e)^{-1} = -\text{grad}(\mathbf{QF}_e)(\mathbf{QF}_e)^{-1} \quad (3.106)$$

Korzystając z powyższej zależności łatwo pokazać, że

$$\mathbf{QF}_e \operatorname{curl}(\mathbf{QF}_e)^{-1} = \operatorname{grad}(\mathbf{QF}_e) \dot{\times} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \quad (3.107)$$

$$= \operatorname{grad} \mathbf{Q} \dot{\times} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \operatorname{grad} \mathbf{F}_e \dot{\times} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \quad (3.108)$$

$$= \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_o - \boldsymbol{\alpha}_e \quad (3.109)$$

Zatem, podobnie jak to było w wypadku tensora $\boldsymbol{\alpha}_c$, porównaj (3.44)-(3.47), wykorzystując dodatkowo równanie zgodności przemieszczeń (3.96) otrzymujemy w sumie cztery różne związki tensorowe określające jednoznacznie jeden i ten sam tensor zakrzywienia plastycznego

$$\boldsymbol{\alpha}_p = -\mathbf{QF}_e \operatorname{grad} \mathbf{F}_p \dot{\times} (\mathbf{QF}_e \mathbf{F}_p)^{-1} \quad (3.110)$$

$$= \mathbf{QF}_e \mathbf{F}_p \operatorname{grad} \mathbf{F}_p^{-1} \dot{\times} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \quad (3.111)$$

$$= \operatorname{grad}(\mathbf{QF}_e) \dot{\times} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \quad (3.112)$$

$$= \mathbf{QF}_e \operatorname{curl}(\mathbf{QF}_e)^{-1} \quad (3.113)$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla tensora zakrzywienia sprężystego otrzymujemy (str. 102)

$$\boldsymbol{\alpha}_e = -\mathbf{Q} \operatorname{grad} \mathbf{F}_e \dot{\times} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \quad (3.114)$$

$$= \mathbf{QF}_e \operatorname{grad} \mathbf{F}_e^{-1} \dot{\times} \mathbf{Q}^T \quad (3.115)$$

$$= \operatorname{grad} \mathbf{Q} \dot{\times} \mathbf{Q}^T + \operatorname{grad}(\mathbf{QF}_e) \dot{\times} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \quad (3.116)$$

$$= \mathbf{Q} \operatorname{curl} \mathbf{Q}^T - \mathbf{QF}_e \operatorname{curl}(\mathbf{QF}_e)^{-1} \quad (3.117)$$

Miary zakrzywienia w konfiguracji odciążonej

W sprężysto-plastyczności ośrodków zorientowanych bardzo ważną rolę odgrywa konfiguracja odciążona, rys. 3.2. Dlatego też bardzo istotne dla naszych dalszych rozważań wydaje się określenie miar zakrzywienia względem tej właśnie konfiguracji. Miary te zdefiniujemy jednoznacznie poprzez wykorzystanie praw transformacji (3.61) i (3.62) oraz wprowadzenie nowych praw

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\dots} = (\mathbf{QF}_e)^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{\dots} (\mathbf{QF}_e)^{-T} \det(\mathbf{QF}_e) \quad (3.118)$$

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}}_{\dots} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\kappa}_{\dots} \mathbf{QF}_e \quad (3.119)$$

gdzie miary w konfiguracji odciążonej zostały oznaczone daszkiem u góry. Wykorzystując powyższe prawa transformacji oraz (3.110)-(3.113) otrzymujemy następujące zależności (str. 103)

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_p = -\widehat{\operatorname{grad}} \mathbf{F}_p \times \mathbf{F}_p^{-1} \quad (3.120)$$

$$= -\mathbf{F}_p \widehat{\operatorname{curl}} \mathbf{F}_p^{-1} \quad (3.121)$$

$$= \widehat{\operatorname{curl}} \mathbf{F}_p \mathbf{F}_p^T \det \mathbf{F}_p^{-1} \quad (3.122)$$

$$= -(\mathbf{QF}_e)^{-1} \widehat{\operatorname{curl}}(\mathbf{QF}_e) \quad (3.123)$$

$$= -\widehat{\operatorname{grad}}(\mathbf{QF}_e)^{-1} \dot{\times} (\mathbf{QF}_e) \quad (3.124)$$

$$= \operatorname{curl}(\mathbf{QF}_e)^{-1} (\mathbf{QF}_e)^{-T} \det(\mathbf{QF}_e) \quad (3.125)$$

natomiast na podstawie (3.114) i (3.115) otrzymujemy m. in. (str. 103)

$$\widehat{\alpha}_e = \widehat{\text{grad}} F_e^{-1} \times F_e \quad (3.126)$$

$$= F_e^{-1} \widehat{\text{curl}} F_e \quad (3.127)$$

gdzie $\widehat{\text{grad}}$ i $\widehat{\text{curl}}$ oznaczają odpowiednie pseudooperatory pola tensorowego w konfiguracji odciążonej, tzn. są one tak zdefiniowane, że w przypadku gdy konfiguracja lokalna stanie się konfiguracją globalną wtedy wyrażenia te będą miały rzeczywisty sens odpowiednich operatorów pola w tej konfiguracji. Łatwo sprawdzić, że aby tak było to pseudooperatory pola w konfiguracji odciążonej muszą być określone w następujący sposób

$$\widehat{\text{grad}} t \stackrel{df}{=} t_{,k} Q_K^k F_e^K \otimes E^L \quad (3.128)$$

$$\widehat{\text{curl}} t \stackrel{df}{=} t_{,k} Q_K^k F_e^K \times E^L \quad (3.129)$$

$$\widehat{\text{div}} t \stackrel{df}{=} \text{div} [t(QF_e)^T \det(QF_e)^{-1}] \det(QF_e) \quad (3.130)$$

gdzie t jest dowolnym polem tensorowym, porównaj (2.101)-(2.103).

W dotychczasowych rozważaniach miary sprężystego i plastycznego zakrzywienia zostały określone na podstawie rozkładu gradientu przemieszczenia w aktualnej konfiguracji, porównaj (3.89)-(3.95), oraz na podstawie wprowadzonych praw transformacji (3.63) i (3.64). Można natomiast postawić pytanie: dlaczego, aby zdefiniować miary zakrzywienia w konfiguracji odciążonej dokonaliśmy rozkładu gradientu deformacji w aktualnej konfiguracji, skoro mogliśmy równie dobrze dokonać takiego rozkładu w konfiguracji odciążonej, i tam dokonać definicji odpowiednich miar sprężystego i plastycznego zakrzywienia kontinuum. Prześledźmy więc rachunki wynikające z powyższego rozumowania. W tym celu nasze wyjściowe równanie (3.89) przetransformujemy do konfiguracji odciążonej, mnożąc je kolejno przez $\bar{F}_p^{-1} K_G$, $\bar{F}_p^{-1} L_J$, $\bar{F}_e^{-1} A_X Q_k^X$, a dopiero potem dokonajmy jego kontrakcji mnożąc je przez e^{BGJ} , łatwo zauważyć, że w efekcie takich przekształceń wspomniane równanie przyjmuje postać, porównaj (3.93),

$$\begin{aligned} -\varphi_{,L}^{\circ} \bar{F}_p^{-1} L_J e_{\alpha}^k Q^l F_e^Z G Q_k^X \bar{F}_e^{-1} A_X e^{BGJ} - \Phi^{\Theta} {}_{,L} F_p L_J e_{\alpha M}^N \bar{F}_e^{-1} A_N F_e^M G e^{BGJ} = \\ = \bar{F}_e^{-1} A_O F_e^O G_L \bar{F}_p^{-1} L_J e^{BGJ} + F_p^A K_L \bar{F}_p^{-1} L_J F_p^K G e^{BGJ} \end{aligned} \quad (3.131)$$

W ten sposób po prawej stronie ostatniej równości otrzymaliśmy wyrażenia definiujące miary sprężystego i plastycznego zakrzywienia w konfiguracji odciążonej. Zauważmy, że otrzymane wyrażenia to nic innego jak właśnie $\widehat{\alpha}_e^{AB}$ i $\widehat{\alpha}_p^{AB}$ zdefiniowane poprzednio na podstawie rozkładu w aktualnej konfiguracji, porównaj (3.126) i (3.120). Ostatnie spostrzeżenie upoważnia nas do następującego wniosku.

Wniosek Zaproponowany układ praw transformacji (3.118)-(3.119) zapewnia obiektywność rozkładu tensorów zakrzywienia ze względu na wybór konfiguracji, tzn. rezultat dokonanego rozkładu, np. na sprężystą i plastyczną część, nie zależy od tego, w której konfiguracji go dokonamy — w aktualnej czy w odciążonej konfiguracji.

Miary zakrzywienia w konfiguracji początkowej

W naszych rozważaniach na temat sprężysto-plastycznej deformacji zorientowanego kontinuum podstawową rolę będą odgrywać miary określone w konfiguracji odciążonej. Stąd

też nasze rozważania na temat miar zakrzywienia zdefiniowanych dla konfiguracji początkowej ograniczymy jedynie do zdefiniowania odpowiednich miar. Zauważmy np., że stosując prawa transformacji (3.61)-(3.64) możemy na podstawie (3.97), (3.98) i (3.110)-(3.113) jednoznacznie określić miary $\bar{\alpha}_e$, $\bar{\alpha}_p$, $\bar{\kappa}_e$ i $\bar{\kappa}_p$ w konfiguracji początkowej. W ten sposób otrzymujemy m. in. następujące zależności (str. 104)

$$\bar{\alpha}_p = \mathbf{F}_p^{-1} \overline{\text{curl}} \mathbf{F}_p \quad (3.132)$$

$$= \overline{\text{grad}} \mathbf{F}_p^{-1} \dot{\times} \mathbf{F}_p \quad (3.133)$$

$$\bar{\alpha}_e = -\mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{F}_e^{-1} \overline{\text{grad}} \mathbf{F}_e^{-1} \dot{\times} \mathbf{F}_p \quad (3.134)$$

$$= \mathbf{F}_p^{-1} \overline{\text{grad}} \mathbf{F}_e^{-1} \dot{\times} (\mathbf{F}_e \mathbf{F}_p) \quad (3.135)$$

Początkowe pole rozciągnięć sprężystych

W wielu problemach fizycznych wygodnie jest założyć pewne pole orientacji i odpowiadające temu polu pewne pole naprężeń rezidualnych w konfiguracji początkowej. Z fizycznego punktu widzenia takie postawienie problemu wiąże się z założeniem pewnego pola rozciągnięć rezidualnych w konfiguracji początkowej. Do opisu tego typu problemów TEODOSIU (1970) założył następujący rozkład gradientu deformacji

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_0 \mathbf{P}_0^{-1} \quad (3.136)$$

zgodnie z naszą notacją oznaczenia użyte przez Teodosiua odpowiadają związkom (4.6) i (4.7) uzupełnionym zależnością

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{Q}_0 \mathbf{F}_{e_0} \quad (3.137)$$

gdzie \mathbf{F}_{e_0} oznacza tensor dystorsji rezidualnych, a \mathbf{Q}_0 jest ortogonalnym tensorem obrotu opisującym orientację cząstki w konfiguracji odniesienia (względem pewnej, wyróżnionej orientacji, dla której założono $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{1}$). Wykorzystując (3.19) łatwo zauważyć, że ze względu na przyjętą interpretację fizyczną tensora \mathbf{Q}_0 funkcja $\mathbf{Q}_0(\mathbf{X})$ musi, z założenia, spełniać następujący związek

$$Q_0^K{}_{M,L} = -\Phi^{\Theta}{}_{,L} e^{\Theta}{}^K{}_L Q_0^L{}_M \quad (3.138)$$

Używając naszej notacji rozkład (3.136) wyraża się następującą zależnością

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p (\mathbf{Q}_0 \mathbf{F}_{e_0})^{-1} \quad (3.139)$$

W takim wypadku warunek zgodności (3.16) przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_e - \boldsymbol{\alpha}_{e_0}) + \boldsymbol{\alpha}_p \quad (3.140)$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}_e$ i $\boldsymbol{\alpha}_p$ wyrażają się poprzez (3.27), (3.94) i (3.95), a

$$\boldsymbol{\alpha}_{e_0} \stackrel{df}{=} -\mathbf{Q} \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \overline{\text{grad}} \mathbf{F}_{e_0}^{-1} \dot{\times} \mathbf{Q}_0 \mathbf{F}^{-1} \quad (3.141)$$

3.3.2 Warunek zgodności obrotów

W przypadku zastąpienia tensora deformacji Cosserat F_C iloczynem tensorów sprężystej i plastycznej deformacji powstaje pytanie: jakie ograniczenia dla tych nowych miar wynikają z warunku zgodności obrotów, porównaj związek (3.80) oraz jego równoważną postać (3.79). Łatwo pokazać, że wspomniane warunki sprowadzały się ogólnie do warunku

$$F_{CL,MN}^k = F_{CL,NM}^k \quad (3.142)$$

W naszym wypadku, kiedy F_C zostało zastąpione iloczynem dwóch tensorów, F_e i F_p , musimy postawić ograniczenia dla tensorów zakrzywienia w taki sposób, aby zapewniały one symetrię drugich gradientów odpowiednio dla F_e i F_p . Można pokazać, że poszukiwane warunki mają postać (str. 104)

$$\widehat{\text{div}}(\tilde{\alpha}_e + \tilde{\alpha}_p) = 0 \quad (3.143)$$

$$\widehat{\text{div}}\tilde{\alpha}_p = 0 \quad (3.144)$$

gdzie tensory α z tyldą i daszkiem na górze określają odpowiednio miary zakrzywienia w konfiguracjach pośrednich, porównaj np. (3.77), (3.78), (3.118) i (3.119).

3.4 Miary prędkości deformacji

Wykorzystując zaproponowany w równaniu (3.84) rozkład gradientu deformacji możemy zapisać gradient pola prędkości przemieszczeń w następującej postaci

$$\dot{F}F^{-1} = \dot{Q}Q^T + Q\dot{F}_eF_e^{-1}Q^T + QF_e\dot{F}_pF_p^{-1} \quad (3.145)$$

co możemy również zapisać w postaci

$$\text{grad}v = w + d_e + d_p \quad (3.146)$$

gdzie w jest antysymetrycznym tensorem prędkości obracania się cząstek kontinuum, natomiast d_e i d_p oznaczają odpowiednio tensory prędkości sprężystych i plastycznych dystorsji. Porównując (3.145) i (3.146) otrzymujemy następujące zależności

$$w \stackrel{df}{=} \dot{Q}Q^T \quad (3.147)$$

$$d_e \stackrel{df}{=} Q\dot{F}_e(QF_e)^{-1} \quad (3.148)$$

$$d_p \stackrel{df}{=} QF_e\dot{F}_p(QF_eF_p)^{-1} \quad (3.149)$$

Można również pokazać, że pochodne materialne z wyznaczników $\det F_e$ i $\det F_p$ spełniają następujące zależności

$$\frac{d}{dt}\det F_e = \text{tr} d_e \det F_e \quad (3.150)$$

$$\frac{d}{dt}\det F_p = \text{tr} d_p \det F_p \quad (3.151)$$

natomiast pochodne materialne gradientów miar deformacji przemieszczeniowej spełniają następujące zależności (str. 105)

$$\frac{d}{dt} \text{grad } \mathbf{F} = \text{grad } \dot{\mathbf{F}} - \text{grad } \mathbf{F} \text{ grad } \mathbf{v} \quad (3.152)$$

$$\frac{d}{dt} \text{grad } \mathbf{F}_e = \text{grad } \dot{\mathbf{F}}_e - \text{grad } \mathbf{F}_e \text{ grad } \mathbf{v} \quad (3.153)$$

$$\frac{d}{dt} \text{grad } \mathbf{F}_p = \text{grad } \dot{\mathbf{F}}_p - \text{grad } \mathbf{F}_p \text{ grad } \mathbf{v} \quad (3.154)$$

W przypadku miar deformacji kątovej otrzymujemy znacznie bardziej skomplikowane wzory na pochodne materialne, i tak np. o ile

$$\frac{d}{dt} x^k_{,K} = v^k_{,i} X^i_{,K} \quad (3.155)$$

o tyle dla współrzędnych kątowych, jeśli przyjmiemy, że $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$, gdzie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, to różniczkując φ jako funkcję złożoną $\varphi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$ otrzymujemy zależność (str. 105),

$$\boxed{\frac{d}{dt} \varphi^\alpha_{,K} = \omega^\alpha_{,K} + \omega^\beta e_{\beta\gamma}^\alpha \varphi^\gamma_{,K}} \quad (3.156)$$

Tę bardzo ważną dla nas zależność możemy zapisać również w postaci

$$\frac{d}{dt} \varphi^\alpha_{,K} = \omega^\alpha_{,K} + w^\alpha_\gamma \varphi^\gamma_{,K} \quad (3.157)$$

gdzie

$$w^\alpha_\gamma = -\omega^\beta e_{\beta\gamma}^\alpha \quad (3.158)$$

$$\omega^\alpha = -0.5 w^{kl} e_{kl}^\alpha \quad (3.159)$$

Korzystając z wyprowadzonych już zależności łatwo dowieść, że pochodne materialne tensorów zakrzywienia spełniają następujące zależności (str. 105)

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \text{grad } \boldsymbol{\omega} + \mathbf{w} \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa} \text{ grad } \mathbf{v} \quad (3.160)$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_o = \mathbf{w} \boldsymbol{\kappa}_o - \boldsymbol{\kappa}_o \text{ grad } \mathbf{v} \quad (3.161)$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_C = \text{grad } \boldsymbol{\omega} + \mathbf{w} \boldsymbol{\kappa}_C - \boldsymbol{\kappa}_C \text{ grad } \mathbf{v} \quad (3.162)$$

Łatwo również pokazać, że pochodna materialna tensora wykrzywienia (wryness tensor) $\boldsymbol{\kappa}_C$ wykorzystywanego w opisie konstytutywnym sprężystych ośrodków polarnych spełnia zależność

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_C = \mathbf{Q}^T \text{grad } \boldsymbol{\omega} \mathbf{F} \quad (3.163)$$

Niemniej, z punktu widzenia teorii dyslokacji interesują tu nas raczej pochodne materialne miar zakrzywienia $\boldsymbol{\alpha}_p$ i $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_p$. Można dowieść (str. 106), że

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_p = \text{curl } \mathbf{d}_p + (\mathbf{w} + \mathbf{d}_e) \boldsymbol{\alpha}_p + \boldsymbol{\alpha}_p (\mathbf{w} + \mathbf{d}_e)^T - \boldsymbol{\alpha}_p \text{tr}(\mathbf{w} + \mathbf{d}_e) \quad (3.164)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_p = \widehat{\text{curl}} \hat{\mathbf{d}}_p + \hat{\mathbf{d}}_p \hat{\boldsymbol{\alpha}}_p + \hat{\boldsymbol{\alpha}}_p \hat{\mathbf{d}}_p^T - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_p \text{tr} \hat{\mathbf{d}}_p \quad (3.165)$$

$$= (\mathbf{Q} \mathbf{F}_e)^{-1} \text{curl } \mathbf{d}_p (\mathbf{Q} \mathbf{F}_e)^{-T} \det(\mathbf{Q} \mathbf{F}_e) \quad (3.166)$$

gdzie

$$\hat{\mathbf{d}}_p \stackrel{df}{=} \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} = (\mathbf{Q} \mathbf{F}_e)^{-1} \mathbf{d}_p \mathbf{Q} \mathbf{F}_e \quad (3.167)$$

Na podstawie zależności (3.164) i (3.165) wprowadźmy definicje następujących pochodnych obiektywnych dla tensorów z konfiguracji aktualnej i z konfiguracji odciążonej

$$\overset{\circ}{\alpha}_p \stackrel{df}{=} \dot{\alpha}_p - (\mathbf{w} + \mathbf{d}_e) \alpha_p - \alpha_p (\mathbf{w} + \mathbf{d}_e)^T + \alpha_p \text{tr}(\mathbf{w} + \mathbf{d}_e) \quad (3.168)$$

$$\overset{\circ}{\hat{\alpha}}_p \stackrel{df}{=} \dot{\hat{\alpha}}_p - \hat{\mathbf{d}}_p \hat{\alpha}_p - \hat{\alpha}_p \hat{\mathbf{d}}_p^T + \hat{\alpha}_p \text{tr} \hat{\mathbf{d}}_p \quad (3.169)$$

Na podstawie wprowadzonych definicji oraz na podstawie związków (3.164) i (3.165) otrzymujemy następujące zależności

$$\boxed{\overset{\circ}{\alpha}_p = \text{curl } \mathbf{d}_p} \quad (3.170)$$

$$\overset{\circ}{\hat{\alpha}}_p = \widehat{\text{curl}} \hat{\mathbf{d}}_p \quad (3.171)$$

Warto tu podkreślić, że dla pochodnych obiektywnych (3.168) i (3.169) przyjęliśmy to samo oznaczenie. Ogranicza to zakres ich zastosowania tylko do tensorów ze ściśle określonej konfiguracji. Zrobiliśmy to celowo, gdyż upraszcza to nam zapis, a co więcej sugeruje, że wspomniane definicje mogą być „reprezentantami” jakiegoś bardziej ogólnego prawa rządzącego transformacją pochodnych obiektywnych z jednej konfiguracji do drugiej.

Rozdział 4

Kontynualna teoria defektów

W poprzednim rozdziale, w oparciu o postulowany rozkład gradientu deformacji, zostały wprowadzone miary sprężystego, plastycznego i całkowitego zakrzywienia zorientowanego kontinuum. Z fizycznego punktu widzenia miary te odpowiadają najczęściej miarom zakrzywienia mikrostruktury materiałów, z drugiej zaś strony ogólnie wiadomo, że o zakrzywieniu regularnej struktury decydują głównie jej defekty. Stąd też teoria zorientowanego kontinuum nierozzerwalnie wiąże się z mikrostrukturalnymi teoriami opisu materiału. W teoriach tych pomimo założenia ciągłości materiału wprowadza się dodatkowe pola tensorowe mające za zadanie opisać cechy mikrostruktury materiału. Można tu np. wymienić teorie mikromorficzne, w których wprowadza się dodatkowo tensorowe pole mikrorozciągnięć, porównaj np. WOŹNIAK (1967), ERINGEN i KAFADAR (1976). Warto dodać, że o ile teorie mikromorficzne dotyczą zazwyczaj modelowania sprężystego zachowania się materiału, o tyle do modelowania plastycznych deformacji zorientowanego kontinuum wykorzystuje się m. in. kontynualną teorię defektów. Oczywiście, ze względu na konieczność spełnienia równań zgodności nie możemy, w wielu wypadkach, dokonać jednoznacznego podziału na modele czysto plastyczne i czysto sprężyste. Typowym przykładem jest tu właśnie teoria dyslokacji, która dla osób zajmujących się modelowaniem stanu naprężeń wokół dyslokacji jest częścią teorii sprężystości, podczas gdy, dla osób zajmujących się ruchem dyslokacji teoria ta jest teorią plastyczności lub sprężysto-plastyczności.

W tym miejscu warto nawiązać do klasycznego rozkładu gradientu deformacji (nie wyróżniającego obrotu cząstek kontinuum) porównaj np. RICE (1971), ASARO(1983), PERZYNA (1988), NEMAT-NASSER (1990)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e^* \mathbf{F}_p \quad (4.1)$$

gwiazdka (*) została tu użyta jedynie w celu uniknięcia niejednoznaczności związanej z oznaczeniami użytymi w (3.84). W przypadku sprężystej deformacji kryształu nie zawierającego defektów nie obserwujemy (poza polem przemieszczeń) dodatkowych stopni swobody ruchu sieci kryształu. Wtedy tensor dystorsji sprężystej \mathbf{F}_e z równania (3.84) odpowiada tensorowi sprężystych rozciągnięć. W takim wypadku

$$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{R}_e \quad (4.2)$$

$$\mathbf{F}_e \equiv \mathbf{U}_e \quad (4.3)$$

gdzie \mathbf{R}_e i \mathbf{U}_e oznaczają odpowiednio: tensor ortogonalny i tensor symetryczny otrzymane na podstawie rozkładu polarnego

$$\mathbf{F}_e^* = \mathbf{R}_e \mathbf{U}_e \quad (4.4)$$

Jeśli natomiast występują w kryształach sprężyste deformacje i przemieszczenia defektów, np. w wyniku wyginania się pętli dyslokacji lub na skutek innego sprężycie odwracalnego ruchu, wtedy łatwo pokazać, patrz np. rys.2 w DŁUŻEWSKI (1991b), że w procesie sprężystej deformacji obrót sieci kryształu nie odpowiada tensorowi obrotów R_e . Prowadzi to do rozbieżności pomiędzy obserwowanym lokalnym obrotem sieci kryształu, a obrotem wynikającym z polarnego rozkładu F_e^* na R_e i U_e . Tak więc, zgodnie z obserwowanym wtedy obrotem sieci kryształu, możemy dokonać rozkładu F_e^* na obrót sieci kryształu Q i jej niesymetryczną deformację F_e , tzn. na tensor deformacji sprężystej Cosserat. W literaturze poświęconej sprężysto-plastycznemu rozkładowi gradientu deformacji jest stosowanych wiele różnych notacji. Wyraża się to m. in. w tym, że prawie każda teoria dopuszczająca obrót cząstki kontinuum używa innych oznaczeń.

W niniejszej pracy kinematyka ruchu dyslokacji jest rozpatrywana w ramach pewnego ogólnego zorientowanego kontinuum, podczas gdy w kontynualnej teorii dyslokacji używa się na ogół innego rozkładu gradientu deformacji, tj.

$$F = AP \quad (4.5)$$

gdzie zgodnie z wcześniej omówionymi notacjami otrzymujemy, porównaj (3.84), (4.1), (3.85),

$$A \equiv F_e^* = QF_e = \chi C_e \quad (4.6)$$

$$P \equiv F_p \equiv C_p \quad (4.7)$$

Oznaczenia typu (4.5) były stosowane m. in. przez TEODOSIU (1970) i MANDELA (1972).

4.1 Zakrzywienie plastyczne, a tensor gęstości dyslokacji

Dotychczas jedynie sugerowaliśmy, że tensor gęstości dyslokacji jest ściśle związany z miarą plastycznego zakrzywienia struktury wywołanego obecnością dyslokacji. Można jednak postawić zarzut: no dobrze, ale poza sugestią NYE (1953), co ma tak naprawdę wspólnego miara plastycznego zakrzywienia kryształu z tensorem gęstości dyslokacji wprowadzonym w teorii dyslokacji jako np. miara pewnej niekompatybilności sprężystej w zdefektowanej sieci kryształu. Stąd też, aby obronić się przed tego typu zarzutem i pozostać również w zgodzie z klasyczną, kontynualną teorią dyslokacji należałoby jeszcze pokazać, że tensor α_p jest rzeczywistie miarą gęstości dyslokacji w sensie Burgersa, a więc np. pokazać, że całka z niego odpowiada właśnie wektorowi Burgersa. Warto jeszcze raz zaznaczyć, że do tej pory wprowadziliśmy grupę tensorów $\bar{\alpha}...$ jako miary zakrzywienia zorientowanego kontinuum.

Okazuje się, że podobnie jak w wypadku klasycznej, kontynualnej teorii dyslokacji, możemy pokazać, że całka z tensora zakrzywienia α_p odpowiada wektorowi Burgersa w sensie klasycznym.

