6.1.1. – teoria kinetyczna i statyczna

PRACA HABILITACYJNA

Tadeusz Płatkowski

TEORIA KINETYCZNA GAZÓW Z DYSKRETNYM ROZKŁADEM PRĘDKOŚCI: MODELOWANIE, ROZWIĄZANIA ZAGADNIEŃ GRANICZNYCH

3/1993

WARSZAWA 1993

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 31 grudnia 1992 r.

P r a c a   h a b i l i t a c y j n a

recenzent - Prof.dr Henryk Zorski

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd.3,35 Ark.druk. 4,25
Oddano do drukarni w styczniu 1993 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp z o.o.
Warszawa, ul.Jasna 1

Tadeusz Płatkowski
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

TEORIA KINETYCZNA GAZÓW Z DYSKRETNYM ROZKŁADEM PRĘDKOŚCI: MODELOWANIE, ROZWIĄZANIA ZAGADNIEŃ GRANICZNYCH

STRESZCZENIE

Tematem pracy jest modelowanie i zagadnienia graniczne w dyskretnej teorii kinetycznej dla gazów pojedynczych ze zderzeniami binarnymi i wielocząstkowymi i dla mieszanin. Praca składa się ze wstępu i dwóch części merytorycznych.

We wstępie omówiono zasadnicze kierunki badań w dyskretnej teorii kinetycznej, dokonano przeglądu literatury i przedstawiono aktualny stan wiedzy w omawianych dziedzinach.

W części I zaproponowano modele gazów z dyskretnym rozkładem prędkości, uwzględniające zderzenia wielocząstkowe, hierarchię modeli wielowymiarowych, w których następuje zmiana energii kinetycznej w zderzeniach mikroskopowych, oraz modele mieszanin gazowych.

W części II autor rozwiązał następujące podstawowe zagadnienia graniczne w teorii kinetycznej dla omawianych modeli kinetycznych:

1. Problem istnienia i jednoznaczności zagadnień brzegowych w obszarach ze ściankami dla ogólnej klasy afinicznych warunków brzegowych uwzględniających absorpcję, źródła brzegowe i oddziaływanie z tłem dla gazów ze zderzeniami dwucząstkowymi.

2. Zagadnienie stacjonarnej fali uderzeniowej dla podstawowego w teorii tzw. gazów sieciowych modelu heksagonalnego z uwzględnieniem zderzeń wielocząstkowych oraz dla mieszanin gazów dyskretnych. Autor odkrył efekt niemonotonicznego przebiegu lokalnej entropii w obszarze fali uderzeniowej, zarówno w mieszaninach, jak i w gazach pojedynczych.

3. Ścisłe rozwiązania typu solitonowego dla zaproponowanej hierarchii modeli wielowymiarowych z uwzględnieniem zmiany energii kinetycznej w zderzeniach mikroskopowych, rozwiązania o niemonotonicznych przebiegach gęstości mikroskopowych i całkowitej gęstości lokalnej.

4. Globalne w czasie twierdzenie egzystencjalne dla modeli dyskretnych z uwzględnieniem oddziaływań wielocząstkowych.

Praca kończy się obszerną bibliografią obejmującą zasadnicze dziedziny badań w dyskretnej teorii kinetycznej gazów.

SPIS TREŚCI

WPROWADZENIE

Przedstawiane opracowanie jest oparte na pracach [PLA I] - [PLA IX], stanowiących rozprawę habilitacyjną autora.

Prace te dotyczą dwóch ważnych problemów teorii kinetycznej gazów: 1) istnienia i analitycznej postaci rozwiązań typu fal uderzeniowych, 2) istnienia i analitycznej postaci rozwiązań w obszarach ze ściankami. Rozważane modele gazów są opisywane przez półliniowe układy równań cząstkowych pierwszego rzędu z nieliniowościami typu wielomianowego. Z mechanicznego punktu widzenia równania te opisują modele gazów o skończonej liczbie dopuszczalnych wektorów prędkości.

Opracowanie składa się ze wstępu, w którym są przedstawione zasadnicze idee i kierunki badań w teorii dyskretnych modeli równania Boltzmanna, z dwóch części merytorycznych, I, II, w których są omówione rezultaty uzyskane przez autora, oraz z bibliografii, obejmującej tematykę związaną z modelami dyskretnymi.

W części I są omówione prace, w których autor zaproponował modele gazów uwzględniające oddziaływania wielocząstkowe, modele mieszanin gazowych i modele gazów z transferem energii. Modele te mają szereg interesujących własności matematycznych i mechanicznych. Część I składa się z trzech rozdziałów. W rozdziale pierwszym są zaproponowane dyskretne modele gazów z oddziaływaniami wielocząstkowymi. W rozdziale drugim przedstawiono modele dyskretne mieszanin i gazów oddziałujących z tłem. W rozdziale trzecim autor zaproponował hierarchię modeli z nietrywialną zmianą energii kinetycznej w zderzeniach.

W części II zostały omówione rozwiązania zagadnień granicznych, znalezione przez autora dla modeli dyskretnych. Badane w pracy rozwiązania zagadnień granicznych można podzielić na dwie klasy: rozwiązania w postaci fal uderzeniowych oraz rozwiązania zagadnień brzegowych w obszarach ze ściankami. Część II składa się z czterech rozdziałów.

W rozdziale pierwszym są omówione znalezione przez autora rozwiązania w postaci fal uderzeniowych dla podstawowego w teorii gazów sieciowych modelu dyskretnego z oddziaływaniami trójcząstkowymi - tzw. modelu heksagonalnego, oraz dla interesujących modeli gazów pojedynczych i mieszanin. Do zasadniczych wyników autora należy:

znalezienie rozwiązań dla modelu heksagonalnego, wraz z analizą osobliwości odpowiednich stanów równowagowych,

zbadanie wpływu zderzeń trójcząstkowych na strukturę fali uderzeniowej,

znalezienie ścisłych rozwiązań dla mieszaniny gazów Knudsena i analiza struktury fali uderzeniowej dla mieszaniny gazów Broadwella,

otrzymanie niemonotonicznego przebiegu lokalnej entropii w gazach pojedynczych i mieszaninach.

W rozdziale drugim omówiono znalezione przez autora ścisłe rozwiązania zagadnień brzegowych w obszarach ze ściankami, dla warunków brzegowych uwzględniających źródła brzegowe i absorpcję na ściankach.

Autor otrzymał jawną, analityczną postać rozwiązań dla ogólnego modelu z dwiema prędkościami i udowodnił twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań powyższego problemu.

Autor uzyskał też jawną postać rozwiązań zagadnienia Couetta dla płaskiego modelu Broadwella z afinicznymi i dyfuzyjnymi warunkami brzegowymi i zagadnień brzegowych dla gazów oddziałujących z tłem,

przeanalizował wpływ parametrów brzegowych i zderzeniowych przekrojów czynnych na istnienie i jednoznaczność rozwiązań badanych zagadnień brzegowych.

W rozdziale trzecim są omówione znalezione przez autora ścisłe rozwiązania dla interesującej klasy modeli z nietrywialnym przekazem energii kinetycznej w zderzeniach. Znaleziono dwie klasy rozwiązań: periodyczne i solitonowe. Rozwiązania te posiadają szereg interesujących własności, w szczególności niemonotoniczne profile gęstości makroskopowych.

W rozdziale czwartym omówiono udowodnione przez autora globalne w czasie twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla badanych klas modeli dyskretnych z oddziaływaniami wielocząstkowymi.

Praca kończy się bibliografią, obejmującą dyskretne modele równania Boltzmanna.

Lista publikacji przedstawianych do rozprawy habilitacyjnej

[PŁA I] T.Płatkowski, *Shock Wave Structure in a Binary Mixture of Broadwell Discrete Velocity Gases*, Mechanics Research Communications **14, 5/6** (1988), 347-353.

[PŁA II] T.Płatkowski, *Entropy profiles in discrete velocity models of the Boltzmann equation*, Transp. Th. Stat. Phys. **18,2** (1989), 221.

[PŁA III] T.Płatkowski, *Exact shock wave solutions of 4-velocity models of mixtures*, Proc. of the Workshop on Discrete Kinetic Theory, Lattice Gas Dynamics and Foundations of Hydrodynamics, Torino, 1988, ed. I.S.I., R. Monaco, World Sci.Publ.Co. (1989), 248-258.

[PŁA IV] T.Płatkowski, *Boundary Value Problems for a Class of the Broadwell Models of the Boltzmann Equation in Bounded Domains with General Boundary Data*, Transp. Th. Stat. Phys. **20, 2-3** (1991), 199-220.

[PŁA V] T.Płatkowski, *Boundary value problems for two-velocity models of the Boltzmann equation*, Arch. of Mech. **43, 1** (1991), 115-128.

[PŁA VI] T.Płatkowski, G. Spiga, *Exact solutions of stationary problems in extended kinetic theory*, Europ. Journ. Mech./B (1992).

[PŁA VII] T.Płatkowski, *Discrete Velocity Models with Ternary Collisions*, Mechanics Research Communications **11,3** (1984), 201.

[PŁA VIII] T.Płatkowski, *Stationary shock wave profiles for a hexagonal discrete velocity model with all triple collisions*, Arch. of Mechanics **3** (1992).

[PŁA IX] H. Cornille, T.Płatkowski, *Exact solutions of a hierarchy of mixing speeds models*, Journ. Math. Phys. **7, 33** (1992).

Lista innych prac autora, związanych z modelami dyskretnymi

[Pła 12] T.Płatkowski, *The Initial Value Problem for the Discrete Velocity Gases with N-Particle Collisions*, Bull. de l'Acad. Pol. Sci. ser. Sci.Math. **32, 3-4** (1984), 247.

[Pła 13] T.Płatkowski, *On Some Elementary Properties of Solutions of Two Velocity Models of the Boltzmann Equation*, J. de Mec. Theor. Appl. **4,4** (1985), 455.

[Pła 14] T.Płatkowski, *On a Two-Velocity Model of the Boltzmann-Enskog Equation*, Annali di Mat. Pura Appl. **(IV), CXLV** (1986), 347.

[Pła 15] R.Monaco, T.Płatkowski, *The Discrete Boltzmann Equation for Gas Mixtures: Modelling and Some Analytical Solutions*, Rap. Int. No. 19, Polit. di Torino (1988).

[Pła 16] T.Płatkowski, R.Illner, *Discrete Velocity Models of the Boltzmann Equation: a Survey of the Mathematical Aspects of the Theory*, SIAM Reviev **30,2** (1988), 213.

[Pła 17] E.Longo, R.Monaco, T.Płatkowski, *Sound Propagation and Shock Wave Structure by the Semidiscrete Boltzmann Equation*, Journ. de Mec. Theor. Appl. **7,3** (1988), 233-243.

[Pła 18] T.Płatkowski, *Nonunique solutions of boundary value problems in a slab for a class of the Broadwell models of the Boltzmann equations*, Proc. of 17th RGD Symp. , RWTH Aachen, 8-14 July 1990.

[Pła 19] R.Monaco, M. Pandolfi Bianchi, T.Płatkowski, *Shock waves formation by the discrete Boltzmann equation for binary gas mixtures*, Acta Mechanica **84** (1990), 175-184.

[Pła 20] G. Spiga, T.Płatkowski, *Exact solutions of stationary problems in discrete extended kinetic theory. Part II*, in Atti dell'Academia Peloritana dei Pericolanti di Messina **LXVIII** (1990), 191-207.

[Pła 21] R. Monaco, T. Płatkowski, *Exact Solutions for a Discrete Velocity Model of a Gas with Molecular Dissociation*, Eng. Trans. **39, 2** (1991), 221-227.

[Pła 22] T.Płatkowski, *On a boundary value problem for the Carleman model of the Boltzmann Equation*, Discrete Models of Fluid Dynamics, Ser. on Adv. in Math. for Appl. Sci., vol.2 Ed. A.Alves, World Sci., London, 1991.

[Pła 23] H.Cornille, T. Płatkowski, *Exact Solutions for two Multispeed Discrete Boltzmann Models Including Multiple Collisions*, J. Phys. A, submitted.

[Pła 24] H.Cornille, T. Płatkowski, *Riccati - Coupled Similarity Shock Waves Solutions for the Multispeed Discrete Boltzmann Models*, preprint.

WSTĘP

Gaz z dyskretnym rozkładem prędkości jest to układ cząstek o prędkościach należących do skończonego zbioru p wektorów w R^n, $n = 1, 2, 3$,

$$\{v_1, v_2, ... v_p\},$$

poruszających się w wyróżnionym obszarze przestrzeni fizycznej R^n.

W dalszym ciągu gazy takie, jak i układy równań opisujące ich ewolucje, będziemy nazywać **modelami dyskretnymi.**

Stan gazu z dyskretnym rozkładem prędkości opisujemy za pomocą p funkcji rozkładu

$$N_i(t, x), \quad i = 1, ...p, \quad t\epsilon[0, \infty), \quad x\epsilon R^n,$$

które interpretujemy jako gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki o prędkości v_i w chwili t w elemencie objętości wokół x.

Będziemy używali terminu funkcja rozkładu (gazu dyskretnego) na oznaczenie zbioru p wprowadzonych wyżej funkcji rozkładu .

Funkcje rozkładu N_i spełniają równanie bilansu, analogiczne do równania Boltzmanna

$$(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x}) N_i = Q_i, \qquad i = 1, ...p, \qquad t \in [0, \infty), \qquad x \in R^n. \qquad (W1)$$

Operatory zderzeniowe Q_i opisują ewolucję N_i na skutek zderzeń pomiędzy cząstkami gazu. W ogólnym przypadku Q_i są wielomianami względem funkcji rozkładu. Ich jawna postać zależy od rozpatrywanego modelu. Dla modeli gazów ze zderzeniami dwucząstkowymi [Cab 10], [Gat 2,3], [God 1], [Pła 16], [Sul 1]

$$Q_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^{p} A_{ij}^{kl} (N_k N_l - N_i N_j), \qquad (W2)$$

gdzie

$$A_{ij}^{kl} = |v_i - v_j| a_{ij}^{kl},$$

przy czym proporcjonalne do przekrojów czynnych na zderzenia stałe a_{ij}^{kl} są symetryczne względem permutacji indeksów

$$a_{ij}^{kl} = a_{ji}^{kl} = a_{ij}^{lk} = a_{kl}^{ij}.$$

Dla dwuskładnikowych mieszanin gazów o masach cząsteczkowych m_1, m_2 ogólny model dyskretny ma postać

$$(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x})N_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^{p} A_{ij}^{kl}(N_k N_l - N_i N_j) + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^{p} B_{ij}^{kl}(N_k M_l - N_i M_j), \tag{W3}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \mu_i \frac{\partial}{\partial x})M_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^{p} A_{ij}^{kl}(M_k M_l - M_i M_j) + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^{p} B_{ij}^{kl}(M_k N_l - M_i N_j), \tag{W4}$$

gdzie N_i jest funkcją rozkładu gazu o prędkości v_i, M_i jest funkcją rozkładu gazu o prędkościach μ_i,

$$t \in [0, \infty), \qquad x \in R^n, \qquad i = 1, ...p, \tag{W5}$$

a współczynniki A i B przy szukanych funkcjach rozkładu, zdefiniowane analogicznie jak dla gazów pojedynczych, są proporcjonalne do prawdopodobieństw zderzeń pomiędzy odpowiednimi rodzajami cząstek [Bel 1,2,5], [Pła 15].

Ogólny operator zderzeniowy opisujący zderzenia p - cząstkowe ma postać [PŁA VII]

$$Q_i^M = \sum_{i_k, j_l=1}^{p} (A_{i_1, i_2, ..., i_p}^{j_1, j_2, ..., j_p} N_{i_1} N_{i_2} ... N_{i_p} - A_{j_1, j_2, ..., j_p}^{i, i_2, ..., i_p} N_i N_{j_2} ... N_{j_p}). \tag{W6}$$

Interesujący z punktu widzenia zastosowań jest też model gazu dyskretnego oddziałującego z tłem. Ogólna postać takiego modelu jest następująca

$$(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x})N_i = L_i, \qquad i = 1, ...p, \tag{W7}$$

gdzie

$$L_i = Q_i(N, N) - \epsilon N_i + \eta \chi_i \rho + S_i, \tag{W8}$$

$$t \in [0, \infty), \qquad x \in R^n.$$

Q_i jest operatorem zderzeń międzycząstkowych, ρ jest gęstością gazu, pozostałe człony opisują oddziaływanie z ośrodkiem. Interpretacja poszczególnych członów oraz rozwiązania uzyskane przez autora będą dyskutowane w dalszych częściach rozprawy.

Modele dyskretne można traktować jako matematyczne modele równania Boltzmanna. Zachowują one istotne własności tego równania (np. kwadratowa zależność operatora zderzeniowego od funkcji rozkładu, spełnianie praw zachowania, twierdzenie H). W tym aspekcie można je traktować jako układy równań, na których można testować odpowiednie hipotezy dotyczące równania Boltzmanna.

Otwartym zagadnieniem, interesującym zarówno matematycznie, jak i z punktu widzenia zastosowań numerycznych, jest pytanie czy i w jakim sensie rozwiązania modeli dyskretnych przybliżają rozwiązania równania Boltzmanna dla $p \to \infty$.

Modele dyskretne są też interesujące 'samoistnie', jako układy półliniowych równań hiperbolicznych, dla których w wielu wypadkach można rozwiązać globalnie w czasie odpowiednie zagadnienie Cauchy'ego, pewne klasy zagadnień początkowo-brzegowych i brzegowych, a także badać hydrodynamikę i asymptotyczne zachowanie się rozwiązań dla dużych czasów.

Ze względu na zastosowania fizyczne, ważną cechą tych modeli jest fakt, że w wielu wypadkach struktura członu zderzeniowego pozwala na uzyskanie informacji o znaku rozwiązania - dla nieujemnych danych początkowych otrzymujemy nieujemne rozwiązanie.

Ważną cechą modeli dyskretnych jest też możliwość uzyskiwania ścisłych rozwiązań dla problemów początkowych i brzegowych, wywodzących się z interesujących zagadnień fizycznych. Jak wiadomo, znane są tylko nieliczne ścisłe rozwiązania prawdziwego równania Boltzmanna. W przypadku równań opisujących modele dyskretne, uzyskano ścisłe rozwiązania dla wielu zagadnień fizycznych, takich, jak struktura fali uderzeniowej, propagacja dźwięku, przepływ Couetta, pewne klasy zagadnień brzegowych w obszarach ograniczonych. Będzie o tym mowa w dalszej części wstępu.

Pierwszy model dyskretny został zaproponowany przez Carlemana [Car 1.2] jako matematyczny model równania Boltzmanna, zachowujący takie istotne cechy tego równania, jak kwadratowa nieliniowość członu zderzeniowego, rozkład członu zderzeniowego na dwa składniki o przeciwnych znakach, postać operatora różniczkowania wzdłuż trajektorii opisującej swobodną ewolucję cząstek. Mimo, że model ten nie spełnia prawa zachowania pędu, jest on badany ze względu na swoją prostotę formalną, przy jednoczesnej atrakcyjności występujących w nim problemów matematycznych.

Pierwsze modele dyskretne, spełniające wszystkie prawa zachowania, zostały zaproponowane w 1964 roku przez J. Broadwella. Broadwell zaproponował dwa modele dyskretne, spełniające mikroskopowe prawa zachowania i zastosował te modele do opisu rozchodzenia się fal w gazach [Bro 1,2] oraz do przepływu Couetta [Bro 3]. Okazało się, iż mimo formalnej prostoty modeli, rezultaty są jakościowo zgodne z wynikami uzyskanymi dla innych typów równań opisujących ewolucje gazów rozrzedzonych, w szczególności dla równania Boltzmanna. Istotną cechą wyników uzyskanych przez Broadwella jest fakt, że rozwiązania mają ścisłą, analityczną postać, w przeciwieństwie do rozwiązań uzyskiwanych na podstawie innych równań.

Powyższe cechy modeli dyskretnych, a także rozwój kinetycznej teorii gazów, spowodowały datujący się od połowy lat siedemdziesiątych wzrost zainteresowania modelami dyskretnymi. Można przy tym wyróżnić dwa główne kierunki badań.

I. Kierunek mechaniczno - aplikacyjny

Kierunek mechaniczno - aplikacyjny jest związany z zastosowaniem modeli dyskretnych do opisu przepływów gazów rozrzedzonych w obszarach z brzegami, a także do badania problemów związanych z asymptotyczną równoważnością mikroskopowego (tzn. opartego na równaniach kinetycznych) i makroskopowego (opartego na równaniach ośrodka ciągłego) opisu przepływu gazów. Tematyka ta została w latach siedemdziesiątych podjęta przez H.Cabanne'a i R.Gatignol we Francji, oraz przez U.Sułtangazina i S.K.Godunowa w ZSRR, i jest aktualnie rozwijana w wielu ośrodkach europejskich, w Japonii i w USA.

W obrębie tematyki związanej z aplikacjami podzielimy istniejące modele na następujace klasy:

I.1. Modele z małą liczbą dopuszczalnych wektorów prędkości

Cechą charakterystyczną takich modeli jest możliwość uzyskiwania rozwiązań problemów fizycznych ścisłymi metodami lub za pomocą prostych metod numerycznych. Modele takie były stosowane do opisu:

1a. propagacji i struktury fal uderzeniowych [Bro 1,2], [Cab 2-4,6], [Caf 1,3], [Cor 19,21], [Gat 4,7], [Leg 1-3], [Mon 2,3,9,10], [Pan 1], [Pie 6], [PŁA I-III,VII,VIII], [Pła 13,19,23,25]. Warto tu dodać, że problem istnienia rozwiązań w postaci fal uderzeniowych dla dowolnych liczb Macha jest jednym z wielkich nie rozwiązanych matematycznych problemów teorii kinetycznej gazów, opartej na równaniu Boltzmanna.

1b. propagacji dźwięku, patrz np. [Bro 1,2], [Bel 1,8], [Lon 1], [Pie 5-7].

1c. przepływów w obszarach ze ściankami, np. przepływu Couetta, Rayleigha itp., patrz np. [Bro 3], [Cab 1,5,7], [Gat 6], [Lon 2-4], [PŁA V], [PŁA VI], [Pła 18,20,21]. Interesujące jest przy tym jakościowe podobieństwo wyników do rezultatów otrzymywanych z bardziej skomplikowanych teorii.

1d. termodynamicznych i statystycznych własności gazów pojedynczych i ich mieszanin - [Bel 1-13], [Gat 8-10], [Hard 1-3], [Harr 1-2], [Lon 5,6], [Pła 16,17], [Sch 1].

1e. własności równań Eulera i Naviera-Stoksa otrzymywanych z modeli dyskretnych za pomocą odpowiednich procedur asymptotycznych typu Chapmana - Enskoga [Caf 2], [Cha 1-3], [Cou 1], [Gat 8-10], [Hard 1-3], [Kaw 6,11,12].

1f. gazów reagujących chemicznie, gazów oddziałujących z tłem, gazów niedoskonałych etc. [Bel 9], [Bof 1-4], [Gab 1], [Lon 1-3], [Mon 6-8,10-12], [Pia 1], [Pie 2,6-7], [PŁA VI], [Pła 20,21], [Rui 1], [Spi 1-4]. Ostatnio dodatkowym impulsem do badania takich modeli stał się rozwój teorii gazów sieciowych i jej zastosowanie do przepływów gazów rzeczywistych [Fri 1,2], [Doo 1].

1g. oddziaływań nielokalnych i wielocząstkowych - [Gat 3], [Harr 1-2], [Lon 4], [PŁA VII-IX], [Pła 11,14,24,25]. W ostatnich latach, wraz ze wzrostem zainteresowania oddziaływaniami wielocząstkowymi w teorii gazów sieciowych, bada się wpływ takich oddziaływań na współczynniki transportu i odpowiednie równania hydrodynamiczne [Cha 1-3], [Cou 1], [Gat 8-10]. Wpływ zderzeń potrójnych na współczynniki transportu w gazach dyskretnych był ostatnio badany w pracach [Cha 2,3], [Gat 10].

1h. stacjonarnych zagadnień brzegowych w obszarach granicznych lub w półprzestrzeni - [Cer 3-5], [PŁA V], [PŁA VI], [Pła 18,22,24], [Spi 3,4].

Warto dodać, że w przypadku pełnego równania Boltzmanna, zagadnienia istnienia rozwiązań dla ogólnych, akceptowalnych fizycznie warunków brzegowych, obszarów i potencjałów oddziaływania, a także problem jednoznaczności rozwiązań nie są rozwiązane. Badania analogicznych zagadnień dla modeli dyskretnych mogą w tym kontekście mieć duże znaczenie.

I.2. Modele dyskretne o dowolnej liczbie wektorów prędkości

Ogólna postać modeli dyskretnych z dowolną liczbą prędkości jest zdefiniowana wzorami (W1), (W2). Formalne zasady konstrukcji takich modeli są przedstawione np. w [Bel 1,2], [Cab 10], [Cha 2,3], [Gat 3,10], [God 1], [Lon 1,5,6], [Nur 1], [Pie 1-4], [Pła 15], [Suł 1].

