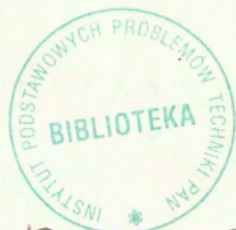


**Krzysztof Żuchowski**

**MODELOWANIE NIEPERIODYCZNYCH  
STRUKTUR BEZZDERZENIOWYCH  
W NIERÓWNOWAGOWYCH I KRYTYCZNYCH  
OBSZARACH PLAZMY**

**14/1996**

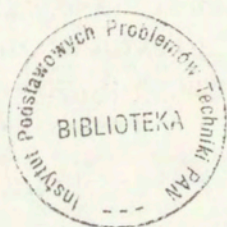


P.269

**WARSZAWA 1996**

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 27 listopada 1996 r.



56558



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 1,0 Ark. druk. 1,5  
Oddano do drukarni w grudniu 1996 r.

---

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.  
Warszawa, ul. Jasna 1

KRZYSZTOF ŻUCHOWSKI  
Ośrodek Mechaniki  
Samodzielna Pracownia  
Dynamiki Plazmy

MODELOWANIE NIEPERIODYCZNYCH STRUKTUR  
BEZZDERZENIOWYCH W NIERÓWNOWAGOWYCH I KRYTYCZNYCH  
OBSZARACH PLAZMY

Streszczenie

W pracy przedstawiono rozwój zaburzeń jonowo-akustycznych w nierównowagowej i bezzderzeniowej plazmie.

Gdy zaburzenia mają charakter długofalowy mogą one rozchodzić się w postaci fal prostych. Pochodna prędkości fazowej zaburzenia względem gęstości jonów pozwala podzielić te zaburzenia na trzy typy: zgęszczeniowe, rozrzedzeniowe i mieszane. W przypadku zaburzeń krótkofalowych możliwe są struktury stacjonarne i nieperiodyczne jak np. fale solitonowe, bezzderzeniowe fale uderzeniowe i warstwy podwójne, które także można sklasyfikować w powyższy sposób. Obszary plazmy, gdy pochodna prędkości fazowej zaburzenia względem gęstości jonów staje się równa zero noszą nazwę krytycznych. W pracy przedstawiono bezzderzeniową falę uderzeniową w przypadku występowania rozkładu prędkości elektronów zcharakteryzowanego przez dwie różne temperatury. Struktura taka może występować w pobliżu obszaru krytycznego i mieć charakter zgęszczeniowy lub rozrzedzeniowy.

## 1 Wstęp

Fale jonowo-akustyczne o małym dekreście tłumienia /o małym zaniku/ mogą rozchodzić się nie tylko w plazmie dwu-temperaturowej /elektrony i jony mają rozkład prędkości Maxwella, ale każdy składnik ma inną temperaturę  $T_e = T_i$  /, ale także w plazmie z dowolnym /nie koniecznie maxwellowym/ rozkładem względem prędkości [1], jeżeli tylko średnia energia chaotycznego ruchu elektronów znacznie przewyższa średnią energię chaotycznego ruchu jonów. Wtedy fale jonowo-akustyczne o małej amplitudzie charakteryzują się nadal związkami dyspersyjnymi: /związek pomiędzy częstotliwością a liczbą falową  $k$ /:

$$1/1 \quad \omega = v_s k (1 + \lambda_{De}^2 k^2)^{-1/2}$$

gdzie  $v_s = \lambda_{De} (4\pi e^2 Z n_{i0} / m_i)^{1/2}$  - prędkość jonowo-akustyczna i  $\lambda_{De}$  - elektronowa długość Debye'a, związana z funkcją rozkładu prędkości elektronów  $f_e(v)$  związkiem:

$$1/2/ \quad \lambda_{De} = \left| \frac{4\pi e^2}{m_e} \int \left( k \frac{\partial f_e}{\partial v} \right) \frac{d^3 v}{(k \cdot v)} \right|^{-1/2}$$

W powyższych wzorach występują jeszcze  $m_e$  - masa elektronu,  $-e$  - ładunek elektronu,  $m_i$  - masa jonu,  $n_{i0}$  - niezaburzona gęstość jonów. Na ogół plazma jest quasi-neutralna:  $n_{e0} = Z n_{i0}$ , gdzie  $n_{e0}$  - niezaburzona gęstość elektronów, zaś  $Z$  - krotność jonów.

Tak więc, charakter dyspersji fal jonowo-akustycznych o małej amplitudzie w plazmie z niemaxwellowym rozkładem prędkości cząstek niczym nie różni się od charakteru dyspersji analogicznych fal w plazmie z maxwellowym rozkładem prędkości cząstek, należy tylko jako temperaturę elektronów przyjąć wielkość:

$$1/3/ \quad T_e = m_{e0} m_e / \left| \int \left( k \frac{\partial f_e}{\partial v} \right) \frac{d^3 v}{(k \cdot v)} \right|$$

Sytuacja się zmienia w przypadku nieliniowych fal jonowo-akustycznych, zachowanie ich w sposób istotny zależy od postaci elektronowej funkcji rozkładu prędkości.