Zapomnijmy na chwilę o miarach plastycznego zakrzywienia i skupmy naszą uwagę na teorii dyslokacji. Zgodnie z ogólnie znaną definicją tzw. prawdziwy wektor Burgersa \bar{b}_d jest określany jako całka po obwodzie Burgersa c wokół dyslokacji, porównaj np. GAIROLA (1979),

$$\bar{b}_d = \oint_c (QF_e)^{-1} dr \quad (4.8)$$

Korzystając z tw. Stokes'a otrzymujemy

$$\hat{\mathbf{b}}_d = \int_s \text{curl}(\mathbf{QF}_e)^{-1} ds \quad (4.9)$$

gdzie s jest polem obszaru zakreślonego konturem Burgersa. W przypadku kontynuualnej teorii dyslokacji zakłada się, że w formie różniczkowej ostatniego równania

$$d\hat{\mathbf{b}}_d = \text{curl}(\mathbf{QF}_e)^{-1} ds \quad (4.10)$$

różniczka $d\hat{\mathbf{b}}_d$ jest związana z różniczką wektora Burgersa w konfiguracji aktualnej następującym równaniem

$$d\mathbf{b}_d = \mathbf{QF}_e d\hat{\mathbf{b}}_d \quad (4.11)$$

Podstawiając (4.11) do (4.10) otrzymuje się ogólnie znaną zależność

$$d\mathbf{b}_d = \mathbf{QF}_e \text{curl}(\mathbf{QF}_e)^{-1} ds \quad (4.12)$$

Warto tu podkreślić, że w klasycznej, nieliniowej, kontynuualnej teorii dyslokacji wyrażenie stojące przed różniczką ds jest utożsamiane z tensorem gęstości dyslokacji, tzn. zakłada się, że

$$d\mathbf{b}_d = \boldsymbol{\alpha}_d ds \quad (4.13)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\alpha}_d \stackrel{df}{=} \mathbf{QF}_e \text{curl}(\mathbf{QF}_e)^{-1} \quad (4.14)$$

Z równania tego nie wynika jednak bezpośrednio, że $\boldsymbol{\alpha}_d$ jest akurat tensorem zakrzywienia plastycznego $\boldsymbol{\alpha}_p$ lub chociażby tensorem $\boldsymbol{\alpha}$. Niemniej podstawiając wyprowadzony poprzednio związek (3.113) do (4.14) otrzymujemy w konsekwencji

$$\boldsymbol{\alpha}_d \equiv \boldsymbol{\alpha}_p \quad (4.15)$$

co pociąga za sobą

$$\mathbf{b}_d \equiv \mathbf{b}_p \quad (4.16)$$

Należy tu podkreślić, że dotychczas w nieliniowej, kontynuualnej teorii dyslokacji rozważania na temat sensu fizycznego tensora gęstości dyslokacji kończono zazwyczaj na wyprowadzeniu zależności (4.14). Na podstawie tej zależności definiowano tensor gęstości dyslokacji. Oczywiście, z wyrażenia stojącego po prawej stronie (4.14) nie wynika, że reprezentuje ono tensor plastycznego zakrzywienia struktury. Wyrażenie to może na pierwszy rzut oka sugerować, że miara $\boldsymbol{\alpha}_d$ nie ma nic wspólnego z plastycznym zakrzywieniem, a jeśli już to, że miara ta ma związek ze sprężystym zakrzywieniem mikrostruktury. Niemniej łatwo pokazać, np. analizując sprężyste wyginanie kryształu, że iloczyn $\mathbf{QF}_e \text{curl}(\mathbf{QF}_e)^{-1}$ nie zależy od sprężystego zakrzywienia kryształu. Ogólnie uznano więc, że reprezentuje on jakąś miarę niekompatybilności przemieszczeń w materiale. Tak więc pomimo sugestii NYE'A (1953) przyjęto, że kontynuualna teoria dyslokacji i teoria zorientowanych ośrodków ciągłych to dwie teorie oparte na zupełnie innych podstawach geometrycznych i kinematycznych. Jednak problem wzajemnych relacji pomiędzy tymi teoriami nurtował wielu, światowej sławy naukowców. Było to szczególnie wyraźne w latach 1950-1968. W tym czasie organizowano wiele znakomitych konferencji naukowych na ten temat. Warto tu wspomnieć o Sympozjum IUTAM pt. *Mechanics of Generalized Continua* zorganizowanym przez E. KRÖNERA w Stuttgarcie w 1967r. Sympozjum

było poświęcone pamięci braci EUGÈNE i FRANÇOIS COSSERAT oraz pamięci ÉLIE CARTAN. Wzięli w nim udział m. in. A.C. ERINGEN, A.E. GREEN, C.-C. WANG, W. NOLL, R.S. RIVLIN, R.A. TOUPIN, P.M. NAGHDI, E. REISSNER, R. DE WITT, C. TEODOSIU, H. ZORSKI i Z. WESOŁOWSKI, K.-H. ANTHONY, K. KONDO oraz B.A. BILBY.

Przytoczmy tu bardzo charakterystyczny fragment wypowiedzi KRÖNERA (1968) podsumowującej wyniki tej konferencji:

...

The fact that the quantities τ^{mk} respond to a curvature and have the dimension of a moment stress has lead GÜNTER [4] to his conception of a dislocated continuum as a Cosserat continuum. The idea is very tempting. Nevertheless, a complete correspondence has never been established and I am more and more convinced that the difference between COSSERAT and dislocation theory is fundamental.

The COSSERAT continuum, as I would define it, is built up from particles which possess an inherent orientation. (...)

In contrast to this picture, dislocations occur in crystals in which atoms need not possess an inherent orientation. Orientation enters only when the arrangement of the neighbouring atoms is regarded. Hence, although one can speak of an orientation at a point both in the normal crystal and in the Cosserat continuum, the physical situation is basically different. In fact moving dislocations are not spin waves. Instead, dislocations possess the fundamental ability to produce slip.

As a consequence of these obvious differences the geometry (and kinematics) used in the two cases should be different. ...

Zdaniem autora pracy takie stwierdzenia, a na dodatek w tak elitarnym i opiniotwórczym gronie, doprowadziły do tego, że od końca lat 60-tych pogląd o odmiennych podstawach geometrycznych kontynuualnej teorii dyslokacji i zorientowanych ośrodków ciągłych na długie lata zapanował niepodzielnie w literaturze, a stwierdzenia o wspólnych geometrycznych podstawach tych teorii traktowano jako graniczące z herezją. Nie sprzyjało to dalszemu rozwojowi mechaniki zorientowanych ośrodków ciągłych — zwłaszcza w kierunku opracowania wspólnych podstaw z teorią dyslokacji. Stosunkowo trudny aparat matematyczny dawał pole dla różnego typu spekulacji, czy nadinterpretacji matematycznych, np. definiowano symbole koneksji w oparciu o tensory lokalnej deformacji ciała, porównaj np. KONDO (1952), BILBY (1960), GAIROLA (1972), MAUGIN (1993)) LE i STUMPF (1996a,b) — łączono więc symbole koneksji nie z zakrzywieniem przestrzeni, w której jest zanurzone ciało, ale z deformacją i zakrzywieniem samego ciała. Rozwój tego typu teorii jeszcze bardziej pogarszał opinię na temat mechaniki zorientowanych ośrodków ciągłych. Warto może jeszcze podkreślić, że w większości prac poświęconych nieliniowej kontynuualnej teorii dyslokacji nie stawiano jasno problemu spełnienia równań zgodności. Na przykład dyskutowano szeroko rolę tensora dystorsji sprężystych — rozumianego jako $\mathbf{A} = \mathbf{QF}_e$, jednocześnie pomijając milczeniem to, jaką rolę pełni tu tensor dystorsji plastycznej \mathbf{P} ; co więcej, przemilczano zazwyczaj fakt, że całkowity gradient deformacji $\mathbf{F} = \mathbf{AP}$ zawsze (!), a więc i w kontynuualnej teorii dyslokacji, musi spełniać równanie zgodności przemieszczeń. Warto podkreślić, że w wielu opracowaniach na temat kontynuualnej teorii dyslokacji tensor plastycznej deformacji w ogóle się nie pojawia (!), porównaj

np. BILBY (1960), GAIROLA (1979). Jak ważną rolę spełnia w teorii dyslokacji warunek zgodności przemieszczeń pokazano w ostatnim wyprowadzeniu (4.15). Bez tego warunku nie byłibyśmy w ogóle w stanie dowieść, że tensor gęstości dyslokacji, jest niczym więcej jak tylko jedną z miar plastycznego zakrzywienia zorientowanego kontinuum. Dlatego sugestie o różnych podstawach, zwłaszcza geometrycznych, kontynuualnej teorii dyslokacji i mechaniki zorientowanych ośrodków ciągłych możemy uznać za nonsens. Z punktu widzenia mechaniki zorientowanych ośrodków ciągłych, nie ma żadnego znaczenia czy rozpatrywana jest pojedyncza dyslokacja w atomowej strukturze kryształu, czy np. potężny rozmiarami uskoc tektoniczny gruntu. Oczywiście podstawą zastosowania mechaniki zorientowanych ośrodków ciągłych jest dla nas możliwość określenia pola orientacji cząstek kontinuum niezależnie od tego czy pole orientacji identyfikować będziemy z orientacją sieci kryształu, z orientacją molekul, czy też np. z orientacją układu tektonicznego gruntu.

Pomijając na razie dalsze rozważania heurystyczne podsumujmy dotychczasowe wyniki matematyczne: dotychczas pokazaliśmy, że zdefiniowany przez nas wektor \mathbf{b}_p jako całka z tensora zakrzywienia $\boldsymbol{\alpha}_p$ ma rzeczywiście sens fizyczny całki po polu ograniczonym konturem Burgersa. Udało nam się również dowieść, w sposób ścisły, że w zakresie dużych deformacji zachodzi superpozycja sprężystego i plastycznego zakrzywienia zorientowanego kontinuum, porównaj (3.96). Wynik ten skłonił autora pracy do przyjęcia dodatkowego założenia o superpozycji zakrzywień mikrostruktury materiału pochodzących od obecności różnego rodzaju defektów. Zgodnie z powyższym, zakładając będziemy, że całkowite zakrzywienie plastyczne zorientowanego kontinuum składa się z (jest przeliczalną superpozycją zakrzywień wywołanych przez pola różnych defektów struktury)

$$\boldsymbol{\alpha}_p = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\alpha}_i \quad (4.17)$$

gdzie n jest liczbą rodzajów defektów, a $\boldsymbol{\alpha}_i$ jest tensorową miarą zakrzywienia plastycznego wywołanego i -tym rodzajem defektów. Jeśli więc założymy, że plastyczne zakrzywienie sieci kryształów jest wywołane odpowiednio dwoma polami: dyslokacji i wakansów, to, z założenia, plastyczne zakrzywienie kryształu będziemy opisywać równaniem

$$\boldsymbol{\alpha}_p = \boldsymbol{\alpha}_d + \boldsymbol{\alpha}_v \quad (4.18)$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha}_d$ i $\boldsymbol{\alpha}_v$ są tensorowymi miarami zakrzywienia wywołanego polem dyslokacji i polem wakansów, odpowiednio. Zgodnie z założonym rozkładem (4.18) możemy zdefiniować tensor krzywizny $\boldsymbol{\kappa}_d$ wywołanej polem dyslokacji. W takim wypadku podstawiając (4.18) do (3.25) łatwo pokazać, że analogicznie do superpozycji tensorów $\boldsymbol{\alpha}$ otrzymujemy superpozycję tensorów krzywizny, tzn.

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_e + \boldsymbol{\kappa}_p \quad (4.19)$$

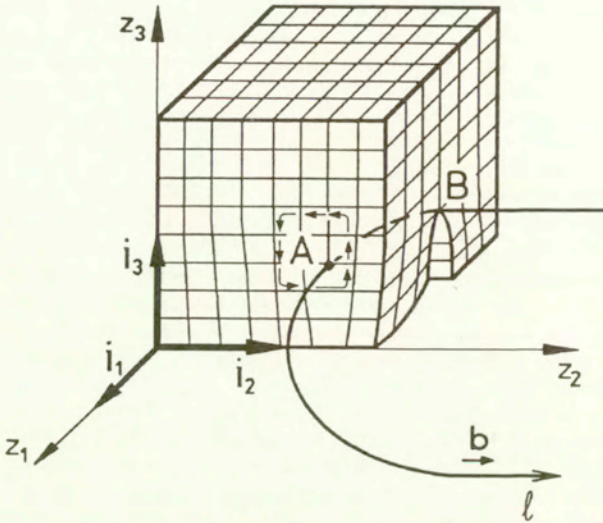
$$\boldsymbol{\kappa}_p = \boldsymbol{\kappa}_d + \boldsymbol{\kappa}_v \quad (4.20)$$

gdzie np.

$$\boldsymbol{\alpha}_d = -\boldsymbol{\kappa}_d^T + \text{tr } \boldsymbol{\kappa}_d^T \mathbf{1} \quad (4.21)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_d = -\boldsymbol{\alpha}_d^T + \frac{1}{2} \text{tr } \boldsymbol{\alpha}_d^T \mathbf{1} \quad (4.22)$$

Łatwo również pokazać, że nasze założenie o superpozycji zakrzywień mikrostruktury wywołanych polami defektów, patrz (4.17) prowadzi do superpozycji „wektorów Burgersa”



Rys. 4.1 Linia dyslokacyjna: w punkcie A jako dyslokacja krawędziowa, a w B jako śrubowa.

odpowiadających wspomnianym polom defektów, tzn. na podstawie (4.17) oraz (3.103) otrzymujemy natychmiast

$$\mathbf{b}_p = \sum_i \mathbf{b}_i \quad (4.23)$$

gdzie

$$\mathbf{b}_i = \int_{s_b} \boldsymbol{\alpha}_i ds \quad (4.24)$$

Z teoretycznego punktu widzenia mogą to być gęstości dowolnych defektów wywołujących deformację plastyczną, a więc nie tylko dyslokacje, ale np. wakanse, czy nawet obszary zarodkowania nowej fazy.

Wróćmy jednak do głównego tematu rozprawy, a więc do miar gęstości dyslokacji. W wypadku dyslokacji równanie (4.24) przyjmuje postać

$$\mathbf{b}_d = \int_{s_b} \boldsymbol{\alpha}_d ds \quad (4.25)$$

Jeśli założymy, że w pewnym obszarze kontinuum Δv tensorowe pole gęstości dyslokacji jest następującą diadą $\boldsymbol{\alpha}_d = \rho_d \mathbf{n}_b \otimes \mathbf{n}_l$ odpowiadającą dyslokacjom o stałych wektorach Burgersa to można pokazać, że tensor gęstości dyslokacji spełnia następujące równanie¹

$$\mathbf{b}_d \otimes \mathbf{l} = \int_{\Delta v} \boldsymbol{\alpha}_d dv \quad (4.26)$$

¹ $\int [\int \rho_d (\mathbf{n}_b \otimes \mathbf{n}_l) \cdot d\mathbf{s}] d\mathbf{l} = \int \int \rho_d \mathbf{n}_b (\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{n}_s) ds \otimes \mathbf{n}_l d\mathbf{l} = \int \int \rho_d \mathbf{n}_b \otimes \mathbf{n}_l (\mathbf{n}_l \cdot \mathbf{n}_s) ds d\mathbf{l}$ gdzie $\mathbf{n}_s(\mathbf{l}) = \text{const.}$

gdzie

$$\mathbf{b}_d = \int_{\Sigma_l} \rho_d \mathbf{n}_b ds \quad (4.27)$$

$$\mathbf{l}_d = \int_l \mathbf{n}_l dl \quad (4.28)$$

W wypadku dyskretnej dyslokacji pokazanej na rys.4.1 ostatnia zależność oznacza, że wektor \mathbf{l}_d jest wektorem łączącym punkt wejścia dyslokacji do obszaru Δv z punktem jej wyjścia, tzn.

$$\mathbf{l}_d = \overline{\mathbf{AB}} \quad (4.29)$$

W celu określenia miar gęstości dyslokacji i odpowiednich dla nich praw transformacji rozpatrzmy na początku proces deformacji sprężystej. Załóżmy przy tym, że prawa transformacji dla tensora gęstości dyslokacji powinny być tak dobrane, aby relacje (4.25) i (4.26) były niezmiennicze względem wspomnianego procesu. Łatwo pokazać, że dla dowolnej jednorodnej deformacji sprężystej obszaru Δv wektor Burgersa \mathbf{b}_d i wektor długości linii dyslokacyjnej \mathbf{l}_d podlegają następującym prawom transformacji

$$\begin{cases} \mathbf{b}_d = \mathbf{Q}_e \mathbf{F}_e \hat{\mathbf{b}}_d \\ \mathbf{l}_d = \mathbf{Q}_e \mathbf{F}_e \hat{\mathbf{l}}_d \end{cases} \quad (4.30)$$

gdzie $\hat{\mathbf{b}}_d$ i $\hat{\mathbf{l}}_d$ oznaczają wektor Burgersa i wektor długości linii dyslokacyjnej przed procesem deformacji sprężystej. Jeśli wspomniane poprzednio relacje (4.25) i (4.26) mają pozostać niezmiennicze względem deformacji sprężystej to miary $\hat{\mathbf{b}}_d$ i $\hat{\mathbf{l}}_d$ muszą spełniać następujące równania

$$\hat{\mathbf{b}}_d = \int_{\Delta \hat{\mathbf{r}}} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_d d\hat{\mathbf{s}} \quad (4.31)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_d \otimes \hat{\mathbf{l}}_d = \int_{\Delta \hat{\mathbf{v}}} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_d d\hat{\mathbf{v}} \quad (4.32)$$

Wykorzystując (4.30) łatwo dowieść że tensory $\boldsymbol{\alpha}_d$ i $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d$ spełniają następujące prawo transformacji

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d = \det \mathbf{F}_e (\mathbf{QF}_e)^{-1} \boldsymbol{\alpha}_d [(\mathbf{QF}_e)^{-1}]^T \quad (4.33)$$

Warto zauważyć, że takie samo prawo transformacji przyjęliśmy wcześniej dla tensora zakrzywienia plastycznego $\boldsymbol{\alpha}_p$.

Skalarne i wektorowe miary Do jednych z częściej wykorzystywanych w inżynierii materiałowej parametrów opisu własności mechanicznych materiałów można zaliczyć skalarny parametr ρ_d nazywany gęstością dyslokacji. Parametr ten jest najczęściej rozumiany jako całkowita długość wszystkich linii dyslokacji zawartych w danej objętości materiału. Z punktu widzenia rachunku tensorowego oraz mechaniki ośrodków ciągłych parametr ten możemy traktować jedynie jako pewną miarę „inżynierską” dającą jedynie tylko pewne ogólne pojęcie o stopniu zdefektowania mikrostruktury materiału. Niemniej w pewnych szczególnych wypadkach miara ta ma swój bezpośredni odpowiednik wynikający z rachunku tensorowego.

W wypadku kiedy nie tylko wektory Burgersa ale również kierunki dyslokacji są do siebie równoległe możemy definiować skalarne gęstości dyslokacji ρ_d i $\hat{\rho}_d$ takie, że

$$\boldsymbol{\alpha}_d = \rho_d \boldsymbol{\alpha}_{d_0} \quad (4.34)$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d = \hat{\rho}_d \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{d_0} \quad (4.35)$$

gdzie α_d opisuje geometrię układu odpowiadającego jednostkowej gęstości dyslokacji, a skalarne gęstości są związane następującym prawem transformacji

$$\rho_d = \det \mathbf{F}_e^{-1} \hat{\rho}_d \quad (4.36)$$

W wypadku układu dyslokacji o tym samych wektorach Burgersa, ale o różnych orientacjach linii dyslokacji możemy zdefiniować wektorowe miary gęstości dyslokacji ρ_d , $\hat{\rho}_d$ takie, że

$$\mathbf{b} \otimes \rho_d = \alpha_d \quad (4.37)$$

$$\hat{\mathbf{b}} \otimes \hat{\rho}_d = \hat{\alpha}_d \quad (4.38)$$

Ze względu na (4.33) prawo transformacji dla wspomnianych gęstości spełnia zależność

$$\rho_d = \det \mathbf{F}_e^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{F}_e \hat{\rho}_d \quad (4.39)$$

4.1.1 Zakrzywienie plastyczne, a granice ziarn

Z punktu widzenia mechaniki zorientowanych ośrodków ciągłych granice ziarn możemy traktować jako powierzchnie nieciągłości pola orientacji. W poprzednich podrozdziałach zdefiniowaliśmy tensor zakrzywienia mikrostruktury jako $\kappa = \frac{d\varphi}{dx}$. Wykorzystując deltę Diracka możemy więc określić tensor krzywizny odpowiadający zakrzywieniu mikrostruktury na granicy ziarn jako

$$\kappa_{gb} = \delta(x^3 - x_{gb}^3) \sqrt{g_{33}} \Delta\varphi_{gb} \otimes \mathbf{n}_{gb} \quad (4.40)$$

gdzie $\Delta\varphi_{gb}$ jest wektorem reorientacji, x^3 jest krzywoliniową współrzędną prostopadłą do powierzchni nieciągłości, x_{gb}^3 jest jej wartością w punkcie przecięcia powierzchni, a g_{33} jest składową tensora metrycznego, natomiast \mathbf{n}_{gb} jest jednostkowym wektorem normalnym do rozpatrywanej powierzchni. Wykorzystując zależność (4.22) możemy określić jakiemu tensorowi gęstości dyslokacji odpowiada wspomniane zakrzywienie, np. w ortonormalnej bazie wektorowej $\{\mathbf{n}_k\}$ tensor gęstości dyslokacji przyjmuje postać

$$[\alpha_{gb}] = \rho_{gb} \begin{bmatrix} -b_3 & 0 & 0 \\ 0 & -b_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

gdzie

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_{gb} \quad (4.42)$$

$$b_i = -a (\Delta\varphi_{gb} \cdot \mathbf{n}_i) \quad (4.43)$$

$$\rho_{gb} = \frac{\delta(x^3 - x_{gb}^3) \sqrt{g_{33}}}{a} \quad (4.44)$$

W ostatnim układzie równań a jest parametrem skali mikrostruktury, np. wymiarem podstawowym sieci kryształu. Na podstawie (4.41) łatwo zauważyć, że z geometrycznego punktu widzenia model dyslokacyjny dowolnej granicy ziarn może być zredukowany do układu dwóch rodzin wzajemnie do siebie prostopadłych linii dyslokacyjnych posiadających tę samą składową śrubową wektora Burgersa.

4.2 Podstawowe równania kontynuualnej teorii dyslokacji

W przypadku zorientowanego kontinuum możemy modelować dowolne procesy ewolucji pola orientacji. Stąd można powiedzieć, że obroty poszczególnych cząstek kontinuum są od siebie niezależne. Z drugiej zaś strony ogólnie wiadomo, że jednoimienne dyslokacje nie mogą powstawać w kryształach samoistnie. Proces taki nie spełnia „warunku ciągłości dyskretnego struktury sieci kryształu” dlatego też jeśli w kryształach, w danym procesie, powstaje jakiś odcinek dyslokacji to jednocześnie powstaje inny odcinek lub grupa odcinków w taki sposób, że ich całkowity wektor Burgersa jest równy zeru. Mówiąc językiem mechaniki zorientowanych ośrodków ciągłych w kontynuualnej teorii dyslokacji cząstki kontinuum nie mogą zakrzywiać się plastycznie w sposób niezależny od deformacji ich sąsiadów. Oznacza to, że w stosunku do zorientowanego kontinuum teoria dyslokacji posiada pewne dodatkowe więzy kinematyczne wyróżniające ją spośród innych sprężysto–plastycznych modeli zorientowanego kontinuum.

Ograniczenie na d_p W kontynuualnej teorii dyslokacji podstawowym ograniczeniem ruchu jest warunek uzależniający plastyczną deformację przemieszczeniową od pola plastycznego zakrzywienia kontinuum. W innych teoriach zorientowanego kontinuum nie mamy tak silnego ograniczenia, warunkującego możliwość wystąpienia deformacji przemieszczeniowej wcześniejszym istnieniem plastycznego zakrzywienia mikrostruktury. W teorii ośrodków polarnych stawiamy zazwyczaj dwa równania konstytutywne: jedno na deformację przemieszczeniową cząstek kontinuum i drugie na ich deformację kątową. W kontynuualnej teorii dyslokacji ograniczenie, o którym mowa, wyraża się następującym wzorem

$$\boxed{d_p = \alpha_d \times v_d} \quad (4.45)$$

gdzie, ze względu na definicję (4.14) tensor gęstości dyslokacji α_d jest utożsamiany, często nieświadomie, z tensorem plastycznego zakrzywienia α_p , natomiast v_d jest wektorem lokalnej prędkości przemieszczania się tego pola. W ostatnim równaniu v_d oznacza lokalną prędkość dyslokacji względem prędkości materiału (masy), tzn. jeśli materiał porusza się z prędkością v to całkowita prędkość ruchu dyslokacji wynosi $v_d + v$. O tym, że równanie (4.45) pełni rolę więzów kinematycznych świadczy również fakt, że równanie to determinuje jednoznacznie ewolucję α_p w czasie, zgodnie z (3.170). Stąd też wprowadzając równanie (4.45) nie możemy już postawić drugiego, niezależnego równania na plastyczną deformację kątową.

Równanie więzów kinematycznych (4.45) jest obiektywne ze względu na wybór konfiguracji, tzn. można dowieść, że to równanie więzów przetransponowane do konfiguracji odciążonej przyjmuje analogiczną postać, tzn (str. 108)

$$\hat{d}_p = \hat{\alpha}_d \times \hat{v}_d \quad (4.46)$$

gdzie $\hat{\alpha}_d$ jest związane z α_d zależnością (4.33), natomiast

$$\hat{v}_d \stackrel{df}{=} (QF_c)^{-1} v_d \quad (4.47)$$

Ograniczenie na \mathbf{v}_d Drugi z warunków dotyczy ograniczenia na kierunek prędkości dyslokacji. W kontynualnej teorii dyslokacji zakłada się, że kierunek ruchu dyslokacji jest prostopadły do jej linii. Z matematycznego punktu widzenia odpowiada to warunkowi

$$\boldsymbol{\alpha}_d \cdot \mathbf{v}_d = 0 \quad (4.48)$$

Łatwo zauważyć, że warunek ten przetransponowany do konfiguracji odciążonej przyjmuje postać

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_d \cdot \widehat{\mathbf{v}}_d = 0 \quad (4.49)$$

Ograniczenie na $\boldsymbol{\alpha}_d$ Trzeci warunek odpowiada stwierdzeniu, że linie dyslokacji nie mogą się kończyć wewnątrz kryształu. W nieliniowej, kontynualnej teorii dyslokacji ograniczenie to odpowiada warunkowi (3.144), który, ze względu na utożsamianie tensora gęstości dyslokacji z miarą plastycznego zakrzywienia, przyjmuje tu postać

$$\widehat{\text{div}} \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_d = 0 \quad (4.50)$$

Z punktu widzenia teorii zorientowanych ośrodków ciągłych, powyższe ograniczenie jest trywialne i nie reprezentuje żadnego ograniczenia na pole orientacji cząstek. Stąd też trudno jest np. za KRÖNEREM (1958) i TEODOSIU (1970) nazwać (4.50) podstawowym równaniem kontynualnej teorii dyslokacji! Zdaniem autora podstawowym równaniem kontynualnej teorii dyslokacji jest (4.45), natomiast równanie (3.144) musi być spełnione nie tylko w kontynualnej teorii dyslokacji, ale również w każdej innej teorii zorientowanego sprężysto-plastycznego kontinuum. Źródłem nieporozumienia jest to, że ośrodki polarne i kontynualna teoria dyslokacji używają zazwyczaj różnych miar zakrzywienia co prowadzi do zupełnie różnych postaci tych samych warunków zgodności, porównaj np. (3.75) i (3.80) (str. 41). Z równań mechaniki zorientowanych ośrodków ciągłych wynika natomiast, że jeśli dopuścimy istnienie innych defektów sieci, np. wakansów, to z teoretycznego punktu widzenia dyslokacje mogą (!) kończyć się wewnątrz kryształu, gdyż wtedy warunek konieczny ma postać (3.144), a ze względu na (4.18) mamy $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_p \neq \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_d$ co prowadzi ogólnie do

$$\widehat{\text{div}} \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_d \neq 0 \quad (4.51)$$

pomimo, że nadal spełniony jest warunek (4.50).

W kontynualnej teorii dyslokacji opartej na (4.45) gdzie $\boldsymbol{\alpha}_d \stackrel{df}{=} \boldsymbol{\alpha}_p$ otrzymujemy następujące równanie pola opisujące ewolucję tensora gęstości dyslokacji, porównaj (3.168) (str. 50),

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_d = \text{curl}(\boldsymbol{\alpha}_d \times \mathbf{v}_d) \quad (4.52)$$

Równanie to zapisane dla miar z konfiguracji odciążonej ma postać

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}}_d = \widehat{\text{curl}}(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_d \times \widehat{\mathbf{v}}_d) \quad (4.53)$$

Inna postać równania „ewolucji” dla $\boldsymbol{\alpha}_d$ W kontynualnej teorii dyslokacji wykorzystywano na ogół inne równania ewolucji dla tensora gęstości dyslokacji, np. równanie prezentowane przez TEODOSIU (1970) miało postać

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_d - \check{\boldsymbol{\alpha}}_d(\text{grad } \mathbf{v})^T + \check{\boldsymbol{\alpha}}_d \text{div } \mathbf{v} = -\text{curl } \mathbf{I} \quad (4.54)$$

gdzie $\check{\alpha}_d \stackrel{df}{=} -\text{curl}(\mathbf{QF}_e)^{-1}$ natomiast

$$\mathbf{I} \stackrel{df}{=} \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}^{-1} \quad (4.55)$$

Tensor \mathbf{I} nazywany był tensorem strumienia dyslokacji (dislocation flux tensor) lub prądem dyslokacji (dislocation current), porównaj np. IGNACZAK i RAO (1993). Zauważmy, że w (4.54) wektor prędkości dyslokacji w ogóle nie występuje, natomiast pojawia się wektor prędkości ruchu materiału \mathbf{v} . W przeciwieństwie do wspomnianej terminologii w niniejszej pracy pod pojęciem tensora strumienia dyslokacji rozumieć będziemy nie tensor \mathbf{I} zdefiniowany zależnością (4.55), ale iloczyn tensorowy $\alpha_d \otimes \mathbf{v}_d$. Tak więc pod pojęciem strumienia dyslokacji rozumiemy tu zupełnie inny tensor niż to co rozumieli pod tym pojęciem m. in. KRÖNER i TEODOSIU.