Ważny kierunek badań związanych z modelami o dużej liczbie prędkości wiąże się z rozwojem komputerowych technik obliczeniowych. Ze względu na swoją strukturę, modele dyskretne są szczególnie dogodne do analizy numerycznej. Naturalna dyskretyzacja zmiennej prędkościowej redukuje wymiar odpowiedniej siatki numerycznej do n+1, gdzie n jest wymiarem przestrzeni fizycznej w której porusza się gaz. Unikamy przy tym problemów numerycznych (związanych np. z nieograniczonością prędkości), które występują przy obliczaniu członu zderzeniowego w pełnym równaniu Boltzmanna.

Rozwój technik obliczeniowych w ostatnich latach pozwala na efektywne numeryczne rozwiązywanie zagadnień brzegowych i brzegowo - początkowych dla modeli dyskretnych z dużą liczbą dopuszczalnych wektorów prędkości, rzędu 10^3. Formalna prostota ogólnego członu zderzeniowego powoduje, że modele takie są bardzo proste do implementacji na duże komputery. Uzyskiwane wyniki są ilościowo zgodne z rezultatami obliczeń opartych na równaniu Boltzmanna i stosowaniu innych technik obliczeniowych. Stosuje się tu dwie zasadnicze techniki obliczeniowe: pierwszą, opartą na bezpośrednim rozwiązywaniu wielkiej liczby równań cząstkowych za pomocą schematów różnicowych [Ina 1,2], i drugą, oparta na metodach Monte-Carlo [Gold 1-4]. Problem ścisłego przejścia od ogólnego modelu dyskretnego do pełnego równania Boltzmanna przy liczbie dopuszczalnych wektorów prędkości dążącej do nieskończoności jest otwarty.

I.3. Modele półdyskretne

Modele takie opisują gazy w których liczba dopuszczalnych długości wektorów prędkości jest skończona, natomiast ich kierunki są dowolne. Operator zderzeniowy jest opisany za pomocą całek o krotności niższej od całek występujących w pełnym operatorze zderzeniowym Boltzmanna, co może być istotne do efektywnego stosowania odpowiednich procedur numerycznych. Z fenomenologicznego punktu widzenia modele półdyskretne stanowią etap pośredni pomiędzy modelami dyskretnymi a pełnym równaniem Boltzmanna. Są one przedmiotem intensywnych badań, zarówno od strony matematycznej [Bel 4,6,8,13,14], [Cab 10], [Lon 6], [Mon 1-4], [Pie 5], [Tos 5], jak i z punktu widzenia zastosowań [Bel 6,8,9,13,14], [Mon 1,4 11], [Pie 3,5], [Pła 17].

I.4. Gazy sieciowe

W ostatnich latach nowym impulsem do badania modeli dyskretnych stał się rozwój teorii automatów komórkowych, w szczególności tzw. gazów sieciowych [Fri 1,2], oraz zastosowania gazów sieciowych do opisu przepływów gazów rzeczywistych.

Z mechanicznego punktu widzenia gazy sieciowe są to gazy dyskretne w których nie tylko prędkości, ale i położenia cząstek są opisywane za pomocą skończonej liczby wektorów. Uzyskuje się w ten sposób regularną, sieć przestrzenną, a położenia cząstek są opisane przez współrzędne węzłów tej sieci. Narzuca się też ograniczenia na dopuszczalną liczbę cząstek w danym węźle, analogiczne do reguł wyboru w mechanice kwantowej.

Gazy sieciowe można traktować jako szczególną klasę gazów dyskretnych, o analogicznej jak w gazach dyskretnych dynamice zderzeń i skokowej propagacji w przestrzeni (z węzła do węzła).

Rozwój gazów sieciowych datuje się od połowy lat 80-tych, wraz z rozwojem równoległych technik obliczeniowych. Punktem zwrotnym teorii jest praca [Fri 1] z 1986 roku, w której autorzy wykazali symetrię tensora naprężeń w równaniach hydrodynamiki, wyprowadzanych z równań kinetycznych opisujących ewolucję pewnych modeli gazów sieciowych. Dzięki temu otrzymano realistyczny opis przepływów [Fri 2], [Hum 1], [Mon 7], [Alv 5].

Istotną rolę w symulacjach rzeczywistych przepływów odgrywają sieciowe modele mieszanin (stosowane np. do opisu reakcji chemicznych, przepływów wielofazowych, procesów filtracji, przewidywania pogody etc., patrz np. [Che 1], [Doo 1]). Czynione są też próby połączenia teorii gazów sieciowych i gazów dyskretnych [Qia 1].

II. Kierunek matematyczny

Jak już wspominaliśmy, modele dyskretne są to układy półliniowych równań hiperbolicznych, dla których w wielu wypadkach można rozwiązać globalnie w czasie odpowiednie zagadnienie Cauchy'ego, pewne klasy zagadnień początkowo-brzegowych i brzegowych, a także badać hydrodynamikę i asymptotykę rozwiązań. Interesujące są też problemy stabilności, a także możliwość otrzymania ścisłych rozwiązań dla wielu ciekawych zagadnień początkowych i brzegowych. Poniżej usystematyzujemy występujące tu zagadnienia i krótko omówimy aktualny stan teorii.

Zainteresowanie matematycznymi problemami dla modeli dyskretnych jest związane m.in. z następującymi faktami:

1. modele te mają - z formalnego punktu widzenia - wiele istotnych cech równania Boltzmanna;
2. rozwiązanie problemu istnienia i jednoznaczności dla pełnego równania Boltzmanna napotykało na duże trudności techniczne. Badanie modeli dyskretnych pozwala lepiej zrozumieć niektóre z tych problemów. Niekiedy udaje się przenieść idee matematyczne stosowane w modelach dyskretnych na pełne równanie Boltzmanna (patrz niżej).
3. Równania opisujące modele dyskretne są też ciekawe same w sobie, jako nieliniowe równania cząstkowe typu hiperbolicznego. Wiele problemów fizycznych dla gazów w obszarach z brzegami można zredukować do stosunkowo prostych zagadnień brzegowych i brzegowo - początkowych. Będzie o tym mowa w dalszej części pracy.

Pierwsze prace matematyczne odnoszące się do modeli dyskretnych w ogólnej postaci (W1) powstały w początkach lat siedemdziesiątych [Ell 1-3], [God 1], [Pin 1,2]. Poniżej krótko przedstawimy główne kierunki badań i zasadnicze problemy matematyczne dla modeli dyskretnych. Bardziej szczegółowe omówienie można znaleźć w [Pła 16].

II.1. Zagadnienie początkowe

Zasadniczym problemem jest tu udowodnienie globalnego w czasie twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla dostatecznie szerokiej klasy warunków początkowych, własności asymptotyczne rozwiązań dla dużych czasów, a także zagadnienia związane ze stabilnością rozwiązań.

Szereg pomysłów matematycznych, zrealizowanych początkowo dla poszczególnych modeli, zostało potem uogólnionych na pełne równanie Boltzmanna, patrz np. [Ell 1-4], [Caf 2], [Nis 1], [Pin 1-2], [Tos 1]. Zasadnicze idee matematyczne i szczegółowa bibliografia związana z tą tematyką do 1986 roku zostały opisane w [Pła 16]. W ostatnich latach powstało szereg interesujących prac dotyczących twierdzeń egzystencjalnych dla zagadnienia Cauchy'ego i odpowiednich zagadnień asymptotycznych. Problemy istnienia i jednoznaczności rozwiązań były ostatnio badane w pracach [Bal 1], [Bea 1-2], [Bon 1-3], [Cab 8-13,16,17], [Cer 1,2], [Fit 1], [Gre 2], [Ham 1-3], [Hej 1], [Ill 1-9], [Ino 1], [Kan 1], [Kap 1,2], [Kaw 1-14], [Tos 6,7]. Asymptotyczne własności rozwiązań i zagadnienia związane ze stabilnością były badane w [Bal 1], [Bea 1,2], [Cab 7-14], [Kaw 1-14], [Mat 1], [Pin 1,2], [Pła 14,19], [Sch 1], [Sle 1], [Tos 6,7]. Otwartym problemem jest rozwiązanie zagadnienia początkowego w trzech wymiarach, a także zagadnienie ścisłego przejścia od modeli dyskretnych do równania Boltzmanna.

II.2. Zagadnienia brzegowe i brzegowo - początkowe

Uważa się, że zagadnienia brzegowe i początkowo - brzegowe dla pełnego równania Boltzmanna są trudniejsze, niż zagadnienie Cauchy'ego dla tego równania [Bel 9]. Odpowiednie zagadnienia dla modeli dyskretnych stały się przez to w ostatnich latach bardzo popularne. W pracach [Cer 3-5], [Fit 2], [Kaw 1-14], [Lac 2], [PLA V], [PLA VI], [Pła 18,20-22], [Tos 8], autorzy dowodzą twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności dla ogólnych modeli dyskretnych i dla ich wybranych realizacji. W pewnych przypadkach można też podać informacje dotyczące postaci analitycznej i stabilności rozwiązań, a także ich asymptotycznego zachowania się w czasie, patrz np. [Bab 1], [Bal 1], [Dor 1], [Gre 1,3,4], [Sle 1], [Tos 3,4].

II.3. Granica hydrodynamiczna

Jednym z fundamentalnych zagadnień w teorii kinetycznej gazów jest problem ścisłego wyprowadzenia równań opisujących makroskopowy stan gazu wychodząc z równania Boltzmanna. Ze względu na formalną prostotę równań występujących w teorii modeli dyskretnych, bada się analogiczne problemy dla modeli dyskretnych. Dla ogólnych modeli dyskretnych tematyka ta była badana np. w [Bar 1], [Cha 1,2], [Cou 1], [Ell 1-4], [Gat 3,8-10], [Kaw 11], [Mik 1], [Pal 1], [Pin 1,2], [Sul 1]. Wybrane modele dyskretne były wykorzystywane m.in. w [Caf 2], [Gat 3], [Harr 1], [Kaw 6,11,12], [McK 1-5], [Qia 1], [Pła 11]. Stosowane metody matematyczne oraz wyniki są omówione w [Pła 16].

II.4. Ścisłe rozwiązania modeli dyskretnych, badanie ich dodatniości i jednoznaczności

Jedną z atrakcyjnych cech modeli dyskretnych równania Boltzmanna jest możliwość uzyskiwania ścisłych rozwiązań w jawnej postaci. Są to nieliniowe hiperboliczne układy równań, i fakt że można niekiedy znaleźć ścisłe rozwiązania nie jest trywialny. Istotna jest tu struktura członu zderzeniowego (wielomiany względem szukanych funkcji rozkładu), a także istnienie całek pierwszych, odpowiadających prawom zachowania. Ze względu na interpretację fizyczną funkcji rozkładu dodatkową trudnością jest często wykazanie nieujemności uzyskiwanych rozwiązań.

Można wyodrębnić dwie klasy rozwiązań. Pierwsza jest związana z konkretnymi zagadnieniami fizycznymi - ustalonymi przepływami gazów. W wielu wypadkach uzyskanie ścisłych rozwiązań polega tu na założeniu stacjonarności przepływu i pewnych symetrii. Założenia takie redukują problem do zagadnienia brzegowego dla układu równań różniczkowych zwyczajnych, posiadającego często ścisłe, analityczne rozwiązanie. Decydującą rolę odgrywają przy tym fizyczne własności operatorów zderzeniowych, przejawiające się w istnieniu odpowiedniej liczby całek pierwszych. Rozwiązania tego typu były znalezione w pracach badających przepływy dla modeli z małą liczbą dopuszczalnych prędkości [Bro 1-3], [Cab 1,2,7], [Mon 2,3], [PŁA I-VI,VIII,IX], patrz też odsyłacze w rozdziale I.1.

Drugą klasę ścisłych rozwiązań stanowią rozwiązania zależące od zmiennej czasowej i zmiennych przestrzennych w sposób jawny.

Zasadnicza metoda szukania takich rozwiązań polega na zapostulowaniu konkretnej postaci rozwiązania z pewną liczbą dowolnych parametrów, a następnie, po wstawieniu tej postaci do równań, na znalezieniu warunków (równań algebraicznych) na te parametry. W szczególności, rozwiązania samopodobne były badane w [Cur 1], [Duk 1,2], [Gol 1]. Stosuje się też metody oparte na programowaniu symbolicznym [Dur 1], oraz techniki wykorzystujące charakterystyczne cechy modeli. Należy tu odnotować rozwiązania dla modeli gazów w polu sił zewnętrznych [Alv 1-4], pewne klasy rozwiązań samopodobnych [Bob 2-3], [Bof 1-4], [Cab 14,15,18,19], [Cor 1-23], [PŁA IX], [Wic 1-2], stacjonarne lub przestrzennie jednorodne rozwiązania dla modeli dwuprędkościowych ze specjalnym typem oddziaływań [Ern 1], [Bof 1-4], [Bob 1,2], [Pła 13], [Zan 1].

Na tym kończymy krótki przegląd mechanicznych i matematycznych aspektów modeli dyskretnych w kinetycznej teorii gazów. Dokonaliśmy przeglądu literatury i podstawowych kierunków badań w dyskretnej teorii kinetycznej. Poniżej omówimy na tym tle tematykę omawianą w prezentowanej rozprawie.

Z mechanicznego punktu widzenia najlepiej zbadane są pojedyncze gazy rozrzedzone, do których stosujemy przybliżenie oddziaływań binarnych i zakładamy słuszność hipotezy chaosu molekularnego. Znacznie gorzej zbadane są mieszaniny (w szczególności mieszaniny gazów z reakcjami chemicznymi), gazy z energią wewnętrzną, oraz gazy gęste, zarówno w całej przestrzeni, jak i w obszarach ze ściankami. Otwarty jest też problem poprawnego postawienia warunków brzegowych, zarówno z punktu widzenia twierdzeń o istnieniu, jednoznaczności i stabilności rozwiązań, jak i w celu uzyskania wyników zgodnych z doświadczeniem.

Nawet w przypadku pojedynczego gazu jednoatomowego, klasyczny problem istnienia i jednoznaczności fali uderzeniowej, czyli falowego rozwiązania równania Boltzmanna z warunkami granicznymi, odpowiadającymi stanom równowagowym przed i za falą i spełniającego pewne ograniczenia o charakterze fizycznym, nie jest zadowalająco rozwiązany - jest to jeden z najważniejszych otwartych problemów w matematycznej teorii kinetycznej. Podobnie jest w przypadku stacjonarnych zagadnień brzegowych w obszarach ze ściankami, z dostatecznie ogólnymi warunkami brzegowymi.

W przypadku gazów gęstych powstaje też problem poprawnego opisu oddziaływań wielocząstkowych i wyprowadzenia odpowiednich równań ewolucji. Interesujące jest zbadanie wpływu takich oddziaływań na makroskopowe charakterystyki przepływów.

Dyskretne modele teorii kinetycznej gazów są pożytecznym narzędziem do formułowania i badania powyższych problemów. W przedstawianym opracowaniu omawiamy następujące nowe aspekty i wyniki w teorii modeli dyskretnych, uzyskane przez autora:

I. Modele gazów dyskretnych a) ze zderzeniami wielocząstkowymi, b) mieszanin gazowych, c) gazów oddziałujących z tłem, d) modele gazów z transferem energii. Modele te mają interesujące własności matematyczne i mechaniczne (patrz Część I).

II. Analiza rozwiązań zagadnień granicznych dla modeli dyskretnych.
Omawiane rozwiązania zagadnień granicznych można podzielić na dwie klasy: rozwiązania w postaci fal uderzeniowych oraz rozwiązania zagadnień brzegowych w obszarach ze ściankami. Są one omówione w Części II.
Oryginalne wyniki autora to:
W rozdziale 1:
znalezienie rozwiązań typu fal uderzeniowych dla modelu heksagonalnego, analiza osobliwości odpowiednich stanów równowagowych, systematyczne zbadanie wpływu zderzeń trójcząstkowych na strukturę fali.
uzyskanie ścisłych rozwiązań typu solitonowego dla hierarchii modeli z transferem energii.
znalezienie ścisłych rozwiązań i zbadanie profili uderzeniowych dla mieszanin gazów (Knudsena, Broadwella), odkrycie niemotonicznego przebiegu lokalnej entropii.
W rozdziale 2:
uzyskanie ścisłych rozwiązań zagadnień brzegowych dla podstawowych modeli dyskretnych z afinicznymi warunkami brzegowymi. Zbadanie wpływu parametrów brzegowych i przekrojów czynnych na istnienie i jednoznaczność rozwiązań.
W rozdziale 3:
otrzymanie ścisłych rozwiązań periodycznych i solitonowych dla nowej klasy modeli z nietrywialną wymianą energii kinetycznej w zderzeniach. Interesującą nowością są tu niemonotoniczne profile gęstości.
W rozdziale 4 omówiono uzyskane przez autora twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla wybranych klas modeli dyskretnych z oddziaływaniami wielocząstkowymi.

Dalsza część rozprawy składa się z dwóch części, I i II, odpowiadających wyżej sformułowanym zagadnieniom, oraz z bibliografii, obejmującej omawianą w pracy tematykę.

Warto dodać, że niektóre idee zawarte w prezentowanej rozprawie są rozwijane w publikacjach innych autorów. W szczególności:
modele gazów ze zderzeniami trój- i wielocząstkowymi są badane zarówno pod kątem twierdzeń egzystencjalnych, własności asymptotycznych i stabilności

[Bel 10], [Ham 1], jak i pod kątem istnienia ścisłych lub numerycznych rozwiązań interesujących zagadnień fizycznych [Bel 11], [Bia 1], [Cor 23].
modele gazów z oddziaływaniami nielokalnymi są badane w [Gie 1], [Mon 11], [Tos 5].
zaproponowane w [PŁA III] modele mieszanin gazów dwuprędkościowych są badane np. w [Cab 15], [Cor 21,23], [Qia 1].
znaleziony w [PŁA II], PŁA III] przerzut entropii i temperatury został ostatnio potwierdzony w tzw. 14 - prędkościowym modelu Cabanne'a [Cab 6], [Cor 18], i w mieszaninach gazów [Cor 21,23].
Opisana w [Pła 19] metoda badania profili stacjonarnych fal uderzeniowych wykorzystująca proces formowania się fal w rurze uderzeniowej została ostatnio wykorzystana w [Bel 11], [Bia 1] do badania przepływów gazów z oddziaływaniami trójcząstkowymi, i w [Mon 10] do opisu gazu z reakcjami chemicznymi.
zaproponowany przez autora model gazu Carlemana - Enskoga został niedawno niezależnie otrzymany z hierarchii równań typu BBGKY, patrz [Gie 1].

CZĘŚĆ I. MODELOWANIE GAZÓW DYSKRETNYCH

1) Modelowanie gazów z oddziaływaniami wielocząstkowymi

Do najistotniejszych założeń przy wyprowadzaniu równania Boltzmanna należą założenia o dużym rozrzedzeniu i lokalności oddziaływań w gazie. Odejście od tych założeń może prowadzić do równań typu równania Enskoga, w którym oddziaływania między cząstkami mają charakter nielokalny, lub też do równań, w których operator zderzeniowy jest rzędu wyższego niż drugi względem nieznanej funkcji rozkładu.

Teoria tego typu równań jest znacznie gorzej rozwinięta, niż teoria równania Boltzmanna. Jest to jeden z powodów, dla których wydaje się celowe badanie odpowiednich prostszych modeli, w szczególności modeli dyskretnych. Modele takie są interesujące zarówno jako układy równań różniczkowych z przesuniętymi argumentami lub z nieliniowością stopnia wyższego niż drugi, jak i z mechanicznego punktu widzenia.

W [PŁA VII], PŁA VIII] zaproponowano dyskretne modele takich gazów. Poniżej krótko omówimy te modele.

1a) Ogólne modele z oddziaływaniami wielocząstkowymi

Jednym ze sposobów odejścia od klasycznych założeń prowadzących do równania Boltzmanna jest uwzględnienie zderzeń wielocząstkowych. Na heurystycznym poziomie rozważań prowadzi to do modeli dyskretnych z operatorami zderzeniowymi, które opisuje się za pomocą wielomianów rzędu wyższego niż drugi, patrz Wstęp. Ogólny model dyskretny z oddziaływaniami wielocząstkowymi został zdefiniowany przez autora w [PŁA VII].

W tej klasie modeli jednym z ciekawszych, ze względu na prostotę i własności mechaniczne, jest tzw. 8-prędkościowy model Broadwella, w którym wektory prędkości cząstek są skierowane do wierzchołków i środków boków kwadratu i mają długości równe połowie odpowiednich przekątnych. W tym modelu istnieją nietrywialne zderzenia trójcząstkowe, zachowujące pęd i energię, patrz [Pła 24].

Innym interesującym modelem jest podstawowy w teorii gazów sieciowych tzw. model heksagonalny, szerzej omawiany w rozdziale 1b. Ogólny operator zderzeniowy opisujący zderzenia potrójne ma natomiast postać [PŁA VII]

$$Q_i^T = \sum_{l,j,k,m,n=1}^{p} (A_{ljk}^{imn} N_l N_j N_k - A_{imn}^{ljk} N_i N_m N_n), \tag{1.1}$$

gdzie spośród współczynników A_{ljk}^{imn} nie znikają tylko te, które odpowiadają zderzeniom zachowującym pęd i energię. Szczegóły są przedyskutowane w pracy [PŁA VII], gdzie udowodniono także globalne w czasie twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań (patrz Część II).

W ostatnich latach modele ze zderzeniami rzędu wyższego niż drugi znalazły ciekawe zastosowania w teorii gazów sieciowych. Okazuje się, że uwzględnienie zderzeń wyższych rzędów eliminuje tzw. niefizyczne niezmienniki zderzeniowe. Pozwala to m.in. uzyskać prawidłową hydrodynamikę dla takich gazów [Cha 2,3], [Gat 10].

Uwaga 1.1

Uogólnienie powyższych modeli prowadzi do modeli N-cząstkowych, w których operator zderzeniowy jest wielomianem rzędu N-go względem nieznanej funkcji rozkładu. Modele takie zostały zaproponowane w [PŁA VII]. Ogólny operator zderzeniowy opisujący zderzenia wielocząstkowe ma postać

$$Q_i^M = \sum_{i_k, j_l = 1}^{p} (A_{i_1, i_2, \dots i_p}^{j_1, j_2, \dots j_p} N_{i_1} N_{i_2} \dots N_{i_p} - A_{j_1, j_2, \dots j_p}^{i, i_2, \dots i_p} N_i N_{j_2} \dots N_{j_p}). \tag{1.2}$$

Jako szczególny przypadek można traktować zaproponowany w [Pła 12] N-cząstkowy model typu modelu Carlemana

$$(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x}) N_1(t,x) = \sum_{k=1}^{N} a_k [N_2^k(t,x) - N_1^k(t,x)] \tag{1.3}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} - v_2 \frac{\partial}{\partial x}) N_2(t,x) = \sum_{k=1}^{N} a_k [N_2^k(t,x) - N_1^k(t,x)] \tag{1.4}$$

$$t \in [0, \infty), \qquad x \in R^n,$$

w którym operator zderzeniowy jest wielomianem N - go rzędu. Model ten, mimo iż nie posiada dobrej interpretacji fizycznej, spełnia formalnie twierdzenie H, prawo zachowania masy i można dla niego udowodnić twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań nieujemnych, patrz [Pła 12]. Otwartym problemem jest odpowiedź na pytanie, czy i w jakim sensie modele ze zderzeniami wielocząstkowymi mogą przybliżać hierarchie równań kinetycznych typu BBGKY na wielocząstkowe funkcje rozkładu.