W przypadku rozchodzenia się zaburzeń jonowo-akustycznych prędkość fazowa fali jonowo-akustycznej jest duża w porównaniu ze średnią prędkością termiczną jonów, dlatego w celu opisanie ruchu jonów w takiej fali można posługiwać się równaniami hydrodynamicznymi z polem samouzgodnionym reprezentowanym przez potencjał elektrostatyczny  $\varphi$ :

$$14/ \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{r}}) \underline{u} + \frac{Ze}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{r}} = 0,$$

$$15/ \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div}(n_i \underline{u}) = 0,$$

gdzie  $n_i$  - gęstość jonów,  $\underline{u}$  - hydrodynamiczna prędkość jonów.

Potencjał elektrostatyczny  $\varphi$  jest związany z gęstością elektronów  $n_e$  i gęstością jonów  $n_i$  za pośrednictwem równania Poissona:

$$16/ \quad \Delta \varphi = 4\pi e (n_e - Z n_i).$$

Elektrony w plazmie należy opisywać przy pomocy równania kinetycznego dla funkcji rozkładu prędkości elektronów  $f_e(\underline{r}, \underline{v}, t)$ . Ponieważ prędkość fazowa zaburzenia jonowo-akustycznego jest mała w porównaniu ze średnią prędkością termiczną elektronów to w równaniu kinetycznym można zaniedbać czynnik  $\partial f_e / \partial t$  w porównaniu z czynnikiem  $\underline{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \underline{r}}$ . Jeżeli częstość zderzeń elektronowych  $\nu_e$  jest dostatecznie mała, tak że spełniona jest nierówność  $\kappa v_e \gg \nu_e$ , gdzie  $v_e = \sqrt{T_e/m_e}$  średnia prędkość termiczna elektronów, to można zaniedbać człon zderzeniowy i posługiwać się statycznym kinetycznym równaniem Własowa dla elektronów [2]:

$$17/ \quad \underline{v} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \underline{r}} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{r}} \frac{\partial f_e}{\partial \underline{v}} = 0.$$

Ponieważ zakładamy, że zaburzenie ma charakter jednowymiarowy

$\varphi = \varphi(x, t)$ , to możemy oznaczyć  $v_x = v$ ,  $v_{\perp} = (v_y, v_z)$  i ogólne rozwiązanie równania /7/ ma postać:

$$/8/ \quad f_e(v^2, v_{\perp}, x, t) = f_e\left(v^2 - \frac{2e}{m_e} \varphi(x, t); v_{\perp}\right),$$

gdzie przyjęto, że zaburzenie rozchodzi się wzdłuż osi  $x$ .

Konsekwentnie przyjmujemy oznaczenie  $\underline{u} = (u, \underline{u}_{\perp})$ , czyli  $u = u_x$ .

Całkując związek /8/ względem prędkości elektronów otrzymamy równanie stanu elektronów:

$$/9/ \quad n_e = n_e(\varphi),$$

które zastępuje wzór Boltzmana słuszny dla przypadku równowagowego. Tak więc równania /4/, /5/, /6/, /9/ tworzą zamknięty układ równań, który opisuje jednowymiarowy ruch plazmy przy dowolnym rozkładzie prędkości elektronów.

W przypadku długofalowych zaburzeń ( $\lambda_{De} k \ll 1$ ) można nie uwzględnić w plazmie powstania ładunku przestrzennego, czyli przyjąć założenie

$$/10/ \quad n_e = Z n_i = n_e(\varphi).$$

Teraz /4/, /5/, /10/ tworzą zamknięty układ równań.

## 2 Fale proste

Można teraz napisać układ równań dla fal prostych  $t_j$  takich fal, gdy wszystkie wielkości charakteryzujące plazmę mogą zostać przedstawione w postaci funkcji jednej z nich /np.  $n_i$ /.

Otrzymamy układ zwyczajnych równań różniczkowych na funkcje  $U(n_i)$ ,  $\varphi(n_i)$ , przy czym prędkość fazowa fali  $U(n_i)$  jest określona z warunku rozwiązalności tego układu.

Niech

$$/11/ \quad v_s^2 = \frac{eZ^2 n_i}{m_i} \cdot \left( \frac{\delta n_e(\varphi)}{\delta \varphi} \right)^{-1},$$

Wtedy:

$$/12/ \quad U = U \pm V_s$$

$$/13/ \quad du/dn_i = \pm V_s/m_i, \quad du_{\perp}/dn_i = 0$$

$$/14/ \quad d\varphi/dn_i = m_i v_s^2 / e Z n_i$$

$$/15/ \quad m_e = Z m_i,$$

gdzie znak w równaniach /12/, /13/, zależy czy zaburzenie rozcodzi się w dodatnim, czy ujemnym kierunku osi x.