4.3 Defekty punktowe

Procesy rządzące zachowaniem się defektów punktowych w rzeczywistych kryształach są bardzo złożone i dotyczą m. in. zjawisk chemicznych, elektromagnetycznych, termodynamicznych, a wreszcie zjawisk o charakterze czysto mechanicznym, takich jak np. zjawiska związane z mechanicznym niedopasowaniem wymiarów defektów do wymiarów sieci. Stąd też teoria defektów punktowych jest niekiedy różnie rozumiana i z powodzeniem mogłaby być przedmiotem oddzielnej rozprawy. W naszym wypadku uwaga jest skupiona głównie na defektach kątowych, takich jak dyslokacje oraz granice ziarn, niemniej, ze względu na różnego rodzaju ruch niezachowawczy dyslokacji nie sposób pominąć tu deformacji związanej z ruchem i powstawaniem defektów punktowych.

4.3.1 Miary gęstości defektów punktowych

Niech udział objętościowy defektów punktowych opisany będzie skalarną funkcją $c_v(\mathbf{x}, t)$, której sens fizyczny możemy wyrazić zależnością

$$c_v = \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{v_1}{v} \quad (4.56)$$

gdzie v_1 jest objętością zajmowaną przez te defekty w obszarze kryształu v , natomiast v_0 jest objętością minimalnego (umownego) obszaru kryształu, który możemy uznać za reprezentatywny z punkt widzenia rozkładu defektów. W wielu wypadkach stosuje się również miary „liczbowej” koncentracje defektów zdefiniowane jako

$$\rho_n = \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{n}{N - n} \quad (4.57)$$

$$\rho_v = \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{n}{v} \quad (4.58)$$

gdzie N jest liczbą węzłów tworzących sieć kryształu w danym obszarze v , natomiast n jest liczbą defektów, porównaj np. KELLY i GROVE (1970). Łatwo sprawdzić, że w/w miary są ze sobą związane następującą zależnością

$$c_v = \frac{\rho_n v_v}{v_{\text{atom}} + \rho_n v_v} = v_v \rho_v \quad (4.59)$$

gdzie v_v jest objętością pojedynczego defektu, natomiast v_{atom} jest objętością zajmowaną przez pojedynczy atom sieci.

Deformacje sieci wywołane obecnością defektów punktowych pozostają po usunięciu sił zewnętrznych. Oznacza to, że z punktu widzenia modelowania sprężysto-plastycznych deformacji możemy w pewnych wypadkach traktować miary objętościowej niesprężystej deformacji kryształu jako miary gęstości defektów punktowych. Takimi miarami mogą być

$$c_p \stackrel{df}{=} (1 - \det \mathbf{F}_p^{-1}) \quad (4.60)$$

$$\hat{c}_p \stackrel{df}{=} \det \mathbf{F}_p - 1 \quad (4.61)$$

w niektórych przypadkach wygodnie jest stosować ich tensorowe odpowiedniki

$$c_p \stackrel{df}{=} c_p \mathbf{1} \quad (4.62)$$

$$\hat{c}_p \stackrel{df}{=} \hat{c}_p \mathbf{1} \quad (4.63)$$

4.3.2 Prawo bilansu defektów punktowych

Z matematycznego punktu widzenia możemy przyjąć, że zmiana liczby dowolnego typu defektów punktowych w dowolnym obszarze v jest spowodowana ich przepływem przez brzeg oraz ich produkcją wewnątrz tego obszaru; a ponieważ liczba defektów wyraża się zależnością

$$n = \int_v \rho_v dv \quad (4.64)$$

zatem dla \dot{n} otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho_v dv = - \int_{\partial v} \rho_v \mathbf{v}_v \cdot ds + \int_v p_v dv \quad (4.65)$$

gdzie jak łatwo pokazać wyrażenie $\int_{\partial v} \rho_v \mathbf{v}_v \cdot ds$ reprezentuje zmianę liczby defektów spowodowaną ich przepływem przez brzeg ∂v , natomiast $\int_v p_v dv$ reprezentuje zmianę liczby defektów spowodowaną ich produkcją lub anihilacją wewnątrz rozpatrywanego obszaru, \mathbf{v}_v jest prędkością przemieszczania się pola defektów względem obszaru v , a p_v jest prędkością produkcji lub anihilacji w/w defektów zależnie od znaku. Niekiedy można spotkać się z pytaniem, czy możemy postulować prawo bilansu defektów punktowych i jakie to pociąga za sobą ograniczenia. Z powyższej analizy wynika, że prawo to wyraża jedynie fakt możliwości liczenia ilości dyskretnych obiektów w pewnym obszarze v , takimi obiektami mogłyby być równie dobrze barany na łące, dla których moglibyśmy zastosować analogiczny wzór.

Łatwo dowieść, że powyższe równanie całkowe (4.65) prowadzi do następującego równania różniczkowego

$$\dot{\rho}_v = - \operatorname{div}(\rho_v \mathbf{v}_v) + p_v \quad (4.66)$$

W tym momencie warto zadać pytanie: czy powyższe prawo bilansu jest obiektywne ze względu na wybór konfiguracji? Odpowiedź jest pozytywna, tzn. można np. pokazać, że równanie (4.66) można przekształcić do postaci

$$\hat{\dot{\rho}}_v = - \widehat{\operatorname{div}}(\hat{\rho}_v \hat{\mathbf{v}}_v) + \hat{p}_v \quad (4.67)$$

$$\bar{\dot{\rho}}_v = - \overline{\operatorname{div}}(\bar{\rho}_v \bar{\mathbf{v}}_v) + \bar{p}_v \quad (4.68)$$

gdzie $\hat{\rho}_v$, \hat{p}_v i \hat{v}_v spełniają następujące prawa transformacji

$$\rho_v = \det(\mathbf{QF}_e)^{-1} \hat{\rho}_v = \det \mathbf{F}^{-1} \bar{\rho}_v \quad (4.69)$$

$$p_v = \det(\mathbf{QF}_e)^{-1} \hat{p}_v = \det \mathbf{F}^{-1} \bar{p}_v \quad (4.70)$$

$$v_v = \mathbf{QF}_e \hat{v}_v = \mathbf{F} \bar{v}_v \quad (4.71)$$

4.4 Ruch defektów punktowych i dyslokacji

W podrozdziale 4.2 zostało omówione podstawowe równanie kontynualnej teorii dyslokacji, tzn. (4.45). Równanie to uzależnia prędkość płynięcia plastycznego materiału od prędkości ruchu dyslokacji. Nie uwzględnia ono natomiast wpływu ruchu innych defektów na deformację plastyczną traktując całe zakrzywienie plastyczne jako zakrzywienie pochodzące jedynie od dyslokacji. Z punktu widzenia ogólnej, kontynualnej teorii defektów nasuwa się pytanie jaką formę powinien mieć związek uwzględniający wpływ ruchu nie tylko dyslokacji, ale i innych defektów struktury? Co więcej, możemy postawić generalne pytanie: *Czy w ogóle można sformułować takie podstawowe równanie, które uwzględniałoby wpływ ruchu wszystkich lokalnych defektów struktury na deformację plastyczną materiału?*

Na obecnym etapie rozważań rozpatrzmy zależności kinematyczne wynikające z jednoczesnego ruchu defektów punktowych i kątowych. W takim wypadku musimy zastąpić więzy kinematyczne znane z kontynualnej teorii dyslokacji więzami uwzględniającymi nie tylko ruch dyslokacji, ale również uwzględniającymi dodatkowo ruch pola defektów punktowych. Stąd też, aby uwzględnić deformację wywołaną ruchem dyslokacji i wakansów możemy (4.45) zastąpić następującym równaniem

$$d_p = \alpha_d \times v_d + \alpha_w \times v_w - \operatorname{div}(\mathbf{c}_w \otimes v_w) \quad (4.72)$$

gdzie \mathbf{c}_w jest tensorem objętościowych deformacji niesprężystych spowodowanych obecnością wakansów, tzn. jeśli wakanse w obszarze o objętości v wywołują niesprężystą zmianę objętości kryształu Δv to

$$\mathbf{c}_w = \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{\Delta v}{v} \mathbf{1} \quad (4.73)$$

gdzie v_0 jest objętością minimalnego obszaru kryształu, który możemy uznać za reprezentatywny; punktu widzenia jednorodności rozkładu. Zauważmy jednak, że *skoro np. wakanse, traktowane zwykle jako defekty punktowe, wywołują nie tylko deformację przemieszczeniową, ale i kątową, to czy przypadkiem nie powinniśmy również traktować dyslokacji, jako defekty nie tylko kątowe, ale i objętościowe*. Warto tu przypomnieć, że od dawna wieluspecjalistów z zakresu mechaniki i fizyki materiałów uważało, że dyslokacje wywołują ściśle określoną deformację objętościową kryształów. Ba! opracowano nawet i stosowano wielokrotnie metodę pomiaru gęstości dyslokacji za pomocą mierzenia zmian objętości kryształów, porównaj np. HORODON i AVERBACH (1961). Uwzględniając ten fakt założmy ogólnie, że rozpatrywane w tej pracy defekty sieci mogą wywoływać deformację objętościową i kątową, co w wypadku założenia n różnych typów defektów odpowiada równaniu

$$d_p = \sum_{i=1}^n [\alpha_i \times v_i - \operatorname{div}(\mathbf{c}_i \otimes v_i)] \quad (4.74)$$

w którym tensory α_i i c_i spełniają dodatkowe ograniczenia

$$\alpha_p = \sum_i^n \alpha_i \quad (4.75)$$

$$c_p = \sum_i^n c_i \quad (4.76)$$

miary plastycznej deformacji α_p i c_p zostały zdefiniowane zależnościami (3.95) i (4.62). Oczywiście przy opisie deformacji wywołanej ruchem dyslokacji podstawową rolę odgrywa człon $\alpha_i \times v_i$, podczas gdy dla ruchu takich defektów jak np. wakanse podstawową rolę odgrywa człon $\text{div}(c_i \otimes v_i)$. Do związków kinematycznych pomiędzy miarami deformacji typu α_i i c_i , a miarami liczbowej gęstości defektów ρ_i powrócimy na str. 71.

4.5 Dysklinacje i defekty wyższych rzędów

Dotychczas rozpatrywaliśmy ruch dyslokacji oraz ruch defektów punktowych. W teorii defektów struktury znane są również inne rodzaje defektów, w tym np. dysklinacje oraz defekty wyższych rzędów w stosunku do dysklinacji (zależne od wyższych gradientów α_i). W związku z tym nasuwa się pytanie: czy zaproponowany układ równań (4.74) (4.75) nadaje się do analizy ruchu dysklinacji? Zanim odpowiemy na to pytanie warto wspomnieć, że prędkość ruchu dysklinacji nie ma bezpośredniego wpływu na prędkość deformacji plastycznej d_p , ale wpływa jedynie na ewolucję zakrzywienia plastycznego, tzn. na $\dot{\alpha}_p$. Stąd też wynika, że ruch dysklinacji oraz ruch defektów wyższych rzędów może być analizowany z zachowaniem układu równań (4.74) – (4.76), ale tylko pod warunkiem, że układ ten zostanie uzupełniony ściśle określonymi dla danego rodzaju defektów równaniami na $\dot{\alpha}_i$.

Dla ustalenia uwagi założymy, że rozpatrujemy proces deformacji wywołany ruchem trzech rodzajów defektów: wakansów ($i = o$), dyslokacji ($i = d$) i dysklinacji ($i = \theta$). W takim wypadku równanie (4.75) przyjmie postać

$$\alpha_p = \alpha_o + \alpha_d + \alpha_\theta \quad (4.77)$$

a tradycyjny tensor gęstości dysklinacji będzie zdefiniowany jako, porównaj KOSSECKA i de WITT (1977), IGNACZAK i RAO (1993),

$$\theta \stackrel{df}{=} \text{curl} \kappa_\theta \quad (4.78)$$

tensory zakrzywienia α_θ i κ_θ są ze sobą związane zależnościami NYE'AL. Z zależności tych oraz z definicji (4.78) wynika jednoznacznie, że

$$\text{div} \alpha_\theta = e : \theta \quad (4.79)$$

gdzie e jest tensorem alternacji. W tego typu teorii możemy podstawić (4.77) do (3.118) i (3.144) otrzymując w rezultacie warunek

$$\widehat{\text{div}} \hat{\alpha}_o + \widehat{\text{div}} \hat{\alpha}_d + \widehat{\text{div}} \hat{\alpha}_\theta = 0 \quad (4.80)$$

W przypadku tzw. liniowej teorii człon $\widehat{\text{div}} \hat{\alpha}_\theta$ zastępuje się związkiem (4.79) otrzymując (przybliżoną) zależność

$$\text{div} \alpha_o + \text{div} \alpha_d + e : \theta = 0 \quad (4.81)$$

Z punktu widzenia ruchu dysklinacji powyższe związki powinniśmy uzupełnić równaniem ewolucji na $\dot{\theta}$. Sensowne przyjęcie równania konstytutywnego dla prędkości ruchu dysklinacji wykracza poza zakres kinematyki, gdyż wymaga przeprowadzenia bilansu termodynamicznego sił napędowych występujących na dysklinacjach. Z drugiej strony, prędkość ruchu dysklinacji nie wpływa bezpośrednio na prędkość deformacji plastycznej d_p , ale jedynie na $\dot{\alpha}_p$. Stąd też, z punktu widzenia modelowania prędkości deformacji sprężysto-plastycznych d_e i d_p ruch dysklinacji możemy traktować jako modelowanie konstytutywne efektów wyższego rzędu, porównaj (4.74). Zagadnienie modelowania konstytutywnego ruchu dysklinacji nie jest przedmiotem niniejszej rozprawy. Zamieszczone tu rozważania na temat dysklinacji i defektów wyższego rzędu autor potraktował jako pewnego rodzaju dygresję w kierunku podstaw pewnej ogólnej kontynualnej teorii defektów struktury.

Rozdział 5

Termodynamiczne podstawy kontynualnej teorii dyslokacji

W stosunkowo nielicznych pracach z zakresu kontynualnej teorii dyslokacji problem zależności energii swobodnej od tensora gęstości dyslokacji jest podejmowany. Na ogół, autorzy bądź ograniczają swoje zainteresowania jedynie do geometrii i kinematyki procesu deformacji, porównaj np. BILBY (1960), GAIROLA (1979), bądź też zakładają klasyczne zależności pomijając wpływ gęstości dyslokacji na energię swobodną, KRÖNER (1955, 1958, 1960, 1981), MURA (1968, 1969).

W ostatnich latach coraz częściej dyskutuje się wpływ gradientu deformacji plastycznej na energię wewnętrzną materiału, np. LE i STUMPF (1996a,b), NAGHDI i SRINIVASA (1994), AIFANTIS (1987). Jak wiadomo drugi gradient deformacji plastycznej jest bezpośrednio związany z tensorem gęstości dyslokacji, m. in. zależnościami (3.110) i (3.111), niemniej, prac poświęconych termodynamicznym podstawom nieliniowej, kontynualnej teorii dyslokacji jest bardzo niewiele i w zasadzie, żadna ze znanych autorowi obecnej rozprawy prac nie zawiera rozwiązania, w którym wychodząc z klasycznych praw bilansu i z równania konstytutywnego dla energii swobodnej zależnej od tensora gęstości dyslokacji, dochodzono by do sił termodynamicznych na polu gęstości dyslokacji. Można sobie zadać pytanie: *Dlaczego? — przy stosunkowo bogatej literaturze dotyczącej kontynualnej teorii dyslokacji tak podstawowe zagadnienie nie jest rozwiązywane?*

Zdaniem autora przyczyn takiego stanu rzeczy jest kilka:

1. Aby analizować w zakresie skończonych deformacji zależność energii od konkretnej miary gęstości dyslokacji taką miarę trzeba najpierw zdefiniować. W odniesieniu do miar gęstości dyslokacji problem zdefiniowania odpowiedniej miary gęstości dyslokacji nie jest wcale sprawą trywialną. Łatwo np. zauważyć, że stosując miary dobrane w niewłaściwy sposób już sam opis kinematyki deformacji staje się nieprzejrzysty i matematycznie zawily, porównaj np. związki na pochodne po czasie dla $\hat{\alpha}_p$, (4.53), z równaniem (4.54) wykorzystywanym przez TEODOSIU (1970) dla miary gęstości dyslokacji zaproponowanej przez KRÖNERA (1958).
2. W przypadku tylko nielicznych miar dyslokacji można zbilansować energię swobodną w taki sposób, że wszystkie człony wynikające z różniczkowania po czasie energii dadzą się zidentyfikować jako odpowiedniki analogicznych członów występujących w prawie bilansu energii. Pod tym względem powyższy problem przypomina nieco zagadnienie bilansowania energii dla różnych miar odkształceń sprężystych. Warto

tu jednak podkreślić, że na obecnym etapie rozwoju dysponujemy znacznie szerszą wiedzą na temat zakresu różnych miar odkształceń sprężystych niż na temat miar zakrzywienia plastycznego.

3. Niemniej głównym powodem jest fakt, że w ramach klasycznej formy praw bilansu: masy, pędu, momentu pędu, energii nie można zbilansować energii przy założeniu, że gęstość energii zależy od tensora gęstości dyslokacji. Wyjaśnia to fakt: dlaczego, jeśli nawet w jakiejś pracy, nieopatrznie, taka zależność jest postulowana to nie prezentowane są w niej rozwiązania dla sił napędowych na polu dyslokacji, porównaj np. TEODOSIU (1970). Z drugiej strony na podstawie analizy obecnie ukazujących się prac można zauważyć, że panuje ogólne przekonanie, iż uzależnienie energii swobodnej od tensora gęstości dyslokacji wiąże się z koniecznością postulowania dodatkowego prawa bilansu. Jedni więc postulują prawa bilansu mikroruchów, np. LE i STUMPF (1996a), inni jak np. GURTIN (1995) wprowadzają prawo bilansu dla sił konfiguracyjnych, a jeszcze inni np. DŁUŻEWSKI (1996) proponują prawa bilansu dla defektów struktury.

Uprzedzając nieco wyniki uzyskane w tym rozdziale można dodać, że okazuje się iż postulat zależności energii swobodnej od gęstości dyslokacji nie wymaga (!) wprowadzania dodatkowych praw bilansu, ale wymaga jedynie rozszerzenia klasycznego prawa bilansu energii o dodatkowy człon. Człon ten ma jasną i prostą interpretację fizyczną.

Poniżej zostanie przedstawione rozwiązanie analityczne z zakresu termodynamicznej, nieliniowej, kontynualnej teorii dyslokacji odpowiadające postulatowi zależności gęstości energii swobodnej od tensora gęstości dyslokacji.

5.1 Prawa bilansu

Poprzednio zostało już wspomniane, że prezentowane tu rozwiązanie ma uwzględniać zależność energii swobodnej od tensora gęstości dyslokacji. Najwygodniej byłoby dokonać bilansu energii swobodnej przy założeniu klasycznej postaci praw bilansu dla kontinuum. Niestety, po wstępnych próbach okazało się to niemożliwe.

Zauważmy np., że skoro energia swobodna ma zależeć od gęstości dyslokacji — a jest to stosunkowo naturalne założenie, to wraz z przepływem dyslokacji z jednego obszaru do drugiego również energia swobodna odpowiadająca lokalnemu zaburzeniu struktury musi przepływać zgodnie z kierunkiem ruchu dyslokacji. Warto tu zauważyć, że w klasycznej formie prawa zachowania energii nie dysponujemy członem, który pozwoliłby na opis tego typu efektu. Stąd też formułując równania całkowite odpowiadające klasycznym rozważaniom na temat termodynamiki sprężysto-plastycznego kontinuum dokonamy jednej jedynej zmiany dodając w równaniu energii człon odpowiadający przepływowi energii swobodnej związanej z przepływem defektów struktury. W takim wypadku prawa bilansu masy, pędu, momentu pędu, energii oraz nierówność entropii założymy w następującej postaci:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dv = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dv = \int_S \boldsymbol{\sigma} ds + \int_V \rho \mathbf{f}_b dv \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dv = \int_s \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} ds + \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f}_b dv \quad (5.3)$$

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho u + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} dv = \int_s \mathbf{v} \boldsymbol{\sigma} ds + \int_v \rho \mathbf{f}_b \mathbf{v} dv - \int_s \mathbf{q}_T ds - \int_v \mathbf{q} ds + \int_v \rho h dv \quad (5.4)$$

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \eta dv \geq - \int_s \frac{\mathbf{q}_T}{T} ds + \int_v \frac{\rho h}{T} dv \quad (5.5)$$

gdzie \mathbf{q} jest tym właśnie dodatkowym strumieniem energii związanym z zakładaną dalej zależnością energii swobodnej od tensora gęstości dyslokacji; w powyższych równaniach wielkości ρ , $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{j} , \mathbf{x} , \mathbf{u} , \mathbf{q}_T , h , η , T oznaczają odpowiednio gęstość masy, tensor naprężeń Cauchy'ego, gęstość sił masowych, wektor położenia, gęstość energii wewnętrznej, wektor strumienia ciepła, gęstość produkcji ciepła, gęstość energii i temperaturę.

Łatwo pokazać, że w/w równania całkowe prowadzą do następujących równań różniczkowych

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.6)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_b - \rho \dot{\mathbf{v}} = 0 \quad (5.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T = 0 \quad (5.8)$$

$$-\rho \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}_e + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}_p - \operatorname{div} \mathbf{q} - \operatorname{div} \mathbf{q}_T + \rho h = 0 \quad (5.9)$$

$$-\rho \dot{\psi} - \rho \eta \dot{T} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}_e + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}_p - \operatorname{div} \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}_T}{T} \operatorname{grad} T \geq 0 \quad (5.10)$$

gdzie gęstość energii swobodnej jest określona jako

$$\psi = u - \eta T \quad (5.11)$$

5.2 Równanie konstytutywne dla energii swobodnej

W poprzednich rozdziałach pokazano, że tensor gęstości dyslokacji $\boldsymbol{\alpha}_d$ to nic innego jak jedna z miar plastycznego zakrzywienia materiału. O ile tensor ten może być również użyty do opisu własności geometrycznych granic ziarn, o tyle nie nadaje się on do opisu gęstości defektów punktowych. Ponadto wielu autorów uważa, że nie tylko defekty punktowe, ale również dyslokacje powodują tego typu zmiany. Stąd też w niniejszej pracy nie ograniczymy się do klasycznego prawa płynięcia (4.45), ale założymy ogólnie, iż rozważane defekty powodują nie tylko zakrzywienie struktury, ale również jej trwałą zmianę objętości.

Wykorzystując tensor zakrzywienia plastycznego $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_p$ jako miarę defektów kątowych (dyslokacji, granic ziarn) i miarę plastycznej zmiany objętości \hat{c}_p jako miarę defektów punktowych założymy, że gęstość energii swobodnej kontinuum opisana jest następującym równaniem konstytutywnym

$$\psi = \psi(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_p, \hat{c}_p, T) \quad (5.12)$$

gdzie miara $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_p$ została zdefiniowana zależnościami (3.95) i (3.118), miara \hat{c}_p zależnością (4.61), natomiast miara odkształceń sprężystych jest zdefiniowana w tradycyjny sposób, tzn.

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_e \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} (\mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e - \mathbf{1}) \quad (5.13)$$

Podstawiając za pochodną materialną ψ zależności wynikające z przyjętego równania konstytutywnego (5.12) nierówność entropii (5.10) możemy zapisać w następującej postaci (str. 108)

$$(\sigma - \sigma_p) : d_p - \operatorname{div}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_p) - \frac{\mathbf{q}T}{T} \operatorname{grad} T \geq 0 \quad (5.14)$$

gdzie

$$\sigma = \mathbf{QF}_e \hat{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\epsilon}_e} (\mathbf{QF}_e)^T \det \mathbf{F}_e^{-1} \quad (5.15)$$

$$\sigma_p = -\operatorname{curl} \left[(\mathbf{QF}_e)^{-T} \hat{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\alpha}_p} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \right] + \rho (\hat{c}_p + 1) \frac{\partial \psi}{\partial \hat{c}_p} \mathbf{1} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{q}_p = - \left[(\mathbf{QF}_e)^{-T} \hat{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\alpha}_a} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \right] \dot{\times} d_p \quad (5.17)$$

$$\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (5.18)$$

\mathbf{q}_p jest strumieniem przepływu energii swobodnej związanym ze zmianą pola tensorowego $\hat{\alpha}_p$. W tym wypadku naprężenia wewnętrzne pochodzące od miar plastycznej deformacji \hat{c}_p i $\hat{\alpha}_p$ możemy podzielić na

$$\sigma_p = \sigma_\alpha + \sigma_c \quad (5.19)$$

gdzie

$$\sigma_\alpha = -\operatorname{curl} \left[(\mathbf{QF}_e)^{-T} \hat{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\alpha}_p} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \right] \quad (5.20)$$

$$\sigma_c = \rho (\hat{c}_p + 1) \frac{\partial \psi}{\partial \hat{c}_p} \mathbf{1} \quad (5.21)$$

Zauważmy, że uzyskane tu rozwiązanie nie jest pełne, gdyż jak dotąd nie określiliśmy do końca strumienia przepływu energii \mathbf{q} . Niemniej, do uzyskania wyniku w postaci równań (5.14)-(5.21) nie wprowadziliśmy żadnych (!) ograniczeń co do sposobu deformacji plastycznej materiału.

Tak więc, dyskutowany tu wynik w postaci związków (5.14)-(5.21) jest ważny dla różnych mechanizmów płynięcia, o ile oczywiście zostanie założone równanie konstytutywne dla energii swobodnej w postaci (5.12). Wynik ten jest ważny przy założeniu zupełnie fenomenologicznego prawa płynięcia, np. stowarzyszonego prawa płynięcia postaci

$$d_p = \lambda \frac{\partial f_p(\sigma - \sigma_p, \alpha_p, T)}{\partial \sigma} \quad (5.22)$$

gdzie f_p jest powierzchnią plastyczności. Jednak, w wypadku postulowania fenomenologicznych praw płynięcia musielibyśmy określić przepływ energii wewnętrznej jako

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}_p \quad (5.23)$$

porównaj (5.28). Taki warunek został np. przyjęty w pracy DŁUŻEWSKI i PERZYNA (1996).

Wynik w postaci związków (5.14)-(5.21) jest również ważny w wypadku przyjęcia prawa płynięcia wynikającego bezpośrednio z geometrycznego opisu mechanizmów deformacji towarzyszących ruchowi defektów, porównaj (4.74).

5.3 Siły napędowe na polu dyslokacji

W kontynualnej teorii defektów podstawowym dla nas prawem płynięcia plastycznego jest związek (4.74). W wypadku ograniczenia rozważań do tylko jednego pola defektów, np. dyslokacji, prawo to przyjmuje postać

$$\boxed{d_p = \alpha_p \times v_p - \operatorname{div}(c_p \otimes v_p)} \quad (5.24)$$

Zauważmy, że podstawiając (5.24) do (5.14) otrzymujemy

$$(f - f_p)v_p - \frac{q_T}{T} \operatorname{grad} T \geq 0 \quad (5.25)$$

gdzie „zewewnętrzne” i „wewnętrzne” (konfiguracyjne) siły napędowe na polu defektów są określone jako

$$f = \sigma \dot{\times} \alpha_p + c_p : \operatorname{grad} \sigma \quad (5.26)$$

$$f_p = \sigma_p \dot{\times} \alpha_p + c_p : \operatorname{grad} \sigma_p \quad (5.27)$$

natomiast strumień przepływu energii jest równy

$$q = q_p + (\sigma - \sigma_p) : c_p v_p \quad (5.28)$$

Siła napędowa f_p może być interpretowana w różny sposób. Z punktu widzenia teorii plastyczności moglibyśmy ją nazwać siłą Bauschingera, gdyż jest ona związana z zależnością energii wewnętrznej od miar plastycznej deformacji, poza tym siła ta odpowiada za efekt Bauschingera i za umocnienie związane z przesunięciem „powierzchni plastyczności”. Z punktu widzenia teorii GURTINA (1995) siłę tego typu powinniśmy nazwać siłą konfiguracyjną. Z punktu widzenia termodynamiki procesów dyfuzji siła ta może być interpretowana jako siła osmotyczna rządząca stężeniem defektów — np. jako siła dążąca do osiągnięcia równowagowego stężenia defektów, porównaj GJOSTEIN (1973), NOWACKI i OLESIAK (1991). W wypadku rozpatrywania np. skoku stężenia na powierzchni nieciągłości różnica naprężeń $\sigma - \sigma_p$ jest odpowiedzialna za (generuje) siłę decydującą o kierunku osmozy (np. o odwróconej osmozie). W poprzedniej pracy autora DŁUŻEWSKI (1996) zostało przedstawione ogólne rozwiązanie obejmujące zarówno proces migracji defektów poprzez powierzchnię nieciągłości, jak również jednoczesny proces niekoherentnej migracji samej powierzchni. Stąd też wspomnianą siłę można również rozpatrywać w kategoriach termodynamicznej siły rządzącej migracji granic ziarn. Konstytutywne modelowanie ruchu powierzchni nieciągłości, na której występuje skok gradientu pola przemieszczeń jest zagadnieniem samym w sobie. Z punktu widzenia skończonych deformacji poważnym problemem jest również wybór konfiguracji, względem której można postawić odpowiednie równania konstytutywne, porównaj np. ABEYARATNE i KNOWLES (1990), RANIECKI i TANAKA (1992). Podobne problemy dotyczą konstytutywnego modelowania procesów zachodzenia przemian fazowych, a więc wspomnianą siłę można również rozpatrywać w kategoriach termodynamicznych sił rządzących przemianą fazową.