Uwaga 1.2 - model Carlemana-Enskoga

Drugim sposobem odejścia od klasycznych założeń prowadzących do równania Boltzmanna jest uwzględnienie nielokalności oddziaływań między cząstkami. W [Pła 15] został zaproponowany jednowymiarowy model takiego gazu, nazywany dalej modelem Carlemana - Enskoga. Jest to model cząstek - sztywnych prętów o długości σ, poruszających się wzdłuż prostej, (oś Ox) o prędkościach $+c$ i $-c$, gdzie c-dowolna stała. Wzajemne oddziaływanie cząstek opisuje operator zderzeniowy zdefiniowany *wzorami (1.5), (1.6) poniżej. Zderzenie następuje wtedy, gdy środki cząstek o prędkościach v_1 i v_2 takich, że $v_1 v_2 = -c^2$ znajdują się w odległości σ, gdzie σ jest średnicą cząstek. W tym sensie jest to model z oddziaływaniami nielokalnymi. Odpowiedni układ równań na funkcje rozkładu cząstek N_1, N_2 poruszających się w obu kierunkach prostej (osi Ox) ma postać*

$$(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})N_1(t,x) = N_1(t, x-\sigma)N_2(t,x) - N_1(t,x)N_2(t,x+\sigma), \tag{1.5}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})N_2(t,x) = -N_1(t, x-\sigma)N_2(t,x) + N_1(t,x)N_2(t,x+\sigma), \tag{1.6}$$

$$i = 1,...p, \qquad t \in [0,\infty), \qquad x \in R^n,$$

Model ten został ostatnio uzyskany niezależnie przy badaniu dyskretnej wersjii hierarchii równań Bogoliubowa [Gie 1]. Jeżeli długość prętów dąży do zera, to prawe strony powyższych równań dążą do zera - w granicy otrzymujemy gaz Knudsena cząstek nieoddziałujących. Model ten spełnia prawo zachowania masy i - w odróżnieniu od modelu Carlemana - prawo zachowania pędu. Zauważmy że model ten jest opisywany przez układ r.r.cz z przesuniętymi argumentami. Zagadnienia istnienia i jednoznaczności, a także własności rozwiązań, są dla takich równań słabo zbadane. W przypadku modelu (1.5), (1.6) okazuje się, że dzięki specyficznej strukturze członu zderzeniowego, można udowodnić globalne w czasie twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności dla dużych (w sensie odpowiednich norm całkowych) danych początkowych. Dowód ten jest przeprowadzony przez autora w pracy [Pła 15], nie omawianej w niniejszej rozprawie.

1b) Model heksagonalny

W tym paragrafie omówimy uzyskane przez autora profile fal uderzeniowych dla interesującego ze względu na zastosowania w teorii gazów sieciowych płaskiego modelu heksagonalnego, z uwzględnieniem zderzeń rzędu wyższego niż drugi. Szczegóły są podane w pracy [PŁA VIII].

Na wstępie zdefiniujemy model. Niech $e_x = (1,0), e_y = (0,1)$, oznaczają wersory kartezjańskiego układu współrzędnych. Definiujemy dopuszczalne wektory prędkości

$$u_i = cos[(i-1)\frac{\pi}{3}]e_x + sin[(i-1)\frac{\pi}{3}]e_y, \qquad i = 1,...6, \tag{1.7}$$

oraz odpowiadające im funkcje rozkładu $N_i = N_i(t,r)$, $t \in R_+$, $r \in R^2, i = 1,...6$, spełniające równania

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial N_1}{\partial r} = \; & \sigma_B(N_2N_5 + N_3N_6 - 2N_1N_4) + \\ & \sigma_P N(N_2N_5 + N_3N_6 - 2N_1N_4) + \\ & \sigma_T(N_2N_4N_6 - N_1N_3N_5) + \\ & 2\sigma_H(N_2^2N_6 - N_1^2N_3) + 2\sigma_H(N_6^2N_2 - N_1^2N_5) + \\ & \sigma_H(N_2^2N_4 - N_3^2N_1) + \sigma_H(N_6^2N_4 - N_5^2N_1) + Q_M^1, \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial N_2}{\partial r} = \; & \sigma_B(N_1N_4 + N_3N_6 - 2N_2N_5) + \\
& \sigma_P N(N_1N_4 + N_3N_6 - 2N_2N_5) + \\
& \sigma_T(-N_2N_4N_6 + N_1N_3N_5) + \\
& 2\sigma_H(-N_2^2N_6 + N_1^2N_3) + \sigma_H(-N_6^2N_2 + N_1^2N_5) + \\
& 2\sigma_H(-N_2^2N_4 + N_3^2N_1) + \sigma_H(N_3^2N_5 - N_4^2N_2) + Q_M^2,
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_3}{\partial t} + u_3 \frac{\partial N_3}{\partial r} = \; & \sigma_B(N_2N_5 + N_1N_4 - 2N_3N_6) + \\
& \sigma_P N(N_2N_5 + N_1N_4 - 2N_3N_6) + \\
& \sigma_T(N_2N_4N_6 - N_1N_3N_5) + \\
& \sigma_H(N_2^2N_6 - N_1^2N_3) + 2\sigma_H(N_4^2N_2 - N_3^2N_5) + \\
& 2\sigma_H(N_2^2N_4 - N_3^2N_1) + \sigma_H(N_4^2N_6 - N_5^2N_3) + Q_M^3,
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_4}{\partial t} + u_4 \frac{\partial N_4}{\partial r} = \; & \sigma_B(N_2N_5 + N_3N_6 - 2N_1N_4) + \\
& \sigma_P N(N_2N_5 + N_3N_6 - 2N_1N_4) + \\
& \sigma_T(-N_2N_4N_6 + N_1N_3N_5) + \\
& 2\sigma_H(N_3^2N_5 - N_4^2N_2) + 2\sigma_H(N_5^2N_3 - N_4^2N_6) + \\
& \sigma_H(-N_2^2N_4 + N_3^2N_1) + \sigma_H(-N_6^2N_4 + N_5^2N_1) + Q_M^4,
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_5}{\partial t} + u_5 \frac{\partial N_5}{\partial r} = \; & \sigma_B(N_1N_4 + N_3N_6 - 2N_2N_5) + \\
& \sigma_P N(N_1N_4 + N_3N_6 - 2N_2N_5) + \\
& \sigma_T(N_2N_4N_6 - N_1N_3N_5) + \\
& 2\sigma_H(N_2^2N_6 - N_1^2N_3) + \sigma_H(N_6^2N_2 - N_1^2N_5) + \\
& 2\sigma_H(N_6^2N_4 - N_5^2N_1) + \sigma_H(N_4^2N_2 - N_3^2N_5) + Q_M^5,
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_6}{\partial t} + u_6 \frac{\partial N_6}{\partial r} = \; & \sigma_B(N_2N_5 + N_1N_4 - 2N_3N_6) + \\
& \sigma_P N(N_2N_5 + N_1N_4 - 2N_3N_6) + \\
& \sigma_T(-N_2N_4N_6 + N_1N_3N_5) + \\
& \sigma_H(-N_2^2N_6 + N_1^2N_3) + 2\sigma_H(-N_6^2N_2 + N_1^2N_5) + \\
& \sigma_H(N_5^2N_3 - N_4^2N_6) + 2\sigma_H(-N_6^2N_4 + N_5^2N_1) + Q_M^6,
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

gdzie $\mathbf{r} = (x, y)$ jest wektorem położenia, σ_B, σ_P, σ_T, σ_H są przekrojami czynnymi na zderzenia binarne, pseudopotrójne, potrójne i półpotrójne, patrz rys. 1, $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6$ jest całkowitą (lokalną) gęstością. Operator Q^1_M uwzględnia zderzenia rzędu wyższego niż trzeci. Dla przykładu podajemy analityczną postać Q^i_M dla klasy zderzeń poczwórnych w których wszystkie cząstki zmieniają po zderzeniu swoje prędkości.

$$Q^1_M = 2A - 3B - D + 2F, \qquad Q^2_M = -3A + 2B + 2C - E, \tag{1.14}$$

$$Q^3_M = 2A - 3C + 2D - F, \qquad Q^4_M = -B + 2C - 3D + 2E, \tag{1.15}$$

$$Q^5_M = -A + 2D - 3E + 2F, \qquad Q^6_M = 2B - C + 2E - 3F, \tag{1.16}$$

gdzie

$$A = \sigma_M(N_2^3 N_5 - N_1^2 N_3^2), \quad B = \sigma_M(N_1^3 N_4 - N_2^2 N_6^2), \tag{1.17}$$

$$C = \sigma_M(N_3^3 N_6 - N_2^2 N_4^2), \quad D = \sigma_M(N_4^3 N_1 - N_3^2 N_5^2), \tag{1.18}$$

$$E = \sigma_M(N_5^3 N_2 - N_4^2 N_6^2) = C, \quad F = \sigma_M(N_6^3 N_3 - N_1^2 N_5^2) = A. \tag{1.19}$$

Operatory zderzeń półpotrójnych mają postać

$$Q^1_H = 2H - 4G, \qquad Q^2_H = -2H + 3G + I, \tag{1.20}$$

$$Q^3_H = 2H - G - I, \qquad Q^4_H = -2H + 4I, \tag{1.21}$$

gdzie

$$G = \sigma_H(N_1^2 N_3 - N_2^3), \quad H = \sigma_H(N_2^2 N_4 - N_3^2 N_1), \quad I = \sigma_H(N_3^3 - N_4^2 N_2). \tag{1.22}$$

Analogiczne uproszczenia zachodzą dla Q^i_M, $i = 1, ...4$.
Ze względu na występujące tu symetrie, powyższy model będziemy nazywali modelem heksagonalnym. W rozdziale 1 części II omówimy rozwiązania klasycznego zagadnienia granicznego - struktury stacjonarnej fali uderzeniowej dla omawianego tu modelu heksagonalnego.

2) Modele mieszanin gazowych

Istnieje szereg trudności przy opisie mieszanin gazów za pomocą układu równań Boltzmanna. Kwestionowana jest poprawność stosowania procedury Chapmana-Enskoga dla mieszanin składników o bardzo różnych masach atomowych. Istnieją trudności przy modelowaniu mieszanin gazów z reakcjami chemicznymi i z wewnętrznymi stopniami swobody. Trudności te motywują zajmowanie się modelami równań kinetycznych typu równania Boltzmanna, dla których można niekiedy znaleźć rozwiązania interesujących zagadnień fizycznych. W ostatnich latach, w związku z rozwojem teorii gazów sieciowych i modelowania za ich pomocą układów wielofazowych i reakcji chemicznych, wzrosło zainteresowanie dyskretnymi modelami mieszanin.

W bieżącym rozdziale omówimy dwa modele mieszanin gazów: pierwszy, zaproponowany w [PŁA III] model dwóch wzajemnie oddziałujących gazów Knudsena i drugi, badany w [PŁA I] model mieszaniny gazów Broadwella. Omówimy też modele gazów oddziałujących z tłem, badane w [PŁA VI]. Ścisłe rozwiązania zagadnień granicznych dla tych modeli, uzyskane przez autora rozprawy zostaną omówione w części II, rozdz. 1b, 1c (fale uderzeniowe) i w rozdz. 2c (zagadnienia brzegowe w obszarach ze ściankami). Teoria ogólnych dyskretnych modeli mieszanin została opisana w pracy przeglądowej [Pła 15] i nie jest omawiana w niniejszej rozprawie.

2a) Mieszanina gazów Knudsena

W [PŁA III] zaproponowano model mieszaniny dwóch gazów Knudsena, dla których wkład do operatora zderzeniowego pochodzi jedynie od zderzeń między cząstkami różnych gazów. Omówimy krótko ten model.

Niech N_1, N_2 oznaczają funkcje rozkładu cząstek o masie jednostkowej, poruszających się wzdłuż osi Ox z prędkościami odpowiednio $+c$ i $-c$, natomiast M_1, M_2 - funkcje rozkładu cząstek o masie $1/\mu$, poruszających się z prędkościami odpowiednio $+c\mu$ oraz $-c\mu$. Odpowiedni model dyskretny ma postać

$$(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})N_1(t,x) = M_1(t,x)N_2(t,x) - N_1(t,x)M_2(t,x), \tag{2.1}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})N_2(t,x) = -M_1(t,x)N_2(t,x) + N_1(t,x)M_2(t,x), \tag{2.2}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + c\mu\frac{\partial}{\partial x})M_1(t,x) = -M_1(t,x)N_2(t,x) + N_1(t,x)M_2(t,x), \tag{2.3}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} - c\mu\frac{\partial}{\partial x})M_2(t,x) = M_1(t,x)N_2(t,x) - N_1(t,x)M_2(t,x), \tag{2.4}$$

$$t \in [0,\infty), \qquad x \in R^1,$$

przy czym przekrój czynny został znormalizowany do jedności.

W tak zdefiniowanym modelu są spełnione podstawowe prawa zachowania masy, pędu i energii na poziomie mikroskopowym. W przeciwieństwie do większości dyskretnych modeli gazów pojedynczych, w modelu tym, dzięki istnieniu dwóch modułów prędkości, można wprowadzić nietrywialną definicję temperatur obu składników (dla gazów o jednym module prędkości pokazuje się, że klasycznie zdefiniowana temperatura kinetyczna zależy jedynie od prędkości makroskopowej gazu). Dla modeli tego typu autor uzyskał w [PŁA III] ścisłe rozwiązania w postaci stacjonarnej fali uderzeniowej. Jest to jednocześnie pierwszy model mieszaniny gazów, dla którego znaleziono ścisłe rozwiązania i zbadano strukturę uzyskanej fali uderzeniowej. Wyniki te będą omawiane w Części II.

Uwaga 2.1

W [PŁA III] został też zaproponowany model dwuprędkościowy z operatorem zderzeniowym

$$(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})N_1(t,x) = M_1(t,x)M_2(t,x) - N_1(t,x)N_2(t,x), \tag{2.5}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})N_2(t,x) = M_1(t,x)M_2(t,x) - N_1(t,x)N_2(t,x), \tag{2.6}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + c\mu\frac{\partial}{\partial x})M_1(t,x) = -M_1(t,x)M_2(t,x) + N_1(t,x)N_2(t,x), \tag{2.7}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} - c\mu\frac{\partial}{\partial x})M_2(t,x) = -M_1(t,x)M_2(t,x) + N_1(t,x)N_2(t,x), \tag{2.8}$$

$$t \in [0,\infty), \qquad x \in R^1.$$

Model ten można traktować jako model elementarnej reakcji chemicznej, w wyniku której cząstki jednego gazu przechodzą w cząstki drugiego gazu wskutek zderzeń między sobą.

2b) Mieszanina gazów Broadwella

W tym podrozdziale omówimy model mieszaniny gazów Broadwella. W [PŁA I] zbadano strukturę fali uderzeniowej dla takiego modelu. W obecnym rozdziale przedstawimy jednowymiarową wersję, uzyskaną z modelu trójwymiarowego przy założeniu odpowiednich symetrii przestrzennych.

Niech N_1, N_2 oznaczają funkcje rozkładu cząstek pierwszego gazu, poruszających się z prędkościami odpowiednio $+c, -c$ wzdłuż osi Ox, N_3 - funkcję rozkładu cząstek o prędkościach we wszystkich kierunkach prostopadłych do Ox. Niech M_1, M_2, M_3 oznaczają odpowiednie funkcje rozkładu cząstek drugiego gazu, o prędkościach $+\mu c, -\mu c$, $c \in R$. Równania ewolucji tych funkcji rozkładu mają postać

$$(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})N_1 = \sigma_1[N_3^2(t,x) - N_1(t,x)N_2(t,x)] + Q_1 \tag{2.9}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})N_2 = \sigma_1[N_3^2(t,x) - N_1(t,x)N_2(t,x)] + Q_2 \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}N_3 = -\sigma_1[N_3^2(t,x) - N_1(t,x)N_2(t,x)]/2 + Q_3 \tag{2.11}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \mu c\frac{\partial}{\partial x})M_1 = \sigma_2[M_3^2(t,x) - M_1(t,x)M_2(t,x)] + Q_4 \tag{2.12}$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \mu c\frac{\partial}{\partial x})M_2 = \sigma_2[M_3^2(t,x) - M_1(t,x)M_2(t,x)] + Q_5 \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}M_3 = -\sigma_2[M_3^2(t,x) - M_1(t,x)M_2(t,x)]/2 + Q_6, \tag{2.14}$$

$$t \in [0,\infty), \qquad x \in R^1,$$

gdzie w każdym z równań pierwsze dwa składniki prawej strony opisują zderzenia pomiędzy cząstkami tego samego gazu (zderzenia własne), a $Q_1, ..Q_6$ - zderzenia pomiędzy cząstkami różnych gazów (zderzenia krzyżowe). Q_i są liniowymi kombinacjami iloczynów N_iM_j, ze współczynnikami zależącymi od przekrojów czynnych na zderzenia krzyżowe i od μ. Jawne wyrażenia na Q_i są podane w [PŁA I].

Tak zdefiniowany model spełnia prawa zachowania masy, pędu i energii. Występuje w nim kilka ważnych parametrów: stosunek mas cząstek oraz przekroje czynne na różne typy zderzeń. zW Częśći II (rozdz. 1c) będą omawiane profile fal uderzeniowych uzyskane przez autora dla tego modelu.

2c) Modele gazów oddziałujących z tłem

Nową klasę modeli stanowią modele gazów oddziałujących z tłem. Modele takie mają ogólną postać

$$(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x})N_i = L_i, \qquad i = 1, ...p, \tag{2.9}$$

gdzie:

$$L_i = Q_i(N, N) - \epsilon N_i + \eta \chi_i \rho + S_i, \tag{2.10}$$

$$t \in [0, \infty), \qquad x \in R^n,$$

Q_i jest operatorem zderzeń dwucząstkowych, ρ jest gęstością gazu, $\epsilon, \eta, \chi_i, S_i$ są współczynnikami opisującymi oddziaływanie cząstek gazu z tłem, patrz część II, rozdz. 2c).

W pracach [PŁA VI], [Pła 18] zbadano mechaniczne własności szczególnych modeli tego typu i znaleziono pewne klasy ścisłych rozwiązań. W [PŁA VI] znaleziono ścisłe rozwiązania dla zagadnień stacjonarnych z ogólnymi warunkami brzegowymi i zbadano ich własności. Będzie o tym mowa w części II. Modele tego typu mogą mieć zastosowanie m.in. w ekologii, biologii, przy modelowaniu reakcji chemicznych etc., patrz [Bof 1-4], [Ogg 1], [Spi 1-4].

3) Hierarchia modeli z transferem energii

Klasyczne modele dyskretne opisują jednoatomowe gazy bez energii wewnętrznej. Jak już mówiliśmy we Wstępie, problem uogólnienia na gazy z wewnętrznymi stopniami swobody i reakcjami chemicznymi, jest otwarty. Poniżej zdefiniujemy hierarchię modeli (dla d=1,2,3 wymiarów) w których w elementarny sposób została uwzględniona możliwość przekazu energii w zderzeniach mikroskopowych, i które dają ciekawe wyniki na poziomie makroskopowym. W Części II omówimy ścisłe rozwiązania typu solitonowego uzyskane dla tej hierarchii w [PŁA IX].

Definiujemy hierarchię d-wymiarowych modeli $d = 1, 2, 3$ z $(2^d + 3)$ prędkościami, trzema różnymi wartościami prędkości i $(2^d + 3)$ gęstościami, patrz rys. 2. Jednowymiarowe projekcje tych modeli prowadzą do pięciu niezależnych gęstości N_1, N_2, M_1, M_2, R, odpowiadających prędkościom $1, -1, 2, -2, 0$ wzdłuż osi $x = x_1$ i spełniających układ równań

$$p_+ N_1 = -p_- N_2 = Q_1 + Q_2,$$

$$q_+ M_1 = -d_* Q_2.$$

$$q_- M_2 = d_* Q_1$$

$$R_t = d_*(Q_2 - Q_1),$$

gdzie dla modelu jednowymiarowego operatory zderzeniowe mają postać

$$Q_1 = \sigma_1(N_2R - N_1M_2), \quad Q_2 = \sigma_2(M_1N_2 - N_1R) \tag{3.1}$$

$p_\pm = \partial_t \pm \partial_x$, $q_\pm = \partial_t \pm 2\partial_x$, $d_* = 2^{d-1}$, R jest gęstością cząstek o prędkości 0 i energii wewnętrznej $e_R = 2$, patrz [PLA IX].

Dla modelu dwuwymiarowego (d=2) wkład do zmiany funkcji rozkładu w wyniku zderzeń dają dodatkowo operatory

$$Q_3 = \sigma_3(N_2N_3 - N_1N_4)$$

$$\overline{Q}_1 = \sigma_1(N_4R - M_2N_3), \quad \overline{Q}_2 = \sigma_2(M_1N_4 - N_3R), \tag{3.2}$$

patrz [PLA IX], gdzie podano też odpowiednie równania ewolucji. Można sprawdzić, że modele spełniają prawa zachowania masy, pędu i energii, przy czym $e_R = 2$. W przypadku trójwymiarowym, $(x_1 = x, x_2, x_3)$, wektory prędkości odpowiadające M_1, M_2 mają postać $(\pm 2, 0, 0)$; $(1, \pm a_2, \pm a_3)$, dla N_1, N_3, N_5, N_7 ; $(-1, \pm a_2, \pm a_3)$ dla N_2, N_4, N_6, N_8 i $(0, 0, 0)$ dla R. Dla $x = x_1$ projekcji tego modelu $N_{2i} = N_2$,$N_{2i+1} = N_1$, i układ równań ma postać

$$p_+N_1 = Q_1 + Q_2 = -p_-N_2,\ q_+M_1 = -4Q_2, q_-M_2 = 4Q_1,\ R_t = 4(Q_2 - Q_1) \tag{3.3}$$

a wielkości makroskopowe: M-masa, J-pęd, E-energia, są zdefiniowane wzorami

$$M = 4(N_1 + N_2) + M_1 + M_2 + R, \tag{3.4}$$

$$J = 4(N_1 - N_1) + 2(M_1 - M_2), E = 2(N_1 + N_2 + M_1 + M_2 + R) \tag{3.4'}$$

Dla tak zdefiniowanej hierarchii modeli w [PLA IX] znaleziono ścisłe rozwiązania periodyczne i rozwiązania w postaci solitonowej. Szczegóły będą omówione w rozdziale 3 części II.

CZĘŚĆ II. ŚCISŁE ROZWIĄZANIA ZAGADNIEŃ GRANICZNYCH

Jak wiadomo, liczba ścisłych rozwiązań równania Boltzmanna jest niewielka. Uważa się, że problemy graniczne dla równania Boltzmanna są przy tym na ogół trudniejsze, niż odpowiednie problemy początkowe [Bel 10]. Jest to jeden z powodów, dla których wzrosło zainteresowanie modelami równania Boltzmanna. Dla pewnych klas takich modeli można znaleźć ścisłe rozwiązania i przebadać ich własności, np. jednoznaczność, asymptotyczne zachowanie się rozwiązań i ich zależność od parametrów, opisujących oddziaływanie cząstek z brzegiem i między sobą.

Jak już wspominaliśmy we wstępie, jedną z istotnych cech modeli dyskretnych jest fakt, iż w pewnych przypadkach można znaleźć ścisłe rozwiązania zagadnień modelujących przepływy gazów. Rownania opisujące modele dyskretne są hiperbolicznymi, nieliniowymi równaniami cząstkowymi. Ze względu na interpretację fizyczną narzucamy też warunek nieujemności funkcji rozkładu. Poszukiwanie ścisłych rozwiązań jest na ogół trudnym problemem, zarówno w przypadku zagadnień granicznych, jak i zagadnień ze ściankami.

Istnienie ograniczonych rozwiązań o charakterze globalnym wiąże się z postacią operatorów zderzeniowych. W przypadku zagadnień brzegowych i początkowo-brzegowych wymagane są odpowiednie własności oddziaływania cząstek ze ściankami.

Omówimy wpierw ścisłe rozwiązania dwóch podstawowych klas zagadnień granicznych dla modeli dyskretnych, uzyskane przez autora (rozdziały 1 i 2). Pierwsze z nich jest to zagadnienie struktury fali uderzeniowej. Drugie - to problem istnienia i jednoznaczności stacjonarnych rozwiązań w obszarach ze ściankami. W rozdziale 3 omówimy uzyskane przez autora rozwiązania periodyczne i rozwiązania w postaci solitonowej dla nowych klas modeli dyskretnych, uwzględniających przekaz energii kinetycznej w zderzeniach. W rozdziale 4 omówimy udowodnione przez autora twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla modeli dyskretnych ze zderzeniami wielocząstkowymi, zaproponowanych w części I.

1. Struktury fal uderzeniowych w gazach dyskretnych

W tym rozdziale omówimy znalezione przez autora rozwiązania równań dla modeli gazów z oddziaływaniami wielocząstkowymi i mieszanin gazów, zdefiniowanych w części I, mające postać płaskiej fali uderzeniowej.

Problem istnienia rozwiązań równania Boltzmanna w postaci fal uderzeniowych o dowolnej liczbie Macha jest rozwiązany jedynie dla gazów pojedynczych, przy założeniu bliskości stanów równowagowych przed i za falą (odpowiadającemu słabym falom uderzeniowym).

Dla pewnych modeli dyskretnych można uzyskać ścisłe rozwiązania w przypadku ogólnym, oraz zbadać wpływ parametrów fizycznych (np. stosunków mas, gęstości, zderzeniowych przekrojów czynnych) na strukturę fali uderzeniowej.

Szczególnie interesujące są mieszaniny gazów o skrajnie różnych masach atomowych, w których występuje kilka skal relaksacyjnych i ciekawe efekty nierównowagowe.

W tym rozdziale omówimy wyniki, uzyskane w tym kierunku w pracach [PŁA I-III,VIII].

1a) Struktura fali uderzeniowej w gazach pojedynczych z uwzględnieniem oddziaływań wielocząstkowych.