Układ równań /12/ - /15/ łącznie z równaniem /8/ pozwala badać kierunek zmian jakim podlegają charakteryzujące plazmę wielkości /łącznie z funkcją rozkładu prędkości elektronów/ i śledzić rozwój zaburzeń o skończonej amplitudzie. Zauważmy, że w obszarach zgęszczenia wzrastają gęstości cząstek obu rodzajów, zaś w obszarach rozrzedzenia te wielkości maleją.

Zbadamy jak zmienia się w fali prostej funkcja rozkładu prędkości elektronów. Zauważmy, że  $df_e/dn_i > 0$  i posługując się wzorem /8/ można wykazać, że przy wartościach prędkości dla których

$v \partial f_e / \partial v < 0$  liczba elektronów z prędkościami w przedziale  $(v, v+dv)$  w fali zgęszczenia zwiększa się, zaś w fali rozrzedzenia zmniejsza się. Odwrotnie, przy wartościach prędkości  $v$  dla której zachodzi  $v \partial f_e / \partial v > 0$  liczba elektronów z prędkościami w przedziale  $(v, v+dv)$  zwiększa się w fali rozrzedzenia i zmniejsza się w fali zgęszczenia.

W celu wyznaczenia, jak zmieni się prędkość fazowa jonowo-akustycznej fali trzeba wyznaczyć pochodną  $dU/dn_i$ .

Wykorzystując układ /12/ - /15/, gdzie wybieramy znak + otrzymamy:

$$/16/ \quad dU/dn_i = \frac{V_s}{m_i} \left( 3 - n_e \frac{\partial n_e}{\partial \varphi^2} \cdot \left( \frac{\partial n_e}{\partial \varphi} \right)^{-2} \right).$$

W zależności od postaci elektronowej funkcji rozkładu wielkości  $dU/dn_i$  może być dodatnia, ujemna, równa zero lub o zmiennym znaku.

Jeżeli  $dU/dn_i > 0$ , to w obszarach zgęszczenia powstają nieciągłości. Taka możliwość realizuje się np przy rozkładzie prędkości cząstek w postaci makswellianu lub przy rozkładzie skokowym:

$$/17/ \quad f_e(v) = \begin{cases} 0 & v > v_0(n_i) \\ \text{const} & v < v_0(n_i) \end{cases}$$

Jeżeli  $dU/dn_i = 0$ , to przy rozchodzeniu się fali wszystkie jej części poruszają się z tą samą prędkością i nieciągłości nie powstają. W tym przypadku mamy zależność

$$/18/ \quad v_s n_i = \text{const} \quad \psi n_i^2 = \text{const}$$

Jeżeli  $dU/dn_i < 0$  /przypadek anomalny/, obszary o większej gęstości poruszają się z mniejszą prędkością. Nieciągłości powstają tu w obszarach rozrzedzenia. Przypadek ten realizuje się, jeżeli funkcja rozkładu prędkości elektronów ma postać:

$$/19/ \quad f_e(v) = \text{const} \cdot \left\{ v^2 + v_0^2(n_i) \right\}^{-\beta},$$

gdzie  $3/2 < \beta < 2$

### 3 Struktury stacjonarne

Przy rozchodzeniu się w plazmie długofalowych jonowo-akustycznych drgań o liniowym związku dyspersyjnym profil fali zmienia się z czasem, za wyjątkiem przypadku opisanego wzorem /19/, gdy fala jonowo-akustyczna rozchodzi się bez zmiany formy, przy  $\beta = 2$ .

Na odcinkach fali o rozmiarach charakterystycznych rzędu długości Debye'a istotna jest dyspersja jonowego dźwięku wskutek której możliwym staje się istnienie fal o stacjonarnym profilu, jak i zaburzeń nieperiodycznych takich jak fale solitonowe, i bezzderzeniowe fale uderzeniowe. W tym przypadku nie można zaniedbać rozdzielenia ładunków w plazmie. Ponieważ zajmujemy się teraz nieperiodycznymi strukturami stacjonarnymi, więc przejdziemy do układu  $x' = x - Ut$ ,



w którym taka struktura jest nieruchoma. W tym nowym układzie nie wystąpią w równaniach /4/ i /5/ pochodne cząstkowe względem czasu i zamiast tych równań napiszemy uzyskane za ich pomocą związki:

$$/20/ \quad 1/2 m_i U^2 + Ze\varphi = 1/2 m_i U_0^2$$

$$/21/ \quad v n_i = U_0 n_{i0}$$

Ponieważ struktury nieperiodyczne graniczą ze stanem niezaburzonym, więc w tym przypadku  $\varphi = 0$ ,  $U_0$  i  $n_{i0}$  dotyczą stanu niezaburzonego. Zakładamy także quasi-neutralność w stanie niezaburzonym:  $\sum n_{i0} = n_{e0}$ . Mamy jeszcze do dyspozycji równanie Poissona /6/ i równanie stanu /9/ powstałe z całkowania równania /8/ względem prędkości.