Nierówność (5.25) możemy również zapisać dla miar z konfiguracji odciążonej, wtedy w/w nierówność przyjmuje postać

$$(\hat{f} - \hat{f}_p)\hat{v}_p - \frac{\hat{q}_T}{T} \widehat{\operatorname{grad}} T \geq 0 \quad (5.29)$$

gdzie $\widehat{\text{grad}}$ oznacza pseudooperator zdefiniowany zależnością (3.128).

Ze względu na poprzednio założone prawo transformacji (4.47) łatwo zauważyć, że $\widehat{\mathbf{f}}$, $\widehat{\mathbf{f}}_p$ i $\widehat{\mathbf{q}}_T$ muszą spełniać następujące prawa transformacji

$$\widehat{\mathbf{f}} = (\mathbf{QF}_e)^T \mathbf{f} \det(\mathbf{QF}_e) \quad (5.30)$$

$$\widehat{\mathbf{f}}_p = (\mathbf{QF}_e)^T \mathbf{f}_p \det(\mathbf{QF}_e) \quad (5.31)$$

$$\widehat{\mathbf{q}}_T = (\mathbf{QF}_e)^T \mathbf{q}_T \det(\mathbf{QF}_e) \quad (5.32)$$

5.4 Równania konstytutywne dla ruchu defektów

Z punktu widzenia modelowania konstytutywnego ruchu pola defektów i przepływu ciepła podstawowym dla nas ograniczeniem termodynamicznym jest nierówność (5.35). Z przyczyn fizycznych założymy, że ruch pola dyslokacji i przepływ ciepła są rządzone dwoma wzajemnie niezależnymi równaniami konstytutywnymi, np.

$$\widehat{\mathbf{v}}_p = \widehat{\mathbf{v}}_p((\widehat{\mathbf{f}} - \widehat{\mathbf{f}}_p), \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_p, \widehat{\mathbf{c}}_p, T) \quad (5.33)$$

$$\widehat{\mathbf{q}}_T = \widehat{\mathbf{q}}_T(\widehat{\text{grad}} T, \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_p, \widehat{\mathbf{c}}_p, T) \quad (5.34)$$

równania te, z założenia, muszą spełniać nierówności

$$(\widehat{\mathbf{f}} - \widehat{\mathbf{f}}_p) \widehat{\mathbf{v}}_p \geq 0 \quad (5.35)$$

$$-\frac{\widehat{\mathbf{q}}_T}{T} \widehat{\text{grad}} T \geq 0 \quad (5.36)$$

a stąd na mocy (5.25) zaproponowane równania konstytutywne (5.33) i (5.34) spełniają nierówność entropii w zakresie skończonych deformacji.

5.5 Jednoczesny ruch wielu, różnych pól defektów

Dotychczas rozpatrywaliśmy ogólny przypadek plastycznego zakrzywienia struktury nie zastanawiając się bliżej jaki typ defektów je wywołuje. W tym podrozdziale przedyskutujemy krótko przypadek ruchu wielu różnych pól defektów, ale aby poodróżnić między sobą te pola, jesteśmy zmuszeni przyjąć bardzo silne ograniczenie mówiące, że każdy rozpatrywany rodzaj defektów wiąże się ze ściśle określonym rodzajem deformacji sieci. Sprowadza się to do tego, że w miejsce do tej pory dowolnych co do wartości tensorów $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_p$ i $\widehat{\mathbf{c}}_p$ przyjmiemy, że wielkości te są ściśle określone za pomocą skalarnych gęstości liczbowych $\widehat{\rho}_i$, tzn.

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_p = \sum_{i=1}^n \widehat{\rho}_i \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{o_i} \quad (5.37)$$

$$\widehat{\mathbf{c}}_p = \sum_{i=1}^n \widehat{\rho}_i \widehat{\mathbf{c}}_{o_i} \quad (5.38)$$

gdzie $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{o_i}$ i $\widehat{\mathbf{c}}_{o_i}$ pełnią rolę stałych materiałowych. W takim wypadku mnożąc równanie (4.67) odpowiednio przez $\boldsymbol{\alpha}_{o_i}$ i \mathbf{c}_{o_i} otrzymujemy następujące prawa bilansu

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}}_i = -\text{div}(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}_i \otimes \widehat{\mathbf{v}}_i) + \mathbf{p}_{\alpha_i} \quad (5.39)$$

$$\dot{\widehat{\mathbf{c}}}_i = -\text{div}(\widehat{\mathbf{c}}_i \widehat{\mathbf{v}}_i) + p_{c_i} \quad (5.40)$$

Z kolei wykorzystując równania (5.37) i (5.38) równanie konstytutywne dla energii swobodnej (5.12) możemy zastąpić zależnością

$$\psi = \psi(\widehat{\epsilon}_e, \widehat{\rho}_1, \dots, \widehat{\rho}_n, T) \quad (5.41)$$

Zakładając jednocześnie, że prędkość deformacji nie jest rządzona równaniem (5.24), ale zależnością (4.74) ze strony 63, otrzymujemy nierówność entropii w postaci

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \mathbf{v}_i - \frac{qT}{T} \text{grad } T \geq 0 \quad (5.42)$$

gdzie

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_{i_e} + \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} \quad (5.43)$$

w takim wypadku \mathbf{f}_{i_e} jest składową siły napędowej wywołanej sprężystą deformacją sieci, natomiast \mathbf{f}_{ij} są siłami wzajemnego oddziaływania jednych pól defektów na drugie. Szczegółową dyskusję takiego podejścia przedstawił autor w pracy DŁUŻEWSKI (1996). We wspomnianej pracy omówiono również bilans sił termodynamicznych na poruszającej się w kontinuum niekoherentnej powierzchni nieciągłości. Z fizycznego punktu widzenia odpowiadało to analizie sił termodynamicznych na granicach ziarn i pewnej propozycji modelowania konstytutywnego procesów migracji granic.

Rozdział 6

Zastosowanie metody elementów skończonych

W mechanice kontinuum można wyróżnić dwa podejścia do modelowania dyslokacji. Pierwsze — traktujące dyslokację jako dyskretną linię w sprężystym kontinuum i drugie — traktujące ją jako trójwymiarowy obszar, którego szerokość jest zdeterminowana założonymi rozmiarami rdzenia dyslokacji.

Wadą pierwszego podejścia jest „dyskretność” dyslokacji, jest ona w pewnym sensie w sprzeczności z kontynuualnym podejściem do opisu rozkładu stanu deformacji w kryształach. To powoduje np., że w rozwiązaniach analitycznych dla dyskretnej dyslokacji pole naprężeń wzrasta do nieskończoności na linii dyslokacyjnej. Drugą, bardzo poważną jego wadą jest to, że model dyskretny nie nadaje się do wykorzystania w metodach obliczeniowych opartych na mechanice kontinuum, np. w metodzie elementów skończonych (MES). Mimo tego, aktualnie są intensywnie podejmowane próby modelowania dyslokacji w ramach metody elementów skończonych. Przykładem może tu być praca STIGHA (1993), w której, aby zamodelować dyslokację wstawiany jest element z „innego” materiału techniką cut-off and welding. Takie podejście nie daje praktycznie możliwości modelowania ruchu dyslokacji. Stąd też, aby opisać ruch dyslokacji CANOVA i wsp. (1993) zastosowali model, w którym dyskretne dyslokacje poruszają się po granicach elementów skończonych przeskakując od węzła do węzła. Istotną wadą takiego podejścia jest to, że kierunek ruchu dyslokacji jest zdeterminowany geometrią elementu skończonego.

Z uwagi na charakter metody elementów skończonych (kontynuualny charakter funkcji kształtu) szansę na przeprowadzenie komputerowej symulacji ruchu dyslokacji poprzez kolejne elementy skończone daje w zasadzie jedynie kontynuualne podejście. W niniejszej pracy została wykorzystana metoda opracowana przez DŁUŻEWSKIEGO i ANTÚNEZA (1995). Z teoretycznego punktu widzenia podstawą tej metody jest prawo bilansu dyslokacji, porównaj DŁUŻEWSKI (1994, 1996). Wspomniana metoda dotyczy liniowej, kontynuualnej teorii dyslokacji, z drugiej zaś strony w poprzednich rozdziałach została przedstawiona nieliniowa teoria uwzględniająca zmiany konfiguracji ciała. Z tego też względu krótko przedstawimy poniżej podstawowe równia liniowej kontynuualnej teorii dyslokacji.

6.1 Liniowa kontynuualna teorii dyslokacji

W liniowej kontynuualnej teorii dyslokacji gradient pola przemieszczeń możemy rozłożyć w następujący sposób

$$\text{grad } \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (6.1)$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}$ jest antysymetrycznym tensorem obrotu struktury, np. obrotu sieci kryształu, $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ jest tensorem sprężystej deformacji, natomiast $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ jest (ogólnie niesymetrycznym) tensorem plastycznej deformacji.

W kontynuualnej teorii dyslokacji są stosowane jednak różne oznaczenia. Nasz zapis wywodzi się z teorii zorientowanych ośrodków ciągłych i może być również używany w zakresie np. sprężysto–plastycznych ośrodków polarnych — z tą jedynie różnicą, że wtedy tensor odkształceń sprężystych staje się tensorem niesymetrycznym. Na ogół jednak w teorii ośrodków zorientowanych nie stosuje się zapisu pozwalającego np. na sformułowanie kontynuualnej teorii dyslokacji w kategoriach jednolitego zapisu z innymi teoriami zorientowanego kontinuum. Dla porównania przytoczmy tu inny, bardzo popularny rozkład, wykorzystywany m. in. w bardzo szeroko cytowanych pracach E. KRÖNERA (1958, 1960, 1968, 1981), gdzie zakłada się, że

$$\text{grad } \mathbf{u} = \boldsymbol{\beta}_e^T + \boldsymbol{\beta}_p^T \quad (6.2)$$

tensory $\boldsymbol{\beta}_e$ i $\boldsymbol{\beta}_p$ są ogólnie niesymetryczne i są one nazywane tensorami sprężystej i plastycznej dystorsji. W takim wypadku sztywny obrót materiału jest traktowany jako dystorsja sprężysta! Porównując oba rozkłady (6.1) i (6.2) otrzymujemy relacje równoważności pomiędzy

$$\boldsymbol{\beta}_e \equiv \boldsymbol{\omega}^T + \boldsymbol{\varepsilon}_e^T \quad (6.3)$$

$$\boldsymbol{\beta}_p \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_p^T \quad (6.4)$$

W liniowej kontynuualnej teorii dyslokacji tensor gęstości dyslokacji jest zdefiniowany jako

$$\boldsymbol{\alpha}_d \stackrel{df}{=} \text{curl } \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (6.5)$$

W zapisie indeksowym oznacza to, że

$$\alpha_{dij} = \varepsilon_{pim,n} \varepsilon_{jmn} \quad (6.6)$$

gdzie ε_{jmn} jest reprezentacją tensora alternacji. W liniowej teorii zakłada się również, że prędkość zmian plastycznej deformacji spełnia następujące równanie więzów kinematycznych

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \boldsymbol{\alpha}_d \times \mathbf{v}_d \quad (6.7)$$

gdzie \mathbf{v}_d jest wektorem lokalnej prędkości dyslokacji względem materiału. Całkowita prędkość dyslokacji jest wtedy określona jako $\mathbf{v} + \mathbf{v}_d$ gdzie \mathbf{v} jest wektorem prędkości ruchu kontinuum (masy).

Zwykle w liniowej, kontynuualnej teorii dyslokacji zakłada się prawa zachowania masy, pędu, momentu pędu i energii w klasycznej formie. Prowadzi to do następujących równań różniczkowych

$$\dot{\rho} + \rho \text{ div } \mathbf{v} = 0 \quad (6.8)$$

$$\operatorname{div} \sigma + \rho \dot{\mathbf{j}} - \rho \dot{\mathbf{v}} = 0 \quad (6.9)$$

$$\sigma - \sigma^T = 0 \quad (6.10)$$

$$-\rho \dot{u} + \sigma : \dot{\epsilon}_e + \sigma : \dot{\epsilon}_p - \operatorname{div} \mathbf{q}_T + \rho h = 0 \quad (6.11)$$

$$\rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}_T}{T} \right) - \frac{\rho h}{T} \geq 0 \quad (6.12)$$

gdzie wielkości ρ , σ , \mathbf{j} , \mathbf{v} , \mathbf{x} , u , \mathbf{q}_T , h , η , T mają takie same znaczenie jak w równaniach (5.1-5.5) (str. 68). Wykorzystując (6.7) i (6.11) nierówność entropii (6.12) możemy zapisać w następującej postaci

$$-\rho \dot{\psi} - \rho \eta \dot{T} + \sigma : \dot{\epsilon}_e + \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}_d - \frac{\mathbf{q}_T}{T} \operatorname{grad} T \geq 0 \quad (6.13)$$

gdzie

$$\psi = u - \eta T \quad (6.14)$$

$$\mathbf{f}_d = \sigma \times \boldsymbol{\alpha}_d \quad (6.15)$$

co oznacza, że w zapisie indeksowym otrzymujemy

$$f_{di} = \sigma_{jk} \alpha_{djl} e_{ikl} \quad (6.16)$$

łatwo zauważyć, że \mathbf{f}_d jest siłą Peacha-Koehler'a zapisaną w kategoriach kontynualnej teorii, porównaj (4.26).

Na ogół w liniowej, kontynualnej teorii dyslokacji nie stawia się równania na energię swobodną, ale bezpośrednio postuluje się równania konstytutywne dla sprężystości i ewentualnie dla przepływu ciepła. Takie podejście odpowiada klasycznej zależności na gęstość energii swobodnej

$$\psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_e : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}_e^T + \frac{1}{2} \frac{c_v}{T_0} T^2 \quad (6.17)$$

gdzie \mathbf{D} jest tensorem modułów sprężystości, c_v jest współczynnikiem pojemności ciepłej, natomiast T_0 jest temperaturą odniesienia, tzn. temperaturą materiału względem której określamy konfigurację odciążoną. Zależność (6.17) prowadzi do następujących równań konstytutywnych dla termosprężystości

$$\sigma = \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}_e \quad (6.18)$$

$$\eta = \frac{c_v}{T_0} T \quad (6.19)$$

W klasycznej teorii dyslokacji powyższe związki uzupełnia się liniowymi równaniami przepływu dyslokacji i ciepła

$$\mathbf{v}_d = \boldsymbol{\lambda}_d \mathbf{f}_d \quad (6.20)$$

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\lambda}_T \operatorname{grad} T \quad (6.21)$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda}_d$ i $\boldsymbol{\lambda}_T$ są tensorowymi stałymi materiałowymi określającymi własności „przewodnictwa” materiału z punktu widzenia przepływu dyslokacji i ciepła.

6.1.1 Układy równań i liczba niewiadomych

W przypadku rozpatrywania quasi-statycznych izotermicznych problemów sprężysto-plastycznej deformacji wywołanej ruchem ciągłego pola dyslokacji otrzymujemy następujący układ równań

$$\operatorname{div} \sigma = 0 \quad (6.22)$$

$$\alpha_p = \operatorname{curl} \varepsilon_p \quad (6.23)$$

$$\dot{\varepsilon}_p = \alpha_p \times v_p \quad (6.24)$$

gdzie napężenie i prędkość dyslokacji v_d spełniają następujące, linowe równania konstytutywne

$$\sigma = D(\nabla u - \varepsilon_p) \quad (6.25)$$

$$v_d = \lambda_d \frac{\sigma \dot{\varepsilon}_p \alpha_p}{\rho_d} \quad (6.26)$$

D i λ są tensorami stałych materiałowych odpowiednio czwartego i drugiego rzędu. Tak więc po podstawieniu równań konstytutywnych (6.25) i (6.26) do układu (6.22)-(6.24) mamy następującą liczbę równań i niewiadomych:

- trzy równania (6.22) i odpowiadające im trzy niewiadome: u_x, u_y i u_z ,
- dziewięć równań (6.23) i odpowiadające im dziewięć niewiadomych: $\alpha_{xx}, \alpha_{xy}, \alpha_{xz}, \alpha_{yx}, \dots, \alpha_{zz}$,
- dziewięć równań (6.24) i odpowiadające im dziewięć niewiadomych: $\varepsilon_{pxx}, \varepsilon_{pxy}, \varepsilon_{pxz}, \varepsilon_{pyx}, \dots, \varepsilon_{pzz}$.

W celu dalszego ograniczenia liczby zmiennych rozpatrzmy przypadek dwuwymiarowego ruchu rodziny prostoliniowych dyslokacji posiadających ten sam kierunek linii i wektor Burgersa. W takim przypadku tensor gęstości dyslokacji jest określony następującym równaniem

$$\alpha_p = \rho \alpha_o \quad (6.27)$$

gdzie α_o jest tensorem odpowiadającym jednostkowej gęstości dyslokacji i może być traktowany jako tensorowa stała odpowiadająca diadzie $\alpha_o = b_d \otimes l$. Można dowieść, że w omawianym przypadku równanie różniczkowe (6.23) redukuje się do prawa bilansu (6.30), porównaj np. DŁUŻEWSKI i ANTÚNEZ (1995). W tym miejscu jednak przedstawimy nieco inną metodę uzasadnienia prawa bilansu dla dyslokacji.

Zauważmy np., że w wypadku rodziny jednakowych dyslokacji ich liczba w danym obszarze v wyraża się zależnością

$$n_d = \int_v \rho_d dv \quad (6.28)$$

gdzie ρ_d jest skalarną gęstością dyslokacji. Warto tu podkreślić, że z przyczyn czysto fizycznych niemożliwa jest produkcja jedynie jednoimiennych dyslokacji wewnątrz materiałów. Stąd też zmiana w czasie liczby dyslokacji opisana jest następującym równaniem

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho_d dv = - \int_{\partial v_d} \rho_d v_d ds \quad (6.29)$$

Powyższe równanie całkowe prowadzi do następującego równania różniczkowego

$$\boxed{\dot{\rho}_d = -\operatorname{div}(\rho_d \mathbf{v}_d)} \quad (6.30)$$

równanie to stało się podstawą wykorzystywanego tu algorytmu numerycznego.

W celu dalszego zredukowania ilości niewiadomych założono dodatkowo, że problem dotyczy zachowawczego ruchu wspomnianych dyslokacji krawędziowych. To założenie jest tym bardziej uzasadnione, że od samego początku formułowania problemu numerycznego założyliśmy, że spośród różnego typu defektów struktury przedmiotem zainteresowania są jedynie dyslokacje. Opis procesu wspinania dyslokacji musiałby uwzględniać produkcję i ruch defektów punktowych, np. wakansów. Takie postawienie problemu spowodowałoby nie ograniczenie, ale wzrost liczby niewiadomych. Stąd też ograniczając ruch dyslokacji do poślizgu tensor plastycznej deformacji jest określony jako

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \gamma_p \boldsymbol{\varepsilon}_o \quad (6.31)$$

gdzie dla naszego zagadnienia tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_o$ jest stały i wyraża się zależnością

$$\boldsymbol{\varepsilon}_o = \frac{\mathbf{b}_d}{|\mathbf{b}_d|} \otimes (1 \times \frac{\mathbf{b}_d}{|\mathbf{b}_d|}) \quad (6.32)$$

Uwzględniając powyższe związki układ równań (6.22)-(6.24) redukuje się do następującego układu

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (6.33)$$

$$\dot{\rho}_d = -\operatorname{div}(\rho_d \mathbf{v}_d) \quad (6.34)$$

$$\dot{\gamma}_p = v_d \rho_d b_d \quad (6.35)$$

gdzie $b_d = |\mathbf{b}_d|$, $v_d = |\mathbf{v}_d|$, podczas gdy naprężenie i prędkość dyslokacji spełniają następujące równania konstytutywne

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\nabla \mathbf{u} - \gamma_p \boldsymbol{\varepsilon}_o) \quad (6.36)$$

$$v_d = \lambda_d b_d \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_o \quad (6.37)$$

λ_d jest niezerową składową tensora λ_d taką, że

$$\lambda_d = \lambda_d \frac{\mathbf{b}_d}{|\mathbf{b}_d|} \otimes (1 \times \frac{\mathbf{b}_d}{|\mathbf{b}_d|}) \quad (6.38)$$

Tak więc z praktycznego punktu widzenia niewiadomymi są

- przemieszczenia u_x, u_y ,
- skalarna gęstość dyslokacji ρ_d ,
- odkształcenie plastyczne γ_p .

6.2 Algorytm numeryczny

Z punktu widzenia modelowania deformacji sprężysto–plastycznych najbardziej popularnym jest sformułowanie oparte na tzw. sprężysto–plastycznych modułach stycznych. W takim wypadku modeluje się całkowity przyrost deformacji bez wyszczególniania plastycznej i sprężystej części. Modele tego typu są modelami bardzo przybliżonymi i na ogół nie zapewniają dobrych wyników w zakresie odciążania materiału. Stąd też w obecnie omawianym algorytmie zdecydowano się na bardziej dokładne, ale znacznie trudniejsze podejście. Oparte jest ono na oddzielnym modelowaniu sprężystych i plastycznych deformacji. Do sformułowania algorytmu numerycznego wykorzystano układ równań (6.33)–(6.35). W celu określenia niewiadomych u_x, u_y, ρ_d i γ_p wewnątrz elementów skończonych nie można jednocześnie założyć funkcji wagowych dla wszystkich niewiadomych. Łatwo pokazać, że w ten sposób otrzymalibyśmy układ sprzeczny. Dotyczy to szczególnie ostatniego równania. Z punktu widzenia MESu, do rozwiązywania tego typu zagadnień wprowadza się tzw. zmienne pozawęzłowe. W naszym wypadku za tego typu zmienną uznano γ_p . Ze względu na gotowe procedury całkowania równań różniczkowych po czasie, metodą niejawną typu *back Euler method*, zdecydowano się również na sformułowanie prędkościowe dla bilansu sił. Po zastosowaniu funkcji wagowych dla zmiennych u_x, u_y i ρ_d nasz układ równań przyjął następującą postać

$$\begin{bmatrix} C_u & 0 \\ 0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{a}}_u \\ \dot{\mathbf{a}}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u \\ \mathbf{P}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_u \\ \dot{\mathbf{f}}_p \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

gdzie $\mathbf{a}_u, \mathbf{a}_p, \mathbf{f}_u$ i \mathbf{f}_p są odpowiednio wektorem przemieszczeń, gęstością dyslokacji, wektorem sił i strumieniem przepływu dyslokacji w węzłach, natomiast \mathbf{a}_p jest wektorem odkształceń plastycznych nie w węzłach ale w tzw. punktach Gaussa, podczas gdy

$$C_u = \int_v \nabla^T \mathbf{W}_u \mathbf{D} \nabla N dv \quad (6.40)$$

$$C_p = \int_v \mathbf{W}_p \otimes N dv \quad (6.41)$$

$$\mathbf{P}_u = - \int_v \nabla^T \mathbf{W}_u \mathbf{D} \varepsilon_{o,b,d} \rho_d v_d dv \quad (6.42)$$

$$\mathbf{P}_p = - \int_v \nabla^T \mathbf{W}_p \frac{b_d}{|b_d|} v_d \rho_d dv \quad (6.43)$$

gdzie \mathbf{W}_u i \mathbf{W}_p są funkcjami wagowymi dla naprężeń i gęstości dyslokacji, \mathbf{N} jest funkcją kształtu, natomiast ρ_d i v_d są odpowiednio gęstością dyslokacji i prędkością ruchu dyslokacji. Prędkość ta jest określona w punktach Gaussa jako

$$v_d = \lambda_d b_d \varepsilon_o \mathbf{D} (\nabla \mathbf{N} \otimes \mathbf{a}_u - \gamma_p \varepsilon_o) \quad (6.44)$$

Równanie macierzowe (6.39) może być rozpatrywane jako układ równań różniczkowych zwyczajnych nieliniowych ze względu na wektor \mathbf{a}

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{P}(\mathbf{a}) = \mathbf{f} \quad (6.45)$$

Wykorzystując niejawną metodę całkowania po czasie, typu the backward Euler method, równanie (6.45) zostało zastąpione związkiem

$$\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} (\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_n) + \mathbf{P}(\mathbf{a}_{n+1}) = \mathbf{f} \quad (6.46)$$

z którego możemy określić rozwiązanie \mathbf{a}_{n+1} dla t_{n+1} . W takim wypadku (6.46) może być rozwiązane metodą Newtona-Raphsona. Macierz styczna składa się wtedy z

$$\mathbf{K}_T^{(i)} = \mathbf{K}_T^L + \mathbf{K}_T^{NL} \quad (6.47)$$

gdzie

$$\mathbf{K}_T^L = \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \quad (6.48)$$

$$\mathbf{K}_T^{NL} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{a}_{n+1}^{(i)}} \quad (6.49)$$

porównaj ZIENKIEWICZ i TAYLOR (1991). W celu określenia macierzy \mathbf{K}_T^{NL} zauważmy, że wektor \mathbf{P} , który musimy zróżniczkować, zależy od prędkości ruchu dyslokacji, porównaj (6.42) i (6.43). W omawianym przypadku macierz \mathbf{K}_T^{NL} przyjmuje postać (str. 109)

$$\mathbf{K}_T^{NL} \approx - \left[\begin{array}{cc} \int_{v_{el}} \nabla^T \mathbf{W}_u \mathbf{D} \epsilon_o b_d \rho_d \lambda_d b_d \epsilon_o \mathbf{D} \nabla \mathbf{N} dv & \int_{v_{el}} \nabla^T \mathbf{W}_u \mathbf{D} \epsilon_o b_d v_d \mathbf{N} dv \\ \int_{v_{el}} (\nabla^T \mathbf{W}_\rho \frac{b_d}{|b_d|}) \rho_d \lambda_d \epsilon_o \mathbf{D} \nabla \mathbf{N} dv & \int_{v_{el}} (\nabla^T \mathbf{W}_\rho \frac{b_d}{|b_d|}) v_d \mathbf{N} dv \end{array} \right] \quad (6.50)$$

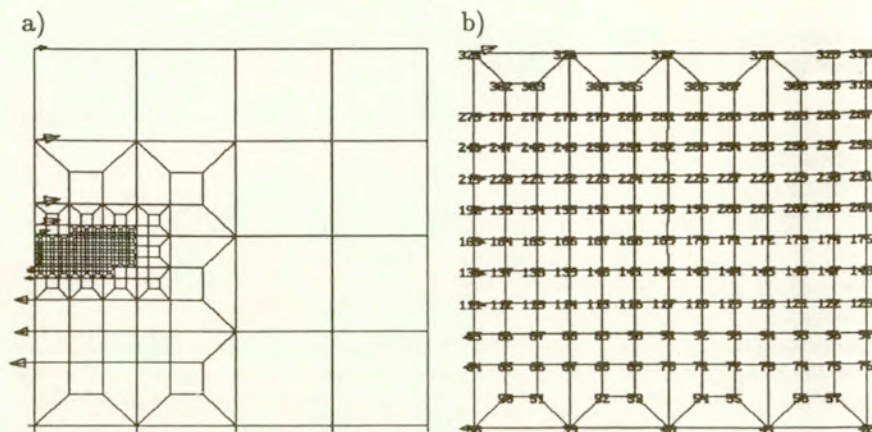
gdzie v_{el} oznacza pole elementu skończonego, v_d jest wektorem prędkości w punktach Gaussa. W opisanym poniżej programie została wykorzystana metoda Galerkinia, tzn. przyjęto, że $\mathbf{W}_\rho = \mathbf{W}_u = \mathbf{N}$.

6.3 Program komputerowy

Do wykonania obliczeń został wybrany program metody elementów skończonych o nazwie FEAP autorstwa R.I. Taylora. Program ten rozszerzono o dodatkowe procedury odpowiadające opracowaniu elementu skończonego uwzględniającego przepływ dyslokacji zgodnie z algorytmem opisanym w poprzednim podrozdziale, patrz również DŁUŻEWSKI i ANTÚNEZ (1995). Istotnym elementem opracowanych procedur jest to, że przyrost naprężeń nie jest liczony przy pomocy uśrednionych, sprężysto-plastycznych modułów, ale na każdym kroku całkowania jest liczony oddzielnie przyrost deformacji sprężystej i plastycznej. Takie sformułowanie pozwala na dokładne analizowanie nie tylko procesów obciążania, ale również w zakresie odciążania.

Na uwagę zasługuje tu kilka istotnych cech wyróżniających omawiany element w stosunku do klasycznych sformułowań:

1. Omawiany element wykorzystuje zmienne pozawęzłowe do zapamiętywania tensora odkształceń plastycznych w punktach Gaussa,
2. Sprężenie zjawisk deformacji plastycznej z przepływem dyslokacji prowadzi w ogólnym wypadku do niesymetrycznej macierzy sztywności, wiąże się to z trudnościami w odwracaniu tego typu macierzy,
3. Jednoczesne obliczanie małych co do wielkości deformacji sprężystych i dużych deformacji plastycznych prowadzi do złego uwarunkowania macierzy sztywności, a w konsekwencji zmusza do stosowania małych kroków całkowania po czasie tak, aby przyrost deformacji plastycznej był tego samego rzędu co deformacja sprężysta.