W [PŁA VIII] zostały znalezione rozwiązania w postaci stacjonarnej fali uderzeniowej i zbadana struktura fali dla podstawowego w teorii gazów sieciowych modelu - modelu heksagonalnego z uwzględnieniem wszystkich rodzajów zderzeń potrójnych i wybranych klas zderzeń wyższych rzędów. Otrzymano rozwiązania - profile fal uderzeniowych - zarówno w przypadku warunków granicznych odpowiadających tzw. nieskończonej liczbie Macha, jak i w przypadku ogólnych warunków granicznych odpowiadających dowolnym funkcjom rozkładu Maxwella przed i za falą. Uzyskanie rozwiązań jest tu ułatwione dzięki symetrii problemu (poszukujemy rozwiązania w postaci płaskiej fali uderzeniowej), która redukuje zagadnienie do problemu jednowymiarowego, oraz dzięki istnieniu całek pierwszych, odpowiadającym prawom zachowania wielkości makroskopowych. Własności te redukują zagadnienie do zagadnienia brzegowego dla jednego lub dwóch (w zależności od liczby Macha i kierunku propagacji fali, patrz [PŁA VIII]) równań zwyczajnych.

Autor przeprowadził analizę osobliwości stanów równowagowych przed i za falą, oraz zbadał wpływ zderzeń wielocząstkowych na profil fali uderzeniowej. Obecnie omówimy uzyskane w tej pracy wyniki.

Równania ewolucji definiujące model zostały wypisane w części I, wzory (1.8-13). Niech $e_x, cos(\frac{\pi}{3})e_x - sin(\frac{\pi}{3})e_y$ będą badanymi kierunkami propagacji fali. Omówimy tu rozwiązanie w kierunku u_1, identyfikowanym z wersorem e_x. Szukamy rozwiązania w postaci

$$N_i(t,r) = N_i(z), \quad z = x + \beta t, \quad i = 1, \ldots 6 \tag{1.1}$$

tzn. w postaci fali rozchodzącej się w kierunku u_1, takiego, że dla $z \to \pm\infty$ rozwiązanie dąży do odpowiedniego stanu równowagowego (patrz niżej).

Założenia symetrii $N_5 = N_3, N_6 = N_2$, redukują układ równań do

$$(\beta + 1)N_1' = Q_B^* + Q_T + Q_H^1 + Q_M^1, \tag{1.2a}$$

$$(\beta + 0.5)N_2' = -\frac{1}{2}Q_B^* - Q_T + Q_H^2 + Q_M^2, \tag{1.2b}$$

$$(\beta - 0.5)N_3' = -\frac{1}{2}Q_B^* + Q_T + Q_H^3 + Q_M^3, \tag{1.2c}$$

$$(\beta - 1)N_4' = Q_B^* - Q_T + Q_H^4 + Q_M^4, \tag{1.2d}$$

$$Q_B^* = Q_B + Q_P = (1 + 2\sigma_P N)(N_2 N_3 - N_1 N_4), \tag{1.3}$$

$$Q_T = \sigma_T(N_2^2 N_4 - N_3^2 N_1), \tag{1.4}$$

$$N = N_1 + 2N_2 + 2N_3 + N_4. \tag{1.5}$$

$Q^i_H, Q^i_M, i = 1,...4$ są zdefiniowane w części I; indeks $'$ oznacza pochodną przestrzenną $\frac{d}{dz}$, stosujemy normalizację $2\sigma_B = 1$.

Powyższy układ ma dwie całki pierwsze, odpowiadające równaniom zachowania masy i x-owej składowej pędu

$$(\beta+1)N_1 + (2\beta+1)N_2 + (2\beta-1)N_3 + (\beta-1)N_4 = C_1$$
$$(\beta+1)N_1 + (\beta+0.5)N_2 - (\beta-0.5)N_3 - (\beta-1)N_4 = C_2, \quad \forall z \epsilon R. \tag{1.6}$$

Problem istnienia fali uderzeniowej sprowadza się do rozwiązania układu (1.2) - (1.4) z warunkami w $\mp\infty$ odpowiadającymi rozkładowi Maxwella, przy czym Maxwellian jest tu wektorem $(m_1, ...m_4)$ takim, że dla $N_i = m_i$ w (1.2) mamy $Q_B = Q_T = 0$, tj.

$$m_2 m_3 = m_1 m_4$$
$$m_2^2 m_4 = m_1 m_3^2 \tag{1.7}$$

Oznaczmy:

$$\lim_{z\to\mp\infty} N_i(z) = m_i^{\mp}, \qquad i = 1,...4, \tag{1.8}$$

i załóżmy dla uproszczenia, że

$$\lim_{z\to+\infty} N_i(z) = m, \qquad i = 1...4, \tag{1.9}$$

gdzie m jest danym parametrem (np. $m = 0.5$). Znajomość m i prędkości propagacji β wyznacza maxwellian w $-\infty$, patrz [PŁA VIII].

Okazuje się, że w ciekawym przypadku tzw. nieskończonej liczby Macha, zagadnienie redukuje się do rozwiązania prostego RRZ np. na N_4, z warunkiem granicznym $\lim_{z\to-\infty} N_4 = 0$, patrz [PŁA VIII].

W przypadku ogólnego maxwellianu, rozwiązujemy równania zachowania względem N_3, N_4

$$N_3 = \frac{1}{\beta - 0.5}(b_1 + b_2)$$
$$N_4 = \frac{1}{\beta - 1}(b_1 + 2b_2) \tag{1.10}$$

gdzie

$$b_1 = C_1 - (\beta+1)N_1 - (2\beta+1)N_2$$
$$b_2 = C_2 - (\beta+1)N_1 - (\beta+0.5)N_2$$

Całki pierwsze redukują problem do rozwiązania układu

$$N_1' = \frac{Q_B^* + Q_T + Q_H^1 + Q_M^1}{\beta+1} \tag{1.11}$$

$$N_2' = -\frac{\frac{1}{2}Q_B^* + Q_T - Q_H^2 - Q_M^2}{\beta + 0.5} \tag{1.12}$$

z warunkami granicznymi

$$\lim_{z \to \mp\infty} N_i = m_i^{\mp}, \quad i = 1,2, \tag{1.13}$$

gdzie $m_i^+ = m$ jest daną liczbą (parametr skalujący), β jest wolnym parametrem, m_i^-, $i = 1,2$ są określone wyżej.

Można łatwo pokazać, że na płaszczyźnie fazowej (N_1, N_2) punkty (m_1^-, m_2^-) i (m_1^+, m_2^+) są punktami osobliwymi układu (1.11-12). Poszukujemy krzywej całkowej układu (1.11-12), łączącej te punkty. W [PŁA VIII] przeprowadzona jest analiza charakteru ich osobliwości, ważna dla efektywnego wyznaczenia szukanej krzywej całkowej.

W pracy [PŁA VIII] zastosowana jest metoda numerycznego całkowania danego układu, stosująca klasyczny schemat Runge - Kutty IV rzędu. Rozwiązanie determinuje wszystkie interesujące wielkości makroskopowe, opisujące falę uderzeniową. Metoda ta pozwoliła autorowi w systematyczny sposób zbadać wpływ zderzeń rzędu wyższego niż drugi na makroskopowe profile w fali. W ogólności zderzenia wyższego rzędu powodują zmniejszanie się grubości fali, jednakże poszczególne rodzaje zderzeń mają różny wpływ zarówno na grubość, jak i na przebieg profili makroskopowych w fali uderzeniowej.

Ciekawą cechą otrzymanych profili jest jest występowanie tzw. długich ogonów relaksacyjnych, związanych z oddziaływaniami trójcząstkowymi, patrz [Pła VIII]. Analogiczne rozważania zostały przeprowadzone dla drugiego kierunku propagacji fali uderzeniowej, pod kątem $\pi/6$ do osi Ox. Rezultaty są jakościowo zgodne z omówionymi wyżej, patrz rys. 3-5.

Na zakończenie tego paragrafu krótko omówimy interesujący efekt, uzyskany w [PŁA II] dla profili falowych w gazach pojedynczych. Klasyczne profile fali uderzeniowej mają charakter monotoniczny. W [PŁA II] odkryto niemonotoniczny przebieg (tzw. przerzut) lokalnej entropii

$$E = -\sum_{i=1}^{p} N_i ln N_i \tag{1.14}$$

w rozwiązaniach typu fal uderzeniowych dla modeli dyskretnych Broadwella. Wszystkie pozostałe wielkości makroskopowe mają przebieg monotoniczny. Przerzut entropii występuje też w mieszaninach. W szczególności w [PŁA III] efekt ten znaleziono w mieszaninie gazów Knudsena. Ostatnio przerzut entropii został otrzymany w [Cor 17-19] dla innych modeli mieszanin. Jego obecność i wielkość zależą od parametrów, determinujących stan makroskopowy gazów przed i za falą.

Ib) Analiza struktury fali uderzeniowej w mieszaninie gazów Broadwella

Problem struktury fali uderzeniowej w mieszaninach gazów jest interesujący zarówno z teoretycznego punktu widzenia, jak i z punktu widzenia zastosowań. W

[PŁA I] znaleziono rozwiązania w postaci płaskiej fali uderzeniowej dla mieszaniny gazów Broadwella. Omówimy uzyskane w tej pracy wyniki.

Model ten został zdefiniowany w rozdziale 2b, Cz. I, i jest w przypadku jednowymiarowym opisywany przez sześć funkcji rozkładu $N_1, N_2, N_3, M_1, M_2, M_3$, spełniających równania ewolucji (2.9) - (2.14).

Rozwiązaniem w postaci stacjonarnej fali uderzeniowej jest układ funkcji

$$N_i = N_i(x - st), \qquad M_i = M_i(x - st), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1.15}$$

takich, że dla argumentów dążących do $\mp\infty$ wartości tych funkcji dążą do odpowiednich wartości równowagowych, patrz [PŁA I]. Wstawiając tę postać rozwiązania do równań i zauważając, że uzyskany układ sześciu równań zwyczajnych ma trzy całki pierwsze, odpowiadające trzem prawom zachowania, otrzymujemy układ trzech równań zwyczajnych z warunkami granicznymi odpowiadającymi stanom równowagowym przed i za falą uderzeniową. Parametry makroskopowe odpowiadające tym stanom spełniają zależności, analogiczne do warunków Rankina-Hugoniota w klasycznej dynamice gazów. W płaszczyźnie fazowej badanego układu równań, punkty odpowiadające stanom równowagowym są punktami osobliwymi. Rozwiązaniem w postaci fali uderzeniowej jest krzywa całkowa łącząca te punkty. Konkretne wartości szukanych funkcji rozkładu uzyskuje się rozwiązując ten układ z uwzględnieniem charakteru punktów osobliwych (dwupunktowe zagadnienie brzegowe). Ze znalezionych w ten sposób funkcji rozkładu obliczamy interesujące nas wielkości makroskopowe - struktury fali uderzeniowej.

Wkład do operatora zderzeń dają zarówno zderzenia pomiędzy cząstkami różnych gazów (zderzenia krzyżowe), jak i zderzenia pomiędzy jednakowymi cząstkami. Struktura uzyskiwanych rozwiązań w postaci fal uderzeniowych zależy od stosunku mas atomowych, gęstości gazów, oraz od przekrojów czynnych na poszczególne typy zderzeń. W [PŁA I] dokonano analizy rozwiązań w funkcji występujących w zadaniu parametrów fizycznych. W szczególności istnieje silna zależność struktury fali uderzeniowej od przekrojów czynnych na zderzenia krzyżowe.

1c) Ścisłe rozwiązania w postaci fal uderzeniowych w mieszaninach gazów dwuprędkościowych.

Interesujące jest pytanie o najprostszy model dyskretny (zarówno gazów pojedynczych, jak i mieszanin), dla którego istnieją ścisłe rozwiązania w postaci fal uderzeniowych.

W przypadku mieszanin prostym modelem dla którego istnieją takie rozwiązania jest model mieszaniny dwóch gazów Knudsena, zaproponowany w [PŁA III]. Uzyskanie rozwiązań wynika z faktu, że model jest opisany przez układ czterech równań zwyczajnych, posiadający trzy całki pierwsze. Problem redukuje się w ten sposób do jednego równania różniczkowego typu Riccatiego z warunkami brzegowymi w $\mp\infty$. Otrzymujemy rozwiązanie (funkcje rozkładu) w postaci jawnej, z której następnie uzyskujemy interesujące wielkości makroskopowe.

W szczególności wykryto przerzut lokalnej entropii w ciężkim gazie , por. wzór (15) w [PŁA III].

Analogiczne 4-prędkościowe modele mieszanin gazowych były ostatnio badane w [Qia 1] z punktu widzenia gazów sieciowych.

Uwaga 1.1

Prosty model gazu pojedynczego dopuszczający stacjonarne fale uderzeniowe został badany w pracy [Pła 13]. Jest to model McKeana [McK 1-4]. Łatwo pokazać, że dla modelu Carlemana, odpowiednie rozwiązania nie istnieją.

Uwaga 1.2

Stacjonarne fale uderzeniowe można traktować jako asymptotyczne w czasie rozwiązania zagadnienia Riemanna w rurze uderzeniowej. Proces formowania się fali uderzeniowej został zbadany w [Pła 19] dla mieszaniny gazów Broadwella metodą numerycznego rozwiązania zagadnienia Riemanna z warunkiem początkowym odpowiadającym stanom równowagi

$$x < 0: \quad N_1 = 1, \quad M_1 = \alpha, \quad N_i = M_i = 0, \quad i \neq 1,$$

$$x > 0: \quad N_i = \beta, \quad M_i = \gamma, \quad i = 1,2,3. \tag{1.16}$$

W [Pła 19] uzyskano profile fal uderzeniowych propagujących się z prędkością odpowiadającą teoretycznej. Procedura ta została ostatnio wykorzystana w [Bel 11], [Bia 1] dla innych klas modeli.

2. Ścisłe rozwiązania zagadnień brzegowych

Jednym z interesujących problemów teorii kinetycznej jest jednoznaczność rozwiązań zagadnień brzegowych. Ciekawy jest też wpływ parametrów fizycznych, opisujących zderzenia własne i oddziaływanie z brzegiem. Modele dyskretne dostarczają na ten temat interesujących informacji jakościowych.

W pracach [PŁA V], [PŁA VI] uzyskano ścisłe rozwiązania zagadnień brzegowych dla modeli dyskretnych z ogólnymi afinicznymi warunkami brzegowymi, dopuszczającymi absorpcję i źródła brzegowe. Zbadano też wpływ parametrów opisujących brzeg na istnienie i jednoznaczność rozwiązań stacjonarnych. Obecnie omówimy uzyskane w tych pracach wyniki.

Na wstępie sformułujemy zagadnienie brzegowe dla ogólnego modelu dyskretnego

$$v_i \frac{d}{dr} N_i = Q_i, \tag{2.1}$$

$$i = 1, ...p, \qquad N_i = N_i(r), \qquad r \in \Omega \subset R^n, \tag{2.2}$$

gdzie Q_i jest operatorem zderzeniowym zdefiniowanym we Wstępie, patrz wzór (W2).

Będziemy rozważali przypadek jednowymiarowy, $n = 1$, obszar $\Omega = [-L, +L]$

$$v_{ix} \frac{d}{dx} N_i = Q_i, \tag{2.3}$$

gdzie

$$i = 1, \dots p, \qquad N_i = N_i(x), \qquad x \in \Omega,$$

z ogólnymi warunkami brzegowymi w postaci
Dla $x = -L$ i $v_{ix} > 0$

$$N_i^- = \sum_{j: v_{jx} < 0} \alpha_{ij} N_j^- + \gamma_i. \tag{2.4}$$

Dla $x = +L$ i $v_{ix} < 0$

$$N_i^+ = \sum_{j: v_{jx} > 0} \alpha_{ij} N_j^+ + \gamma_i, \tag{2.5}$$

gdzie

$$N_i = N_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, p \quad x \in [-L, L], \qquad \alpha_{ij} \in R^1_+, \qquad \gamma_i \in R^1,$$

$$N_i^- \equiv N_i(-L), \quad N_i^- \equiv N_i(-L),$$

$$N_i^+ \equiv N_i(+L), \quad N_i^+ \equiv N_i(+L),$$

przy czym sumujemy po indeksach numerujących cząstki, które uderzają odpowiednią ściankę.
Współczynniki α_{ij} opisują fizyczne własności ścianek: $\alpha_{ij} < 1$ odpowiada absorpcji (ścianki porowate), $\alpha_{ij} > 1$ - produkcji cząstek w zderzeniach ze ściankami. W szczególności, jeżeli odpowiedni współczynnik $\alpha_{ij} = 1$, a wszystkie pozostałe α_{ij} oraz γ_i znikają, to otrzymujemy zwierciadlane warunki brzegowe, lub tzw. odwrotne warunki brzegowe. Współczynniki γ_i opisują natężenie źródeł na brzegu ($\gamma_i > 0$), lub natężenie upustów ($\gamma_i < 0$).

Zagadnienie brzegowe polega na znalezieniu rozwiązania układu p równań (2.3), spełniającego warunki brzegowe (2.4), (2.5). W ogólnym przypadku zagadnienie to nie jest rozwiązane. W pracach [PŁA IV, V, VI] autor wykazał, że dla pewnych klas modeli dyskretnych można rozwiązać to zagadnienie i znaleźć konstrukcyjnie jawną postać rozwiązania.

Zasadnicze idee przedstawimy wpierw w podrozdziale 2a) dla modeli dwuprędkościowych [PŁA V], a następnie w 2b) omówimy wyniki uzyskane dla przepływu Couetta gazu 4-prędkościowego Broadwella [PŁA IV]. W podrozdziale 2c) omówimy rezultaty uzyskane dla gazów dyskretnych oddziałujących z tłem w [PŁA VI].

2a) Zagadnienie brzegowe dla ogólnego modelu dwuprędkościowego

W [PŁA V] autor rozwiązał zagadnienie brzegowe dla ogólnego modelu dwuprędkościowego. Poniżej sformułujemy zagadnienie i przedstawimy zasadnicze wyniki.

Niech $N_i, i = 1, 2$ oznaczają funkcje rozkładu cząstek poruszających się w dodatnim i ujemnym kierunku wzdłuż osi x. Równanie ewolucji gazu ma postać

$$(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})N_1 = \alpha N_1^2 + \beta N_1 N_2 + \gamma N_2^2 \equiv Q \qquad (2.6)$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})N_2 = -Q \qquad (2.7)$$

$$t \in [0,\infty), \qquad x \in \Omega \subset R^1,$$

$$N_i(0,x) = N_{i0}(x), \qquad i = 1,2, \qquad (2.8)$$

gdzie współczynniki α, β, γ opisują wzajemne oddziaływanie cząstek. Warto zwrócić uwagę, że wzmiankowane w poprzednim rozdziale modele Carlemana i McKeana są szczególnymi przypadkami modelu (2.6-8).
Rozważmy stacjonarną wersję tego modelu

$$c\frac{d}{dx}N_1 = Q, \qquad (2.9)$$

$$-c\frac{d}{dx}N_2 = -Q, \qquad (2.10)$$

$$x \in [-L, L], \quad L > 0,$$

z warunkami brzegowymi

$$N_1^- = \alpha_1 N_2^- + \beta_1 \qquad (2.11)$$

$$N_2^+ = \alpha_2 N_1^+ + \beta_2 \qquad (2.12)$$

$$\alpha_i \in R^1, \quad \beta_i \in R^1, \quad \epsilon_i \in R^1, \quad i = 1,2,$$

$$N_1^- \equiv N_1(t,-L), \quad N_2^- \equiv N_2(t,-L) \qquad (2.13)$$

$$N_1^+ \equiv N_1(t,+L), \quad N_2^+ \equiv N_2(t,+L) \qquad (2.14)$$

W pracy [PLA V] autor rozwiązał zagadnienie brzegowe (2.9-14), otrzymując rodzinę rozwiązań, indeksowaną parametrami opisującymi oddziaływanie cząstek z brzegiem. Ma ona postać

$$N_1 = -\frac{b}{a} + (N_1^- + \frac{b}{a})e^{a(L+x)}, \qquad (2.15a)$$

$$N_2 = N_1 - C, \qquad (2.15b)$$

gdzie $a = -(\beta + 2\gamma)C$, $b = \gamma C^2$, a $C \neq 0$ i N_1^- są stałymi, wyznaczanymi z warunków brzegowych. Spełniają one równania

$$e^{-2\delta LC} = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - 1} \cdot \frac{-\beta_2\delta + (\gamma - \alpha_2\gamma - \delta)C}{-\beta_1\delta + (\gamma - \alpha_1\gamma + \delta\alpha_1)C}, \qquad (2.16a)$$

$$N_1^- = \frac{\alpha_1 C - \beta_1}{\alpha_1 - 1}, \tag{2.16b}$$

gdzie

$$\delta = \beta + 2\gamma. \tag{2.17}$$

W celu przedyskutowania istnienia i jednoznaczności rozwiązań wygodnie jest przepisać pierwsze z tych równań w postaci

$$f(x) \equiv e^{-nx} - t - \frac{m}{x+1} = 0, \tag{2.18}$$

gdzie n, m, t są danymi funkcjami parametrów brzegowych

$$n = -\frac{2L\delta^2\beta_1}{(\beta+\gamma)\alpha_1 + \gamma}, \tag{2.19a}$$

$$m = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - 1} \cdot [\frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{\gamma(1-\alpha_2) - \delta}{(\beta+\gamma)\alpha_1 + \gamma}], \tag{2.19b}$$

$$t = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - 1} \cdot \frac{(1-\alpha_2)\gamma - \delta}{(\beta+\gamma)\alpha_1 + \gamma}, \tag{2.19c}$$

i

$$x = -\frac{C \cdot (\alpha_1 + 1)}{2\beta_1}, \qquad \beta_1 \neq 0. \tag{2.19d}$$

Podamy przykładowe warunki dostateczne na istnienie rozwiązań, udowodnione w [PŁA V].

Twierdzenie 2.1
Jeżeli

$$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)[\beta + \gamma(\alpha_2 + 1)][\beta\alpha_1 + \gamma(\alpha_1 + 1)] > 0, \tag{2.20a}$$

oraz

$$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)\{[\beta_2\alpha_1 + \gamma(\alpha_1 + 1)] + \beta_1[\beta + \gamma(1 + \alpha_2)]\} > 0, \tag{2.20b}$$

to zagadnienie brzegowe (2.9)-(2.14) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Dla modeli Carlemana i McKeana warunki te są równoważne nierównościom

$$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) > 0, \qquad \beta_1(\alpha_2 + 1) + \beta_2(\alpha_1 + 1) > 0,$$

narzucającym ograniczenia na parametry brzegowe. Następujące twierdzenie daje warunki dostateczne na istnienie dwóch rozwiązań.

Twierdzenie 2.2
Jeżeli

$$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)[\beta + \gamma(\alpha_2 + 1)] \cdot [\beta\alpha_1 + \gamma(\alpha_1 + 1)] < 0, \tag{2.21a}$$

i

$$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)\{\beta_1[\beta + \gamma(1+\alpha_2)] + \beta_2[\beta\alpha_1 + \gamma(1+\alpha_1)]\} > 0, \qquad (2.21b)$$

to zagadnienie brzegowe (2.9)-(2.14) ma dokładnie dwa rozwiązania.
W przypadku modeli Carlemana i McKeana warunki te przybierają postać

$$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) < 0, \qquad \beta_1(\alpha_2 + 1) + \beta_2(\alpha_1 + 1) < 0, \qquad (2.22)$$

(model Carlemana) i

$$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) < 0, \qquad \beta_1\alpha_2 + \beta_2 < 0, \qquad (2.23)$$

(model McKeana). Warunki te nie zapewniają a priori dodatniości rozwiązań. W [PŁA V] znaleziono też inne warunki dostateczne na istnienie rozwiązań, zbadano ich jednoznaczność, podano przykłady dodatnich rozwiązań niejednoznacznych oraz zbadano zależność rozwiązań od parametrów brzegowych.

Uwaga 2.1

Otwartym problemem jest stabilność stanów równowagowych. Obliczenia numeryczne uzyskane w nie omawianej tu pracy [Pła 22] sugerują, iż istnienie dwóch stanów stacjonarnych dla tych samych danych początkowo - brzegowych może mieć wpływ na ewolucję układu do stanu równowagi.

2b) Przepływ Couetta dla płaskiego modelu Broadwella.

Modele dwuprędkościowe nie mają zadowalającej interpretacji fizycznej, w szczególności nie spełniają prawa zachowania pędu. W pracy [PŁA IV] autor znalazł rozwiązania zagadnień brzegowych dla bardziej interesującego fizycznie modelu Broadwella z czterema prędkościami. Model ten spełnia wszystkie prawa zachowania. W pracy tej skonstruowano stacjonarne stany takiego gazu w obszarze między dwiema płytkami dla dyfuzyjnych warunków brzegowych i warunków brzegowych typu porowatych ścianek, dla których istnieje możliwość przepływu masy. Uwzględnia się także możliwość występowania źródeł brzegowych, oraz kombinacji różnych typów odbić.