Ekstremalne wartości potencjału w naszej nieperiodycznej strukturze stacjonarnej znajdziemy z warunku:

$$/22/ \quad \int_0^{\varphi_{ex}} \{n_e(\varphi) - Z n_i(\varphi)\} d\varphi = 0,$$

który możemy przepisać w postaci:

$$/23/ \quad \int_0^{\varphi_{ex}} \left\{ n_e(\varphi) - n_{e0} \left( 1 - 2Ze\varphi / m_i U^2 \right)^{-1/2} \right\} d\varphi = 0,$$

przy uwzględnieniu /20/, /21/ oraz  $U_0 = -U$

Przy makswellovskim rozkładzie prędkości cząstek  $\varphi_{ex} > 0$ . Wtedy razem z potencjałem elektrycznym wzrastają gęstości jonów i elektronów /fala solitonowa zgęszczenia/. Możliwe są jednak takie funkcje rozkładów prędkości elektronów, przy których równanie /23/ ma rozwiązanie dla ujemnych  $\varphi_{ex}$ . W tym przypadku gęstości jonów i elektronów w fali solitonowej maleją /solitonowa fala rozrzedzenia/. Taki przypadek realizuje się w szczególności dla rozkładu, który ma postać /19/.

Fala solitonowa rozrzedzenia powstaje przy funkcjach rozkładu prędkości, które prowadzą do wzrostu gradientów na odcinkach rozrzedzenia /anomalny przypadek/.

Zauważmy, że wyrażenie podcałkowe w /23/ przyjmuje wartość równą zero dla  $\varphi = 0$  i przy  $\varphi = \varphi_1$ , gdzie  $\varphi_1$  leży w przedziale  $(0, \varphi_{ex})$ . Dlatego wielkość A:

$$/24/ \quad A = \frac{d}{d\varphi} \left\{ n_e^{-2}(\varphi) - n_{e0}^{-2} \left( 1 - \frac{2Ze\varphi}{m_i U^2} \right) \right\}$$

przyjmuje wartość równą zero przy pewnej wartości  $\varphi = \varphi_2$ , która leży w przedziale  $(0, \varphi_1)$ . Uwzględniając, że na mocy warunku

$U > v_{s0}$  / $v_{s0}$  - jest prędkością jonowo-akustyczną dla stanu niezaburzonego/ wielkość A jest przy  $\varphi = 0$  ujemna można napisać:

$$/25/ \quad (\operatorname{sgn} \varphi_{ex}) \frac{d^2}{d\varphi^2} (n_e(\varphi))^{-2} > 0.$$

Przy pomocy nierówności /25/ można wykazać, że wyrażenie /16/ /pochodna prędkości fazowej fali jonowo-akustycznej względem gęstości jonowej/ ma taki sam znak jak i  $\varphi_{ex}$ .

Stąd wynika, że w anomalnym przypadku amplituda zaburzenia jest ujemna.

#### 4 Fale solitonowe i bezderzeniowe fale uderzeniowe w nierównowagowej plazmie.

W celu otrzymania zależności opisujących fale solitonowe w nierównowagowej plazmie wykorzystamy zależności /20/ i /21/. Opisują one zachowanie gęstości jonów  $n_1(\varphi)$  w tej fali. Gęstość elektronów opisana jest przez równanie stanu, które należy zadać. Z równania Poissona /6/ otrzymamy w jednowymiarowym przypadku:

$$/26/ \quad E = 8\pi e \int_0^{\varphi} \left\{ n_e(\varphi) - Z n_1(\varphi) \right\} d\varphi,$$

gdzie pole elektryczne  $E$  związane jest z potencjałem  $\varphi(x)$  za pomocą wzoru:

$$/27/ \quad E = -\partial\varphi/\partial x.$$

Uwzględniając wzór na gęstość jonów  $n_i(\varphi)$  przepisujemy /26/ w postaci:

$$/28/ \quad E^2 = 8\pi m_{e0} T_e \left\{ \left( \frac{n_e(\varphi)}{n_{e0}} - 1 \right) + \frac{m_i v_0^2}{Z T_e} \left( \sqrt{1 - \frac{2Ze\varphi}{m_i v_0^2}} - 1 \right) \right\}$$

Zajmiemy się przypadkiem analogicznym, gdy występująca we wzorze /22/ ekstremalna wartość potencjału  $\varphi(x)$  okazuje się ujemna  $\varphi_{ex} = \varphi_{min}$ . Tak więc, wspomniana fala solitonowa jest rozrzedzeniowa. Za pomocą wzoru /27/ można otrzymać równanie, które wiąże potencjał  $\varphi(x)$  ze zmienną przestrzenną i czasem:

$$/29/ \quad x - Ut = \pm \int \frac{d\varphi}{\sqrt{E^2(\varphi)}},$$

oraz związek pomiędzy  $\varphi_{min}$  i  $u_0$  przez położenie  $E = 0$  w /28/ :

$$/30/ \quad \frac{n_e(\varphi_{min})}{n_{e0}} - 1 + \frac{m_i v_0^2}{Z T_e} \left[ \left( 1 - \frac{2Ze\varphi_{min}}{m_i v_0^2} \right)^{1/2} - 1 \right] = 0.$$