Rys. 6.1 a) Siatka elementów z zaznaczonym obciążeniem i warunkami brzegowymi na tle pola naprężeń σ_{xy} , b) powiększenie obszaru zagęszczenia elementów

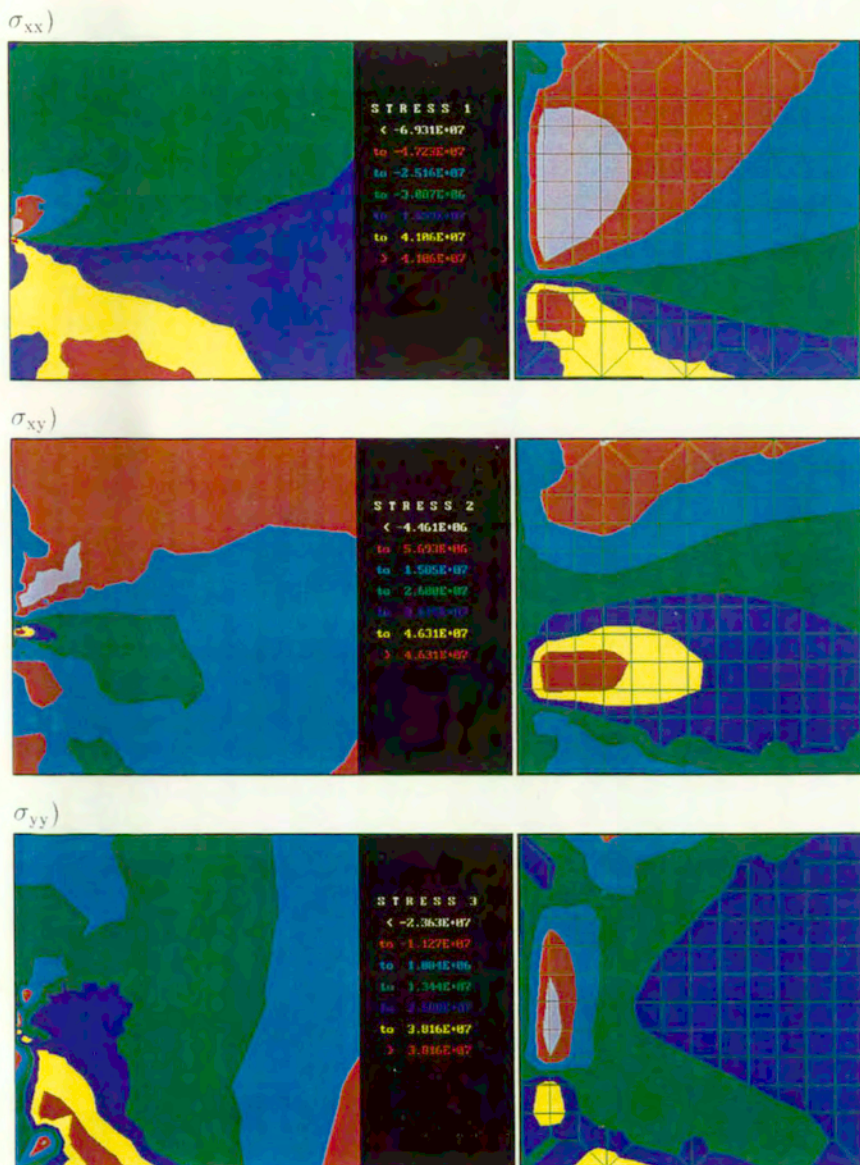
6.4 Opis rozwiązanego przykładu

Analizowany poprzednio układ równań różniczkowych możemy zapisać w następującej postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\rho}_d \\ \dot{\gamma}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \operatorname{div}(\mathbf{D}\nabla\mathbf{u} - \mathbf{D}\epsilon_o\gamma_p) \\ \operatorname{div}[\rho_d\lambda_d b_d \epsilon_o \mathbf{D}(\nabla\mathbf{u} - \epsilon_o\gamma_p)] \\ \rho_d b_d \lambda_d b_d \epsilon_o \mathbf{D}\nabla\mathbf{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_d b_d \lambda_d b_d \epsilon_o \mathbf{D}\epsilon_o\gamma_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

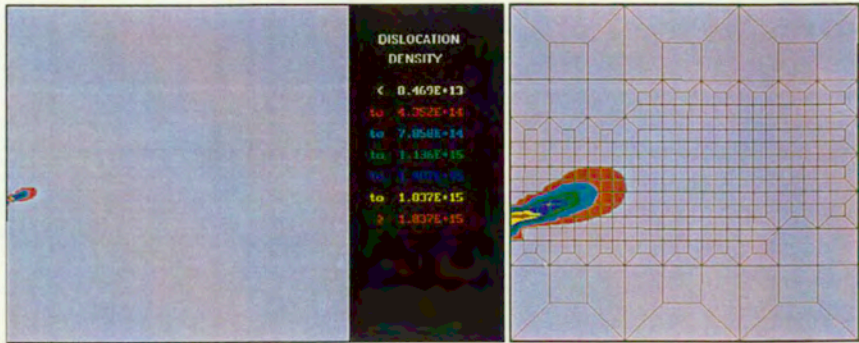
Możemy dla tego układu postawić problem brzegowy odpowiadający propagacji pola dyslokacji pod wpływem przyłożonego z zewnątrz obciążenia. Rozpatrzmy warunki brzegowe dla trzech równań (6.51) odpowiadających kolejnym zmiennym u , ρ_d i γ_p . Warunek brzegowy dla pierwszego z nich odpowiadać może podaniu na brzegu przemieszczeń bądź naprężeń. Warunki brzegowe dotyczące zaś drugiego z równań mogą odpowiadać zadaniu na brzegu obszaru pola ρ_d lub strumienia dyslokacji $q = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d \rho_d$. Zauważmy jeszcze, że trzecie z równań (6.51) nie wymaga warunków brzegowych. W omawianym przykładzie założono, że analizowany obszar continuum jest prostokątem o wymiarach $108\text{nm} \times 108\text{nm}$. Obszar ten podzielono na 402 elementy skończone pokazane na rys.6.1a, w taki sposób, że w miejscu przewidywanej koncentracji dyslokacji poszczególne elementy skończone miały wymiary $1\text{nm} \times 1\text{nm}$, patrz rys.6.1b. Cały obszar został zamocowany na stałe w lewym dolnym węźle, natomiast w pozostałych węzłach najniższego rzędu przesuwnie, patrz rys.6.1a. Z lewej strony obszaru przyłożono obciążenie zewnętrzne, patrz strzałki na rys.6.1, w taki sposób, aby w przewidywanym obszarze koncentracji pola dyslokacji wywołać silne naprężenia ścinające σ_{xy} , porównaj rys.6.2. Przyjęte w zadaniu stałe materiałowe przedstawia tablica 6.1 (str. 85).

Opracowany algorytm numeryczny nie daje możliwości bezpośredniego zadania początkowego pola gęstości dyslokacji i automatycznego wygenerowania odpowiadającego

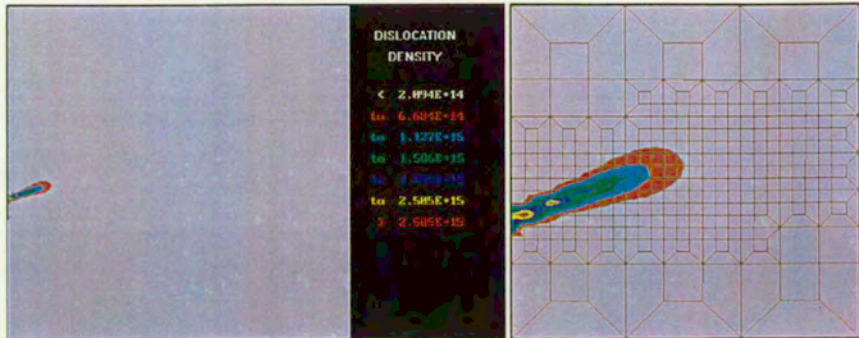


Rys. 6.2 Stan naprężeń w [MPa], w chwili $t = 0$, z prawej strony powiększenia dla obszaru koncentracji naprężeń

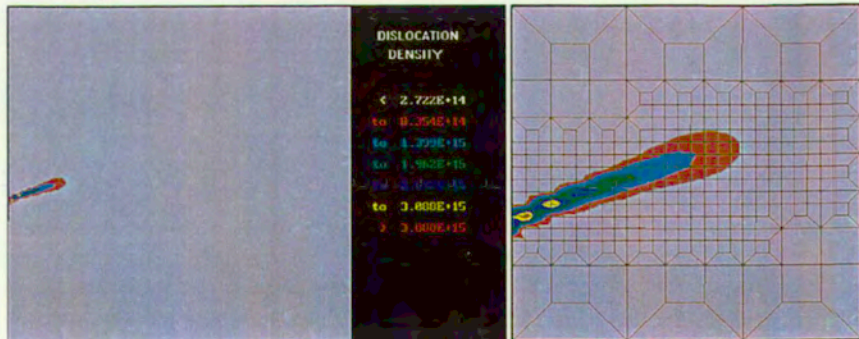
$t = 0.2s$)



$t = 0.4s$)

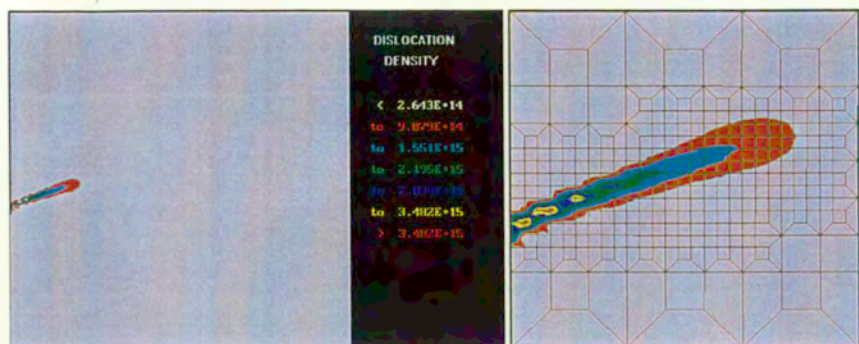


$t = 0.6s$)

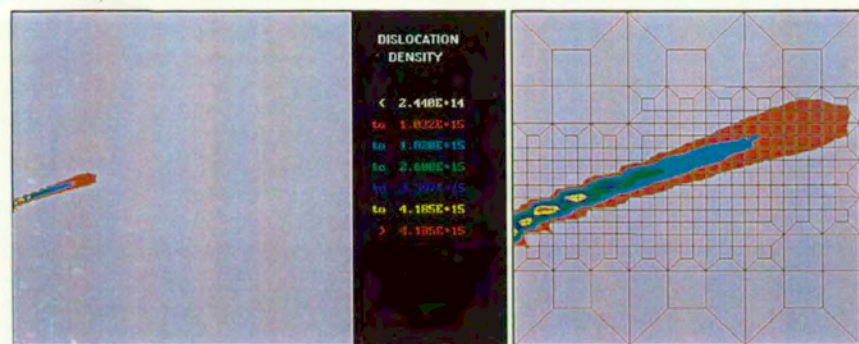


Rys. 6.3 Kolejne fazy propagacji pola gęstości dyslokacji, cd. na następnym rysunku

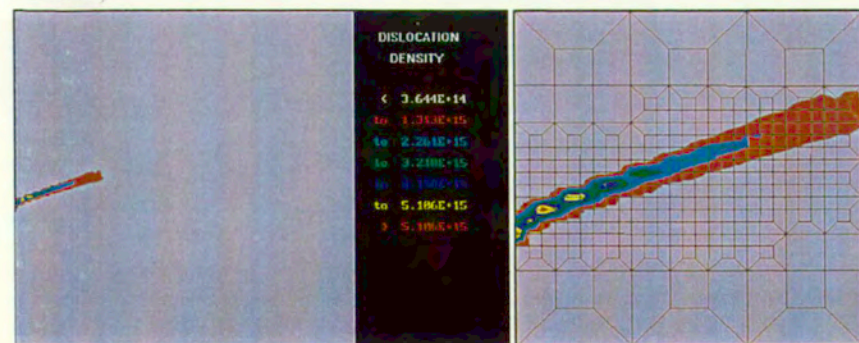
$t = 0.8s$)



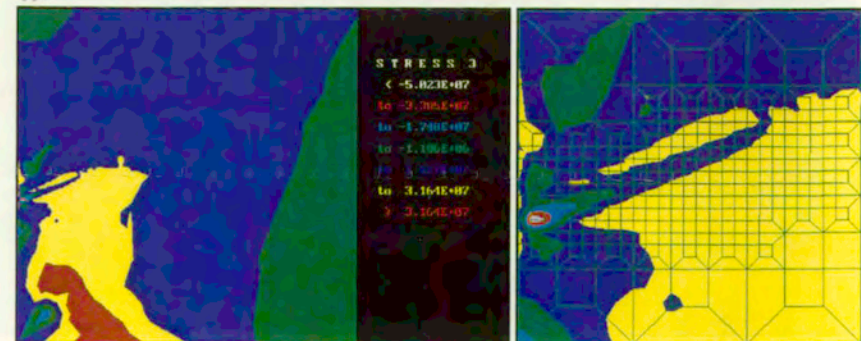
$t = 1.0s$)



$t = 1.2s$)



Rys. 6.4 Kolejne fazy propagacji pola gęstości dyslokacji

σ_{xx}  σ_{xy}  σ_{yy} Rys. 6.5 Końcowy stan naprężeń (uzyskany dla $t = 1.2s$)

	Wielkość fizyczna	Wartość
Moduł Krichhoffa	G	0.3×10^5 MPa
Moduł Younga	E	0.7×10^5 MPa
Wektor Burgersa	b	0.3 nm
Współczynnik lepkości	λ_d	$1 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s} \cdot \text{MPa}}$

Tablica 6.1 Założone stałe materiałowe

temu polu pola naprężeń rezidualnych, porównaj równanie (6.36). Stąd też, założono, że w chwili $t = 0$ analizowany obszar nie zawiera dyslokacji, tzn. $\gamma_p(x, t)|_{t=0} \equiv 0$, jednocześnie założono, że w sąsiedztwie węzłów nr 85 i 105 wpływa strumień dyslokacji $q = 1 \times 10^{-11} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$. Założono przy tym, że są to dyslokacje krawędziowe o wektorze Burgersa o składowych

$$b_x = \cos 20^\circ \cdot 0.3 \text{nm} \quad (6.52)$$

$$b_y = \sin 20^\circ \cdot 0.3 \text{nm} \quad (6.53)$$

W pozostałych węzłach na brzegu obszaru przyjęto $\rho_d = 0$.

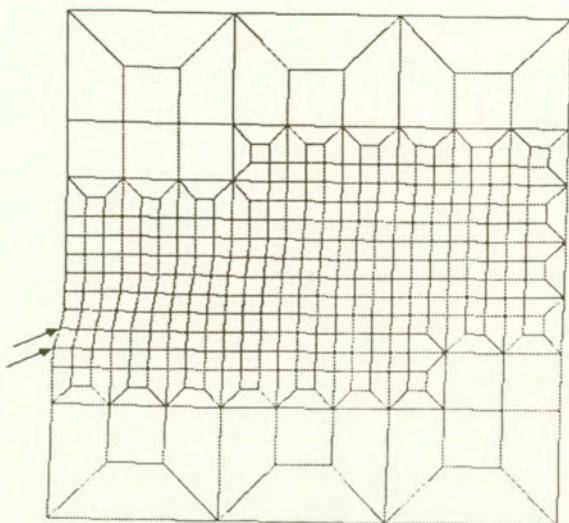
Pod wpływem przyłożonego obciążenia zewnętrznego następowała stopniowa propagacja pola dyslokacji przez kolejne elementy skończone, porównaj 6.3 i 6.4. Jednocześnie w wyniku lokalnej deformacji plastycznej następowało stopniowe odciążanie obszaru przez który przepłynęły już dyslokacje. Rys.6.5 przedstawia rozkład naprężeń uzyskany na końcu procesu symulacji procesu.

6.5 Dyskusja uzyskanych wyników numerycznych

Porównując podstawy teoretyczne algorytmu numerycznego zastosowanego w pracy DŁUŻEWSKIEGO i ANTÚNEZA (1995) z obecnie prezentowanym algorytmem można zauważyć, że algorytmy te różnią się głównie metodą określania stałych. Natomiast z punktu widzenia uzyskanych wyników numerycznych obecny algorytm nie prowadzi już do „rozplywania się” pola dyslokacji w materiale, ale pozwala na symulację ruchu pola dyslokacji poprzez kilkadziesiąt kolejnych elementów skończonych, porównaj np. rozkład pola dyslokacji uzyskany na rys. 6.6 dla $t=1.2\text{s}$ z rozkładem prezentowanym w pracy DŁUŻEWSKIEGO i ANTÚNEZA (1995) — Fig. 3d. Różnice te wynikają z usunięcia błędów numerycznych, które wkrały się w trakcie opracowywania procedur fortranowskich.

Drugą przyczyną poprawy wyników jest inna (bardziej dokładna) dyskretyzacja obszaru. Ta bardziej dokładna dyskretyzacja została uzyskana m. in. dzięki lokalnemu zagęszczeniu siatki. Z uwagi na stosowanie czworokątnych elementów zagęszczenie siatki wiązało się z koniecznością użycia elementów o nieregularnych kształtach. To z kolei spowodowało pojawienie się błędów numerycznych w postaci lokalnej, silnej koncentracji naprężeń w niektórych węzłach nieregularnych elementów, porównaj np. rozkład naprężeń σ_{yy} na rys. 6.5 (prawy dolny rysunek).

Warto tu również zwrócić uwagę na lokalne odciążenie obszaru, przez który przepłynęły dyslokacje, porównaj „pawie oczko” dla początkowej koncentracji naprężeń ścinających σ_{xy} , rys. 6.2, z „obciążonym pawim oczkiem” na rys. 6.5. Wynik ten jest rezultatem



Rys. 6.6 Fragment zdeformowanej konfiguracji końcowej ($t=1.2s$) przy 25-cio krotnym powiększeniu przemieszczeń

wzajemnego sprzężenia procesu przepływu dyslokacji, z procesem sprężysto-plastycznej deformacji siatki. Końcowy kształt fragmentu zdeformowanej plastycznie siatki został pokazany na rys. 6.6. Na tym rysunku pole przemieszczeń zostało powiększone 25-cio krotnie. Oznacza to, że rzeczywista deformacja plastyczna była stosunkowo niewielka. Powodem tak małej deformacji plastycznej były duże wartości stałych sprężystych (aluminium). Wiązało się to z gwałtownym spadkiem naprężeń już dla bardzo niewielkich lokalnych odkształceń plastycznych. W konsekwencji wywoływało to spadek siły Peacha-Kochlera i w praktyce oznaczało, że symulację ruchu dyslokacji można było wykonać jedynie przy zastosowaniu lokalnej koncentracji dyslokacji nie większej niż rzędu $\rho = 10^{15} m^{-2}$. Przy przemieszczaniu się dyslokacji w zakresie analizowanego obszaru ($108nm \times 108nm$) dyslokacje te wywoływały niestety bardzo niewielkie, lokalne deformacje plastyczne. Stąd też, aby ujawnić na rys. 6.2 efekt deformacji plastycznej, przemieszczenia kontinuum zostały powiększone 25-cio krotnie.

6.5.1 Inne próby komputerowej symulacji

Zastosowane tu sformułowanie numeryczne jest jedną z pierwszych prób jednoczesnego wykorzystania kontynualnej teorii dyslokacji i metody elementów skończonych.

Ze względu na bardzo intensywny rozwój metod komputerowych, a w tym metody elementów skończonych, obecnie coraz częściej podejmowane są różne próby wykorzystania tych metod do symulacji sprzężeń pomiędzy ruchem dyslokacji a deformacją sprężysto-plastyczną, np. STIGH (1993), CANOVA i wsp. (1994). Można również zetknąć się z próbami zastosowania metod nie wywodzących się z mechaniki kontinuum, jak np. automaty komórkowe, RAPPAZ i GANDIN (1993). Jednak większość dotychczasowych rozwiązań dla

dyslokacji wywodzi się z kontynuualnej teorii. Praca Stigh'a jest próbą modelowania za pomocą MES pola odkształceń sprężystych wokół nieruchomego rdzenia dyslokacji. Praca Canovy i współpracowników (1994) jest natomiast już próbą modelowania ruchu dyslokacji. W ostatnio wspomnianej pracy zastosowano algorytm symulacji ruchu dyslokacji odpowiadający przeskakiwaniu dyslokacji od węzła do węzła siatki elementów skończonych. W takim wypadku kierunek ruchu dyslokacji jest silnie ograniczony geometrią poszczególnych elementów skończonych. Takie sformułowanie nie jest w pełni sformulowaniem z zakresu mechaniki kontinuum, ale jedynie pewną dyskretną próbą opisu ruchu dyslokacji. Nie daje ono np. możliwości swobodnego symulowania ruchu dyslokacji w dowolnych kierunkach. Jednym z pierwszych sformułowań z zakresu kontynuualnej teorii było sformułowanie opracowane przez DŁUŻEWSKIEGO i ANTÚNEZA (1995). Sformułowanie to daje możliwość komputerowej symulacji ruchu dyslokacji poprzez kolejne elementy skończone.

6.5.2 Wnioski z komputerowej symulacji

Analizując jakościowy charakter uzyskanych w pracy wyników numerycznych należy stwierdzić, że wyniki te przypominają raczej proces rozchodzenia się ciepła w materiale niż obserwowane w rzeczywistości procesy ruchu dyslokacji. Można sobie zadać pytanie: *Co jest główną przyczyną jakościowych różnic między rzeczywistymi procesami przepływu dyslokacji a wynikami komputerowej symulacji?* Zdaniem autora to nie założenia kinematyczne samej kontynuualnej teorii dyslokacji (prawo płynięcia) są tego przyczyną, gdyż przebieg procesu propagacji pola dyslokacji nie zależy jedynie od założeń kinematycznych modelu, ale zależy przede wszystkim od sił termodynamicznych rządzących procesem. Jak istotną rolę odgrywają te siły w jakościowym charakterze przebiegu deformacji plastycznych wystarczy porównać zdjęcia mikrostruktury zdeformowanych materiałów uzyskiwane dla materiałów o niskiej i o wysokiej energii błędów ułożenia.

Stąd też powstaje fundamentalne pytanie: — jakie siły powinny zostać uwzględnione w kontynuualnej teorii dyslokacji, aby teorię tą zbliżyć do rzeczywistości? Pewnym istotnym argumentem jest tu fakt, że rzeczywiste struktury materiałów odpowiadające quasi-jednorodnym rozkładom jednoimiennych dyslokacji z reguły nie występują w materiałach. Co więcej! — pomimo, że mechanizm dyslokacyjny jest ogólnie uznawany za podstawowy mechanizm plastycznej deformacji kryształów, to obserwowane w rzeczywistości zakrzywienia sieci monokryształów są mierzone często nie w stopniach, ale w minutach. Świadczy to jednoznacznie o tym, że struktury odpowiadające dużym wartościom tensora gęstości dyslokacji (tzn. dużym krzywiznom sieci) są strukturami wysokoenergetycznymi. Dlatego, zakładając w kontynuualnej teorii dyslokacji pole $\alpha_d(x, t)$ nie powinno się jednocześnie zakładać, że energia swobodna nie zależy od α_d . Niestety, jak dotąd, jest to klasyczne założenie kontynuualnej teorii dyslokacji.

Uwzględnienie w modelowaniu konstytutywnym sił termodynamicznych kontrolujących zależność energii kryształu od tensora gęstości dyslokacji może przeciwdziałać otrzymywaniu jednorodnej propagacji pola dyslokacji — a tym samym, może okazać się siłą termodynamiczną pozwalającą na komputerową symulację procesów formowania się niskoenergetycznych struktur.

Wniosek powyższy wymaga dalszych badań, szczególnie z punktu widzenia modelowania konstytutywnego i analizy uzyskiwanych rozwiązań. Pewnym istotnym krokiem w kie-

runku uwzględnienia siły termodynamicznej skoniugowanej z tensorem gęstości dyslokacji było opracowanie nowego termodynamicznego bilansu sił na polu dyslokacji, porównaj rozdział 5.

6.5.3 Dalsze możliwości rozwoju algorytmu numerycznego

Istotnym kierunkiem dalszego rozwoju omawianego algorytmu jest opracowanie sformułowania odpowiadającego założeniu, iż energia materiału zależy od gęstości defektów. Z praktycznego punktu widzenia sprowadza się to do uwzględnienia na polu dyslokacji nie tylko siły Peacha -Koehlera, ale również innych sił. Tego typu sformułowanie dałoby możliwość testowania różnych „modów” deformacji plastycznej związanych z zależnością energii materiału od gęstości defektów.

Jedną z głównych wad wykorzystanego tu sformułowania numerycznego jest brak możliwości zadania dowolnego pola gęstości dyslokacji i automatycznego znalezienia pola naprężeń rezidualnych. Stąd w praktycznym zastosowaniu modelu nie zakładano pola gęstości dyslokacji wewnątrz rozpatrywanego obszaru, ale zakładano iż obszar ten w chwili $t = 0$ nie zawiera dyslokacji. Na brzegu wspomnianego obszaru zakładano natomiast strumień dyslokacji. Pod wpływem przyłożonego obciążenia dyslokacje poruszały się do wewnątrz obszaru powodując deformację sprężysto-plastyczną i tym samym generując pole naprężeń rezidualnych. Jednym z priorytetowych zadań jest opracowanie takiego algorytmu numerycznego, który dawałby możliwość wygenerowania początkowego pola naprężeń rezidualnych. Najprostszą metodą osiągnięcia takiego celu jest przyjęcie odkształcenia plastycznego ϵ_p za zmienną węzłową. Łatwo zauważyć, że w takim wypadku gęstość dyslokacji może być policzona na podstawie gradientu ϵ_p , podczas gdy policzenie gradientu pola gęstości dyslokacji wymaga już określenia drugiej pochodnej ϵ_p . Tego typu wymagania wykraczają poza możliwości standardowo dostępnych procedur metody elementów skończonych. Wymagają bowiem określenia drugich pochodnych funkcji kształtu. Wydaje się więc, że dalszym istotnym krokiem w rozwoju komputerowej symulacji ruchu dyslokacji będzie opracowanie podprogramów numerycznych pozwalających na implementację algorytmu opartego na liczeniu drugich pochodnych funkcji kształtu. Przy pomocy takiego algorytmu będzie można policzyć pole naprężeń odpowiadające dowolnie zadanemu polu gęstości dyslokacji.

Rozdział 7

Podsumowanie

Zdaniem autora rozprawa zawiera następujące, oryginalne wyniki:

1. W zakresie skończonych deformacji wyprowadzono równania zgodności pomiędzy miarami deformacji przemieszczeniowej, a miarami zakrzywienia typu α , porównaj (3.93)÷(3.96). Warto podkreślić, że związki te nie dotyczą tylko kontynuualnej teorii dyslokacji, ale dotyczą wielu kontynuualnych teorii, w których pole obrotu mikrostruktury jest uwzględniane.
 - (a) Związki odpowiadające równaniu NYE'A (4.22) zostały wyprowadzone w zakresie skończonych deformacji, porównaj przejście (3.19) - (3.27). Pokazano przy tym, że zaproponowany tu układ praw transformacji dla tensorów $\alpha_{...}$ i $\kappa_{...}$ zapewnia obiektywność dokonywania rozkładu tensorów zakrzywienia. Obiektywność ta polega między innymi na tym, że rezultat dokonania rozkładu tensora zakrzywienia, np. na sprężystą i plastyczną część, nie zależy od tego czy dokonamy go w aktualnej konfiguracji i przetransformujemy otrzymane tensory do konfiguracji odciążonej, czy też bezpośrednio dokonamy rozkładu w konfiguracji odciążonej.
 - (b) Pokazano również, że równanie $\widehat{\text{div}} \hat{\alpha} = 0$ uznawane niekiedy za fundamentalne równanie teorii dyslokacji, porównaj KRÖNER (1958), TEODOSIU (1970), nie jest żadnym fundamentalnym (szczególnym, specyficznym, wyróżniającym ją spośród innych) równaniem teorii dyslokacji, ale jest ogólnym warunkiem zgodności obrotów, który podobnie jak warunek zgodności przemieszczeń, musi być spełniony nie tylko w kontynuualnej teorii dyslokacji, ale również w każdej innej teorii, w której pole obrotu mikrostruktury jest uwzględniane, np. w teorii ośrodków Cosserat.
2. Zaproponowano tu ogólny układ równań konstytutywnych dla ruchu pola dyslokacji. Układ ten wyróżnia się zależnością gęstości energii swobodnej od tensora gęstości dyslokacji. Spełnia on ograniczenia termodynamiczne w zakresie skończonych deformacji, porównaj (5.12), (5.33) i (5.34). Wydaje się, że spełnienie tego typu warunków, w ramach nieliniowej kontynuualnej teorii dyslokacji, zostało otrzymane po raz pierwszy — zwłaszcza, jeśli chodzi o założenia, o których była mowa na str. 10. Ceną, którą trzeba było tu zapłacić za uzyskanie takiego wyniku było uwzględnienie dodatkowego strumienia przepływu energii swobodnej w prawie bilansu energii. Bez tego dodatkowego strumienia nie można spełnić wspomnianych założeń. Strumień ten ma jednak swoje głębokie uzasadnienie fizyczne, gdyż jest on związany

z transportem energii wewnętrznej zmagazynowanej lokalnie wokół pojedynczych dyslokacji w kryształach.