Otrzymano jawną postać rozwiązania zagadnienia brzegowego. Jest to możliwe dzięki istnieniu dostatecznej liczby całek pierwszych odpowiedniego układu równań opisujących gęstości cząstek. Konstrukcja rozwiązań i ich jawna postać są opisane w [PŁA IV]. Metoda analityczna jest analogiczna do metody zaproponowanej w przypadku ogólnych modeli dwuprędkościowych, i nie będziemy jej tutaj omawiać.

Interesującą cechą rozwiązania jest istnienie, dla tych samych warunków brzegowych, dwóch dodatnich rozwiązań danego zagadnienia brzegowego.

W zastosowaniach teorii kinetycznej istotna jest odpowiedź na pytanie: jakie parametry „bardziej" wpływają na postać rozwiązania: parametry opisujące postać oddziaływania międzycząstkowego, czy też parametry, opisujące oddziaływania z brzegami. W przypadku rozważanego modelu mamy możliwość pełnego zbadania tego problemu dzięki znajomości jawnej postaci rozwiązania. Odpowiednie wyniki omówione są w [PŁA IV], gdzie zbadano też jednoznaczność rozwiązań w zależności od wartości parametrów brzegowych.

2c) Zagadnienie brzegowe dla gazów oddziałujących z tłem

Interesujące z punktu widzenia zastosowań i możliwości uzskania ścisłych rozwiązań są też modele gazów oddziałujących z tłem. W [PLA VI] zbadano mechaniczne własności takich modeli, znaleziono ścisłe rozwiązania zagadnień stacjonarnych dla takich modeli z ogólnymi warunkami brzegowymi, i zbadano ich własności.

Ogólna postać modeli gazów oddziałujących z tłem jest następująca

$$(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x}) N_i = L_i, \qquad i = 1, ...p, \tag{2.24}$$

gdzie:

$$L_i = Q_i(N, N) - \epsilon N_i + \eta \chi_i \rho + S_i, \tag{2.25}$$

$$t \in [0, \infty), \qquad x \in R^n,$$

Q_i jest operatorem zderzeń dwucząstkowych,

ρ jest gęstością gazu,

ϵ jest współczynnikiem absorpcji tła, (makroskopową częstością zderzeń absorpcyjnych),

η jest współczynnikiem generacji,

χ_i oznacza ułamek liczby generowanych cząstek o prędkości v_i. Współczynnik S_i opisuje natężenie objętościowego źródła ($S_i > 0$) lub upustu ($S_i < 0$) cząstek o prędkości v_i. Operator Q_i może np. opisywać gaz Broadwella lub też ogólny model dwuprędkościowy. W tym ostatnim przypadku ma on postać:

$$Q_i(N_i, N_j) = a_i N_i^2 + b_i N_i N_j + c_i N_j^2 + d_i N_i + e_i N_j + f_i. \tag{2.26}$$

a_i charakteryzuje zmianę gęstości składnika i wskutek oddziaływania cząstek i ze sobą,

b_i opisuje wzajemną interakcję składników i oraz j,

c_i charakteryzuje zmianę N_i w wyniku wzajemnego oddziaływania cząstek składnika j. np. kreację N_i,

d_i charakteryzuje zmianę gęstości składnika i w wyniku oddziaływania z cząstkami tła: $d_i > 0$ - kreację, $d_i < 0$ - anihilację składnika i.

e_i opisuje zmianę N_i powodowaną obecnością składnika j,

f_i jest natężeniem źródeł (upustów) składnika i.

W [Pła VI] uzyskano ścisłe rozwiązania zagadnień brzegowych dla przestrzennego (6-prędkościowego) i dla płaskiego (4-prędkościowego) modelu Broadwella oraz dla wybranych modeli dwuprędkościowych cząstek oddziałujących z tłem.

Pokazano:

1. istnienie jednoznacznych rozwiązań dodatnich dla interesujących sytuacji fizycznych.
2. zależność wyników od parametrów fizycznych, determinujących zagadnienie.
3. możliwość istnienia dwóch rozwiązań dodatnich dla ustalonych wartości parametrów brzegowych i parametrów opisujących tło.

4. nieistnienie płaskich fal uderzeniowych dla dyskretnych modeli Broadwella gazów oddziałujących z tłem.
Analogiczne wyniki dla pewnych innych klas modeli np. z anizotropią przestrzenną zostały opublikowane w [Pła 20], nie omawianej w niniejszym opracowaniu.

3. Rozwiązania periodyczne i solitonowe dla hierarchii modeli wielowymiarowych z transferem energii.

W pracy [PŁA IX] znaleziono ścisłe rozwiązania periodyczne i rozwiązania w postaci solitonowej dla pewnej nowej klasy modeli w jednym i wielu wymiarach. W modelach tych następuje wymiana energii kinetycznej i wewnętrznej. Interesującą cechą tych modeli jest fakt, że pewne klasyczne zagadnienia falowe redukują się do problemu rozwiązywania układu sprzężonych równań Ricattiego. W pracy tej znaleziono również profile fal uderzeniowych rozwiązując odpowiedni układ dynamiczny. Omawiane tu modele zostały zdefiniowane w części I, wzory (3.1-3).

W przypadku rozwiązań periodycznych, rozwiązania poszukujemy w postaci

$$N_1(x,t) = n_{01} + 2Re(n_1/D), \; N_2(x,t) = N_1(-x,t),$$

$$R(x,t) = m_{01} + 2rRe(1/D) = R(-x,t)$$

$$M_1(x,t) = m_{01} + 2Re(m_1/D), \;\; M_2(x,t) = M_1(-x,t). \tag{3.1}$$

przy czym parametry $n_1 = n_{1R} + in_{1I} = |n_1|e^{i\theta}$, $m_1 = m_{1R} + im_{1I}$ są zespolone, n_{01}, m_{01}, r, δ, ρ, γ są rzeczywiste, $D = 1 + \delta e^{i\gamma x + \rho t}$.

Podstawiając postulat (3.1) do równań (3.1-3) z części I otrzymuje się rozwiązanie w postaci, patrz rys. 6:

$$N_1 = 1 + 2Re[(1 + i\sqrt{38})/2D], \;\; R = 117/176 + (78/11)Re(1/D)$$

$$M_1 = 117/176 + 2Re[(91/44)(1 + i\sqrt{38}/14]/D, \quad D = 1 + \delta e^{(19/6)(t + ix/\sqrt{38})} \tag{3.2}$$

Zauważmy że dla $t \to \infty$ otrzymujemy $\lim N_i = n_{01} = 1 > 0$ i $\lim M_i$, $R = m_{01} > 0$. Rozwiązania są dodatnie dla δ dostatecznie dużych, i dążą asymptotycznie do zera, patrz [PŁA IX].

Ciekawą klasą rozwiązań są rozwiązania solitonowe. W omawianej pracy znaleziono dwie klasy takich rozwiązań. Pierwsza, klasyczna, dająca monotoniczne profile, ma postać

$$N_i = n_{0i} + n_i/D, \; M_i = m_{0i} + m_i/D, \; i = 1,2, \; R = r_0 + r/D, \; D = 1 + w, \; w = e^{\gamma\eta} \tag{3.3}$$

gdzie $\eta = x - \zeta t$. W tym przypadku znaleziono rozwiązania dodatnie zarówno dla nieskończonej liczby Macha, jak i dla ogólnych warunków granicznych.

Drugi, nowy typ rozwiązań znaleziony w [PŁA IX] jest interesujący z punktu widzenia profili makroskopowych:

$$N_i = n_{0i} + (n_{1i} + wn_{2i})/D, \;\; M_i = m_{0i} + (m_{1i} + wm_{2i})/D, \;\; R = r_0 + (r_1 + wr_2)/D$$

$$D = 1 + w\delta_1 + w^2\delta_2, \quad w = e^{\gamma\eta}, \quad \eta = x - \zeta t \tag{3.4}$$

Rozwiązanie uzyskuje się konstrukcyjnie, w wyniku żmudnych przekształceń algebraicznych. W obu omawianych przypadkach kłuczową rolę odgrywają prawa zachowania (warunki Rankina - Hugoniota), które redukują wyjściowy układ 5 nieliniowych równań cząstkowych do dwóch równań cząstkowych, plus trzech liniowych relacji między szukanymi funkcjami. Główne różnice pomiędzy tymi rozwiązaniami a rozwiązaniami klasy pierwszej polegają na tym, że:

po pierwsze, dodatniość stanów równowagowych nie jest warunkiem dostatecznym na dodatniość rozwiązań w całym obszarze zmienności funkcji;

po drugie: rozwiązania nie muszą być monotoniczne. W pracy wykazano istnienie rozwiązań niemonotonicznych, w szczególności gęstości i energii, patrz rys. 7,8. Wykazano też, że uzyskane rozwiązania są dodatnie.

4. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla modeli gazów z oddziaływaniami wielocząstkowymi.

W tym rozdziale omówimy udowodnione przez autora twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności zagadnień początkowych dla modeli gazów z oddziaływaniami wielocząstkowymi, przedstawionych w części I.

Jak wiadomo, do najistotniejszych założeń przy wyprowadzaniu równania Boltzmanna należą założenia o dużym rozrzedzeniu i lokalności oddziaływań w gazie. Operator zderzeniowy Boltzmanna jest lokalny przestrzennie (tzn. funkcje rozkładu zależą od tego samego argumentu przestrzennego - oddziaływanie ma charakter punktowy) oraz kwadratowy względem funkcji rozkładu. Odrzucenie założenia o lokalności przestrzennej lub o kwadratowej postaci operatora zderzeniowego) prowadzi do równań gorzej zbadanych niż równanie Boltzmanna. Z tego względu interesujące wydaje się badanie odpowiednich modeli dyskretnych, w szczególności takich, dla których można udowodnić globalne twierdzenia o istnieniu rozwiązań.

Ogólna postać takich modeli została podana we wstępie, patrz wzór (W6). Są to układy hiperboliczne równań cząstkowych półliniowych, w których część nieliniowa jest wielomianem rzędu wyższego niż drugi względem szukanych funkcji rozkładu. Przykładem jest model Broadwella ze zderzeniami trójcząstkowymi, patrz [PŁA VII], gdzie udowodniono globalne w czasie twierdzenie o istnieniu rozwiązań dla modelu Broadwella ze zderzeniami trójcząstkowymi. Odpowiednie twierdzenie ma postać

Twierdzenie 4.1
Niech dane początkowe spełniają oszacowania

$$0 \leq N_i(0, x) \leq K_0, i = 1, 2, 3 \tag{4.1}$$

$$\int (N_1 + N_2 + 4N_3)(0, x)dx = L_0 \leq \infty, \qquad L_0(1 + 12\sigma K_0) \leq \epsilon. \tag{4.2}$$

Wtedy istnieje jednoznaczne rozwiązanie $N_i(t, x) \in C([0, T), C_b^1)$ zagadnienia Cauchy'ego dla modelu Broadwella ze zderzeniami trójcząstkowymi, spełniające dla każdego $t \in [0, T), x \in R$ oszacowanie

$$N_i(t,x) \leq 2K_0, \quad i = 1,2,3. \tag{4.3}$$

Dowód polega na znalezieniu odpowiedniego oszacowania apriori na rozwiązanie lokalne i przedłużeniu rozwiązania na dowolny odcinek czasu. W cytowanej pracy udowodniono także globalne w czasie twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla modeli ze zderzeniami dowolnej krotności, zdefiniowanymi w rozdziale 2a) części I niniejszego opracowania.

Uwaga 4.1

Dla wzmiankowanego w Części I modelu Carlemana ze zderzeniami N-cząstkowymi dowód twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności został przeprowadzony w pracy [Pła 12] (nie omawianej w niniejszej rozprawie).

Uwaga 4.2 - Model Carlemana-Enskoga

Powyższe rozważania dotyczyły modeli z oddziaływaniami wielocząstkowymi o charakterze lokalnym, w tym sensie, że szukane funkcje rozkładu są liczone w tym samym punkcie. Prostym modelem uwzględniającym nielokalność oddziaływań jest zaproponowany w (nie omawianej tu) pracy [Pła 15] model Carlemana - Enskoga, patrz Uwaga 1.3 w Części I, wzory (1.19), (1.20). Model ten jest opisywany przez układ równań różniczkowych cząstkowych z przesuniętymi argumentami. Zagadnienia istnienia rozwiązań są dla takich równań słabo zbadane. W zaproponowanym modelu okazało się, że dzięki specyficznej strukturze członu zderzeniowego, można udowodnić globalne w czasie twierdzenie o istnieniu.

Można oczekiwać, że w przyszłości powstaną modele operatorów zderzeniowych uwzględniające zarówno nielokalność oddziaływań, jak i zderzenia wielocząstkowe. Modele takie mogą być interesujące zarówno matematycznie, jak i z punktu widzenia zastosowań.

BIBLIOGRAFIA

Niektóre używane skróty:

AM = Archives of Mechanics,
B.E. = B.e. = BE = Boltzmann Equation,
BVP = Boundary Value Problem,
CMP = Communications in Mathematical Physics,
CPAM = Communications in Pure and Applied Mathematics,
CRASP = Compte Rendue de l'Academie de Science de Paris,
DBE = Discrete Boltzmann Equation,
DBM = Discrete Boltzmann Model,
DKT = Discrete Kinetic Theory,
DKM(s) = Discrete Kinetic Model(s),
D(V)Ms = Discrete (Velocity) Models,
D(V)G = Discrete (Velocity) Gas,
I(B)VP = Initial (Boundary) Value Problem,
M3AS = Mathematical Models and Methods in Applied Sciences,
JMP = Journal of Mathematical Physics,
JSP = Journal of Statistical Physics,
TTSP = Transport Theory and Statistical Physics.

[[Alv 1]] A.S.Alves, *Comportement asymptotique des solutions de l'equation de Boltzmann pour un gaz a 14 vitesses*, CRASP **302, s.I** (1986), 367-370.

[[Alv 2]] A.S.Alves, *Discrete Kinetic Models with External Forces*, preprint.

[[Alv 3]] A.S.Alves, *A Kinetic Discrete Model of a Gas Under an Harmonic Oscillator Potential*, Mech. Res. Comm. **16, 4** (1989), 235.

[[Alv 4]] A.S.Alves, *Study of a discrete kinetic model of a gas under a newtonian potential*, Eur.J.Mech. B/Fluids **9, 5** (1990), 457-467.

[[Alv 5]] *Discrete Models of Fluid Dynamics*, Ser. on Adv. in Math. for Appl. Sci., ed. A. Alves, World Sci., London 2 (1991).

[[Azm 1]] Y.Y.Protopopescu, Proc. of 16th RGD, Pasadena, ed. E.P.Muntz et al. **118** (1989), 15-28.

[[Bab 1]] H.Babovsky, M.Padula, *A new approach to nonlinear stability of a one-dimensional Broadwell model*, Stability (1990).

[[Bal 1]] M.Balabane, *Ondes progressives et resultats d'explosion pour des systemes non lineaires du premier ordre*, CRASP **t.302, s.I.** (1986), 211-214.

[[Bal 2]] M.Balabane, *Un resultat d'existence globale pour le systeme de Carleman*, CRASP **t.303, s.I** (1986), 919-922.

[[Bar 1]] C.Bardos, F.Golse, D.Levermore, *Fluid Dynamic Limits of Discrete Velocity Kinetic Equations*, in Adv. in Kinetic Theory and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, ed.R.Gatignol, Soubbaramayer (1991), 57-72.

[[Bea 1]] T.Beale, *Large-Time Behaviour of the Broadwell Model of a Discrete Velocity Gas*, CMP **102** (1985), 217-235.

[[Bea 2]] T.Beale, *Large-Time Behaviour of Discrete Velocity B.E*, CMP **106** (1986), 659-678.

[[Bel 1]] N.Bellomo, *On the discrete B.e.for binary gas mixtures: theory and some applications*, Rap.Int.Polit.Torino **N 7** (1983).

[[Bel 2]] N.Bellomo, E.Longo, *On the discretization of the B.e.for binary gas mixtures: theory and application in molecular fluid dynamics*, L'Aerotecnica Missili e Spazio **62, 3** (1983), 146-153.

[[Bel 3]] N.Bellomo, L. de Soccio, *The discrete BE for gas mixtures: a regular space model and a shock wave problem*, Mech.Res.Comm. **10** (1983), 233-238.

[[Bel 4]] N.Bellomo, R.Illner, G.Toscani, *Sur le probleme de Cauchy pour l'equation de Boltzmann semidiscrete*, CRASP **299, s.I, n 16** (1984), 835-838.

[[Bel 5]] N.Bellomo, R.Monaco, *Molecular gas flow for multicomponent gas mixtures: some dvms of the B.E. and applications*, Appl. of Math. in Technol., Ed. V.Boffi, H.Neunzert, Teubner Verl., Stuttgart (1984), 396-414.

[[Bel 6]] N.Bellomo, G.Toscani, *On the semidiscrete B.e.*, Rap.Int.Polit. Torino, **13** (1983).

[[Bel 7]] N.Bellomo L.de Socio, *On the discrete B.e. for binary gas mixtures*, RGD Symp. Eds. Belotcerkovski, et al, Plenum Press, N.Y. **2** (1986), 1269-1276.

[[Bel 8]] N.Bellomo, *The discr. and semidiscr. B.e. for gas mixtures: theory, ivps, some nonlinear wave phenomena*, Onde e Stabilita nei Mezzi Continui, Ed. A.Anile et al, Catania (1986), 9-34.

[[Bel 9]] N.Bellomo, A.Palczewski, G.Toscani, *Mathematical Topics in Nonlinear Kinetic Theory*, World Sci., Singapore, New Jersey, London (1989).

[[Bel 10]] N.Bellomo, S.Kawashima, *The discrete B.E. with Multiple Collisions: Global Existence and Stability for the IVP*, J.Math.Phys. **31** (1990), 245-253.

[[Bel 11]] N.Bellomo, E.Longo, *Shock wave profiles in one dimension by the D BE with multiple collisions*, Waves and Stability in Cont. Media, Ed. S.Rionero, World Sci., London, Singapore (1991).

[[Bel 12]] N.Bellomo, I.Bonzani, *Nonlinear Shock Waves by the DBE*, Proc. I Int. Conf. on Shock Propagation, ed. E. Cohen, SIAM (1991).

[[Bel 13]] N. Bellomo, E. Longo, *A New Discretized Model in Nonlinear Kinetic Theory: The Semicontinuous Boltzmann Equation*, M3AS **1**, **1** (1991).

[[Bel 14]] N. Bellomo, A. Palczewski, *Semicontinuous Models of the B.E.*, preprint.

[[Bel 15]] N. Bellomo, T. Gustafson, *The dBe: A review of the mathematical aspects of the initial and initial boundary value problem*, Review Math. Phys. **3, 137** (1991).

[[Bel 16]] N. Bellomo, G. Toscani, *On the Cauchy problem for the dBe with multiple collisions: Existence, uniqueness and stability*, Stability and Appl. Anal. **1** (1990).

[[Bia 1]] M. Pandolfi Bianchi, *Discrete BE with Multiple Collisions. Modelling and Nonlinear Shock Waves*, TTSP **20, 5-6** (1991), 463-482.

[[Bob 1]] A.V.Bobylev, V.V Vedenjapin, *On the maximum principle for discrete models of the B.e. and on the connection between the discrete and inverse collision integrals of this equation*, Sov.Math.Dokl. **18** (1977), 413-417 (in russian:. Dokl.Akad.Nauk SSSR, vol 233, 1977 pp. 519-522).

[[Bob 2]] A.Bobylew, *On the nonlinear Boltzmann equation and exact solutions of the Carleman system*, Math. Congress Warsaw (1983), Book of Abstracts B29 (in russian).

[[Bob 3]] A.Bobylew, E.B.Dolgoscina, *Regular numerical solution of the shock structure problem for arbitrary Mach numbers in a two-dimensional Boltzmann gas - (in russian)*, Preprint of Kieldysh Inst.Appl.Math. **N 103** (1989), Moscow.

[[Bof 1]] V.C.Boffi, K.Aoki, Nuovo Cimento **10 D** (1988), 1013.

[[Bof 2]] V.C.Boffi, G.Spiga, Proc.XVI RGD Symp. (July 1988), E.P.Muntz Ed. AAIA, N.Y..

[[Bof 3]] V.C.Boffi, V.Protopopescu, Y.Y.Azmy, *Exact solutions for a semilinear system with general quadratic interactions*, Nuovo Cimento, to appear.

[[Bof 4]] V.C.Boffi, M.Torrisi, TTSP, to appear.

[[Bon 1]] J.M.Bony, *Solutions globales bornees pour les modeles discrets de l'eq. de Boltzmann en dimension 1 d'espace*, Actes Journees Eq.aux Deriv.Partiel. St.Jean de Monts Ec.Polyt. (1987), N XVI.

[[Bon 2]] J.M.Bony, *Existence globales a donnees de Cauchy petites pour les modeles discrets de l'equation de Boltzmann*, subm. to Comm. in PDE.

[[Bon 3]] J.M.Bony, *Existence globale et diffusion en theorie cinetique discrete*, Adv.in Kin.Theory and Cont.Mechanics, Springer Verlag ed. R.Gatignol, Soubbaramayer (1991), 81-90.

[[Bonz 1]] I. Bonzani, N. Bellomo, *Mathematical aspects of shock wave phenomena by the DBE*, in Nonlinear and Dissipative Waves, ed. D. Fusco, Pitmann, London (1991).

[[Bor 1]] G.Borgioli, R.Monaco, G.Toscani, *The semidiscrete Enskog equation*, Proc. of Waves and Stability in Cont. Media, S. Rionero ed. World Sci. Singapore (1990).

[[Bor 2]] G.Borgioli, A. Pulvirenti, G.Toscani, *Existence and Uniqueness of the semidiscrete Enskog equation*, preprint (1990).

[[Bro 1]] J.E.Broadwell, *Study of Rarefied Shear Flows by the Discrete Velocity Method Space Technology Laboratories*, Inc.Rept. 9813-6001-RU000, (1963).

[[Bro 2]] J.Broadwell, *Shock Structure in a Simple Discrete Velocity Gas*, Phys.Fluids **7** (1964), 1243.

[[Bro 3]] J.Broadwell, *Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method*, Journ. of Fluid Mech. **19,3** (1964), 401.

[[Brz 1]] Z. Brzezniak, F. Flandoli, L. Preziosi, *The DBE with Multiple Collisions*, Stability and Appl. Anal. in Cont. Media (1991).

[[Cab 1]] H.Cabannes, *Ecoulement de Couette pour un gaz a repartition discrete de vitesses*, CRASP **t.281, s.A** (1975), 817-820.

[[Cab 2]] H.Cabannes, *Reflection des ondes de choc dans un gaz a 14 vitesses*, CRASP A, **279** (1974), 789.

[[Cab 3]] H.Cabannes, *Etude de la propagation et de la stabilite des ondes de choc dans un gaz a quatre vitesses*, CRASP s.A, **280** (1975), 917-920.

[[Cab 4]] H.Cabannes, *Etude de la propagation des ondes dans un gaz a quatorze vitesses*, CRASP **279, s.A,** (1974), 761-764, CRASP vol. 281 (1975), 817-820.

[[Cab 5]] H.Cabannes, *Etude de l'ecoulement autour d'un diedre pour un gaz a quatre vitesses*, Ann. di Mat. pura appl. **(IV) v.CVIII** (1976), 19-40.

[[Cab 6]] H.Cabannes, *Etude de la propagation des ondes dans un gaz a 14 vitesses*, J.Mec. **14,4** (1975), 705-744.

[[Cab 7]] H.Cabannes, *Couette flow for a gas with a discrete velocity distribution*, J.Fluid Mech **76,2** (1976), 273-287.

[[Cab 8]] H.Cabannes, *Solution globale du probleme de Cauchy on theorie cinetique discrete*, J. de Mec. **17,1** (1978), 1-22.

[[Cab 9]] H.Cabannes, *Solution globale du probleme de Cauchy en theorie cinetique discrete: modele plan*, CRASP **284, s.A** (1977), 269-272, mod.spatial: 347-350.

[[Cab 10]] H.Cabannes, *The discrete B.E. Theory and Applications*, Lectures at Univ. California, Berkeley (1980).

[[Cab 11]] H.Cabannes, *Solution globales de l'equation de Boltzmann pour les modeles spatiaux reguliers a 12 ou 20 vitesses*, Mech.Res.Comm. 10 (1983), 317-322.

[[Cab 12]] H.Cabannes, *The regular space models in discrete kinetic theory*, Mech.Res.Comm. **12,5** (1985), 289-295.

[[Cab 13]] H.Cabannes, *Comportement asymptotique des solutions de l'equation de Boltzmann discrete*, CRASP **t.302, s I,** (1986), 249-253.

[[Cab 14]] H.Cabannes, Dang Hong Tiem, *Solution exactes pour certains modeles discrets de l'equation de Boltzmann*, CRASP **s I, t.304,** n 1 (1987), 29-34.