Fala solitonowa, w tym przypadku rozrzedzeniowa, graniczy po obu stronach  $|x - Ut| \rightarrow \infty$  z plazmą niezaburzoną, quasineutralną o gęstościach  $n_{i0}$  jonową oraz  $n_{e0}$  elektronową, gdzie  $n_{e0} = Z n_{i0}$ . Wzór /28/ będzie reprezentował soliton jeżeli gęstość elektronowa spełnia zależność:

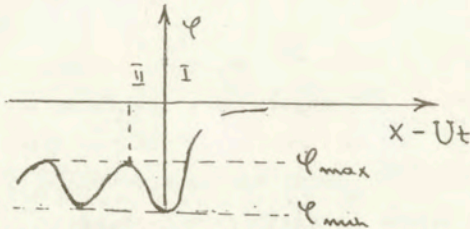
$$/31/ \quad n_e(\varphi)/n_{e0} \rightarrow 1, \quad \text{gdy} \quad |x - Ut| \rightarrow \infty.$$

Jeżeli z jakiejś przyczyny zostanie naruszona symetria rozkładu przestrzennego wielkości fizycznych w tej plazmie z poruszającą się falą solitonową, to powstanie fala, której przedni front ma tę samą postać co front fali solitonowej, lecz poza grzbietem fali zaburzenie nie znika wykładniczo, lecz oscyluje. Powstaje więc nowa struktura, którą jest niemonotoniczna bezzderzeniowa

fala uderzeniowa [3].

W przypadku fali solitonowej rozrzedzeniowej tym zaburzeniem symetrii może być odbicie elektronów od wytworzonej przez falę bariery potencjału.

Profil niemonotonicznej bezzderzeniowej fali uderzeniowej powstałej z rozrzedzeniowej fali solitonowej został przedstawiony na Rys. 1



Rys. 1 Profil potencjału elektrostatycznego  $\varphi$  w niemonotonicznej bezzderzeniowej fali uderzeniowej typu rozrzedzeniowego.

Profil potencjału elektrostatycznego na przednim froncie niemonotonicznej bezzderzeniowej fali uderzeniowej jest opisany wzorami /26/ - /29/ oraz wzorem /30/ z  $u_0 = -U$  i  $n_{e0} = Zn_{i0}$ .

Natomiast w obszarze II równanie /26/ powinno zostać zamienione przez związek:

$$/32/ \quad E = 8\pi e \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi} [n_e^+(\varphi) - Zn_i(\varphi)] d\varphi,$$

gdzie  $n_e^+ = n_e - n_{er}$ ,  $n_{er}$  - gęstość odbitych elektronów.

Teraz można otrzymać maksymalną wartość potencjału w obszarze oscylacji:

$$/33/ \quad \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} [n_e^+(\varphi) - Zn_i(\varphi)] d\varphi = 0.$$

Oczywiście zarówno fala solitonowa rozrzedzeniowa jak i niemonotoniczna bezzderzeniowa fala uderzeniowa poruszają się w plazmie z prędkością naddźwiękową  $U > v_{so}$ , gdzie  $v_{so}$  prędkość dźwięku w obszarze niezaburzonym. Jednak ta fala w stosunku do plazmy poza grzbietem fali porusza się z prędkością mniejszą od prędkości

dźwięku ( $U < V_s$ ). Prawa strona równania /32/ jest dodatnia i staje się równa zero w punktach  $\varphi = \varphi_{\min}$  i  $\varphi = \varphi_r$  z tego powodu powinna mieć ujemną drugą pochodną. Ta pochodna jest równa:

$$/34/ \quad 8\pi \frac{d n_e}{d \varphi} (1 - V_s^2 / U^2) < 0$$

lecz  $d n_e / d \varphi > 0$ , więc  $V_s > U$ .

### 5 Fale solitonowe i bezzderzeniowe fale uderzeniowe w dwu-temperaturowej plazmie

Teraz będziemy rozważać konkretne równanie stanu /9/  $n_e = n_e(\varphi)$  dla elektronów. Założymy, że nierównowagowa plazma w stanie niezaburzonym zawiera dwie grupy elektronów o różnych temperaturach:

$$/35/ \quad f_e(v) = \nu_n(n_i) \exp(-m_e v^2 / 2T_n) + \nu_c(n_i) \exp(-m_e v^2 / 2T_c),$$

gdzie  $T_n \gg T_c$ .