3. Zastosowane tu sformułowanie numeryczne jest jedną z pierwszych prób wykorzystania kontynualnej teorii dyslokacji i metody elementów skończonych do komputerowej symulacji procesów sprężysto-plastycznej deformacji materiałów. Uzyskane wyniki numeryczne pokazują, że kontynualna teoria dyslokacji to nie tylko pewna, abstrakcyjna teoria opisu geometrii i kinematyki, ale jest to teoria modelowania konstytutywnego o dotychczas nie wykorzystanych potencjalnych możliwościach komputerowej symulacji procesów deformacji. W rozprawie zwrócono uwagę na rolę, jaką w przyszłych zastosowaniach może odegrać pomijana zwykle zależność energii swobodnej od tensora gęstości dyslokacji. Z drugiej jednak strony zaprezentowane tu wyniki numeryczne pokazują, że na obecnym etapie rozwoju kontynualna teoria dyslokacji nie daje jeszcze wyników jakościowo zgodnych z obserwowanymi eksperymentalnie rozkładami mikrodeformacji.

Bibliografia

- ABEYARATNE R. i KNOWLES J.K. (1990) On the driving traction acting on a surface of strain discontinuity in a continuum. *J. Mech. Phys. Solids*. **38**, 345-360.
- AIFANTIS E.C. (1987) The physics of plastic deformation. *Int. J. Plasticity* **3**, 211-247.
- ARGYRIS J. (1982) An excursion into large rotations. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.* **32**, str. 85-155.
- ASARO R.J. (1983) Micromechanics of crystals and polycrystals. *Adv. Appl. Mech.* **23**, 1-115.
- BILBY B.A. (1960) Continuous distribution of dislocations. *Progress in Solid Mechanics* (ed. I.N. Sneddon i R. Hill) **1**, 331-398. North-Holland Publ., Amsterdam.
- BILBY B.A. (1966) *Teoria Dyslokacji* cz.III, Geometrical aspects of continuous distributions of dislocations, WPAN, Wrocław-W-wa-Kraków.
- BLINOWSKI A. (1994a) On the kinematics of the set of oriented elements. *Arch. Mech.* **46**, 6.
- BLINOWSKI A. (1994b) Obroty ciał odkształcalnych, cz.I: Geometria i kinematyka, Prace IPPT 7/94.
- BOURBAKI N. (1956) *Éléments de Mathématique: Les structures fondamentales de l'analyse*, XXI Livre VI. Paris.
- BOWEN R.M. i WANG C.-C. (1976) *Introduction to Vectors and Tensors*, Vol. 1-2. Plenum Press, New York and London.
- BUNGE (1982) *Texture Analysis of Material Science*. Butterworths, London.
- BURGERS J.M. (1939a) Some considerations of the field of stress connected with dislocations in a regular crystal lattice, Part 1. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.* **42**, 293-325.
- BURGERS J.M. (1939b) Some considerations of the field of stress connected with dislocations in a regular crystal lattice, Part 2. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.* **42**, 378-399.
- CANOVA G.R., BRÉCHET Y., KUBIN L.P., DEVINCRE B., PONTIKIS V. i CONDAT M. (1993) 3D simulation of dislocation motion on a lattice. *Proc. Int. Coll. DISLOCATIONS 93 - Microstructures and Physical Properties* (ed. L.P.Kubin i wsp.) Aussois 31 March-9 April, France.

- CARTAN E. (1936) *Leçons sur Méthode de la Répère Mobile*. Gauthier-Villars, Paris.
- CLEMENT A. (1982) Prediction of deformation texture using a physical principle of conservation. *Mater. Sci. Eng.* **55**, 203-210.
- COSSERAT E. i F. (1909) *Theorie des Corps Deformable*. Hermann, Paris.
- DE WITT R. (1970) Linear theory of static disclinations. *Fundamental Aspects of Dislocations* (ed. J.A.Simmonds, R.de Witt, R.Bullough). Nat. Bur. Stand. Spec. Publ. 317, vol 1, 651-673.
- DLUŻEWSKI P. (1996) On geometry and continuum thermodynamics of structural defect movement. *Mech. Mater.* **22**, 23-41.
- DLUŻEWSKI P. (1994) Continuum theory of dislocations in angular coordinates. *Solid State Phenomena*. **35-36**, 539-544.
- DLUŻEWSKI P.H. (1993) Finite deformations of polar elastic media. *Int. J. Solids Structures* **30**, 2277-2285.
- DLUŻEWSKI P.H. (1991a) Crystal orientation spaces and remarks on the modelling of polycrystal anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids* **39**, 651-661.
- DLUŻEWSKI P.H. (1991b) Finite deformations of polar media in angular coordinates. *Arch. Mech.* **43**, 783-793.
- DLUŻEWSKI P. i ANTÚNEZ H. (1995) Finite element simulation of dislocation field movement. *CAMES* **2**, 141-148.
- DLUŻEWSKI P. i PERZYNA P. (1996) Dyssypatywny spin plastyczny. Opis termodynamiczny (w przygotowaniu).
- EISENHART L.P. (1949) *Riemannian Geometry*. Princeton University Press, Princeton.
- EISENHART L.P. (1927) *Non-Riemannian Geometry*. Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island.
- ERICKSEN J.L. (1960) Tensor fields, w TRUESDELL i TOUPIN (1960).
- ERICKSEN J.L. (1983) Thermoelastic considerations for continuously dislocated crystals. Proc. Int. Symp. of Mechanics of Dislocations, 95-100, Michigan, American Soc. for Metals.
- ERINGEN A.C. (1971) Tensor analysis. *Continuum Physics* (ed. A.C. Eringen), vol. I, 2-153. Academic Press, New York.
- ERINGEN A.C. i KAFADAR C.B. (1976) Polar field theories. *Continuum Physics* (ed. A.C. Eringen), vol. IV, 1-73. Academic Press, New York.
- GAIROLA B.K.D. (1979) Nonlinear elastic problems. *Dislocations in Solids* (ed. F.R.N. Nabarro) vol.1, 223-342. North-Holland, Amsterdam.

- GAMBIN W. (1991) Phenomenological model of deformation texture development, Proc. MECAMAT'91, Fontainebleau, August 1991.
- GJOSTEIN N.A. (1973) Short circuit diffusion, in *Diffusion* ASM Metals Park, Ohio.
- GOLĄB S. (1966) *Rachunek Tensorowy*. PWN, Warszawa.
- GRABSKI M. (1969) *Struktura Granic Ziarn w Metalach*. BFM Śląsk, Katowice.
- GURTIN M.E. (1995) The nature of configurational forces. *Arch. Rational Mech. Anal.* **131** 1-66.
- GÜNTHER H. (1967) Zur nichtlinearen Kontinuumstheorie bewegter Versetzungen. Dissertation, Academic-Verlag, Berlin.
- HORODON M.J. i AVERBACH B.L. (1961), *Acta Metall.* **9**, 247.
- IGNACZAK J. i RAO C.R.A. (1995) Stress characterization of elastodynamics with continuously distributed defects. *J. Elasticity* **30**, 219-250.
- KAFADAR C.B. i ERINGEN A.C (1971) Micropolar media -I, the classical theory. *Int. J. Engng. Sci.* **9**, 271-305.
- KELLY A. i GROVES G.W. (1970) *Crystallography and Crystal Defects*. Longman Group Limited, London.
- KIRYK R. i DLUŻEWSKI P.H. (1987) Influence of microstresses on subsequent yield surfaces of polycrystalline materials. *Int. J. Engng. Sci.* **27**, 1589-1592.
- KOMOROWSKI J. (1978) *Od Liczb Zespolonych do Tensorów, Algebr Liego i Kwadryk*. PWN, Warszawa.
- KONDO K. (1952) On geometrical and physical foundations of the theory of yielding. *Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Appl. Mech.* vol 2, 41-47.
- KOSEVICH A.M. (1979) Crystal dislocations and the theory of elasticity. *Dislocations in Solids* (ed. F.R.N. Nabarro) vol.1, p.33. North-Holland, Amsterdam.
- KOSSECKA E. i de WITT (1977) Disclination kinematics. *Arch. Mech.* **29**, 633-651.
- KRÖNER E. (1955) Der Fundamentale Zusammenhang Zwischen Versetzungs-dichte und pannungsfunktionen. *Z. Phys.* **142**, 463-475.
- KRÖNER E. (1958) *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Springer-Verlag, Berlin.
- KRÖNER E. (1960) Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **4**, 273.
- KRÖNER E. (1968) Interrelations between various branches of continuum mechanics. *Mechanics of Generalized Continua* (ed. E. Kröner), 330-340.
- KRÖNER E. (1981) Continuum theory of defects. *Physics of defects*, (ed. R. Balian, M. Kleman, J.-P. Poiries) Nord Holland, Amstredam, 215-315.

- KUMAR A. i DAWSON P.R. (1996) Polycrystal plasticity modeling of bulk forming with finite elements over orientation space. *Comp. Mech.* **17**, 10-25.
- LARDNER R.W. (1974) *Mathematical Theory of Dislocations and Fracture*. University of Toronto Press, Toronto.
- LE K.C. i STUMPF H. (1996a) Nonlinear continuum theory of dislocations. *Int. J. Eng. Sci.* **34**, 339-358.
- LE K.C. i STUMPF H. (1996b) On the determination of the crystal reference in nonlinear theory of dislocations. *Proc. R. Soc. Lond. A* **452**, 359-371.
- MARSDEN J.E. i HUGHES T.J.R. (1983) *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- MANDEL J. (1972) Plasticite classique et viscoplasticite. *Lecture Notes Int. Centre of Mech. Sci.*, Udine, Springer-Verlag, Berlin.
- MAUGIN G. (1993) *Material Inhomogenities in Elasticity*. Applied Mechanics and Mathematical Computation 3, Chapman & Hall, London.
- MINAGAWA S. (1979) A non-Riemannian geometrical theory of imperfections in a Cosserat continuum. *Arch. Mech.* **31**, 783-792.
- MORAWIEC A. (1990) The rotation rate field and geometry of orientation spaces. *J. Appl. Cryst.* **23**, 374-377.
- MORAWIEC A., WIERZBANOWSKI K., JURA J. i BACZMANSKI A. (1991) Prediction of deformation of texture in polycrystal. *Phil. Mag.* **64**, 1251-1263.
- MURA T. (1968) Continuum theory of dislocations and plasticity. *Mechanics of Generalized Continua* (ed. E. Kröner), 269-278. Springer-Verlag, Berlin.
- MURA T. (1969) Method of continuously distributed dislocations. *Mathematical Theory of Dislocations* (ed. T. Mura), 25-48. The American Soc. Mech. Engineers, New York.
- NAGHDI P.M. i SRINIVASA A.R. (1994) Characterization of dislocations and their influence on deformations in single crystals. *Int. J. Engng. Sci.* **32**, 1157-1182.
- NOLL W. (1967) Materially uniform simple bodies with inhomogenities. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **27**, 1-32.
- NOWACKI W. (1971) *Teoria Niesymetrycznej Sprężystości*. PWN, Warszawa.
- NOWACKI W. i OLESIAK Z.S. (1991) *Termodyfuzja w Ciałach Stałych*. PWN, Warszawa.
- NYE J.F. (1953) Some geometrical relations for dislocated crystals. *Acta metall.* **1**, 153-162.
- PEACH M.O. i KOEHLER J.S. (1950) The forces exerted on dislocations and the stress fields produced by them. *Phys. Rev.* **80**, 436.

- PERZYNA P. (1988) Temperature and rate dependent theory of plasticity of crystalline solids. *Revue Phys. Appl.* **23**, 445-459.
- PIETRASZKIEWICZ W. i BADUR J. (1983) Finite rotations in the description of continuum deformation. *Int. J. Engng. Sci.* **21**, 1097-1115.
- RANIECKI B. i TANAKA K (1992) On the thermodynamic driving force for martensitic phase transitions. *Residual Stresses III, Science and Technology* (ed. H. Fujiwara, T. Abe and K. Tanaka), Vol.1 Elsevier Appl. Sci. London, N-Y, 196-201.
- RAPPAZ M. i GANDIN Ch.-A. (1993) Probabilistic modelling of microstructure formation in solidification process. *Acta metall. mater.* **2**, 345-360.
- RASZEWSKI P.K. (1958) *Geometria Riemanna i Analiza Tensorowa*. PWN, Warszawa.
- RICE J.R. (1971) Inelastic constitutive relations for solids: an internal variable theory and its application to metal plasticity. *J. Mech. Phys. Solids* **19**, 433-455.
- ROGULA D. (1977) Forces in material space. *Arch. Mech.* **29**, 705-713.
- RYCHLEWSKI J. (1996) *Tensory*. manuskrypt książki.
- RYMARZ Cz. (1989) The director nonlocality of nematic liquid crystals. *J. Techn. Phys.* **30**, 209-225.
- RYMARZ Cz. (1990) More about the relations between the Ericksen -Leslie-Parodi and Eringen-Lee theories of nematic liquid crystals. *Int. J. Engng. Sci.* **28**, 11-21.
- SCHOUTEN J.A. (1951) *Tensor Analysis for Physicists*, Clarendon Press, Oxford.
- SKALMIERSKI B. (1977) *Mechanika*. PWN, Warszawa.
- SKWARCZYŃSKI M. (1993) *Geometria Rozmaitości Riemanna*. PWN, Warszawa.
- SOKOŁOWSKI M. (1972) *O Teorii Naprężeń Momentowych w Ośrodkach ze Związanymi Obrotami*. PWN, Warszawa.
- STIGH U. (1993) A finite element study of treading dislocations. *Mech. Mater.* **14**, 179-187.
- SPENCER A.J.M. (1971) Theory of Invariants. *Continuum Physics* (ed. A.C.Eringen, vol. 1, Academic Press, New York).
- SYNGE J.L. i SCHILD A. (1949) *Tensor Calculus*. Toronto 1949, Univ.Press.
- TEODOSIU C. (1970) A dynamic theory of dislocations and its applications to the theory of the elastic plastic continuum. *Fundamental Aspects of Dislocation Theory* (ed. A. Simmonds et. al.), Nat. Bur. Stand. Spec. Publ. 317 II, 837-876.
- TEODOSIU C. (1992) Material science input to engineering models. *Modelling of Plastic Deformation and its Engineering Applications* (ed. S.I.Andersen i wsp.) Proc. 13th Riso Int. Symp. on Material Sci. 125-146, Roskilde, Denmark.

TEZDUYAR T.E. i GANJOO D.K. (1986) Petrov-Galerkin formulations with weighting functions dependent upon spatial and temporal discretizations: Applications to transient convection-diffusion problems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrn.* **59**, 49-71.

TOUPIN R.A. (1964) Theory of elasticity with couple stress. *Arch. ration. Mech. Analysis* **17**, 85.

TRUESDELL C. i TOUPIN R.A. (1960) The classical field theories. *Handbuch der Physik* (ed. S. Fluge) Vol.III/1 p.22, Springer, Berlin.

TRUESDELL C. i NOLL W. (1965) The non-linear field theories of mechanics. *Handbuch der Physik* (ed. S. Fluge) Vol.III/3.

TRZĘSOWSKI A. (1994a) Dislocations and internal length measurement in continuized crystals; I – Riemannian material space. *Int. J. Theoretical Phys.* **33**, 931–950.

TRZĘSOWSKI A. (1994b) Dislocations and internal length measurement in continuized crystals; II – Closed teleparallelizm. *Int. J. Theoretical Phys.* **33**, 951–966.

WEERTMAN J. (1967) Stress and displacement fields of an edge dislocation that climbs with the uniform velocity. *J. Appl. Phys.* **38**, 2612-2614.

WEERTMAN J. i WEERTMAN J.R. (1980) Moving dislocations. *Dislocations in Solids* (ed. F.R.N. Nabarro) vol.3, North-Holland, Amsterdam.

WOŹNIAK Cz. (1967) Thermoelasticity of bodies with microstructure. *Arch. Mech.* **19**, 335-365.

WOŹNIAK Cz. (1973) Constrained continuous media I. General theory. *Bull. de l'Acad. Polon. des Sci., Sér. des Sci. Techn.* **21**, 109-116.

ZIABICKI A. (1990) Configurational space for clusters in the theory of nucleation. *Arch. Mech.* **42**, str. 703-715.

ZIENKIEWICZ O.C. i TAYLOR R.J. (1989) *The Finite Element Method*, 4th edition; Vol.1, McGraw-Hill, London.

ZIENKIEWICZ O.C. i TAYLOR R.J. (1991) *The Finite Element Method* 4th edition; Vol.2, McGraw-Hill, London.

ZORSKI H. (1965) *Teoria Dyslokacji*, cz II: Theory of discrete defects, WPAN, Wrocław-W-wa-Kraków.

ZORSKI H. (1966) Theory of discrete defects. *Arch. Mech.* **18**, 301-372.

ZORSKI H. (1980) Force on a defect in nonlinear elastic medium. *Int. J. Engng. Sci.* **19**, 1573.

ŻÓRAWSKI (1963) General theory of imperfections of crystal lattices. *Arch. Mech* **15**, 267-274.

Dodatek A

Wyprowadzenia równań i komentarze

Równania (3.53) i (3.54) Zaczniemy od udowodnienia (3.54).

$$\bar{\kappa}_C^\Theta = Q_\alpha^\Theta \varphi^\alpha_{,L} - \Phi^\Theta_{,L} = -\frac{1}{2} e_\Lambda^{NM} e^\Theta_{MN} (Q_\alpha^\Lambda \varphi^\alpha_{,L} - \Phi^\Lambda_{,L}) \quad (A.1)$$

$$= -\frac{1}{2} e_\Lambda^{NM} e^\Theta_{MN} Q_\alpha^\Lambda \varphi^\alpha_{,L} + \frac{1}{2} e_\Lambda^{NM} e^\Theta_{MN} \Phi^\Lambda_{,L} \quad (A.2)$$

Wykorzystując izotropowość tensora alternacji, porównaj np. SPENCER (1971), RYCHLEWSKI (1996),

$$e_\Lambda^{NM} Q_\alpha^\Lambda = e_\alpha^k Q_k^N Q^{IM} \quad (A.3)$$

otrzymujemy dalej

$$\bar{\kappa}_C^\Theta = -\frac{1}{2} e^\Theta_{MN} \left[e_\alpha^k Q_k^N Q^{IM} \varphi^\alpha_{,L} - \frac{1}{2} e_\Lambda^{NM} e^\Theta_{MN} \Phi^\Lambda_{,L} \right] \quad (A.4)$$

$$= -\frac{1}{2} e^\Theta_{MN} Q^{IM} \left[e_\alpha^k Q_k^N \varphi^\alpha_{,L} - \frac{1}{2} e_\Lambda^{NR} Q_{IR} \Phi^\Lambda_{,L} \right] \quad (A.5)$$

Wykorzystując zaś (3.19) otrzymujemy

$$\bar{\kappa}_C^\Theta = -\frac{1}{2} e^\Theta_{MN} Q^{IM} Q_{I^N,L} = \mathcal{D}^\Theta_L \quad (A.6)$$

Zastępując Q tensorem $\chi = QQ_0$ możemy w analogiczny sposób dowieść (3.53).

Równania (3.58) i (3.59) W pierwszej kolejności wykażemy słuszność (3.59). Na podstawie (3.19) otrzymujemy

$$Q^k_{M,L} = -Q_{\beta}^\Lambda \varphi^\beta_{,L} (Q_\alpha^\Lambda e_\alpha^k Q^I_M) - \Phi^\Theta_{,L} e_{\Theta M}^N Q^k_N \quad (A.7)$$

$$= -\bar{\kappa}^\Lambda_L Q^k_K e_\Lambda^K M - \bar{\kappa}_0^\Theta_L e_{\Theta M}^N Q^k_N \quad (A.8)$$

$$= Q^k_K e^\Lambda_{KM} (\bar{\kappa}^\Lambda_L - \bar{\kappa}_0^\Lambda_L) = Q^k_K e^\Lambda_{KM} \bar{\kappa}_C^\Lambda \quad (A.9)$$

Wykorzystując zależność $Q_{,I} = Q_{,L} \frac{\partial X^L}{\partial x^I}$ możemy również pokazać, że

$$Q^k_{M,I} = Q^k_K e^\Lambda_{KM} \bar{\kappa}_C^\Lambda \bar{F}^{-1L}_I \quad (A.10)$$

$$= Q^k_K e^\Lambda_{KM} Q_\alpha^\Lambda \kappa_C^\alpha F^r_L \bar{F}^{-1L}_I \quad (A.11)$$

$$= Q^n_M e^k_{\alpha n} \kappa_C^\alpha F^r_L \bar{F}^{-1L}_I = -Q^n_M e^k_{\alpha n} \kappa_C^\alpha \quad (A.12)$$

Równanie (3.71) Zauważmy, że

$$\kappa_{,l} = (\varphi^{\beta}_{,m} e_{\beta} \otimes e^m)_{,l} = \frac{\partial^2 \varphi^{\beta}}{\partial x^m \partial x^l} e_{\beta} \otimes e^m + \frac{\partial \varphi^{\beta}}{\partial x^m} \frac{\partial e_{\beta}}{\partial x^l} \otimes e^m + \frac{\partial \varphi^{\beta}}{\partial x^m} e_{\beta} \otimes \frac{\partial e^m}{\partial x^l} \quad (\text{A.13})$$

stąd dla reprezentacji otrzymujemy

$$\varphi^{\alpha}_{,k,l} = e^{\alpha} \cdot \kappa_{,l} \cdot e_k \quad (\text{A.14})$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi^{\beta}}{\partial x^m \partial x^l} g_{\beta}^{\alpha} g^m_k + \frac{\partial \varphi^{\beta}}{\partial x^m} e^{\alpha} \cdot \left(\frac{\partial e_{\beta}}{\partial \varphi^{\gamma}} \frac{\partial \varphi^{\gamma}}{\partial x^l} \right) g^m_k + \frac{\partial \varphi^{\beta}}{\partial x^m} g_{\beta}^{\alpha} \frac{\partial e^m}{\partial x^l} \cdot e_k \quad (\text{A.15})$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi^{\alpha}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial \varphi^{\beta}}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi^{\gamma}}{\partial x^l} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^m} \left(\frac{\partial e^m}{\partial x^l} \cdot e_k \right) \quad (\text{A.16})$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi^{\alpha}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial \varphi^{\beta}}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi^{\gamma}}{\partial x^l} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^m} (-\Gamma_{kl}^m) \quad (\text{A.17})$$

a stąd

$$\varphi^{\alpha}_{,k,l} - \varphi^{\alpha}_{,l,k} = \frac{\partial^2 \varphi^{\alpha}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 \varphi^{\alpha}}{\partial x^l \partial x^k} \quad (\text{A.18})$$

$$+ \frac{\partial \varphi^{\beta}}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi^{\gamma}}{\partial x^l} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \frac{\partial \varphi^{\beta}}{\partial x^l} \frac{\partial \varphi^{\gamma}}{\partial x^k} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \quad (\text{A.19})$$

$$+ \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^m} (-\Gamma_{kl}^m) - \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^m} (-\Gamma_{lk}^m) \quad (\text{A.20})$$

Wykorzystując symetrię symboli koneksji na E^3 , tzn. $\Gamma_{kl}^m = \Gamma_{lk}^m$, oraz symetrię mieszanych pochodnych cząstkowych, $\frac{\partial^2 \varphi^{\alpha}}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{\partial^2 \varphi^{\alpha}}{\partial x^l \partial x^k}$, łatwo zauważyć, że

$$\varphi^{\alpha}_{,k,l} - \varphi^{\alpha}_{,l,k} = \varphi^{\beta}_{,k} \varphi^{\gamma}_{,l} (\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}) = 2\varphi^{\beta}_{,k} \varphi^{\gamma}_{,l} \frac{1}{2} (\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}) \quad (\text{A.21})$$

podstawiając następnie (2.47) otrzymujemy (3.71).

Równania (3.72) i (3.73) Zgodnie z definicją operatora curl, str. 26, możemy napisać

$$\text{curl } \kappa = \kappa_{,l} \times e^l = \frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^k} e_{\alpha} \otimes e^k \right)}{\partial x^l} \times e^l \quad (\text{A.22})$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi^{\alpha}}{\partial x^k \partial x^l} e_{\alpha} \otimes (e^k \times e^l) + \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^k} \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial x^l} \otimes (e^k \times e^l) \quad (\text{A.23})$$

$$+ \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^k} e_{\alpha} \otimes \left(\frac{\partial e^k}{\partial x^l} \times e^l \right) \quad (\text{A.24})$$

Zauważmy, że ze względu na symetrię drugiej pochodnej cząstkowej $\frac{\partial^2 \varphi^{\alpha}}{\partial x^k \partial x^l}$ i antysymetrię iloczynu wektorowego pierwszy składnik sumy po prawej stronie ostatniego równania jest równy zeru. Można również pokazać, że ostatni składnik wspomnianej sumy jest również równy zeru. W tym celu zauważmy, że różniczkując po x^l zależność $e^k \cdot e_n = \delta_n^k$ otrzymujemy

$$\frac{\partial e^k}{\partial x^l} \cdot e_n = -e^k \cdot \frac{\partial e_n}{\partial x^l} = -\Gamma_{nl}^k e^n \quad (\text{A.25})$$

co oznacza, że

$$\frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial x^l} = -\Gamma_{nl}^k \mathbf{e}^n \quad (\text{A.26})$$

Ze względu na symetrię $\Gamma_{nl}^k = \Gamma_{ln}^k$ otrzymujemy

$$\frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial x^l} \times \mathbf{e}^l = -\Gamma_{nl}^k \mathbf{e}^n \times \mathbf{e}^l = \mathbf{0} \quad (\text{A.27})$$

tak więc, z uwagi na antysymetrię iloczynu wektorowego ostatni składniki: (A.23) i ostatni składnik po prawej stronie (A.24) są równe zeru.

Dotychczas pokazaliśmy, że pierwszy i ostatni składnik po prawej stronie (A.24) są równe zeru. Stąd też, pomijając te składniki możemy napisać dalej

$$\text{curl } \boldsymbol{\kappa} = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \varphi^\beta} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^l} \right) \otimes (\mathbf{e}^k \times \mathbf{e}^l) = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^l} \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \varphi^\beta} \otimes e^{klm} \mathbf{e}_m \quad (\text{A.28})$$

$$= \kappa_\alpha^k \kappa_\beta^l e^{klm} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \varphi^\beta} \otimes \mathbf{e}_m \right) = \kappa_\alpha^k \kappa_\beta^l e^{klm} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{e}_\gamma \otimes \mathbf{e}_m \quad (\text{A.29})$$

$$= \kappa_\alpha^k \kappa_\beta^l e^{klm} \Gamma_{(\alpha\beta)}^\gamma \mathbf{e}_\gamma \otimes \mathbf{e}_m + \kappa_\alpha^k \kappa_\beta^l e^{klm} \Gamma_{<\alpha\beta>}^\gamma \mathbf{e}_\gamma \otimes \mathbf{e}_m \quad (\text{A.30})$$

$$= \mathbf{0} + \kappa_\alpha^k \kappa_\beta^l e^{klm} \Omega_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{e}_\gamma \otimes \mathbf{e}_m \quad (\text{A.31})$$

Na mocy (2.49) otrzymujemy (3.72). W analogiczny sposób dowodzimy (3.73). Warto dodać, że dowód omawianych relacji można również otrzymać bez korzystania ze współrzędnych kątowych, np. poprzez zastąpienie ich odpowiednimi tensorami obrotu Q^{φ^α} . Przykład dowodu opartego na tego typu zależnościach czytelnik może znaleźć w pracy KAFADARA i ERINGENA (1971), porównaj również wyprowadzenie 2 równania (3.74).