[[Cab 15]] H.Cabannes, D.H.Tiem, *Exact Solutions for some Discrete Models of the B.E.*, Complex Systems **1** (1987), 575-584.

[[Cab 16]] H.Cabannes, S.Kawashima, *Le probleme aux valeurs initiales en theorie cinetique discrete*, CRASP **t.307 s.I** (1988), 501-511.

[[Cab 17]] H.Cabannes, *Solution globale des equations de Broadwell pour des donnees initiales partiellment negatives*, CRASP **t.309, s.I** (1989), 423-428.

[[Cab 18]] H.Cabannes, J.P.Duruisseau-Aloyd, *Construction, using MACSYMA, of exact solutions for some discrete models of the B.e.*, The Int.Symp.on Adv.Computers for Dynamics and Design'89, ACDandD **89-A28** (1989), 161-166.

[[Cab 19]] H.Cabannes, D.M.Tiem, J.Stat.Phys., to appear.

[[Cab 20]] H. Cabannes, *On the IVP in DKT*, Ser. on Adv. in Math. for Appl. Sci.: DMs of Fluid Dynamics, ed. A. S. Alves, Sept. 19-22, 1990, Figuera da Foz, Portugal **2** (1991), 60-71.

[[Cab 21]] H.Cabannes, *On the IVP in Discrete Kinetic Theory*, subm. to European Journal of Mechanics B/Fluids.

[[Caf 1]] R.Caflish, *Navier-Stokes and Boltzmann Shock Profiles for a Model of Gas Dynamics*, CPAM **XXXII** (1979), 521-554.

[[Caf 2]] R.Caflish, G.C.Papanicolau, *The Fluid-Dynamical Limit of a Nonlinear Model B.E.*, CPAM **XXXII** (1979), 589-616.

[[Caf 3]] R.Caflish, T.P.Liu, *Stability of shock waves for the Broadwell model, preprint*, CMP **114** (1988), 103-130.

[[Car 1]] T.Carleman, *Sur la theorie de l'equation integro-differentielle de Boltzmann*, Acta Math. **60** (1933), 91-140.

[[Car 2]] T.Carleman, *Problemes mathematiques dans la theorie cinetique des gaz*, Almqvist, Wiksells, Uppsala, Sweden (1957), 104-106.

[[Carp 1]] S.Carpino, F.Presutti, M.de Masi, *A derivation of the Broadwell eq.*, CMP **3, 135** (1991).

[[Cer 1]] C.Cercignani, *Sur des criteres d'existence globale en theorie cinetique discrete*, CRASP **301, s.I** (1985), 89-92.

[[Cer 2]] C.Cercignani, M.Shinbrot, *Global existence for some discrete velocity models*, Comm.PDE **12 (3)** (1987), 307-314.

[[Cer 3]] C.Cercignani, R.Illner, M.Shinbrot, *A boudary volue problem for discrete velocity models*, Duke Math.J. **55,4** (1987), 889-900.

[[Cer 4]] C.Cercignani, R.Illner, M.Pulvirenti, M.Shinbrot, *On nonlinear stationary half-space problems in discrete kinetic theory*, J.Stat.Phys. **52 (3/4)** (1988), 885-896.

[[Cer 5]] C.Cercignani, R.Illner, M.Shinbrot, *A Boundary Value Problem for the Two-Dimensional Broadwell Model*, CMP **114** (1989), 687-698.

[[Cer 6]] C. Cercignani, *The Trend to Equilibrium in Discrete and Continuous Kinetic Theory*, Ser. Adv. in Math. for Appl. Sci.: Discrete Models of Fluid Dynamics, ed. A. S. Alves, Sept. 19-22, 1990, Figuera da Foz, Portugal **2** (1991), 12-21.

[[Cha 1]] P.Chauvat, R.Gatignol, *Coefficients de transport pour des models reguliers plans en theorie cinetique discrete*, CRASP **309, s.II** (1989), 1457.

[[Cha 2]] P.Chauvat, R.Gatignol, Proc. of 17th RGD Symp., Aachen (1990).

[[Cha 3]] P.Chauvat, *Summational invariants in discrete kinetic theory with multiple collisions*, Mech.Res.Comm. **18** (1991), 11.

[[Cha 4]] P.Chauvat, F. Coulouvrat, R. Gatignol., *The Euler Description for a Class of DMs of Gases with Multiple Collisions*, Adv.in Kin.Th. and Cont.Mech., Springer Verl. R.Gatignol, Soubbaramayer (1991), 139-154.

[[Cho 1]] Y. Choquet - Bruhat, G. Pichon, *Plasmas with Discrete Velocities*, Series on Adv. in Math. for Appl. Sci.: DMs of Fluid Dynamics, ed. A. S. Alves, 1990, Portugal **2** (1991), 85-96.

[[Con 1]] H.E.Conner, *Some general properties of a class of semilinear hyperbolic systems analogous to the differential-integral equations of gas dynamics*, J.Diff. Eq. **10** (1971), 188-203.

[[Cor 1]] H.Cornille, *Exact solutions of the Broadwell model in 1+1 dimensions*, J.Phys.A: Math.Gen. **20** (1987), 1973-1988.

[[Cor 2]] H.Cornille, *Exact solutions in 1+1 dimensions of the general two-velocity discrete Illner model*, J.Math.Phys. **28(7)** (1987), 1567-1579.

[[Cor 3]] H.Cornille, *Exact (2+1)-Dimensional Solutions for two Discrete Boltzmann Models with four Independent Densities*, Journ. of Phys.A. **20** (1987), 1063-1067 L.

[[Cor 4]] H.Cornille, *Exact 1+1 dimensional solutions of the discrete velocity Broadwell-Boltzmann model*, Phys.Letters A, **125,5** (1987), 253-257.

[[Cor 5]] H.Cornille, *Exact (1+1)-dimensional solutions of discrete planar velocity Boltzmann models*, J.Stat.Phys. **48** (1987), 789-811.

[[Cor 6]] H.Cornille, J.Math.Phys. **12** (1987), 315-326.

[[Cor 7]] H.Cornille, *Nouvelles solutions a 1+1 dimensions de modeles discretises de l'equation de Boltzmann*, CRASP **304 s.II** (1987), 1091-1094.

[[Cor 8]] H.Cornille, *Construction of Positive Exact (2+1)-Dimensional Shock Wave Solutions for two Discrete Boltzmann Models*, Journ.Stat.Phys. **52** (1988), 897-949.

[[Cor 9]] H.Cornille, *Exact Solutions for the Discrete Boltzmann Models with Specular Reflection*, Letter in Math.Phys. **16** (1988), 245-250.

[[Cor 10]] H.Cornille, *Construction of Positive (2+1)-Dimensional Solutions for Three DBMs*, Some Topics on Inverse Probl., ed.P.C.Sabatier, World Sci. Singapore, New Jersey, Hong-Kong (1988), 104-133.

[[Cor 11]] H.Cornille, *Exact solutions for discrete kinetic models with ternary collisions*, J.Math.Phys. **29,7** (1988), 1667-1677.

[[Cor 12]] H.Cornille, *2D and 3D exact shock wave solutions with specular reflection to the discrete Boltzmann models*, J.Phys. A **22** (1988), 4187.

[[Cor 13]] H.Cornille, *Positive (2+1)-dimensional exact shock wave solutions to the Broadwell model*, J.Math.Phys. **30** (1989), 789-797.

[[Cor 14]] H.Cornille, *Exact Positive (2+1)-Dimensional Solutions to the DBMs*, Proc. of 16 RGD, Progr. in Astron. and Aeronautics, AIAA,ed.E.P.Muntz **118** (1989), 131.

[[Cor 15]] H.Cornille, *New (2+1)-dimensional positive exact solutions to the DBMs*, Discrete Kin.Theory, Lattice Gas Dynamics, Found. of Hydrodynanics, ed.R.Monaco World Sci. (1989), 83-92.

[[Cor 16]] H.Cornille, *Construction of Positive (2+1)-Dimensional Exact Solutions for the Broadwell Model*, TTSP (1989).

[[Cor 17]] H.Cornille, Y.H.Qian, *Solutions Exactes pour un Modele de Boltzmann Discrete Unidimensionnel Satisfaisant toutes les lois de conservation*, CRASP **309, s.II** (1989), 1883-1887.

[[Cor 18]] H.Cornille, Y.H.Qian, *Temperature Overshoots for a 4-velocity Unidimensional Discrete Boltzmann Model*, Journ. of Stat.Phys. **61** (1990), 683-712.

[[Cor 19]] H.Cornille, *Exact solutions to the B.e.*, Partially Integrable Equations in Physics, Ed.R.Conti, Kluwer Ac.Publ., Amsterdam (1990).

[[Cor 20]] H.Cornille, *A conjecture on the possible exact (1+1)-dimensional solution to the discrete Boltzmann models*, Book in honor of A.Martin, Springer Verl. (1990).

[[Cor 21]] H.Cornille, *Exact solutions of the Boltzmann Equation*, Les Houches School, Ed.Conte R.Kluman, Mead Publ. (1990).

[[Cor 22]] H.Cornille, *(1+1)-dimensional hierarchies of multispeed discrete Boltzmann equations*, Lect. in Math.Phys. 19 (1990), 211.

[[Cor 23]] H.Cornille, *Exact Exponential Type Solutions to the Discrete Boltzmann Models, III Int.Workshop on Math.Aspects of Fluid and Plasma Dynamics*, Ser. on Adv. in Math. for Appl. Sciences: DMs of Fluid Dynamics, ed. A. S. Alves, Sept. 19-22, 1990, Figuera da Foz, Portugal [[Che 1]] S. Chen, G. D. Doolen, W. H. Matthaeus, *Lattice Gas Automata for Simple and Complex Fluids*, preprint, LAUR - 90 - 3453 (1990). **Salice-Terme, ed.G.Toscani, Springer Verl.** (1988).

[[Cor 24]] H.Cornille, *Temperature and Local Entropy Overshoots for the Second 14-velocity Cabannes model*, Adv.in Kin. Theory and Cont. Mech., Springer Verlag ed. R.Gatignol, Soubbaramayer (1991), 109-126.

[[Cor 25]] H.Cornille, *Exact Periodic Solutions for a Class of Multispeed DBMs*, preprint (1991).

[[Cor 26]] H.Cornille, *(1+1) Dimensional Hierarchies of Multispeed DBM Equations*, preprint (1991).

[[Cor 27]] H. Cornille, *Shock Waves for the Two Speeds 8Vi, 14Vi, and 24Vi Discrete Boltzmann Models with Temperature*, Series on Adv. in Math. for Appl. Sci.: Discrete Models of Fluid Dynamics, ed. A. S. Alves, Sept. 19-22, 1990, Figuera da Foz, Portugal 2 (1991), 131-143.

[[Cor 28]] H. Cornille, T.Płatkowski, *Exact Solutions for a Hierarchy of Mixing Speeds Models*, JMP **7, 33** (1992), 1-17.

[[Cor 29]] H. Cornille, T. Płatkowski, *Exact Solutions for Two Multispeed DBMs Including Multiple Collisions*, subm. to J. Phys. A.

[[Cor 30]] H. Cornille, T. Platkowski, *Riccati - Coupled Similarity Shock Wave Solutions for the Multispeed Discrete Boltzmann Models*, in preparation.

[[Cou 1]] F.Coulovrat, R.Gatignol, *Description hydrodynamique d'un gas en theorie cinetique discrete: les modeles reguliers*, CRASP **t.306, s.II,** (1988), 393-398.

[[Cur 1]] C.Curro, F.Oliveri, *Similarity Analysis and Exact Solutions for a General Discrete Two-Velocity Model of B.E.*, Meccanica Journ. of AIMETA **22** (1987), 3-7.

[[Doo 1]] G. D. Doolen, *Lattice Gas Automata for Fluids*, Ser. Adv. in Math. for Appl. Sci. 2 (1991).

[[Dor 1]] W.Dorr, *Stabilitat bei discreten Modellen der Boltzmann-gleichung*, Diplomarbeit Universitat Kaiserslautern, Federal Republic of Germany (1981).

[[Duk 1]] G.Dukek, T.F.Nonnemacher, *New classes of similarity solutions for the nonlinear Carleman-Boltzmann equation*, Physica A **135** (1986), 167-179.

[[Duk 2]] G.Dukek, G.Spiga, J.Appl.Math.Phys. (ZAMP) **39** (1988), 924.

[[Dur 1]] J. P. Duruisseau, *Construction, using MACSYMA, of exact solutions of some dms of the B.e.*, Int. Symp. on Adv. Computers for Dynamics and Design '89, ACD D - 89 A28 (1989), 161-166.

[[Ell 1]] R.S.Ellis, *Chapman-Enskog-Hilbert expansion for a Marcovian model of the Boltzmann equation*, CPAM **26** (1973), 327-359.

[[Ell 2]] R.S.Ellis, M.A.Pinsky, *Limit theorem for model Boltzmann equations with several conserved quantities*, Indiana Univ.Math.J. **23** (1973), 287-307.

[[Ell 3]] R.S.Ellis, M.A.Pinsky, *Asymptotic equivalence of the linear Navier-Stokes and heat equations in one dimension*, J.Diff.Eq. **17** (1975), 406-420.

[[Ell 4]] R.S.Ellis, M.A.Pinsky, *The first and second fluid approximation to the linearized Boltzmann equation*, J.Math.Pure Appl. **54** (1975), 125.

[[Ern 1]] M.H.Ernst, *Nonlinear model BEs and exact solutions*, Phys.Rep. **78** (1981), 1-171.

[[Fit 1]] W.F.Fitzgibbon, *The fluid dynamical limit of the Carleman equation with reflecting boundary*, J.Nonlinear Analysis, Theory, Methods, Appl. **6** (1982), 695-702.

[[Fit 2]] W.F.Fitzgibbon, *Initial boundary value problem for the Carleman Equation*, Comput.Math.Appl. **9** (1983), 519-525.

[[Fri 1]] U.Frisch, B.Hasslacher, Y.Pomeau, *Lattice Gas Automata for Navier-Stokes Equations*, Phys.Rev.Lett. **56** (1986), 1505-1508.

[[Fri 2]] U.Frisch, D'Humieres, B.Hasslacher, P.Lallemand, Y.Pomeau, J.P.Rivet, *Lattice Gas Hydrodynamics in two and three dimensions*, Complex Systems **1** (1987), 649-707.

[[Gab 1]] E. Gabetta, *On a Broadwell - Like Lattice ina Box*, Series on Adv. in Math. for Appl. Sci.: DMs of Fluid Dynamics, ed. A. S. Alves, 1990, Portugal **2** (1991), 218-229.

[[Gab 2]] E. Gabetta, R. Monaco, *The DBE for Gases with Bi - Molecular Chemical Reactions*, Ser. on Adv. in Math. for Appl. Sci.: DMs of Fluid Dyn., ed. A. S. Alves, 1990, Portugal **2** (1991), 22-34.

[[Gab 3]] E. Gabetta, *From Stochastic Mechanics to the DBE: The Broadwell Model*, J. Math. Modelling Comp. **15** (1991), 1.

[[Gat 1]] R.Gatignol, CRASP **261,263,268 s.A, 268 s.A, 274 s.A, 274 s.A** (1965, 1966, 1969, 1969, 1972, 1972), 2841, 332, 513, 570, 1429, 1473.

[[Gat 2]] R.Gatignol, *Theorie cinetique d'un gas a repartition discrete de vitesse*, Z.Flugwiss. **18** (1970), 93-97.

[[Gat 3]] R.Gatignol, *Theorie Cinetique des Gaz a Repartition Discrete de Vitesses*, Lect.Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin **36** (1975).

[[Gat 4]] R.Gatignol, *Kinetic theory for a discrete velocity gas and application to the shock structure*, Phys.Fluids **18** (1975), 153-161.

[[Gat 5]] R.Gatignol, *Kinetic theory boundary conditions for discrete velocity gases*, Phys.Fluids **20** (1977), 2022-2030.

[[Gat 6]] R.Gatignol, *Unsteady Couette Flow for a Discrete Velocity Gas*, Proc.of XI RGD Symp., ed.R.Comparque, Comm. l'Energie Atomique, Paris, France **I** (1978), 195-204.

[[Gat 7]] R.Gatignol, *Two aspects of the discrete kinetic theory: weak shock waves and boundary conditions*, TTSP **16** (1987), 837.

[[Gat 8]] R.Gatignol, *The hydrodynamical description for a discrete velocity model of gas*, Complex Systems **1** (1987), 709-725.

[[Gat 9]] R.Gatignol, F.Coulouvrat, *Description hydrodynamique d'un gaz en theorie cinetique discrete: le modele general*, CRASP **306 s.II** (1988), 169-174.

[[Gat 10]] R.Gatignol, F.Coulouvrat, *Constitutive laws for dvms of gas*, Proc. of Work. on DKT, Lattice Gas Dynamics and Foundations of Hydrodynamics, 1988 Torino, Ed.R.Monaco World Sci. (1989), 121-145.

[[Ger 1]] V. I. Gerasimienko, V. V. Gorunovich, *O diskretnoj modeli uravnienij Bogoliubova*, Dokl. Akad. Nauk Ukraine **8** (1991), 31-36.

[[God 1]] S.K.Godunov, U.M.Sultanghazin, *On discrete models of the kinetic B.e.*, Uspekhi Math.Nauk **26** (1971), 3-51 (English transl. - Russian Math.Surveys, vol 26 (1971), 1).

[[Gols 1]] F.Golse, *On the self-similar solutions of the Broadwell model for a discrete velocity gas*, Comm.PDE **12(3)** (1987), 315-326.

[[Gold 1]] D.Goldstein, B.Sturtevant, J.E.Broadwell, *Investigation of the motion of discrete velocity gases*, Proc. 16th RGD Symp. : Theor. and Comput. Techniques, Pasadena CA, 1988, ed. E. P. Muntz, 118 (1988), 100-117.

[[Gold 2]] D. Goldstein, *Near Continuum Applications of a Discrete Velocity Gas*, preprint, CALTECH (1989).

[[Gold 3]] D. Goldstein, B. Sturtevant, *Discrete Velocity Gasdynamics Simulations in a Parallel Processing Enviroment*, Thermophysics Conf., AIAA, Buffalo NY, June 12-14 **89-1668** (1988).

[[Gold 4]] B. Goldstein, *Investigation of a Discrete Velocity Gas*, Ph. Thesis, CALTECH, Pasadena, California (1990).

[[Gre 1]] J.M.Greenberg, *Integrable transport processes*, prepr.Univ. of Maryland (1988).

[[Gre 2]] J.M.Greenberg, *Continuum limits of discrete gases*, prepr. Univ. of Maryland (1988).

[[Gre 3]] J.M.Greenberg, C.Moller, *Collisionless solutions to the 4-velocity Broadwell equations*, Proc. IMA Workshop on Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, eds. J.Glimm, A.Majda (1989), Univ. of Minnesota, Springer-Verlag.

[[Gre 4]] J.M.Greenberg, L.L.Aist, *Decay theorems for the four-velocity Broadwell equations*, subm. to Arch.Rat.Mech.Anal.

[[Ham 1]] K.Hamdache, *Existence globale et comportement asymptotique pour l'equation de Boltzmann a repartition discrete de vitasses*, CRASP **t.297 s.I** (1983), 619-622, Journ.de Mec.Th.Appl. 3,5 1984 pp.761-785.

[[Ham 2]] K.Hamdache, *Existence globale et comportement asymptotique pour l'equation de Boltzmann a repartition discrete de vitasses*, Journ.de Mec.Th.Appl. **3,5** (1984), 761-785.

[[Ham 3]] K.Hamdache, *On the discrete velocity models of the Boltzmann equation*, prepr. ENSTA-GMN (1987).

[[Hard 1]] I.Hardy, Y.Pomeau, *Thermodynamics and Hydrodynamics for a Modeled Fluid*, Journ.Math.Phys. **13,7** (1972), 1042-1051.

[[Hard 2]] I.Hardy, Y.Pomeau, O.de Passis, *Time evolution of two-dimensional model system I. Invariant states and time correlation functions*, J.Math.Phys. **14** (1973), 1746-1759.

[[Hard 3]] J.Hardy, O.de Passis, Y.Pomeau, *Molecular dynamics of a classical lattice gas: Transport properties and time correlation functions*, Phys.Rev. **A13,5** (1976), 1949-1961.

[[Harr 1]] S.Harris, *Approach to equilibrium in a moderately dense discrete velocity gas*, Phys. of Fluids **9,7** (1966), 1328.

[[Harr 2]] S.Harris, *Proof for a discrete velocity gas that succesive derivatives for the Boltzmann's H function alternate in sign*, J.Math.Phys. **8,12** (1967), 2407.

[[Hej 1]] J.Hejtmanek, *Convergence of the Weak Solution of the Carleman equations to the Solution of the Euler Equation*, comm. in Math.Probl. in Kin.Theory, Oberwolfach (1979).

[[Hen 1]] F.Henin, *Entropy, dynamics and molecular chaos: the McKean's model*, Phys. **77** (1974), 201-223.

[[Hum 1]] D'Humieres, Y.Pomeau, P.Lallemand, *Simulations d'allee de von Karman bidimensionelles a l'aide d'un gaz sur reseau*, CRASP **301** (1985), 1391-1394.

[[Ill 1]] R.Illner, *Global existence for two - velicity models of the B.e.*, Math.Meth.Appl.Sci. **1** (1979), 187-193.

[[Ill 2]] R.Illner, *On the derivation of the time-dependent equations of motion for an ideal gas with discrete velocity distribution*, J.de Mec. **17** (1978), 781-796.

[[Ill 3]] R.Illner, *Global existence for two-velocity models of the Boltzmann equation*, Math.Methods Appl.Sci. **1** (1979), 187-193.

[[Ill 4]] R.Illner, M.C.Reed, *The decay of solution of the Carleman model*, Math.Methods Appl.Sci. **3** (1981), 121-127.

[[Ill 5]] R.Illner, *Global existence results for the discrete velocity models of the Boltzmann equation in several dimensions*, J.Mec.Theor.Appl. **1** (1982), 611-622.

[[Ill 6]] R.Illner, *Mild solutions of hyperbolic systems with L^1, L^∞ initial data*, TTSP **13** (1984), 431-453.

[[Ill 7]] R.Illner, M.C.Reed, *Decay to equilibrium for the Carleman model in a box*, SIAM J.Appl.Math. **44** (1984), 1067-1075.

[[Ill 8]] R.Illner, *The Broadwell model for initial values in L^1*, CMP **93** (1984), 341-354.

[[Ill 9]] R.Illner, *Examples of non-bounded solutions in discrete kinetic theory*, J.de Mec.Th.Appl. **5,4** (1986), 561-571.

[[Ill 10]] R.Illner, *On Steady BVPs in DKT and an Application to Digital Image Processing*, DKT, Lattice Gas Dynamics, Foundations of Hydrodynamics, ed.R.Monaco, World Sci. (1989), 178-191.

[[Ill 11]] R.Illner, *On Uniform Boundedness of Solutions to DVMs in Several Dimensions,*, Adv.in Kin.Theory and Cont.Mechanics, Springer Verlag ed. R.Gatignol, Soubbaramayer (1991), 99-107.

[[Ill 12]] R. Illner, *Solutions of the Steady BE in a Slab: Applied Problems, Pure Results*, Ser. on Adv. in Math. for Appl. Sci.: Discrete Models of Fluid Dynamics, ed. A. S. Alves, Sept. 19-22, 1990, Figuera da Foz, Portugal **2** (1991), 104-112.

[[Ina 1]] T.Inamuro, B.Sturtevant, *Numerical study of discrete-velocity gases*, Phys.Fluids, A **2,12** (1990), 2196-2203.

[[Ina 2]] T.Inamuro, B.Sturtevant, *Heat transfer in a discrete-velocity gas*, preprint, CALTECH.

[[Ino 1]] K.Inoue, T.Nishida, *On the Broadwell model of the Boltzmann equation for a simple discrete velocity gas*, Appl.Math.Optim. **3** (1976), 27-49.

[[Jen 1]] R.D.Jenks, *Quadratic differential systems for interactive population models*, J.Diff. Eq. **5** (1969), 497-514, vol. 4 (1968), pp. 549-565, 566-572.

[[Kan 1]] S. Kaniel, M. Shinbrot, *The Boltzmann Equation II. Some discrete velocity models*, Journ. de Mec. **19, 3** (1980), 581-593.

[[Kap 1]] H.Kaper, G.K.Leaf, *Initial value problems for the Carleman equation*, J.Nonlinear Anal.Theory Methods Appl. **4** (1980), 343-362.

[[Kap 2]] H.Kaper, G.K.Leaf, S.Reich, *Convergence of semigroups with an application to the Carleman equation*, Math.Mathods Appl.Sci. **2** (1980), 303-308.

[[Kaw 1]] S.Kawashima, *The asymptotic equivalence of the Broadwell model equation and its Navier-Stokes equation*, Japan J.Math. **7** (1981), 1-43.