Przypadek ten dopuszcza różne znaki /16/ pochodnej prędkości fazowej fali prostej względem gęstości jonów [1] w zależności od wartości potencjału elektrostatycznego. Tak więc w tym przypadku mogą istnieć zarówno solitony zgęszczeniowe jak i solitony rozrzedzeniowe /przypadek krytyczny/

Założenie dwu-temperaturowego rozkładu Maxwella /35/ w obszarze niezaburzonym prowadzi za pośrednictwem statycznego równania własowa /7/ do wzoru na gęstość elektronów  $n_e(\varphi)$  w dwu-temperaturowej plazmie [4]. W celu uproszczenia zapisu przejdziemy do jednostek bezwymiarowych:  $n_i$  - gęstość jonów,  $n_e$  - gęstość elektronów są unormowane do gęstości równowagowej  $n_0 = n_{e0} = n_{i0}$ , zakładamy  $Z=1$ . Teraz można zdefiniować temperaturę efektywną  $T_f$ :

$$/36/ \quad T_f = T_n \left[ n_{oh} + (1 - n_{oh}) T_n / T_c \right]^{-1},$$

gdzie  $n_{oh}$  jest koncentracją niezaburzonych gorących elektronów.

Po wprowadzeniu temperatury efektywnej można dokonać dalszego

unormowania: prędkość jonów jest unormowana do prędkości jonowo-akustycznej  $c_s = (T_f/m_i)^{1/2}$ , potencjał elektrostatyczny  $\varphi$  jest unormowany do  $T_f/e$ , zaś współrzędna i czas są unormowane odpowiednio do  $c_s/\omega_{pi}$  oraz  $\omega_{pi}^{-1}$ , gdzie  $\omega_{pi}^2 = 4\pi n_0 e^2/m_i$ .

Wzór na gęstość elektronów w dwu-temperaturowej plazmie ma postać [4]:

$$/37/ \quad n_e(\varphi) = n_{on} \exp(\varphi T_f/T_h) + (1 - n_{on}) \exp(\varphi T_f/T_c).$$

Zastosujemy ustalone unormowania dla układu równań /4/, /5/, /6/ w przypadku jednowymiarowym, gdy  $Z=1$ , i przejdziemy następnie do układu poruszającego się razem z falą:  $\xi = x - Mt$ , gdzie  $M = U/c_s$ . Wtedy z równań /4/, /5/ można otrzymać:

$$/38/ \quad n = M(M^2 - 2\varphi)^{1/2},$$

jeżeli założy się, że plazma jest niezaburzona gdy  $|\xi| \rightarrow \infty$  i można przyjąć odpowiednie warunki brzegowe  $n = 1$ ,  $U=0$ ,  $\varphi=0$ ,  $\partial\varphi/\partial\xi=0$ .

Jeżeli podstawimy /37/ i /38/ do równania Poissona, wtedy mnożąc obie strony przez  $d\varphi/d\xi$  i całkując otrzymamy:

$$/39/ \quad \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 + V(\varphi, M) = 0,$$

gdzie potencjał Sagdiejewa  $V(\varphi, M)$  [4] ma postać:

$$/40/ \quad V(\varphi, M) = M^2 - M(M^2 - 2\varphi)^{1/2} + [(1 - n_{on})T_c/T_f][1 - \exp(\varphi T_f/T_c)] + (n_{on}T_h/T_f)[1 - \exp(\varphi T_f/T_h)].$$

Znowu zastosowano warunki brzegowe, gdy  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

Zarówno dla solitonów jak i monotonicznych bezzderzeniowych fal uderzeniowych /ewentualnie warstw podwójnych/  $V(\varphi, M)$  musi być ujemne pomiędzy dwoma punktami np.  $\varphi = 0$  i  $\varphi = \varphi_m$ .

Soliton pojawi się, gdy będą spełnione warunki:

$$/41/ \quad d\varphi/d\xi = 0, \quad V=0 \quad \text{i} \quad dV/d\varphi = 0 \quad \text{przy} \quad \varphi=0.$$

Amplituda solitonu będzie równa zeru przy  $|\xi| \rightarrow \infty$ , gdy:

$$/42/ \quad d^2V/d\varphi^2 < 0 \quad |_{\varphi=0}.$$

Monotoniczna bezzderzeniowa fala uderzeniowa lub warstwa podwójna mogą się uformować, gdy spełnione będą warunki:

$$/43/ \quad d\varphi/d\xi = V = 0 \quad \text{przy} \quad \varphi = 0 \quad \text{oraz} \quad \varphi = \varphi_m$$

Ponadto wymagane jest

$$/44/ \quad d^2V/d\varphi^2|_{\varphi=0} < 0 \quad \text{oraz} \quad d^2V/d\varphi^2|_{\varphi=\varphi_m} < 0$$

oraz

$$/45/ \quad dV/d\varphi|_{\varphi=0} = 0 \quad \text{i} \quad dV/d\varphi|_{\varphi=\varphi_m} = 0.$$