Równania (3.74) i (3.75) W pierwszej kolejności udowodnimy (3.75). W tym celu zauważmy, że wykorzystując (2.106) możemy zależność (3.72) zapisać w następującej postaci

$$\overline{\text{curl}}(\mathbf{Q}\bar{\boldsymbol{\kappa}})F^T \det \mathbf{F} = -\frac{1}{2}(\mathbf{Q}\bar{\boldsymbol{\kappa}}F^{-1}) \times (\mathbf{Q}\bar{\boldsymbol{\kappa}}F^{-1}) \quad (\text{A.32})$$

co w zapisie indeksowym oznacza

$$(Q_\Theta^\gamma \bar{\kappa}_K^\Theta)_{,L} e^{KLM} F_M^n \det \mathbf{F} = -\frac{1}{2} Q_\Theta^\alpha \bar{\kappa}_R^\Theta F_k^{-1R} Q_\Lambda^\beta \bar{\kappa}_S^\Lambda F_l^{-1S} e^{klm} e_{\alpha\beta}{}^\gamma \quad (\text{A.33})$$

Korzystając z tożsamościowego przekształceń:

$$F_k^{-1R} F_l^{-1S} e^{klm} = F_M^n e^{MRS} \det \mathbf{F} \quad (\text{A.34})$$

$$Q_\Theta^\alpha Q_\Lambda^\beta e_{\alpha\beta}{}^\gamma = Q_\Psi^\gamma e^\Psi_{\Theta\Lambda} \quad (\text{A.35})$$

otrzymujemy

$$(Q_\Theta^\gamma \bar{\kappa}_K^\Theta)_{,L} e^{KLM} F_M^n \det \mathbf{F} = -\frac{1}{2} Q_\Psi^\gamma e^\Psi_{\Theta\Lambda} \bar{\kappa}_R^\Theta \bar{\kappa}_S^\Lambda F^n P_e e^{PRS} \det \mathbf{F} \quad (\text{A.36})$$

a po wykorzystaniu (3.19) nasze równanie przyjmuje postać

$$Q_\Psi^\gamma e^\Psi_{\Lambda\Theta} (\bar{\kappa}_L^\Lambda - \bar{\kappa}_O^\Lambda) \bar{\kappa}_K^\Theta e^{KLM} + Q_\Psi^\gamma \bar{\kappa}_K^\Psi e^{KLM} = -\frac{1}{2} Q_\Psi^\gamma e^\Psi_{\Theta\Lambda} \bar{\kappa}_R^\Theta \bar{\kappa}_S^\Lambda e^{MRS} \quad (\text{A.37})$$

przenosząc pierwszy składnik sumy z lewej strony na prawą łatwo zauważyć, że

$$\bar{\kappa}^{\Psi}_{K,L} e^{MKL} = -\frac{1}{2} e^{\Psi}_{\Lambda\Theta} \bar{\kappa}^{\Theta}_{R} (\bar{\kappa}^{\Lambda}_{S} - 2\bar{\kappa}^{\Lambda}_{S}) e^{MRS} \quad (\text{A.38})$$

co w zapisie absolutnym oznacza

$$\boxed{\text{curl } \bar{\kappa} = \frac{1}{2} \bar{\kappa} \times (\bar{\kappa} - 2\bar{\kappa}_0)} \quad (\text{A.39})$$

Wykorzystując związek $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_0 + \bar{\kappa}_C$ otrzymujemy kolejno

$$\text{curl}(\bar{\kappa}_0 + \bar{\kappa}_C) = \frac{1}{2} (\bar{\kappa}_0 + \bar{\kappa}_C) \times (\bar{\kappa}_C - \bar{\kappa}_0) \quad (\text{A.40})$$

$$\text{curl } \bar{\kappa}_0 + \text{curl } \bar{\kappa}_C = -\frac{1}{2} \bar{\kappa}_0 \times \bar{\kappa}_0 + \frac{1}{2} \bar{\kappa}_C \times \bar{\kappa}_C \quad (\text{A.41})$$

a po podstawieniu za $\text{curl } \bar{\kappa}_0$ zależności (3.73) otrzymujemy (3.75).

Pozostało nam jeszcze dowieść (3.74). Przedstawimy tu dwie różne wersje tego dowodu.

Wyprowadzenie 1: Korzystając z (2.106) możemy ostatnio udowodnioną zależność (3.75) zapisać w postaci

$$\text{curl}(\mathbf{Q}\kappa_C)\mathbf{F}^{-T} \det \mathbf{F} = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}^T \kappa_C \mathbf{F}) \times (\mathbf{Q}^T \kappa_C \mathbf{F}) \quad (\text{A.42})$$

co w zapisie indeksowym prowadzi do zależności

$$(Q_{\alpha}^{\Theta} \kappa_C^{\alpha k})_{,l} e^{klm} \bar{F}^{-1M}_m \det \mathbf{F} = Q_{\beta}^{\Lambda} \kappa_C^{\beta}_m F^{mK} Q_{\gamma}^{\Psi} \kappa_C^{\gamma}_n F^{nL} e_{\Lambda\Psi}^{\Theta} e^{KLM} \quad (\text{A.43})$$

$$= \frac{1}{2} Q_{\alpha}^{\Theta} e^{\alpha}_{\beta\gamma} \kappa_C^{\beta}_m \kappa_C^{\gamma}_n F^{mK} F^{nL} e^{KLM} \quad (\text{A.44})$$

$$= \frac{1}{2} Q_{\alpha}^{\Theta} e^{\alpha}_{\beta\gamma} \kappa_C^{\beta}_m \kappa_C^{\gamma}_n \bar{F}^{-1M}_r e^{rnm} \det \mathbf{F} \quad (\text{A.45})$$

a stąd

$$Q_{\alpha}^{\Theta} Q_{\alpha}^{\Theta} e^{\alpha}_{\beta\gamma} \kappa_C^{\alpha k} e^{klm} + \kappa_C^{\delta}_{k,l} e^{klm} = \frac{1}{2} \kappa_C^{\beta}_r \kappa_C^{\gamma}_n e^{mrn} e^{\delta}_{\beta\gamma} \quad (\text{A.46})$$

Podstawiając za Q_{α}^{Θ} zależność (3.58) otrzymujemy

$$-Q_{\Theta}^{\delta} Q_{\alpha}^{\Theta} e^{\pi\omega}_{\alpha} \kappa_C^{\omega l} \kappa_C^{\alpha k} e^{klm} + \kappa_C^{\delta}_{k,l} e^{klm} = \frac{1}{2} \kappa_C^{\beta}_r \kappa_C^{\gamma}_n e^{mrn} e^{\delta}_{\beta\gamma} \quad (\text{A.47})$$

Łatwo już zauważyć, że po przeniesieniu pierwszego wyrażenia na lewą stronę otrzymujemy (3.74).

Wyprowadzenie 2: Zauważmy, że na podstawie związków (3.58) i (3.59) możemy zdefiniować tensory skrzywienia (ciała) κ_C i $\bar{\kappa}_C$. Można tego dokonać przenosząc wspomniane tensory na lewą stronę, w ten sposób możemy otrzymać alternatywne formy definiujące tensory κ_C i $\bar{\kappa}_C$

$$\kappa_C \stackrel{df'}{=} -\frac{1}{2} \mathbf{Q} \times \text{grad } \mathbf{Q} \quad (\text{A.48})$$

$$\bar{\kappa}_C \stackrel{df'}{=} -\frac{1}{2} \mathbf{Q} \times \overline{\text{grad}} \mathbf{Q} \quad (\text{A.49})$$

Metodę taką zastosowali KAFADAR i ERINGEN (1971), porównaj (1.3.1b) w ERINGEN i KAFADAR (1976), gdzie $\chi \equiv \mathbf{Q}$ i $\Gamma \equiv \bar{\kappa}_c$. Warunek zgodności obrotów możemy sformułować bezpośrednio jako¹ $Q_{,KL} = Q_{,LK}$ lub $Q_{,kl} = Q_{,lk}$. Stąd też z powyższych warunków powinniśmy również dostać warunki całkowalności (3.74) i (3.73). Sprawdźmy to dla warunku (3.74). Zauważmy więc, że

$$Q^k_{M,in} e^{lno} = -(\kappa_c^\alpha l e^{lno} e_\alpha^k Q^m_M)_{,n} \quad (\text{A.50})$$

$$= -\kappa_c^\alpha l_{,n} e^{lno} e_\alpha^k Q^m_M - \kappa_c^\alpha l e_\alpha^k Q^m_{M,n} e^{lno} \quad (\text{A.51})$$

$$= (\text{curl } \kappa_c)^{\alpha o} e_\alpha^k Q^m_M - \kappa_c^\alpha l e_\alpha^k \kappa_c^\beta n e_\beta^m \tau Q^r_M e^{lno} \quad (\text{A.52})$$

$$= 0 \quad (\text{A.53})$$

Mnożąc (A.52) kolejno przez Q^{iM} i $e^{\gamma_{ki}}$ otrzymujemy dalej

$$2(\text{curl } \kappa_c)^{\gamma o} = \kappa_c^\alpha l \kappa_c^\beta n e_\alpha^k e_\beta^{mi} e^{lno} e^{\gamma_{ki}} \quad (\text{A.54})$$

$$= \kappa_c^\alpha l \kappa_c^\beta n (-g_{\alpha\beta} g^{ki} + g_\alpha^i g^k_\beta) e^{lno} e^{\gamma_{ki}} \quad (\text{A.55})$$

$$= \kappa_c^i \kappa_c^k n e^{lno} e^{\gamma_{ki}} \quad (\text{A.56})$$

Równania (3.79) i (3.80) Zauważmy, że równanie (3.74) możemy zapisać w postaci

$$\text{curl}(\mathbf{Q}\bar{\kappa}_c\mathbf{Q}^T) = -\frac{1}{2}(\mathbf{Q}\bar{\kappa}_c\mathbf{Q}^T) \times (\mathbf{Q}\bar{\kappa}_c\mathbf{Q}^T) \quad (\text{A.57})$$

co w zapisie indeksowym oznacza

$$(Q^\alpha_\Theta \bar{\kappa}_c^\Theta K Q^K)_{,l} e^{kli} = -\frac{1}{2}(Q^\beta_\Lambda \bar{\kappa}_c^\Lambda M Q_m^M)(Q^\gamma_\Psi \bar{\kappa}_c^\Psi N Q_n^N) e_{\beta\gamma}{}^\alpha e^{mni} \quad (\text{A.58})$$

wykonywając różniczkowanie po l otrzymujemy

$$Q^\alpha_\Theta \bar{\kappa}_c^\Theta K Q^K e^{kli} + Q^\alpha_\Theta \bar{\kappa}_c^\Theta K_{,l} Q^K e^{kli} + Q^\alpha_\Theta \bar{\kappa}_c^\Theta K Q^K_{,l} e^{kli} \quad (\text{A.59})$$

$$= -\frac{1}{2} Q^\beta_\Lambda Q^\gamma_\Psi e_{\beta\gamma}{}^\alpha \bar{\kappa}_c^\Lambda M \bar{\kappa}_c^\Psi N Q_m^M Q_n^N e^{mni} \quad (\text{A.60})$$

ze względu na (3.58) nasze równanie możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} & (-\kappa_c^\beta l e_{\beta\gamma}{}^\alpha Q^\gamma_\Theta) \bar{\kappa}_c^\Theta K Q^K e^{kli} + Q^\alpha_\Theta \bar{\kappa}_c^\Theta K_{,l} Q^K e^{kli} \\ & + Q^\alpha_\Theta \bar{\kappa}_c^\Theta K (-\kappa_c^\gamma l e_{\gamma\delta k} Q^{\delta K}) e^{kli} = -\frac{1}{2} Q^\alpha_\Delta e_{\Lambda\Psi}{}^\Delta \bar{\kappa}_c^\Lambda M \bar{\kappa}_c^\Psi N Q^i P e_P{}^{MN} \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Mnożąc ostatnie równanie obustronnie przez $Q_\alpha{}^\Gamma$ i $Q_i{}^R$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & Q_\alpha{}^\Gamma Q^\gamma_\Theta e_{\beta\gamma}{}^\alpha \kappa_c^\beta \bar{\kappa}_c^\Theta K Q^K Q_i{}^R e^{kli} \\ & + \bar{\kappa}_c^\Gamma K_{,l} Q^K Q_i{}^R e^{kli} - \bar{\kappa}_c^\Gamma K K_{,l} e_{\gamma\delta k} Q^{\delta K} e^{kli} Q_i{}^R = -\frac{1}{2} e_{\Lambda\Psi}{}^\Delta \bar{\kappa}_c^\Lambda M \bar{\kappa}_c^\Psi N e^{RMN} \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

¹Warto tu podkreślić, że zgodnie z przyjętą przez nas definicją pochodnej kowariantnej druga pochodna kowariantna wektorów i tensorów jest zawsze symetryczna, natomiast druga pochodna kowariantna ze współrzędnych krzywoliniowych na ogół nie, porównaj (A.21) oraz tabelę 2.1.

co możemy zapisać w postaci

$$Q_{\Delta}^{\beta} e^{\Delta} \Gamma_{\Theta} \kappa_{\epsilon}^{\beta} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Theta} Q_K^K Q_l^l P e^{KPR} + \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Gamma} \Gamma_{K,l} Q_l^P e^{KPR} - \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Gamma} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Delta} \Gamma_{K} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Delta} Q_l^L Q_{\Delta}^{\gamma} Q_{\Delta}^{\delta K} Q_i^R e^{kli} \epsilon_{\gamma \delta k} = \frac{1}{2} e^{\Gamma} \Lambda_{\Psi} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Lambda} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^M \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Psi} \Psi_N e^{RMN} \quad (A.63)$$

wykonując dalsze przekształcenia otrzymujemy

$$-e^{\Delta} \Gamma_{\Theta} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Delta} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Theta} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\epsilon} e^{KPR} + \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Gamma} \Gamma_{K,l} Q_l^P e^{KPR} - \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Gamma} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Delta} \Gamma_{K} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Delta} e^{PLR} e_{\Delta}^K P = \frac{1}{2} e^{\Gamma} \Lambda_{\Psi} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Lambda} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^M \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Psi} \Psi_N e^{RMN} \quad (A.64)$$

a stąd

$$\tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Gamma} \Gamma_{K,l} Q_l^P e^{KPR} = -\frac{1}{2} e^{\Gamma} \Lambda_{\Psi} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Lambda} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^M \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Psi} \Psi_N e^{RMN} + \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Gamma} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Delta} \Gamma_{K} \tilde{\kappa}_{\epsilon}^{\Delta} (g^L_{\Delta} g^{RK} - g^{LK} g^R_{\Delta}) \quad (A.65)$$

co już bezpośrednio prowadzi do zapisu indeksowego (3.79).

Pozostało nam jeszcze dowieść (3.80). Zauważmy, że wykorzystując (3.83) możemy napisać

$$\widetilde{\text{div}} \tilde{\alpha}_{\epsilon} = \widetilde{\text{div}} (Q^T Q \text{curl } Q^T Q \det Q) = \widetilde{\text{div}} (\text{curl } Q^T Q) \quad (A.66)$$

Korzystając z (3.83) otrzymujemy dalej

$$\text{div} (\text{curl } Q^T Q Q^T \det Q^{-1}) = \text{div} \text{curl } Q^T = 0 \quad (A.67)$$

Równania (3.114) – (3.117) Zależność (3.114) została przepisana bezpośrednio za (3.94). Korzystając z ogólnej zależności

$$F_{\epsilon}^{K L, m} \tilde{F}_{\epsilon}^{-1 L} M = -F_{\epsilon}^{K L} \tilde{F}_{\epsilon}^{-1 L} M, m \quad (A.68)$$

możemy (3.114) przekształcić w następujący sposób

$$\alpha_{\epsilon}^{kl} = -Q^k_K F_{\epsilon}^{K L, m} \tilde{F}_{\epsilon}^{-1 L} M Q_n^M e^{lmn} = Q^k_K F_{\epsilon}^{K L} \tilde{F}_{\epsilon}^{-1 L} M, m Q_n^M e^{lmn} \quad (A.69)$$

ostatnie wyrażenie jest reprezentacją (3.115). Na podstawie tożsamościowego przekształcenia lewej strony (3.107) na (3.109) otrzymujemy zależność

$$\alpha_{\epsilon} = \text{grad } Q \times Q^T - \text{grad} (Q F_{\epsilon}) \times (Q F_{\epsilon})^{-1} \quad (A.70)$$

w ten sposób otrzymaliśmy (3.116). Następnie korzystając z ogólnej zależności

$$Q^k_{K, m} Q_l^K = -Q^k_K Q_l^K, m \quad (A.71)$$

i analogicznej formy dla $\text{grad} (Q F_{\epsilon}) \times (Q F_{\epsilon})^{-1}$ otrzymujemy

$$\alpha_{\epsilon}^{kl} = Q^k_{K, m} Q_n^K e^{lmn} + (Q^k_N F_{\epsilon}^N M)_{, m} (\tilde{F}_{\epsilon}^{-1 M} O Q_n^O) e^{lmn} \quad (A.72)$$

$$= -Q^k_K Q_n^K, m e^{lmn} - (Q^k_N F_{\epsilon}^N M) (\tilde{F}_{\epsilon}^{-1 M} O Q_n^O)_{, m} e^{lmn} \quad (A.73)$$

$$= Q^k_K Q_n^K, m e^{lmn} + (Q^k_N F_{\epsilon}^N M) (\tilde{F}_{\epsilon}^{-1 M} O Q_n^O)_{, m} e^{lmn} \quad (A.74)$$

pierwsza i ostatnia prawa strona w/w zależności to reprezentacje (3.116) i (3.117), odpowiednio.

Równania (3.120) – (3.125) Podstawiając (3.110) do (3.118) otrzymujemy

$$\hat{\alpha}_p = -(\mathbf{QF}_e)^{-1} \mathbf{QF}_e \text{grad } \mathbf{F}_p \dot{\times} (\mathbf{QF}_e \mathbf{F}_p)^{-1} (\mathbf{QF}_e)^{-T} \det(\mathbf{QF}_e) \quad (\text{A.75})$$

$$= -\text{grad } \mathbf{F}_p \dot{\times} (\mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{A}^{-1}) \mathbf{A}^{-T} \det \mathbf{A} \quad (\text{A.76})$$

$$= -F_p^K L_k \bar{F}_p^{-1} L_M \bar{A}_m^{-1} e^{nkm} \bar{A}_n^{-1} \det \mathbf{A} \mathbf{E}_K \otimes \mathbf{E}_N \quad (\text{A.77})$$

Wykorzystując ogólnie znaną z rachunku macierzowego zależność

$A^k p e^{PMN} = e^{kmn} \bar{A}_m^{-1} \bar{A}_n^{-1} \det \mathbf{A}$ otrzymujemy

$$\hat{\alpha}_p^{KN} = -F_p^K L_k \bar{F}_p^{-1} L_M A^k p e^{PMN} = -F_p^K L_k A^k p \bar{F}_p^{-1} L_M e^{NPM} \quad (\text{A.78})$$

ostatnie wyrażenie jest reprezentacją indeksową (3.120). Wykorzystując ogólną zależność

$F_p^K L_k \bar{F}_p^{-1} L_M = -F_p^K L_k \bar{F}_p^{-1} L_{M,k}$ otrzymujemy z kolei reprezentację (3.121)

$$\hat{\alpha}_p^{KN} = F_p^K L_k \bar{F}_p^{-1} L_{M,k} A^k p (-e^{NMP}) \quad (\text{A.79})$$

natomiast podstawiając ogólny związek $\bar{F}_p^{-1} L_M e^{NPM} = F_p^N R F_p^P S e^{LRS} \det \mathbf{F}_p^{-1}$ do (A.78) otrzymujemy dalej

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_p^{KN} &= -F_p^K L_k A^k p F_p^N R F_p^P S e^{LRS} \det \mathbf{F}_p^{-1} = \\ &= -F_p^K L_k S e^{LRS} F_p^N R \det \mathbf{F}_p^{-1} = F_p^K L_k S F_p^N R e^{LSR} \det \mathbf{F}_p^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

ostatnie wyrażenie jest reprezentacją (3.122).

W podobny sposób możemy dowieść (3.123), (3.124) i (3.125), np. wykorzystując (3.112) możemy równanie (3.118) przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_p^{KN} &= \bar{A}_k^{-1} A^k L_{L,n} \bar{A}_m^{-1} L_m e^{imn} \bar{A}_n^{-1} \det \mathbf{A} = -\bar{A}_k^{-1} A^k L_{L,n} \bar{A}_m^{-1} L_m e^{imn} \bar{A}_n^{-1} \det \mathbf{A} \\ &= -\bar{A}_k^{-1} A^k L_{L,n} e^{ink} \bar{A}_n^{-1} \det \mathbf{A} = \bar{A}_k^{-1} A^k L_{L,n} e^{ikn} \bar{A}_n^{-1} \det \mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

ostatnie wyrażenie jest zapisem indeksowym (3.123). Wykonując podobne przekształcenie jak dla (A.77) → (A.78) otrzymujemy

$$\hat{\alpha}_p^{KN} = \bar{A}_k^{-1} A^k L_{L,n} A^m M e^{NLM} = -\bar{A}_k^{-1} A^k L_{L,n} A^m M e^{NLM} \quad (\text{A.82})$$

co stanowi odpowiednio indeksową reprezentację (3.124) i (3.125).

Równania (3.126) i (3.127) Podstawiając (3.115) do (3.118) otrzymujemy

$$\hat{\alpha}_e = -\mathbf{F}_e^{-1} \left(\text{grad } \mathbf{F}_e \dot{\times} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \right) (\mathbf{QF}_e)^{-T} \det(\mathbf{QF}_e)^{-1} \quad (\text{A.83})$$

powyższą zależność możemy jeszcze przekształcić w następujący sposób

$$\hat{\alpha}_e^{KN} = -\bar{F}_e^{-1} K_L F_e^L M_m \bar{A}_m^{-1} e^{imn} \bar{A}_n^{-1} \det \mathbf{A} \quad (\text{A.84})$$

$$= -\bar{F}_e^{-1} K_L F_e^L M_m (-e^{PMN} A^m p) \quad (\text{A.85})$$

$$= \bar{F}_e^{-1} K_L F_e^L M_m A^m p e^{NMP} \quad (\text{A.86})$$

ostatnia prawa strona to reprezentacja (3.127). Korzystając z zależności

$F_e^K L_n F_e^L M = -\bar{F}_e^{-1} K_L F_e^L M_n$ i z zależności $e^{NMP} = -e^{NPM}$ otrzymujemy

$$\hat{\alpha}_e^{KN} = \bar{F}_e^{-1} K_L M_n A^m p F_e^L M e^{NPM} \quad (\text{A.87})$$

co stanowi reprezentację (3.126).

Równanie (3.132) – (3.135) Podstawiając (3.111) do (3.63) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_p &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F} \operatorname{grad} \mathbf{F}_p^{-1} \dot{\times} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \mathbf{F}^{-T} \det \mathbf{F} = \operatorname{grad} \mathbf{F}_p^{-1} \dot{\times} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \mathbf{F}^{-T} \det \mathbf{F} \\ &= \operatorname{grad} \mathbf{F}_p^{-1} \dot{\times} (\mathbf{FF}_p^{-1})^{-1} \det \mathbf{F} = \operatorname{grad} \mathbf{F}_p^{-1} \dot{\times} (\mathbf{F}_p \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{F}^{-T} \det \mathbf{F}\end{aligned}\quad (\text{A.88})$$

co w zapisie indeksowym oznacza

$$\bar{\alpha}_p^{KL} = \bar{F}_p^{-1K} M_{M,m} F_p^M N \bar{F}^{-1N} e^{kmn} \bar{F}^{-1L} \det \mathbf{F}\quad (\text{A.89})$$

Korzystając z ogólnej zależności $\bar{F}^{-1N} \bar{F}^{-1L} e^{kmn} \det \mathbf{F} = F^m p e^{LPN}$ otrzymujemy

$$\bar{\alpha}_p^{KL} = \bar{F}_p^{-1K} M_{M,m} F_p^M N F^m p e^{LPN}\quad (\text{A.90})$$

$$= \bar{F}_p^{-1K} M_{M,P} F_p^M N e^{LPN}\quad (\text{A.91})$$

$$= -\bar{F}_p^{-1K} M_{M,P} F_p^M N, P e^{LPN}\quad (\text{A.92})$$

łatwo zauważyć, że (A.91) jest reprezentacją równania (3.133) a (A.92) reprezentacją (3.132).

Podstawiając natomiast (3.115) do (3.63) otrzymujemy

$$\bar{\alpha}_e = -\mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q} \operatorname{grad} \mathbf{F}_e \dot{\times} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \mathbf{F}^{-T} \det \mathbf{F}\quad (\text{A.93})$$

$$= -(\mathbf{F}_e \mathbf{F}_p)^{-1} \operatorname{grad} \mathbf{F}_e \dot{\times} (\mathbf{FF}_p^{-1})^{-1} \mathbf{F}^{-T} \det \mathbf{F}\quad (\text{A.94})$$

$$= -(\mathbf{F}_e \mathbf{F}_p)^{-1} \operatorname{grad} \mathbf{F}_e \dot{\times} (\mathbf{F}_p \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{F}^{-T} \det \mathbf{F}\quad (\text{A.95})$$

Korzystając z tego samego przekształcenia jak przy przejściu od (A.89) do (A.91) otrzymujemy

$$\bar{\alpha}_e^{KL} = -\bar{F}_p^{-1K} R \bar{F}_e^{-1R} S F_e^S M_{M,m} F_p^M N F^m p e^{LPN}\quad (\text{A.96})$$

$$= -\bar{F}_p^{-1K} R \bar{F}_e^{-1R} S F_e^S M_{M,P} F_p^M N e^{LPN}\quad (\text{A.97})$$

$$= \bar{F}_p^{-1K} R \bar{F}_e^{-1R}, P F_e^S M_{M,P} F_p^M N e^{LPN}\quad (\text{A.98})$$

równania (A.97) i (A.98) są odpowiednio reprezentacjami (3.134) i (3.135).

Równanie (3.143) i (3.144) Łatwo zauważyć, że na podstawie (3.77), (3.78) i (3.105) otrzymujemy następującą zależność

$$\tilde{\alpha}_c = \tilde{\alpha}_e + \tilde{\alpha}_p\quad (\text{A.99})$$

$$\tilde{\kappa}_c = \tilde{\kappa}_e + \tilde{\kappa}_p\quad (\text{A.100})$$

Tak więc warunek (3.143) otrzymujemy bezpośrednio z (3.80).

Aby dowieść (3.144) skorzystajmy z tożsamości Piola przekształcając lewą stronę wspomnianego równania do postaci

$$\widehat{\operatorname{div}} \hat{\alpha}_p = \widehat{\operatorname{div}} [\hat{\alpha}_p \mathbf{A}^T \det \mathbf{A}^{-1}] \det \mathbf{A} = \operatorname{div} (\mathbf{A}^{-1} \alpha_p) \det \mathbf{A}\quad (\text{A.101})$$

$$= \operatorname{div} (\mathbf{A}^{-1} \alpha_p \mathbf{A}^{-T} \det \mathbf{A} \mathbf{A}^T \det \mathbf{A}^{-1}) \det \mathbf{A}\quad (\text{A.102})$$

gdzie $\mathbf{A} = \mathbf{QF}_e$, porównaj wyprowadzenie (3.80). Podstawiając natomiast (3.122) otrzymujemy w notacji indeksowej

$$(\operatorname{div} \hat{\alpha}_p)^K = \left(\bar{A}^{-1K} A^k M_{M,i} \bar{A}^{-1j} e^{nij} \right)_{,n} \det \mathbf{A} = \bar{A}^{-1K} A^k_{,jn} e^{nij} \det \mathbf{A} = 0\quad (\text{A.103})$$

co oznacza, że warunek (3.144) jest warunkiem koniecznym na istnienie pola tensorowego $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$.

Równania (3.152) – (3.154) Zauważmy, że

$$\frac{d}{dt} F^k_{K,i} = \frac{d}{dt} (F^k_{K,L} \bar{F}^L_m) = \dot{x}^k_{,K,L} \bar{F}^L_i - x^k_{K,L} \bar{F}^L_m \dot{x}^m_i \quad (\text{A.104})$$

w podobny sposób możemy dowieść (3.153) i (3.154).