[[Kaw 2]] S.Kawashima, *Global solution of the initial value problem for a discrete velocity model of the Boltzmann equation*, Proc.Japan Acad.Ser.A.Math.Sci. **57** (1981), 19-24.

[[Kaw 3]] S.Kawashima, *Global existence and stability of solutions for discrete velocity models of the Be*, Lect. Notes in Num.Appl.Anal. **6** (1983), 59-85; Recent Topics in Nonlinear PDE, Hiroshima, 1983.

[[Kaw 4]] S.Kawashima, *Global existence and stability of solutions for DVMs of the BE*, Recent Topics in Nonlinear PDE (Lect.Notes in Num.Appl.Anal.), Kinikunia, Tokyo **6** (1983), 59-85.

[[Kaw 5]] S.Kawashima, A.Watanabe, M.Maoji, Y.Shizuta, *On Cabannes 32-velocity models of the B.E.*, Publ.R.I.M.S. Kyoto Univ. **22** (1986), 583-607.

[[Kaw 6]] S.Kawashima, A.Matsumura, *Asymptotic Stability of Travelling Wave Solutions of Systems for One-dimensional Gas Motion*, CMP **101** (1985), 97-127.

[[Kaw 7]] S.Kawashima, *Large-time Behaviour of Solutions of the Discrete B.E.*, CMP **109** (1987), 563-589.

[[Kaw 8]] S.Kawashima, *Asymptotic Stability of Maxwellians of the Discrete B.E.*, preprint.

[[Kaw 9]] S.Kawashima, Y.Shizuta, *The Navier-Stokes equation in the discrete kinetic theory*, J. Mec.Theor.Appl. **7,5** (1988), 597-621.

[[Kaw 10]] S.Kawashima, *IBVP for the discrete Boltzmann equation*, Journees Equations aux Derivees Partielles, Ec.Polytecnique.

[[Kaw 11]] S.Kawashima, *Global solutions to the initial-boundary value problems for the discrete Boltzmann equation*, preprint.

[[Kaw 12]] S.Kawashima, *Existence and Stability of Stationary Solutions to the Discrete B.E.*, to app. in Japan Journ. Indust. Apl. Math..

[[Kaw 13]] S.Kawashima, *Global solutions to the initial-boundary value problems for the discrete Boltzmann equation*, to app. in J. Nonlinear Analysis, T. M. A..

[[Kaw 14]] S.Kawashima, N.Bellomo, *On the Euler Equation in Discrete Kinetic Theory*, Adv.in Kin.Theory and Cont.Mechanics, Springer Verlag ed. R.Gatignol, Soubbaramayer (1991), 73-80.

[[Kaw 15]] S. Kawashima, *Asymptotic Behaviour of Solutions to the DBE*, Ser. on Adv.in Math.for Appl. Sci.: DMs of Fluid Dynamics, ed. A. S. Alves, 1990, Portugal **2** (1991), 35-44.

[[Kol 1]] I.I.Koldner, *On the Carleman's model for the Boltzmann equation and its generalizations*, Ann.Mat.Pura Appl. **4,73** (1963), 11-32.

[[Kur 1]] T.G.Kurtz, *Convergence of sequences of semigroups of nonlinear operators with an application to gas kinetics*, Trans.Amer.Math.Soc **186** (1973), 259-272.

[[Lac 1]] M.Lachowicz, R.Monaco, *Analysis by the operator interpolation method of an IBVP for the semidiscrete B.e.*, in: Operator Theory: Advances and Applications, ed. Birkhauser Verlag Basel **51** (1991), 215-226.

[[Lac 2]] M.Lachowicz, R.Monaco, *Existence and Quantitative Analysis of the Solutions to the Initial Value Problem for the Discrete B.E.*, SIAM J. Appl. Math. **49, 3** (1989).

[[Leg 1]] D.Leguillon, *Numerical solutions for the shock tube problem in discrete kinetic theory*, Proc. of XI RGD Symp. in Cannes, 1978, ed.Campargue, Paris (1979), 427.

[[Leg 2]] D.Leguillon, *Solution global d'un probleme avec conditions aux limites en theorie cinetique discrete*, CRASP **285 A** (1977), 1125.

[[Leg 3]] D.Leguillon, *Resolution numerique du probleme du tube a choc pour un modele a 14 vitesses en theorie cinetique discrete*, These de doctorat de 3. cycle, Univ.Pierre et Marie Curie, Paris (1976).

[[Lio 1]] J.L.Lions, *Quelques methods de resolution des problemes aux limites non lineaires*, ed.Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969), 446-459.

[[Lon 1]] E.Longo, *L'equazione di Boltzmann discreta per miscele binarie: un modello a 28 velocita e analisi della propagazione di onde sonore*, Rend.Sem.Mat. Brescia 9 (1984).

[[Lon 2]] E.Longo, *Analytical solutions of the discrete B.e. for the steady Couette flow for binary gas mixtures*, Mech.Res.Comm. **10,6** (1984), 373-378.

[[Lon 3]] E.Longo, R.Monaco, *Analytical solutions of the discrete B.E. for the Rayleigh flow problem for gas mixtures*, Phys.Fluids **28** (1985), 2730-2734.

[[Lon 4]] E.Longo, R.Monaco, *On Discrete Kinetic Theory with Multiple Collisions: Plane Six-Velocity Model and Unsteady Couette Flow*, Proc. 16-th RGD, Pasadena, 1988, pp.118-130, in Progr. in Astronautics and Aeronautics, AIAA, ed.E.P.Muntz **118** (1989), 118-130.

[[Lon 5]] E.Longo, R.Monaco, *On the thermodynamics of the discrete models of the B.E. for gas mixtures*, TTSP **17** (1988), 423-442.

[[Lon 6]] E.Longo, R.Monaco, T.Płatkowski, *Sound and shock wave propagations by the semidiscrete B.e.*, Adv. in Kin. Theory and Cont. Mech., Springer Verlag ed. R.Gatignol, Soubbaramayer (1991), 155-168.

[[Lon 7]] E.Longo, N. Bellomo, *On the Semidiscrete B.E. with Multiple Collisions*, J.de Mec.Th.Appl. **7,3** (1988), 233-243.

[[Mat 1]] A.Matsumura, *Asymptotics towards rarefaction wave for solutions of the Broadwell model of a discrete velocity gas*, Japan J.Appl.Math. **4** (1987), 489-502.

[[Matt 1]] G. de Matteis, L. M. de Soccio, *A Discretized Model for the Dynamics of a Tethered Satellite System and Applications*, M3AS **1, 3** (1991).

[[McK 1]] H.P.McKean, *An exponential formula for solving Boltzmann equations for a Maxwellian gas*, J.Combin.Theory 2 (1967), 358-382.

[[McK 2]] H.P.McKean, *A simple model of the derivation of fluid mechanics from the Boltzmann equation*, Trans.Amer.Math.Soc. **75** (1969), 1-10.

[[McK 3]] H.P.McKean, *Chapman-Enskog-Hilbert expansion for a class of solutions of the telegraph equation*, J.Math.Phys. **8** (1967), 547-552.

[[McK 4]] H.P.McKean, *The central limit theorem for Carleman's equation*, Israel J.Math. **21** (1975), 54-82.

[[McK 5]] H.P.McKean, *Fluctuations in the kinetic theory of gases*, Comm.Pure Appl.Math. **28** (1975), 435-455.

[[Mik 1]] J.Mika, A.Palczewski, *Application of the asymptotic expansion method for singulary perturbed equations of the resonance type in the kinetic theory*, Arch.Mech. (1983).

[[Mon 1]] R.Monaco, G.Toscani, *Kinetic Theory for a Binary Gas Mixture: Problems in Unbounded Domains by the Semidiscrete BE*, Rap.Int.Polit.Torino **16** (1985).

[[Mon 2]] R.Monaco, *Shock wave propagation in gas mixtures by means of a discrete velocity model of the B.e.*, Acta Mechanica **55** (1985), 239-251.

[[Mon 3]] R.Monaco, *On the shock wave structure in a binary gas mixture represented by a dvm*, RGD Proc.V.Boffi, C.Cercignani ed.Teubner, Stuttgart **I** (1986), 245-254.

[[Mon 4]] R.Monaco, G.Toscani, *New results on the semidiscrete Boltzmann equation for a binary gas mixture*, Meccanica Journ. of AIMETA **22** (1987), 179-184.

[[Mon 5]] R.Monaco, E.Longo, *Macroscopic Variables in DKT*, Proc. 16-th RGD, Pasadena, 1988, in Progr. in Astronautics and Aeronautics, AIAA, ed.E.P.Muntz **118** (1989).

[[Mon 6]] R.Monaco, M.Pandolfi-Bianchi, Rap. Int. Polit. Torino **7** (1989).

[[Mon 7]] R.Monaco ed., Discrete Kinetic Theory, Lattice Gases and Foundations of Hydrodynamics, World Sci. London, Singapore (1989).

[[Mon 8]] R.Monaco, M.Pandolfi-Bianchi, *A discrete velocity model for gases with chemical reactions of dissociation and recombination*, Proc. of Conf. in honour of H.Cabannes, Ed.R.Gatignol, Soubbaramayer, Springer (1991).

[[Mon 9]] R.Monaco, M.Pandolfi-Bianchi, T.Platkowski, *Shock-waves formation by the discrete B.e. for binary gas mixtures*, Acta Mechanica **84** (1990), 175-184.

[[Mon 10]] R.Monaco, M.Pandolfi-Bianchi, *Shock wave onset with chemical dissociation by the discrete B.e.*, Proc. XVII RGD Symp. Aachen, ed. A. Beylich, VCH-Verlag, Weinheim, NY, (1991), 862.

[[Mon 11]] R. Monaco, L. Preziosi, *Fluid Dynamic Applications of the Discrete B.E.*, Ser. on Adv. in Math. for Appl. Sci. 3 (1992).

[[Mon 12]] R. Monaco, M. Pandolfi Bianchi, *A Discrete Velocity Model for Gases with Chemical Reactions of Dissociation and Recombination*, Adv.in Kin.Theory and Cont.Mechanics, Springer Verlag ed. R.Gatignol, Soubbaramayer (1991), 169-181.

[[Mon 13]] R. Monaco, T. Platkowski, *Exact Solutions for a Discrete Velocity Model of a Gas with Molecular Dissociation*, Eng. Transactions **39, 2** (1991), 221-227.

[[Nis 1]] T.Nishida, M.Mimura, *On the Broadwell model for a simple discrete velocity gas*, Proc.Japan Acad.Ser.A.Math.Sci. **50** (1974), 812-817.

[[Nur 1]] N.A.Nurlibaev, *Discrete Velocity Method for Solving the B.E.*, 252 Euromech Colloquium, Radziejowice, Poland **252** (1989).

[[Ogg 1]] S.Oggioni, G.Spiga, *On Exact Solutions to a Discrete Velocity Model of the Extended Kinetic Equations*, preprint, Univ. of Bari.

[[Pal 1]] A.Palczewski, *Exact and Chapman-Enskog solutions for the Carleman model*, Math.Methods Appl.Sci. 6 (1984), 417-432.

[[Pia 1]] F.Piazzese, *A stochastic mathematic model of the kinetic theory of test particles in the flow field of the DBE*, Proc. 4th Int. Conf. on Math. Modelling, Zurich 15-17 August (1983).

[[Pie 1]] K.Piechór, *A rational construction of discrete velocity models of the B.e.*, Arch.Mech. **40,4** (1988), 315-335.

[[Pie 2]] K.Piechór, *Discrete velocity models for mixtures of noble and chemically active gases*, Arch.Mech. **41,1** (1989), 95-113.

[[Pie 3]] K.Piechór, *Spectral problems for semidiscrete and discrete models of the B.e. Part I*, Arch.Mech. **41,2-3** (1989), 287-306, Part II: Arch.Mech.41,6 1989 pp.857-865.

[[Pie 4]] K. Piechór, *Existence of nontrivial discrete velocity models of the Boltzmann equation*, Biuletyn PAN, Seria Techn. **37** (1988), 10-12.

[[Pie 5]] K. Piechór, *Dispersion relations for semidiscrete and discrete models of the B.E.*, Proc. Work. Discrete Kinetic Theory, Lattice Gas Dynamics, Found. of Hydrodynamics, Torino, R. Monaco ed. World Sci. Singapore (1988), 238-247.

[[Pie 6]] K.Piechór , *A discrete kinetic model admitting compression and expansion shock waves*, Arch. Mech. **42, 1** (1990), 87-107 .

[[Pie 7]] K.Piechór , *A Discrete Kinetic Model Resembling Retrograde Gases*, preprint (1990).

[[Pie 8]] K. Piechor , *The Couette Flow by a Four - Velocity Model of the Uehling - Uhlenbeck Equation*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences: Discrete Models of Fluid Dynamics, ed. A. S. Alves, Sept. 19-22, 1990, Figuera da Foz, Portugal **2** (1991), 176-185 .

[[Pin 1]] M.Pinsky , *Asymptotic Analysis of the Linearized Boltzmann equation*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 119-130 .

[[Pin 2]] M.Pinsky , *Differential equations with a small parameter and the central limit theorem for functions defined on a finite Markov chain*, Z.Wahrschein. **8** (1968), 101-111 .

[[Pła 1]] T.Płatkowski , *DVMs with Ternary Collisions*, Mech. Res. Comm. **11,3** (1984), 201 .

[[Pla 2]] T.Platkowski , *On a Two-Velocity Model of the Boltzmann-Enskog Equation*, Annali di Mat. Pura Appl. **(IV), CXLV** (1986), 347 .

[[Pła 3]] T.Płatkowski , *Shock Wave Structure in a Binary Mixture of Broadwell Discrete Velocity Gases*, Mech. Res. Comm. **14, 5/6** (1988), 347-353

[[Pła 4]] T.Płatkowski, R.Illner , *Discrete Velocity Models of the Boltzmann Equation: a Survey of the Mathematical Aspects of the Theory*, SIAM Reviev **30,2** (1988), 213 .

[[Pła 5]] T.Płatkowski , *Entropy overshoot in discrete velocity models of the Boltzmann equation*, Transp.Th.Stat.Phys **18,2** (1991), 221 .

[[Pla 6]] T.Płatkowski , *Exact shock wave solutions of 4-velocity models of mixtures*, Proc. of the Workshop on DKT, Lattice Gas Dynamics and Foundations of Hydrodynamics, Torino, 1988, ed. I.S.I., R. Monaco, World Sci.Publ.Co. (1989), 248-258 .

[[Pla 7]] R.Monaco, M. Pandolfi Bianchi, T.Płatkowski , *Shock waves formation by the discrete Boltzmann equation for binary gas mixtures*, Acta Mechanica **84** (1990), 175-184 .

[[Pla 8]] T.Płatkowski , *Boundary Value Problems for a Class of the Broadwell Models of the B. e. in Spatial Domains with General Boundary Data*, TTSP **20, 2-3** (1991).

[[Pla 9]] T.Płatkowski , *Boundary value problems for two- velocity models of the Boltzmann equation*, AM **43, 3** (1991), 111-124 .

[[Pla 10]] T.Płatkowski, G. Spiga , *Exact solutions of stationary problems in extended kinetic theory*, Europ. Journ. Mech./B /yr 1992.

[[Pla 11]] T.Płatkowski , *Profiles of stationary shock waves for a hexagonal discrete velocity model with all triple collisions*, preprint, Univ. Paris VI..

[[Pla 12]] H. Cornille, T.Płatkowski , *Exact Solutions for a Hierarchy of Mixing Speeds Models*, JMP **7, 33** (1992), 1-17.

[[Pla 13]] T.Płatkowski , *Asympt. Expansions and Fluid-Dynamic Approx. to the Linearized BE for the Broadwell Model*, Bull. de l'Acad. Pol. Sci. ser. Sci.Math. **11, XXX, [205], 3-4** (1982), 21 .

[[Pla 14]] T.Płatkowski , *The Initial Value Problem for the Discrete Velocity Gases with N-Particle Collisions*, Bull. de l'Acad. Pol. Sci. ser. Sci.Math. **32, 3-4** (1984), 247 .

[[Pla 15]] T.Płatkowski , *On Some Elementary Properties of Solutions of Two Velocity Models of the Boltzmann Equation*, J. de Mec. Theor. Appl. **4,4** (1985), 455 .

[[Pla 17]] R.Monaco, T.Płatkowski . *The Discrete Boltzmann Equation for Gas Mixtures: Modelling and Some Analytical Solutions*, Rap. Int. No. 19, Polit. di Torino (1988).

[[Pla 18]] E.Longo, R.Monaco, T.Płatkowski , *Sound Propagation and Shock Wave Structure by the Semidiscrete Boltzmann Equation*, Journ. de Mec. Theor. Appl. **7,3** (1988), 233-243 .

[[Pla 19]] T.Płatkowski , *Nonunique solutions of boundary value problems in a slab for a class of the Broadwell models of the Boltzmann equations*, Proc. of 17th RGD Symp. , RWTH Aachen, 8-14 July 1990.

[[Pla 20]] G. Spiga, T.Płatkowski, , *Exact solutions of stationary problems in discrete extended kinetic theory. Part II*, Atti dell'Academia Peloritana dei Pericolanti di Messina **LXVIII** (1990), 191-207 .

[[Pla 21]] R. Monaco, T. Płatkowski , *Exact Solutions for a Discrete Velocity Model of a Gas with Molecular Dissociation*, Eng. Transactions **39, 2** (1991), 221-227 .

[[Pla 22]] T.Płatkowski , *On a BVP for the Carleman Model of the BE*, DMs of Fluid Dynamics, Ser. on Adv. in Math. for Appl. Sci., Ed. A.Alves, World Scientific, London, **2** (1991), 113-122 .

[[Pre 1]] L. Preziozi, E. Longo , *On the Decomposition of Domains in Non - Linear DKT*, Ser. on Adv. in Math. for Appl. Sci.: DMs of Fluid Dynamics, ed. A. S. Alves, Portugal **2** (1991), 144-155 .

[[Pre 2]] L. Preziozi , *Thermal creep problems by the dBe*, Stability and Appl. Anal. (1991).

[[Pul 1]] A. Pulvirenti , *Global solution to the IBVP for the dBe*, TTSP

[[Pro 1]] V.Protopopescu , *Global Existence for Symmetric DVMs*, Proc.Works.DKT, Lattice Gas Dynamics, Foundations of Hydrodynamics, ed.R.Monaco, World Sci. (1989), 258-267 .

[[Qia 1]] Y.H.Qian , *Gaz sur Reseaux et Theorie Cinetique sur Reseaux Appliquee a' l'Equation de Navier-Stokes*, These de Doct., Univ.Paris VI (1990).

[[Rui 1]] T.W.Ruijgrok, T.T.Wu , *A completely solvable model of the nonlinear Boltzmann equation*, Phys.A, **113** (1982), 401-416 .

[[Sch 1]] F.J.Schwarz , *Eine Klasse von Liapunov-Funktionalen fur discrete Modelle der Boltzmanngleichung*, Diplomarbeit, Univ. Kaiserslautern, FRG (1980), 94 .

[[Shi 1]] M.Shinbrot , *The Carleman model-Mathematical problem in the kinetic theory of gases*, Proc.Conference Oberwolfach, eds D.C.Pack, H.Neunzert (May 1979), 45-52 .

[[Shi 2]] M. Shinbrot , *DVMs with Small Data*, Meccanica Journ. of AIMETA **22** (1987), 38-40 .

[[Shiz 1]] S. Shizuta, S. Kawashima , *The regular DVMs of the Be*, J. Math. Kyoto Univ. **27** (1987), 132 .

[[Spi 1]] G.Spiga , *Extended Kinetic Equations for Gas Mixtures*, XI-th Transport Theory Conference, Blacksburg (May 1989).

[[Spi 2]] G.Spiga , *Rigorous Solution to the Extended Kinetic Equations for Homogeneous Gas Mixtures*, preprint, Univ. of Bari.

[[Spi 3]] G.Spiga, G.Dukek, V.Boffi , *Scattering kernel formulation of the discrete velocity model of the extended Boltzmann system*, DKT, Lattice Gas Dynamics and Foundation of Hydrodynamics, ed.R.Monaco, World Sci. Singapore (1989), 315-328 .

[[Spi 4]] G. Spiga, T.Płatkowski, , *Exact solutions of stationary problems in discrete extended kinetic theory. Part II*, Atti dell'Academia Peloritana dei Pericolanti di Messina **LXVIII** (1990), 191-207 .

[[Sch 1]] K.J.Schmitt , *N-Particle Correlations in the McKean Model*, Journ.Stat.Phys. **46,1/2** (1987), 283-302 .

[[Sle 1]] M.Slemrod , *Large Time Behaviour of the Broadwell Model of a Discrete Velocity Gas with Specularly Reflective Boundary Conditions*, Arch.Rat.Mech.Anal. **111,4** (1990), 323-342

[[Shi 1]] Y.Shizuta, S.Kawashima , *Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete B.E.*, Hokkaido Math.J. **14** (1985), 249-275 .

[[Shi 2]] Y.Shizuta, S.Kawashima , *The regular DMs of the Be*, J. Math. Kyoto Univ. **27** (1987), 131 .

[[Sul 1]] U.M.Sultanghazin , *Discrete nonlinear models of the Boltzmann equation*, Alma Ata, Nauka KSSR, in russian (1985).

[[Tar 1]] P. Chauvat, R. Gatignol, *L.Tartar*, Existence globale pour un systeme hyperbolique semi-lineaire de la Theorie cinetique des gaz, Semin. Goulaouic-Schwartz, Ec. Polytecnique, Palaiseau, France, Notices Amer.Math.Soc., 22 1975 pp.A-413, Abstract 723-B49 (1975).

[[Tar 2]] L.Tartar , *Evolution equations in infinite dimensions*, Dynamical Systems, eds. A. B. Bednarek, L. Cesari, Ac. Press, NY **I** (1976).

[[Tar 3]] L.Tartar , *Some existence theorems for semilinear hyperbolic in one space variable*, Techn. Summ. Rep., Univ. of Wisconsin, Madison (1980).

[[Tar 4]] L.Tartar
, *Solutions oscillantes des equations de Carleman*, Semin. Goulaouic-Meyer-Schwartz, Ec. Polyt. Palaiseau, France **XII** (1980-1981), .

[[Tar 5]] L.Tartar , *Global existence for some semi-linear hyperbolic systems*, Notices of the AMS **22** (1975), A-413, Abstr. N 723-B49 .

[[Tar 6]] L.Tartar , *Etude des oscillations dans les equations aux derivees partielles non lineaires*, Lect. Notes Phys. 195, Conf.Trends Appl.Pure Math.Mech. (1983), 384-412 .

[[Tem 1]] R.Temam , *Sur la resolution exacte et approachee d'un probleme hyperbolique non-lineaire de T.Carleman*, Arch.Rational Mech.Anal. **35** (1969). 351-362 .

[[Tie 1]] D. H. Tiem , CRASP **313** (1991). 995 .

[[Tos 1]] G. Toscani , *Solution globale du modele a vitesse discrete de l'equation de Boltzmann en theorie cinetique*, CRASP **296, s. I** (1983), 577-580 .

[[Tos 2]] G. Toscani , *On the Discrete Velocity Models of the B. E. in Several Dimensions*, Ann. di Mat. Pura ed Applicata **(IV), CXXXVIII** (1984). 297-308 .

[[Tos 3]] G.Toscani , *On the asymptotic behaviour and stability of the solution for the Broadwell model of the Boltzmann equation in three dimensions*, Math.Methods Appl.Sci **7** (1985), 1-6

[[Tos 4]] G.Toscani , *Global existence and asymptotic behaviour for the discrete velocity models of the B.e.*, J.Math.Phys. **26(11)** (1985), 2918-2921 .

[[Tos 5]] G.Toscani , *The semidiscrete Boltzmann equation for hard spheres*, Meccanica Journ. of AIMETA **20,3** (1985). 249-252 .

[[Tos 6]] G.Toscani , Arch.Rat.Mech.Anal. **95** (1986), 37-49 .

[[Tos 7]] G.Toscani , *On the Cauchy problem for the discrete Boltzmann equation with initial values in L_1*, CMP **121** (1989), 121-142 .

[[Tos 8]] G.Toscani, W.Waluś , *The Initial Boundary Value Problem for the Four Velocity Plane Broadwell Model*, M3AS **1, 3** (1991), 293-310 .

[[Tos 9]] G.Toscani, G. Borgioli, A. Pulvirenti , *On the Cauchy Problem for the Semidiscrete Enskog Eq.*, Adv.in Kin.Th. and Cont.Mech., Springer Verl. ed. R.Gatignol, Soubbaramayer (1991), 91-98 .

[[Tos 10]] G. Toscani, W. Walus , *Recent Results on the Fractional Step Method in DKT*, Ser. on Adv. in Math. for Appl. Sci.: DMs of Fluid Dyn.. ed. A. S. Alves, 1990, Portugal **2** (1991), 123-130 .