Drugi z warunków /45/ prowadzi do:

$$/46/ \quad (M^2 - 2\varphi_m)^{1/2} - M \left[ (1 - n_{ho}) \exp((T_p/T_c)\varphi_m) + n_{ho} \exp((T_p/T_h)\varphi_m) \right]^{-1} = 0.$$

Natomiast warunek /43/  $V(\varphi_m, M) = 0$  daje:

$$/47/ \quad M^2 - M(M^2 - 2\varphi_m)^{1/2} + ((1 - n_{ho})T_c/T_p) [1 - \exp((T_p/T_c)\varphi_m)] + (n_{ho}T_h/T_p) [1 - \exp((T_p/T_h)\varphi_m)] = 0.$$

Pierwsza z nierówności /44/ daje warunek, że bezzderzeniowa fala uderzeniowa jest naddźwiękowa:  $M > 1$ .

Druga z nierówności /44/ daje warunek:

$$/48/ \quad M^2 > \frac{[(1 - n_{ho}) \exp(\varphi_m T_p/T_c) + n_{ho} \exp(\varphi_m T_p/T_h)]^3}{[(1 - n_{ho})(T_p/T_c) \exp(\varphi_m T_p/T_c) + n_{ho}(T_p/T_h) \exp(\varphi_m T_p/T_h)]}$$

Równania /46/ i /47/ dają relacje pomiędzy  $M$  i  $\varphi_m$ . Nierówność /48/ daje możliwość porównania dolnej granicy  $M$  przy różnych relacjach pomiędzy  $\varphi_m$ ,  $T_e$ ,  $T_n$  i  $n_{ho}$ .

Równanie Poissona /6/, przy uwzględnieniu /37/ oraz uprzednie wprowadzonego unormowania można dla małych  $\varphi$ , przy rozpatrywaniu przypadku jednowymiarowego, zapisać w postaci:

$$/49/ \quad \int_x^2 \varphi = 1 + \varphi + \frac{1}{2} \Delta \varphi^2 + \frac{1}{6} \delta \varphi^3 - \eta,$$

gdzie :

$$/50/ \quad \Delta = (1 - \eta_{ho})(T_f/T_c)^2 + \eta_{ho}(T_f/T_h)^2$$

i

$$/51/ \quad \delta = (1 - \eta_{ho})(T_f/T_c)^3 + \eta_{ho}(T_f/T_h)^3.$$

Można wprowadzić skalowanie [4] zmiennych niezależnych i rozwinięcie zmiennych zależnych przy pomocy małego parametru  $\xi$  :

$$/52/ \quad \xi = \xi(x - Ut), \quad \tau = \xi^3 t,$$

$$/53/ \quad \eta = 1 + \xi \eta_1 + \xi^2 \eta_2 + \xi^3 \eta_3 + \dots$$

$$/54/ \quad U = \xi U_1 + \xi^2 U_2 + \xi^3 U_3 + \dots$$

$$/55/ \quad \varphi = \xi \varphi_1 + \xi^2 \varphi_2 + \xi^3 \varphi_3 + \dots$$

Rozwinięcia te podstawimy do równania /49/ oraz do równań /4/ i /5/ przy  $Z = 1$ , dla przypadku jednowymiarowego, przy wykorzystaniu wyżej wprowadzonego unormowania.

W najniższym rzędzie względem  $\xi$  otrzymamy  $U = 1$  oraz

$$/56/ \quad \eta_1 = U_1 = \varphi_1$$

W następnym rzędzie względem  $\xi$  z równań /5/ i /4/ można otrzymać:

$$/57/ \quad \eta_2 = U_2 + \eta_1 U_1$$

oraz

$$/58/ \quad U_2 - \frac{1}{2} U_1^2 = \varphi_2$$

zaś z równania /49/

$$/59/ \quad \eta_2 = \varphi_2 + \frac{1}{2} \Delta \varphi_1^2.$$

Ze związków /57/ - /59/ można otrzymać, przy użyciu /56/:

$$/60/ \quad \frac{1}{2} (\Delta - 3) \varphi_1^2 = 0.$$



Ponieważ  $\varphi_1^2 \neq 0$ , więc z tego wynika, że  $(\Delta - 3)/2 = 0(\varepsilon)$ .

Uwzględnienie tego czynnika wymaga rozwinięcia wyższego rzędu dla równań /4/ i /5/, które daje :

$$/61/ \quad \partial_{\xi}(\varphi_3 - \eta_3) + \partial_{\tau}(\eta_1 + u_1) + \partial_{\xi}(u_1 u_2) + \partial_{\xi}(\eta_1 u_2 + \eta_2 u_1) = 0$$

oraz dla równania /49/:

$$/62/ \quad \partial_{\xi}^2 \varphi_1 = -\eta_3 + \varphi_3 + \Delta \varphi_1 \varphi_2 + \frac{1}{6} \delta \varphi_1^3 + \frac{1}{2} (\Delta - 3) \varphi_1^2.$$

Przy pomocy /61/ i /62/ uwzględniając /57/ i /58/ można otrzymać równanie:

$$/63/ \quad 2 \partial_{\tau} \varphi_1 + [(3 - \Delta)/2] \partial_{\xi} \varphi_1^2 + [(15 - \delta)/6] \partial_{\xi} \varphi_1^3 + \partial_{\xi}^3 \varphi_1^3 = 0.$$

Równanie takie uzyskano w [4], z dokładnością do członu uwzględniającego tłumienie Landaua.