Równanie (3.156)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial X^K} e_\alpha \otimes e^K \right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial X^K} \right) e_\alpha \otimes e^K + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial X^K} \frac{d}{dt} (e_\alpha \otimes e^K) \quad (\text{A.105})$$

$$= \frac{\partial \omega^\alpha}{\partial X^K} e_\alpha \otimes e^K + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial X^K} \dot{e}_\alpha \otimes e^K \quad (\text{A.106})$$

$$= \frac{\partial \omega^\alpha}{\partial X^K} e_\alpha \otimes e^K + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial X^K} \frac{\partial e_\alpha}{\partial \varphi^\beta} \dot{\varphi}^\beta \otimes e^K \quad (\text{A.107})$$

$$= \frac{\partial \omega^\alpha}{\partial X^K} e_\alpha \otimes e^K + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial X^K} \omega^\beta \left(\frac{\partial e_\alpha}{\partial \varphi^\beta} \cdot e^\gamma \right) e_\gamma \otimes e^K \quad (\text{A.108})$$

$$= \left(\frac{\partial \omega^\alpha}{\partial X^K} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial X^K} \omega^\beta \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \right) e_\alpha \otimes e^K \quad (\text{A.109})$$

Zgodnie z przyjętym przez nas oznaczeniem dla pochodnych kowariantnych otrzymujemy dla pochodnej współrzędnych $\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial X^K} = \varphi^\alpha_{,K}$, ale dla pochodnej kowariantnej wektora stycznego do rozmaiłości otrzymujemy $\frac{\partial \omega^\alpha}{\partial X^K} = \omega^\alpha_{,K} - \omega^\beta \Gamma_{\beta K}^\alpha \varphi^\gamma_{,K}$, porównaj np. (2.76) i (2.77), str. 24. Podstawiając zależności dla pochodnych kowariantnych otrzymujemy dalej

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial X^K} e_\alpha \otimes e^K \right) = \left(\omega^\alpha_{,K} - \omega^\beta \Gamma_{\beta K}^\alpha + \varphi^\alpha_{,K} \omega^\beta \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \right) e_\alpha \otimes e^K \quad (\text{A.110})$$

$$= \left(\omega^\alpha_{,K} - \omega^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \varphi^\gamma_{,K} + \varphi^\alpha_{,K} \omega^\beta \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \right) e_\alpha \otimes e^K \quad (\text{A.111})$$

$$= \left[\omega^\alpha_{,K} - \omega^\beta (\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha) \varphi^\gamma_{,K} \right] e_\alpha \otimes e^K \quad (\text{A.112})$$

a korzystając z zależności (2.47) i (2.49) otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial X^K} e_\alpha \otimes e^K \right) = \left[\omega^\alpha_{,K} - \omega^\beta (-e_{\beta\gamma}^\alpha) \varphi^\gamma_{,K} \right] e_\alpha \otimes e^K \quad (\text{A.113})$$

Równanie (3.160) Korzystając z (3.156) możemy napisać

$$\frac{d}{dt} \varphi^\alpha_{,k} = \frac{d}{dt} (\varphi^\alpha_{,L} X^L_{,k}) = \frac{d}{dt} (\varphi^\alpha_{,L}) X^L_{,k} + \varphi^\alpha_{,L} \frac{d}{dt} (X^L_{,k}) \quad (\text{A.114})$$

$$= \left(\omega^\alpha_{,L} + \omega^\beta e_{\beta\gamma}^\alpha \varphi^\gamma_{,L} \right) X^L_{,k} + \varphi^\alpha_{,L} (-X^L_{,i} v^i_{,k}) \quad (\text{A.115})$$

$$= \omega^\alpha_{,k} + \omega^\beta e_{\beta\gamma}^\alpha \varphi^\gamma_{,k} - \varphi^\alpha_{,i} v^i_{,k} \quad (\text{A.116})$$

Równanie (3.161)

$$\frac{d}{dt} \kappa_\alpha^k = \frac{d}{dt} \left(Q_\alpha^\Theta \Phi^\Theta_{,K} \bar{F}^K_k \right) \quad (\text{A.117})$$

$$= \frac{d}{dt} (Q_\alpha^\Theta) \Phi^\Theta_{,K} \bar{F}^K_k + Q_\alpha^\Theta \Phi^\Theta_{,K} \frac{d}{dt} \bar{F}^K_k \quad (\text{A.118})$$

$$= \omega^\alpha_\beta Q_\Theta^\beta \Phi^\Theta_{,K} \bar{F}^K_k - Q_\alpha^\Theta \Phi^\Theta_{,K} \bar{F}^K_{i,v^i,k} \quad (\text{A.119})$$

Równanie (3.164) Zauważmy, że

$$\dot{A}^n_{K,L} = [(w^n_m + d^n_m)A^m_K]_{,L} = (w^n_m + d^n_m)_{,L}A^L A^m_K + (w^n_m + d^n_m)A^m_{K,L} \quad (\text{A.120})$$

Z drugiej zaś strony

$$\frac{d}{dt}(A^n_{K,l}A^l_L) = \dot{A}^n_{K,l}A^l_L + A^n_{K,l}(w^{lm} + d^l_m)A_{mL} \quad (\text{A.121})$$

Porównując prawe strony obu równań można łatwo dowieść, że

$$\dot{A}^n_{K,l} = (w^n_m + d^n_m)A^m_{K,L} \bar{A}^{-1}L_l - A^n_{K,s}(w^s_l + d^s_l) + (w^n_{m,l} + d^n_{m,l})A^m_K \quad (\text{A.122})$$

Zauważmy z kolei, że

$$\frac{d}{dt} \left[(A^n_K \bar{A}^{-1}K_m)_{,l} \right] = \frac{d}{dt} \left[A^n_{K,l} \bar{A}^{-1}K_m + A^n_K \bar{A}^{-1}K_{m,l} \right] \quad (\text{A.123})$$

$$= \dot{A}^n_{K,l} \bar{A}^{-1}K_m + A^n_{K,l} \dot{\bar{A}}^{-1}K_m + \dot{A}^n_K \bar{A}^{-1}K_{m,l} + A^n_K \dot{\bar{A}}^{-1}K_{m,l} \quad (\text{A.124})$$

$$= (w^n_s + d^n_s)A^s_{K,l} \bar{A}^{-1}K_m - A^n_{K,s}(w^s_l + d^s_l) \bar{A}^{-1}K_m \\ + (w^n_{s,l} + d^n_{s,l})A^s_K \bar{A}^{-1}K_m - A^n_{K,l} \bar{A}^{-1}K_s(w^s_m + d^s_m) \\ + (w^n_s + d^n_s)A^s_K \bar{A}^{-1}K_{m,l} + A^n_K \dot{\bar{A}}^{-1}K_{m,l} \quad (\text{A.125})$$

$$= 0 \quad (\text{A.126})$$

Na podstawie powyższej relacji otrzymujemy

$$A^n_K \dot{\bar{A}}^{-1}K_{m,l} = A^n_{K,l}(w^r_m + d^r_m) \bar{A}^{-1}K_r + A^n_{K,s}(w^s_l + d^s_l) \bar{A}^{-1}K_m - (w^n_{m,l} + d^n_{m,l}) \quad (\text{A.127})$$

Wykorzystując otrzymaną zależność mamy

$$\dot{\alpha}_p^{nk} = \dot{A}^n_K \bar{A}^{-1}K_{m,l} e^{kml} + A^n_K \dot{\bar{A}}^{-1}K_{m,l} e^{kml} \quad (\text{A.128})$$

$$= (w^n_r + d^n_r)A^r_K \bar{A}^{-1}K_{m,l} e^{kml} + A^n_{K,r}(w^r_l + d^r_l) \bar{A}^{-1}K_m e^{kml} \\ + A^n_{K,l} \bar{A}^{-1}K_s(w^s_m + d^s_m) e^{kml} - (w^n_{m,l} + d^n_{m,l}) e^{kml} \quad (\text{A.129})$$

$$= (w^n_r + d^n_r)\alpha_p^{rk} - A^n_K(w^r_l + d^r_l) \left(\bar{A}^{-1}K_{(m,r)} + \bar{A}^{-1}K_{<m,r>} \right) e^{kml} \\ - A^n_K \left(\bar{A}^{-1}K_{(s,l)} + \bar{A}^{-1}K_{<s,l>} \right) (w^s_m + d^s_m) e^{kml} - (w^n_{m,l} + d^n_{m,l}) e^{kml} \quad (\text{A.130})$$

$$= (w^n_r + d^n_r)\alpha_p^{rk} - \frac{1}{2}\alpha_p^n e^u_{mr} e^{kml} (w^r_l + d^r_l) \\ - \frac{1}{2}\alpha_p^n w^e_{mr} e^{kml} (w^r_l + d^r_l) - (w^n_{m,l} + d^n_{m,l}) e^{kml} \quad (\text{A.131})$$

$$= (w^n_r + d^n_r)\alpha_p^{rk} - \alpha_p^n (g^{uk} g^r_l - g^{ul} g^r_k) (w^r_l + d^r_l) \\ - (w^n_{m,l} + d^n_{m,l}) e^{kml} \quad (\text{A.132})$$

$$= (w^n_r + d^n_r)\alpha_p^{rk} - \alpha_p^{nk} (w^r_r + d^r_r) + \alpha_p^{nl} (w^k_l + d^k_l) \\ - (w^n_{m,l} + d^n_{m,l}) e^{kml} \quad (\text{A.133})$$

Korzystając z tożsamości $-\text{curl}(\mathbf{w} + \mathbf{d}_e) = \text{curl} \mathbf{d}_p$ otrzymujemy (3.164).

Równanie (3.165)

Wyprowadzenie 1: Na podstawie (3.121) otrzymujemy

$$\dot{\hat{\alpha}}_p = \frac{d}{dt} (\widehat{\text{grad}} \mathbf{F}_p \times \mathbf{F}_p^{-1}) = \frac{d}{dt} ((\widehat{\text{grad}} \mathbf{F}_p \mathbf{F}_p^{-1}) \times \mathbf{F}_p^{-1}) \quad (\text{A.134})$$

Wykorzystując zależności $\dot{\hat{\mathbf{F}}}_p = \hat{\mathbf{d}}_p \mathbf{F}_p$ i $\frac{d}{dt} \mathbf{F}_p^{-1} = -\mathbf{F}_p^{-1} \hat{\mathbf{d}}_p$, gdzie $\hat{\mathbf{d}}_p$ zostało zdefiniowane zależnością (3.167), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\alpha}}_p^{AB} &= (\hat{d}_p^{AC} F_{pCK})_{,L} \hat{F}_p^{-1L} \hat{F}_p^{-1K} e^{BGJ} - F_{pK,L}^A \hat{F}_p^{-1L} \hat{d}_p^O \hat{F}_p^{-1K} e^{BGJ} \\ &\quad - F_{pK,L}^A \hat{F}_p^{-1L} \hat{F}_p^{-1K} \hat{d}_p^X e^{BGJ} \end{aligned} \quad (\text{A.135})$$

$$\begin{aligned} &= \hat{d}_p^{AG}_{,L} \hat{F}_p^{-1L} e^{BGJ} - \hat{d}_p^{AC} F_{pCK,L} \hat{F}_p^{-1L} \hat{F}_p^{-1K} e^{BGJ} \\ &\quad - F_{pK,L}^A \hat{F}_p^{-1L} \hat{F}_p^{-1K} (\hat{d}_p^J e^{BGR} + \hat{d}_p^G e^{BPJ}) \end{aligned} \quad (\text{A.136})$$

$$\begin{aligned} &= (\widehat{\text{curl}} \hat{d}_p)^{AB} + \hat{d}_p^{AC} \hat{\alpha}_p^B - \left[F_{pK,L}^A \hat{F}_p^{-1L} \hat{F}_p^{-1K} \langle \hat{d}_p^J e^{BGR} - \hat{d}_p^G e^{BPJ} \rangle \right. \\ &\quad \left. + F_{pK,L}^A \hat{F}_p^{-1L} \langle \hat{F}_p^{-1K} \hat{F}_p^G \rangle \right] (\hat{d}_p^J e^{BGR} - \hat{d}_p^G e^{BPJ}) \end{aligned} \quad (\text{A.137})$$

Łatwo zauważyć, że iloczyn $F_{pK,L}^A \hat{F}_p^{-1L} \hat{F}_p^{-1K} \langle \hat{d}_p^J e^{BGR} - \hat{d}_p^G e^{BPJ} \rangle$ wykazuje symetrię ze względu na wskaźniki J i G podczas gdy wyrażenie $(\hat{d}_p^J e^{BGR} - \hat{d}_p^G e^{BPJ})$ jest antysymetryczne ze względu na te same wskaźniki. Stąd też ich iloczyn jest równy zeru. Eliminując go oraz wykorzystując łatwy do udowodnienia związek $F_{pK,L}^A \hat{F}_p^{-1L} \langle \hat{F}_p^{-1K} \hat{F}_p^G \rangle = -\frac{1}{2} \hat{\alpha}_p^{AX} \epsilon_{XJG}$ możemy analizowane równanie przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\alpha}}_p^{AB} &= (\widehat{\text{curl}} \hat{d}_p)^{AB} + \hat{d}_p^{AC} \hat{\alpha}_p^B - \frac{1}{2} \hat{\alpha}_p^{AX} (e_{XJG} e^{BGR} \hat{d}_p^J \\ &\quad - e_{XJG} e^{BJP} \hat{d}_p^G) \end{aligned} \quad (\text{A.138})$$

$$\begin{aligned} &= (\widehat{\text{curl}} \hat{d}_p)^{AB} + \hat{d}_p^{AC} \hat{\alpha}_p^B - \frac{1}{2} \hat{\alpha}_p^{AX} [(-g_X^B g_J^R + g_X^R g_J^B) \hat{d}_p^J \\ &\quad - (g_X^B g_G^P - g_X^P g_G^B) \hat{d}_p^G] \end{aligned} \quad (\text{A.139})$$

$$\begin{aligned} &= (\widehat{\text{curl}} \hat{d}_p)^{AB} + \hat{d}_p^{AC} \hat{\alpha}_p^B - \frac{1}{2} \hat{\alpha}_p^{AX} [(-\hat{d}_p^R R g_X^B + \hat{d}_p^B X \\ &\quad - \hat{d}_p^G G g_X^B + \hat{d}_p^B X)] \end{aligned} \quad (\text{A.140})$$

$$= (\widehat{\text{curl}} \hat{d}_p)^{AB} + \hat{d}_p^{AC} \hat{\alpha}_p^B + \hat{\alpha}_p^{AX} \hat{d}_p^B X - \hat{\alpha}_p^{AB} \hat{d}_p^R R \quad (\text{A.141})$$

Wyprowadzenie 2: Już po opracowaniu wyżej przedstawionego wyprowadzenia autor pracy zauważył, że omawianą zależność można udowodnić w dużo prostszy sposób różniczkując (3.122). Ze względu na rolę jaką pełni omawiana zależność (3.165) w niniejszej pracy przytoczmy to drugie wyprowadzenie

$$\dot{\hat{\alpha}}_p = \frac{d}{dt} (\widehat{\text{curl}} \mathbf{F}_p \mathbf{F}_p^T \det \mathbf{F}_p^{-1}) \quad (\text{A.142})$$

$$= \widehat{\text{curl}} \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^T \det \mathbf{F}_p^{-1} + \widehat{\text{curl}} \mathbf{F}_p \dot{\mathbf{F}}_p^T \det \mathbf{F}_p^{-1} + \widehat{\text{curl}} \mathbf{F}_p \mathbf{F}_p^T \frac{d}{dt} (\det \mathbf{F}_p^{-1}) \quad (\text{A.143})$$

$$\begin{aligned} &= \widehat{\text{curl}} (\hat{\mathbf{d}}_p \mathbf{F}_p) \mathbf{F}_p^T \det \mathbf{F}_p^{-1} + \widehat{\text{curl}} \mathbf{F}_p \hat{\mathbf{d}}_p^T \det \mathbf{F}_p^{-1} \\ &\quad - \widehat{\text{curl}} \mathbf{F}_p \mathbf{F}_p^T \text{tr} \hat{\mathbf{d}}_p \det \mathbf{F}_p^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.144})$$

$$= \widehat{\text{curl}} (\hat{\mathbf{d}}_p \mathbf{F}_p) \mathbf{F}_p^T \det \mathbf{F}_p^{-1} + \hat{\alpha}_p \hat{\mathbf{d}}_p^T - \hat{\alpha}_p \text{tr} \hat{\mathbf{d}}_p \quad (\text{A.145})$$

Po podstawieniu

$$\overline{\text{curl}}(\hat{d}_p F_p)^{KO} = (\hat{d}_p^{KL} F_p^L)^{M,N} e_M^{NO} \quad (\text{A.146})$$

$$= \hat{d}_p^{KL} e_M^{NO} F_p^L{}^M + \hat{d}_p^{KL} e_M^{NO} F_p^L{}^M{}_{,N} \quad (\text{A.147})$$

$$= \hat{d}_p^{KL} e_M^{NO} F_p^L{}^M{}_{,N} + \hat{d}_p^{KL} e_M^{NO} F_p^L{}^M{}_{,N} \quad (\text{A.148})$$

do (A.145) otrzymujemy również (3.165).

Równanie (3.166)

$$\dot{\hat{\alpha}}_p = \frac{d}{dt} [(\mathbf{QF}_e)^{-1} \alpha_p (\mathbf{QF}_e)^{-T} \det(\mathbf{QF}_e)] \quad (\text{A.149})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \alpha_p (\mathbf{QF}_e)^{-T} \det(\mathbf{QF}_e) \\ &\quad + (\mathbf{QF}_e)^{-1} \dot{\alpha}_p (\mathbf{QF}_e)^{-T} \det(\mathbf{QF}_e) \\ &\quad + (\mathbf{QF}_e)^{-1} \alpha_p (\mathbf{QF}_e)^{-T} \frac{d}{dt} \det(\mathbf{QF}_e) \end{aligned} \quad (\text{A.150})$$

Korzystając z już udowodnionej zależności (3.164) oraz ze związków

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{QF}_e)^{-1} = -(\mathbf{QF}_e)^{-1} (\mathbf{w} + \mathbf{d}_e) \quad (\text{A.151})$$

$$\frac{d}{dt} \det(\mathbf{QF}_e) = \text{tr}(\mathbf{w} + \mathbf{d}_e) \det(\mathbf{QF}_e) \quad (\text{A.152})$$

łatwo już dowieść (3.166).

Równanie (4.46) Podstawiając (4.45) do (3.167b) otrzymujemy

$$\hat{d}_p = \mathbf{A}^{-1} (\alpha_d \times \mathbf{v}_d) \mathbf{A} \quad (\text{A.153})$$

co w zapisie indeksowym oznacza

$$\hat{d}_p^{KM} = \hat{A}^{-1K} \alpha_d^{kl} v_d^s e_{ls}^m A_m^M \quad (\text{A.154})$$

$$= \hat{A}^{-1K} \alpha_d^{kr} \hat{A}^{-1R} A_r^I v_d^s e_{ls}^m A_m^M \quad (\text{A.155})$$

$$= \frac{\hat{\alpha}_d^{KR}}{\det \mathbf{A}} A_r^I A_m^M e_{ls}^m v_d^s \quad (\text{A.156})$$

Korzystając z ogólnej zależności $A_r^I A_m^M e_{ls}^m \det \mathbf{A}^{-1} = \hat{A}^{-1N} e_{rN}^M$ otrzymujemy dalej

$$\hat{d}_p^{KM} = \hat{\alpha}_d^{KR} \hat{A}^{-1N} v_d^s e_{rN}^M = \hat{\alpha}_d^{KR} \hat{v}_d^N e_{rN}^M \quad (\text{A.157})$$

Równanie (5.14) W celu wyprowadzenia (udowodnienia) zależności (5.14) zauważmy, że zgodnie z (5.12) otrzymujemy

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\epsilon}_e} : \dot{\hat{\epsilon}}_e + \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\alpha}_p} : \dot{\hat{\alpha}}_p + \frac{\partial \psi}{\partial \hat{c}_p} \dot{\hat{c}}_p + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} \quad (\text{A.158})$$

gdzie

$$\dot{\hat{\epsilon}}_e = (\mathbf{QF}_e)^T d_e \mathbf{QF}_e \quad (\text{A.159})$$

$$\dot{\hat{\alpha}}_p = (\mathbf{QF}_e)^{-1} \text{curl } d_p (\mathbf{QF}_e)^{-T} \det (\mathbf{QF}_e) \quad (\text{A.160})$$

$$\dot{\hat{c}}_p = \text{tr } d_p \det \mathbf{F}_p = \text{tr } d_p (\hat{c}_p + 1) \quad (\text{A.161})$$

Podstawiając (A.159) i (A.160) do (A.158) możemy napisać

$$\rho \dot{\psi} = \left[\mathbf{QF}_e \rho \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\epsilon}_e} (\mathbf{QF}_e)^T \right] : d_e \quad (\text{A.162})$$

$$+ \rho \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\alpha}_p} : \left[(\mathbf{QF}_e)^{-1} \text{curl } d_p (\mathbf{QF}_e)^{-T} \right] \det (\mathbf{QF}_e) \quad (\text{A.163})$$

$$+ \rho \frac{\partial \psi}{\partial \hat{c}_p} (\hat{c}_p + 1) \text{tr } d_p + \rho \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} \quad (\text{A.164})$$

Rozpatrzmy oddzielnie składnik (A.163).

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\alpha}_p^{KL}} \bar{F}_e^i K_M Q_k^M d_p^k m_n e^{mn}_l \bar{F}_e^l L_N Q^{IN} \det (\mathbf{QF}_e) = \quad (\text{A.165})$$

$$= \left[\rho \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\alpha}_p^{KL}} \bar{F}_e^i K_M Q_k^M d_p^k m_n e^{mn}_l \bar{F}_e^l L_N Q^{IN} \det (\mathbf{QF}_e) \right]_{,n} \quad (\text{A.166})$$

$$- \left[\rho \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\alpha}_p^{KL}} \bar{F}_e^i K_M Q_k^M \bar{F}_e^l L_N Q^{IN} \det (\mathbf{QF}_e) \right]_{,n} e^{mn}_l d_p^k m \quad (\text{A.167})$$

$$= \text{div} \left([(\mathbf{QF}_e)^{-T} \rho \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\alpha}_p} (\mathbf{QF}_e)^{-1}] \dot{\times} d_p \det (\mathbf{QF}_e) \right) \quad (\text{A.168})$$

$$+ \text{curl} \left[(\mathbf{QF}_e)^{-T} \rho \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\alpha}_p} (\mathbf{QF}_e)^{-1} \det (\mathbf{QF}_e) \right] : d_p \quad (\text{A.169})$$

$$= -\text{div } \mathbf{q}_p - \sigma_\alpha : d_p \quad (\text{A.170})$$

gdzie \mathbf{q}_p i σ_α są zdefiniowane zależnościami (5.17) i (5.16). Podstawiając ostatnie wyrażenie do (A.163), a następnie (A.162)-(A.164) do (5.10) łatwo już dowieść (5.14).

Równanie (6.50) W celu dokładniejszego wyznaczenia macierzy stycznej K_T^{NL} jako pochodnej $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{n}}$ przedyskutujmy związki wynikające z różniczkowania zależności konstytutywnej dla v_d , porównaj (6.44), str. 78. W przypadku zastosowania niejawniej metody całkowania (backward Euler method) prędkość dyslokacji w chwili $n+1$ opisana jest następującą zależnością

$$v_{d_{n+1}} = \lambda_d b_d \epsilon_o \mathbf{D}(\nabla \mathbf{N} \otimes \mathbf{a}_{n+1} - \gamma_{p_n} \epsilon_o - \Delta \gamma_{p_{n+1}} \epsilon_o) \quad (\text{A.171})$$

gdzie z kolei zmiana zmiennej pozawęzłowej jest określona jako

$$\Delta \gamma_{n+1} = \rho_{d_{n+1}} b_d v_{d_{n+1}} \Delta t \quad (\text{A.172})$$

Różniczkując (A.171) po

$$\mathbf{a}_{n+1} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n+1} \\ \rho_{n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.173})$$

otrzymujemy

$$\frac{\partial v_{d_{n+1}}}{\partial u_{n+1}} = [1 - \lambda_d b_d \epsilon_o D \epsilon_o \rho_{d_{n+1}} b_d \Delta t + (\lambda_d b_d \epsilon_o D \epsilon_o \rho_{d_{n+1}} b_d \Delta t)^2 \quad (\text{A.174})$$

$$- \dots] \lambda_d b_d \epsilon_o D \nabla N \quad (\text{A.175})$$

$$\approx w_{sp} \lambda_d b_d \epsilon_o D \nabla N \quad (\text{A.176})$$

$$\frac{\partial v_{d_{n+1}}}{\partial \rho_{d_{n+1}}} = -\lambda_d b_d \epsilon_o D \epsilon_o \rho_{d_{n+1}} b_d \Delta t v_{d_{n+1}} = -(1 - w_{sp}) v_{d_{n+1}} \quad (\text{A.177})$$

gdzie

$$w_{sp} = 1 - \lambda_d b_d \epsilon_o D \epsilon_o \rho_{d_{n+1}} b_d \Delta t \quad (\text{A.178})$$

Można pokazać, że w omawianym przypadku macierz \mathbf{K}_T^{NL} przyjmuje postać

$$\mathbf{K}_T^{NL} = - \begin{bmatrix} \int_{v_{el}} \nabla^T \mathbf{W}_u D \epsilon_o b_d \rho_d w_{sp} \lambda_d b_d \epsilon_o D \nabla N dv & \int_{v_{el}} \nabla^T \mathbf{W}_u D \epsilon_o b_d w_{sp} v_d N dv \\ \int_{v_{el}} (\nabla^T \mathbf{W}_\rho \frac{b_d}{|b_d|}) \rho_d w_{sp} \lambda_d \epsilon_o D \nabla N dv & \int_{v_{el}} (\nabla^T \mathbf{W}_\rho \frac{b_d}{|b_d|}) w_{sp} v_d N dv \end{bmatrix} \quad (\text{A.179})$$

gdzie v_{el} oznacza pole elementu skończonego, a \mathbf{v}_d jest wektorem prędkości ruchu dyslokacji. Warto tu dodać, że w wyniku praktycznego stosowania macierzy (A.179) otrzymywane były te same wyniki jak przy użyciu związku (6.50), gdyż w praktyce okazało się, że współczynnik w_{sp} wahał się w granicach od 0.999 do 1.001. Stąd też, w/w współczynnik pominięto w dalszych obliczeniach numerycznych.

Dodatek B

Wykaz publikacji autora

Czasopisma:

1. P.H. Dłużewski. Crystal orientation spaces and remarks on the modelling of polycrystal anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids* **39** (1991), str. 651-661.
2. P.H. Dłużewski. On geometry and continuum thermodynamics of structural defects movement. *Mechanics of Materials* **22** (1996), str. 23-41.
3. P.H. Dłużewski. Finite deformations of polar elastic media. *Int. J. Solids Structures* **30** (1993), str. 2277-2285.
4. P.H. Dłużewski. The effect of slips on the anisotropic behaviour of polycrystalline aluminium at elevated temperature. *Textures and Microstructures* **19** (1992), str. 81-99.
5. R. Kiryk i P.H. Dłużewski. Influence of microstresses on subsequent yield surfaces of polycrystalline materials. *Int. J. Engng. Sci.* **27** (1987), str. 1589-1592.
6. P.H. Dłużewski. Finite deformations of polar media in angular coordinates. *Arch. Mech.* **43** (1991), str. 783-793.
7. P.H. Dłużewski. Slip theory and inelastic deformations; relations between the theory and the experimental results. *Arch. Mech.* **36** (1984), str. 173-183.
8. P.H. Dłużewski. Some remarks on the integration domain of the slip orientations. *Arch. Mech.* **39** (1987), Brief Notes str. 419-422.
9. P. Dłużewski i H. Antúnez. Finite element simulation of dislocation field movement. *CAMES* **2** (1995), str. 141-145.

Pozostałe publikacje recenzowane:

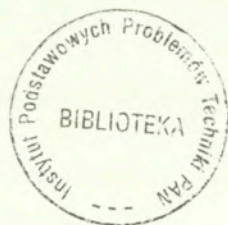
10. P. Dłużewski. Continuum theory of dislocations in angular coordinates. *Solid State Phenomena*, **35-36** (1994), str. 539-544.

¹Kolejność wg. pozycji na liście rankingowej czasopism, wg. notowań *Science Citation Index*, impact factor za 1995r.

11. P. Dłużewski. Zastosowanie teorii poślizgów do opisu deformacji niesprężystych. (Praca doktorska) Prace IPPT 37/1985.
12. P.H. Dłużewski. Application of slip theory to prediction of hardening process induced by inelastic deformations in polycrystals. *Yielding Damage and Failure of Anisotropic Solids* (ed. J.P.Boehler), Mechanical Engineering Publications Limited, (London, 1990), str. 221-233.

Publikacje nierecenzowane:

13. P. Dłużewski. On the nonsense of incompatibility conditions in continuum theory of dislocations. *Continuum Models of Discrete Systems* Proc. 8th Int. Symp., June 11-16, 1995, Varna, Bulgaria, ed. K.Z. Markov, World Scientific Publishing Company (Singapore, 1996), str. 499-506.
14. P.H. Dłużewski. Plasticity based on the movement of dislocations in hyperelastic crystals. *Macro/Micro/Meso Mechanical Properties of Materials* Proc. Int. Sem. Microstructures and Mechanical Properties of New Engineering Materials, August 3-5, 1993, Tsu, Japan, ed. M. Tokuda i wsp., Mie Academic Press (Tsu, 1993), str. 199-206.
15. P. H. Dłużewski. Finite elastic-plastic deformations of oriented media. Proc. Int. Symp. Multiaxial Plasticity, MECAMAT'92 (ed. A.Benellal i wsp., Labolatoire de Mecanique et Technologie (Cachan, 1992), str. 668-688.
16. P. Dłużewski. Conservation laws for the crystal orientation distribution. *Modelling of Plastic Deformation and Its Engineering Applications* (ed. S.I.Andersen i wsp.) , Proc. 13th Risø Int. Symp. Material Science, Risø National Laboratory (Roskilde, 1992) str. 247-252.
17. P.H. Dłużewski. Application of slip theory to prediction of subsequent yield surfaces at elevated temperature. Proc. of MECAMAT -International Seminar Inelastic Behaviour of Solids: Models and Utilization (Besancon, 1988), str. IV/281-286.



56559