W stacjonarnym układzie współrzędnych

$$/64/ \quad \eta = \xi - M' \tau$$

równanie /63/ można przekształcić do:

$$/65/ \quad \frac{1}{2} (\partial_{\xi} \eta \varphi_1) + V(\varphi_1, M') = 0,$$

gdzie

$$/66/ \quad V(\varphi_1, M') = -M' \varphi_1^2 + \frac{1}{6} (3 - \Delta) \varphi_1^3 + \frac{1}{24} (15 - \delta) \varphi_1^4.$$

Warunek konieczny istnienia monotonicznej bezzderzeniowej fali uderzeniowej /ewentualnie warstwy podwójnej/ /43/ daje:

$$/67/ \quad M' = \frac{1}{6} (3 - \Delta) \varphi_m + \frac{1}{24} (15 - \delta) \varphi_m^2,$$

zaś drugi z warunków /45/:

$$/68/ \quad 2 M' = \frac{1}{2} (3 - \Delta) \varphi_m + \frac{1}{6} (15 - \delta) \varphi_m^2$$

Przekształcając /67/ i /68/ można otrzymać:

$$/69/ \quad \varphi_m = 2(3 - \Delta) / (\delta - 15)$$

i

$$/70/ \quad M' = (\delta - 15) \varphi_m^2 / 24.$$

Podstawiając  $(3 - \Delta)$  z równania /68/ do /65/ uzyskuje się wyrażenie:

$$/71/ \quad V(\varphi_1) = \frac{1}{24} (15 - \delta) \varphi_1^2 (\varphi_1 - \varphi_m)^2.$$

Założenie profilu potencjału elektrostatycznego o kształcie typowym dla monotonicznej bezzderzeniowej fali uderzeniowej /ewentualnie warstwy podwójnej/:

$$/72/ \quad \varphi_1(\eta) = \frac{1}{2} \varphi_m [1 - \tanh(\alpha \eta)]$$

daje możliwość, przy pomocy /65/ i /70/, wyznaczyć charakteryzującą go wielkość :

$$/73/ \quad \alpha^2 = \frac{1}{48} (\delta - 15) \varphi_m^2.$$

Ponieważ  $\alpha$  musi być rzeczywiste, więc  $\delta > 15$ , wtedy także  $M' > 0$ . Jednak wzór /72/ powstał w wyniku dwu transformacji /52/ i /64/ zmiennych niezależnych, przy uwzględnieniu czego można napisać:

$$/74/ \quad M = 1 + M'.$$

Tak więc struktura opisana wzorem /72/ ma charakter naddźwiękowy, gdy  $\delta > 15$ .

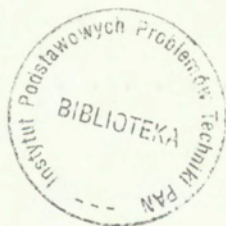
Natomiast warunek  $3 - \Delta > 0$ , przy założeniu  $\delta > 15$  prowadzi do  $\varphi_m > 0$ , co odpowiada warstwie podwójnej zgęszczeniowej, zaś  $3 - \Delta < 0$  odpowiada warstwie podwójnej rozrzedzeniowej i prowadzi do ujemnej amplitudy  $\varphi_m < 0$ .

Obszar plazmy, który odpowiada  $3 - \Delta = 0$  jest obszarem krytycznym, gdzie zmieniają się silnie własności plazmy. Uwzględnienie tego wymagało rozwinięć wyższego rzędu w małym parametrze. W poprzedniej części pracy obszar krytyczny był zcharakteryzowany poprzez zerowanie się pochodnej prędkości fazowej fali względem gęstości jonów /16/. Obszar krytyczny plazmy oddziela miejsca, gdzie

powyższa pochodna jest dodatnia i występują struktury rozrzedzeniowe jak np. soliton rozrzedzeniowy o ujemnej amplitudzie, od miejsc gdzie jest ona ujemna i występują tam struktury zgęszczeniowe.

## LITERATURA

- [1] I. A. ACHIEZIER, A. E. BOROWIK, Żur. Eksp. Teoret. Fiz. 51, 1227 /1966/
- [2] N. A. KRALL, A. W. TRIVELPIECE, Fizyka plazmy, PWN, 1979.
- [3] R. Z. SAGDIEJEV, in Review of Plasma Physics, vol 4 ed. M. Leontovich Consultants Bureau, New York, 1966.
- [4] M. TAJIRI, K. NISHIHARA, J. Phys. Soc. Jpn. 54, 572 /1985/.



56558