[[Uch 1]] K. Uchiyama , *On the Boltzmann - Grad limit for the Broadwell model of the Boltzmann equation*, JSP **1-2, 52** (1988), 331-355 .

[[Ved 1]] V.V.Vedenjapin , *On the global existence theorem of the Cauchy problem for some discrete velocity models of the Boltzmann equation*, Soviet Math.Dokl. **15** (1974), 398 (in English) Dokl.Akad.Nauk SSSR, 215, 1974, p.21 (in Russian) .

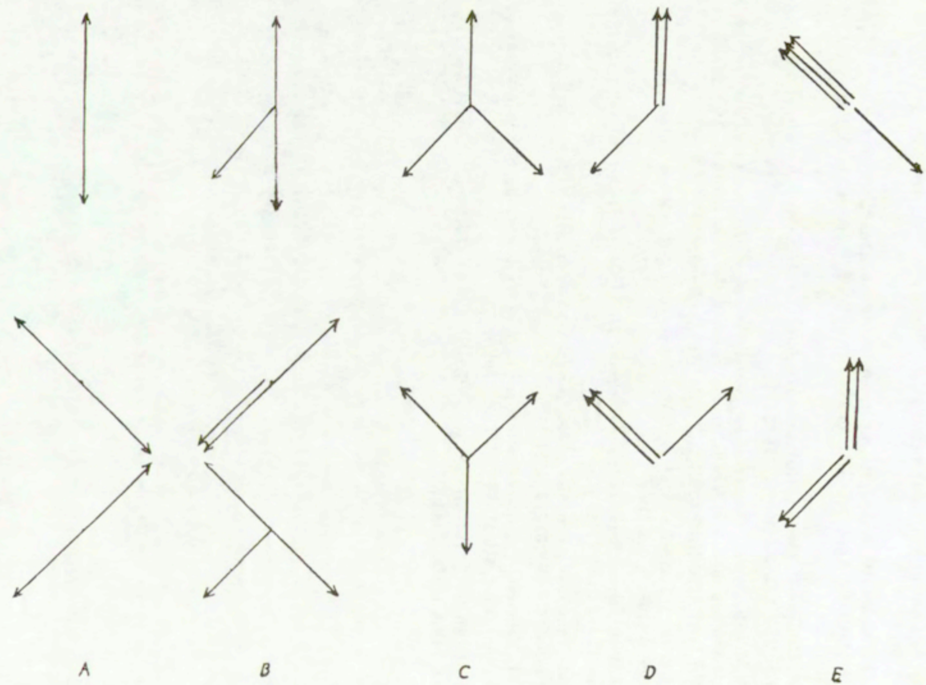
[[Wic 1]] J.Wick , *Two classes of explicit solutions of the Carleman model*, Math.Methods Appl.Sci. **6** (1984), 515-519 .

[[Wic 2]] J.Wick , *Some Remarks to the Carleman Model*, Oberwolfach Conf. on Math.Probl. in the Kin.Th. of Gases (1982), .

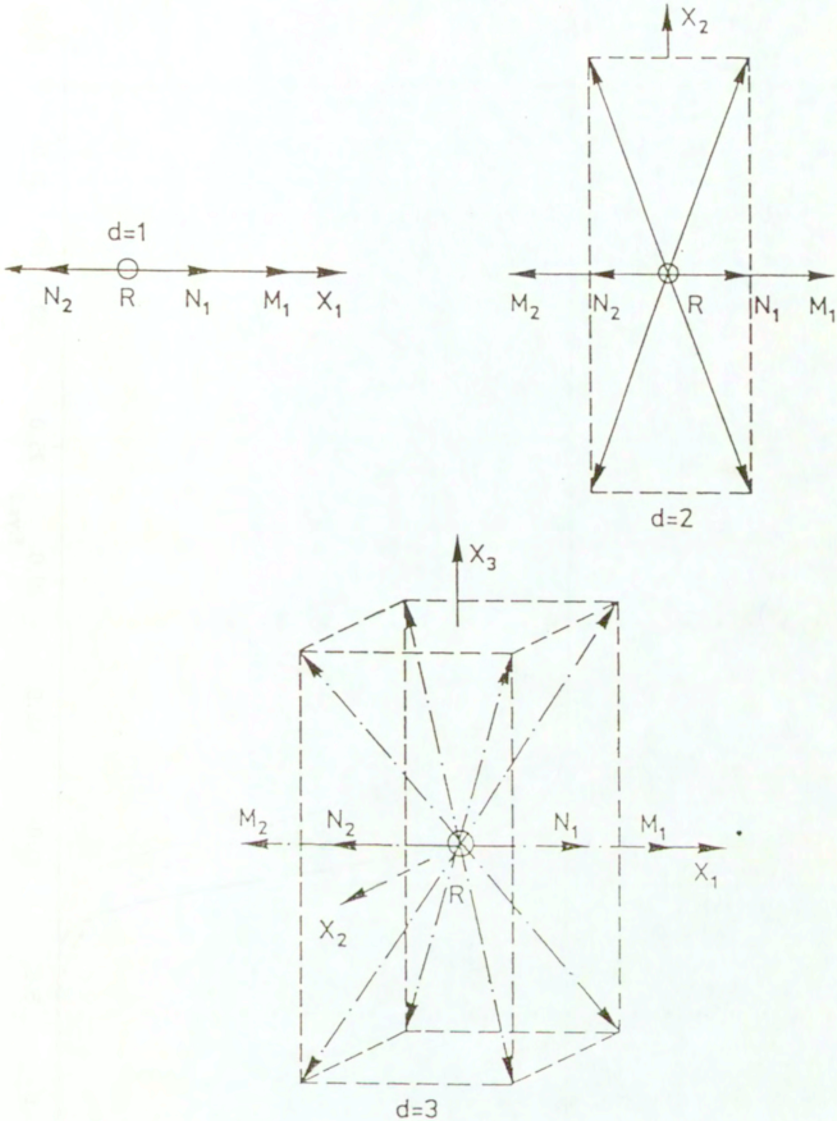
[[Yam 1]] M. Yamazaki , *Existence globale por les modeles discrete de Boltzmann dans un tube mince infini*, CRASP **313, I** (1991), 29-32 .

[[Yam 2]] M. Yamazaki , *Existence globale por les modeles discrete de Boltzmann dans un tube mince infini*, Proc. 4th MAFPD, TTSP (1991).

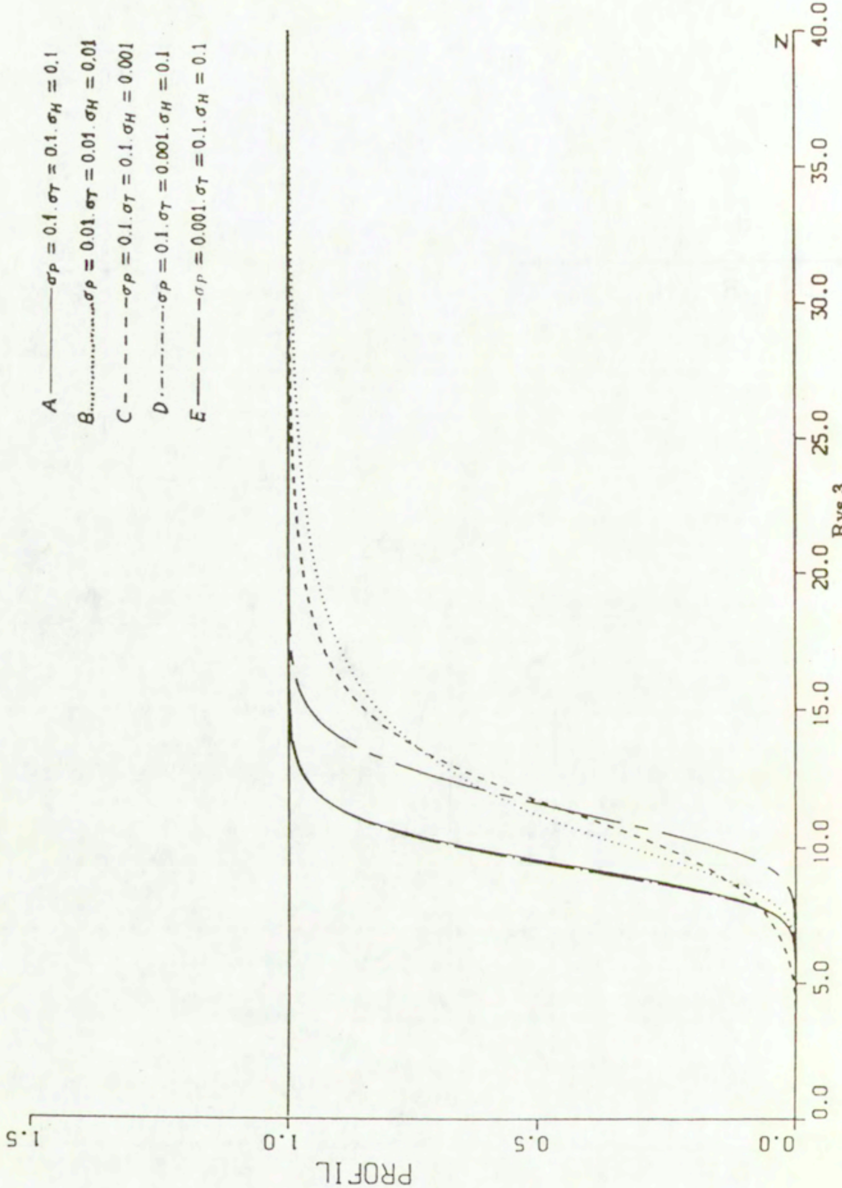
[[Zan 1]] D.H.Zanette , *Two-velocity gas diffusion with removal and regeneration processes*, Physica **148A** (1988), 288-297 .



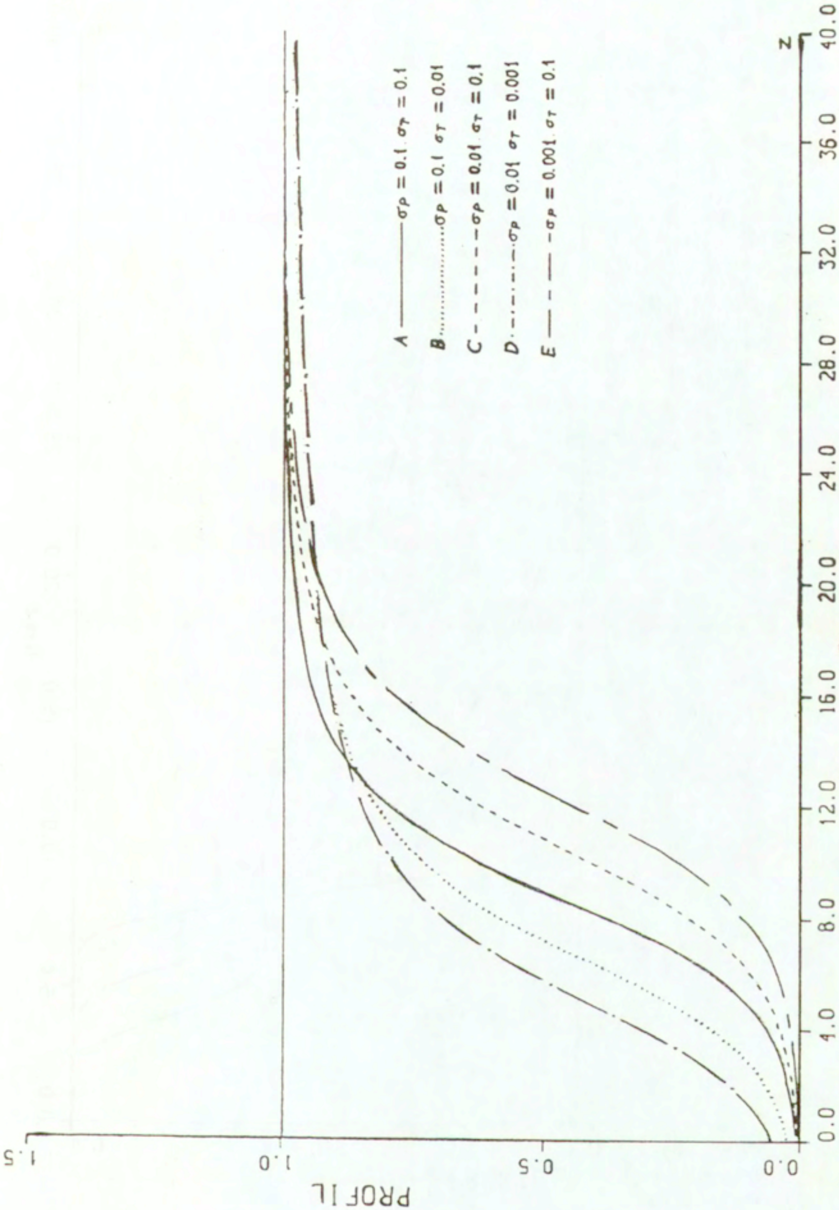
Rys.1



Rys.2

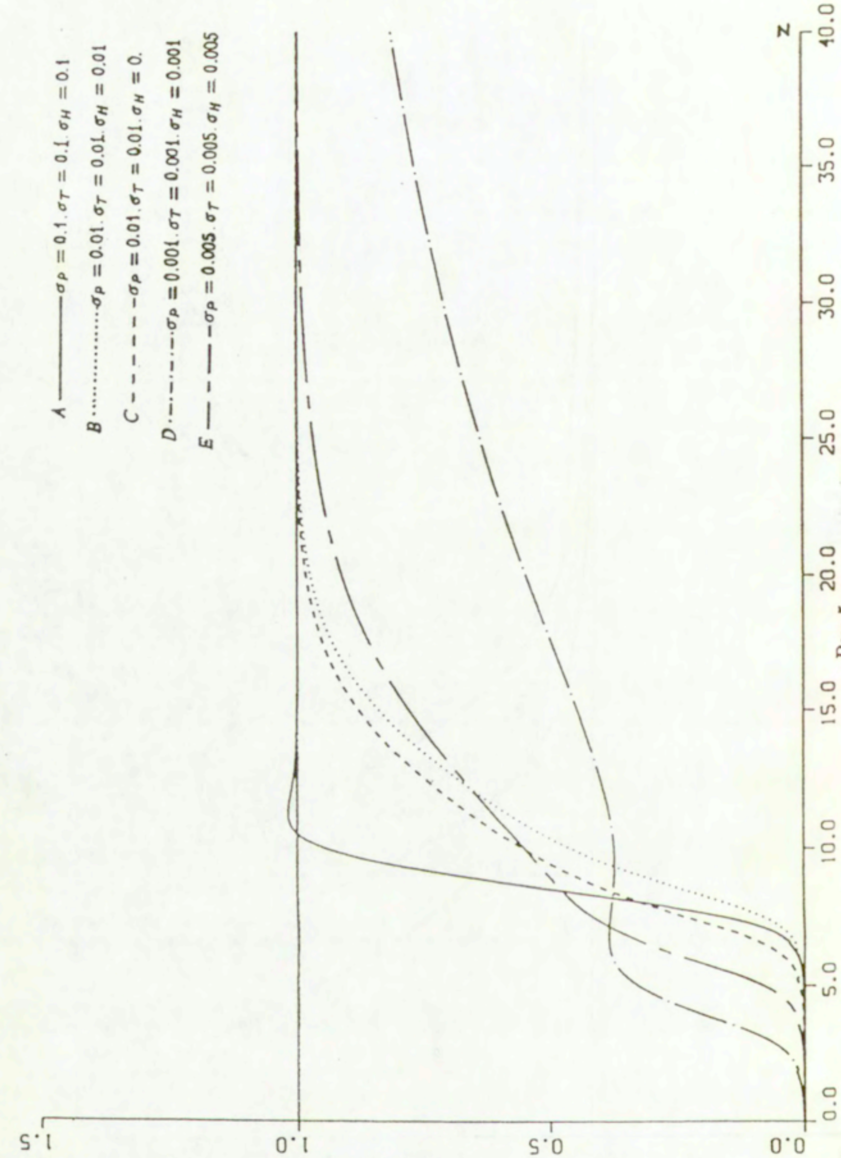

A ——— $\sigma_P = 0.1, \sigma_T = 0.1, \sigma_H = 0.1$
B .... $\sigma_P = 0.01, \sigma_T = 0.01, \sigma_H = 0.01$
C - - - - - - $\sigma_P = 0.1, \sigma_T = 0.1, \sigma_H = 0.001$
D -.-.-.-. $\sigma_P = 0.1, \sigma_T = 0.001, \sigma_H = 0.1$
E ——— - - - $\sigma_P = 0.001, \sigma_T = 0.1, \sigma_H = 0.1$
PROFIL
1.5
1.0
0.5
0.0
Z
0.0
5.0
10.0
15.0
20.0
25.0
30.0
35.0
40.0

Rys.3



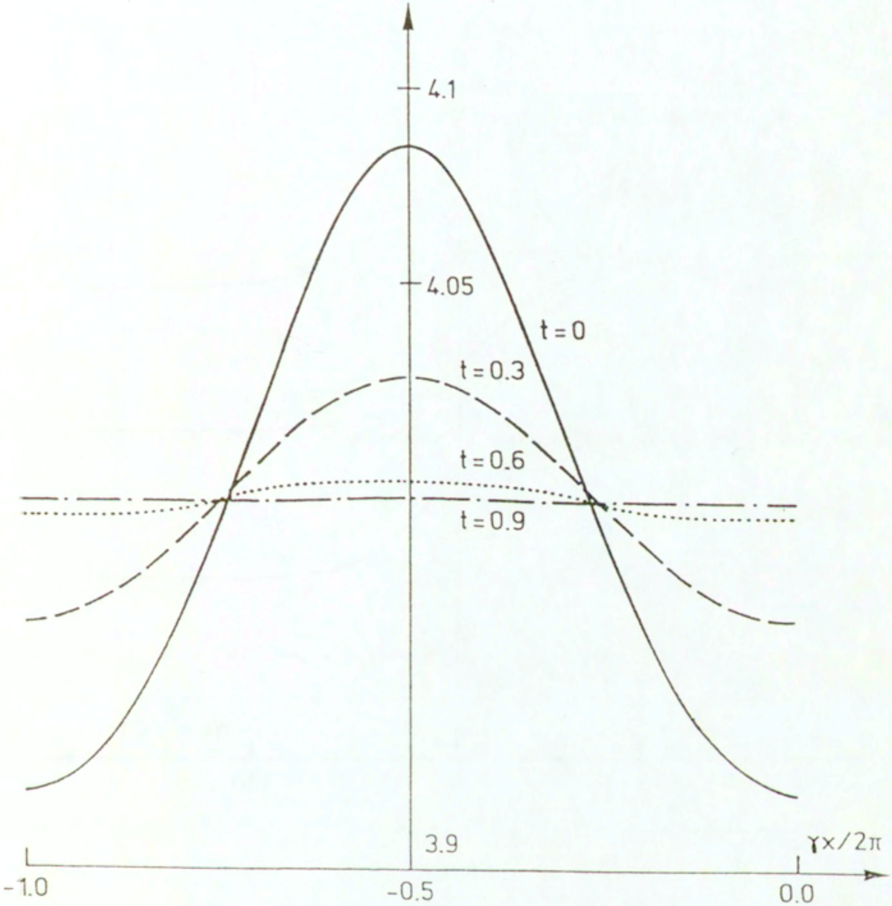
A ——— $\sigma_P = 0.1$, $\sigma_T = 0.1$
B ······ $\sigma_P = 0.1$ $\sigma_T = 0.01$
C - - - $\sigma_P = 0.01$ $\sigma_T = 0.1$
D -·-·- $\sigma_P = 0.01$ $\sigma_T = 0.001$
E — — $\sigma_P = 0.001$ $\sigma_T = 0.1$
PROFIL
z
0.0
0.5
1.0
1.5
0.0
4.0
8.0
12.0
16.0
20.0
24.0
28.0
32.0
36.0
40.0

Rys.4

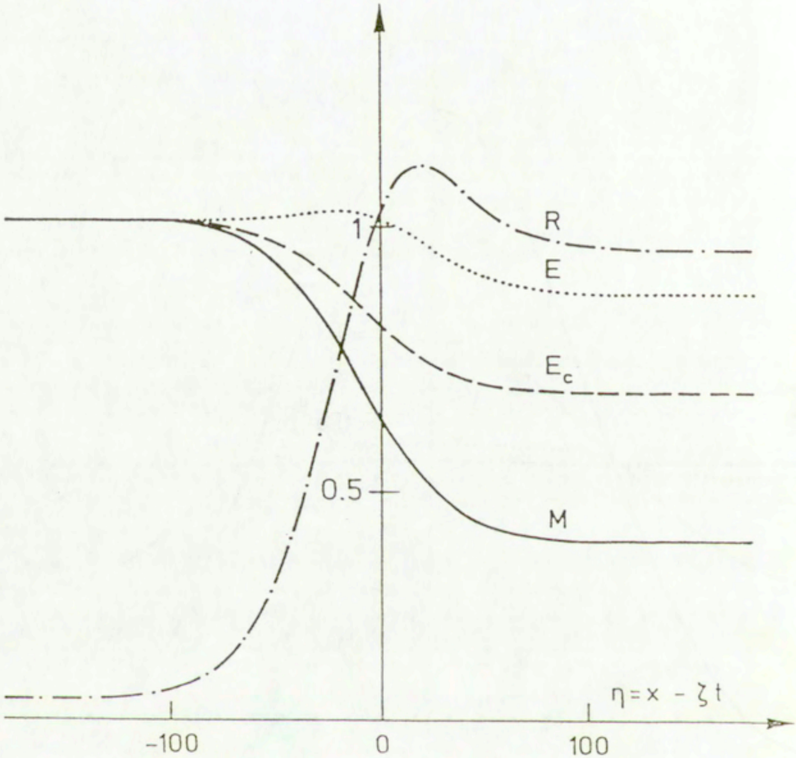


A —— $\sigma_P = 0.1.\ \sigma_T = 0.1.\ \sigma_H = 0.1$
B ······ $\sigma_P = 0.01.\ \sigma_T = 0.01.\ \sigma_H = 0.01$
C - - - - $\sigma_P = 0.01.\ \sigma_T = 0.01.\ \sigma_H = 0.$
D -·-·- $\sigma_P = 0.001.\ \sigma_T = 0.001.\ \sigma_H = 0.001$
E —— $\sigma_P = 0.005.\ \sigma_T = 0.005.\ \sigma_H = 0.005$
PROFIL
z
0.0
0.5
1.0
1.5
0.0
5.0
10.0
15.0
20.0
25.0
30.0
35.0
40.0

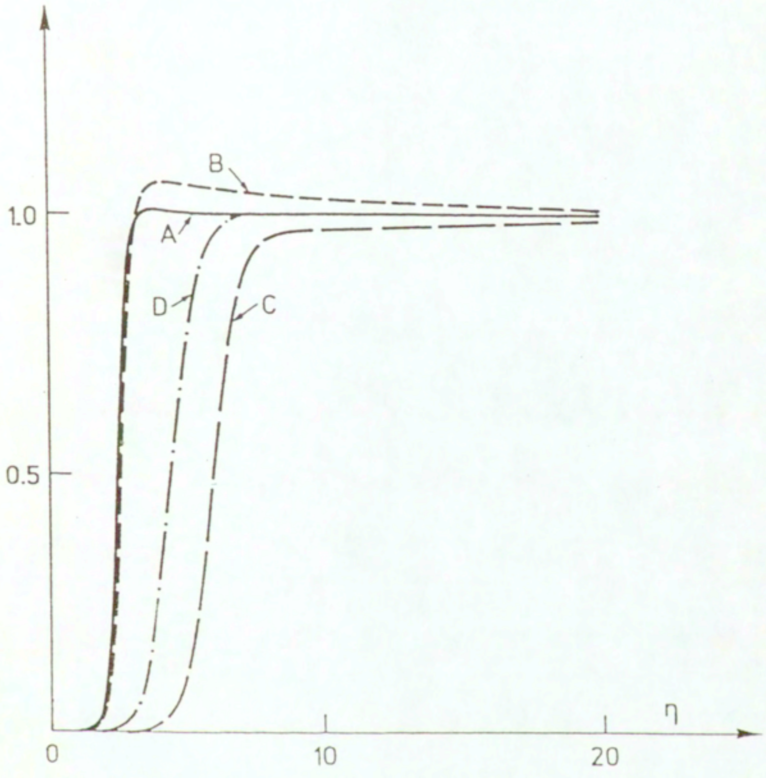
Rys.5



Rys.6



Rys.7



Rys.8

Tadeusz Płatkowski
Institute of Applied Mathematics and Mechanics
Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics
University of Warsaw

KINETIC THEORY OF GASES WITH DISCRETE DISTRIBUTIONS OF VELOCITIES: MODELLING, SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS

RESUME

The paper deals with the modelling, and with the boundary value problems in the discrete kinetic theory (DKT) for the single gases with the binary and multiple collisions, and for the binary mixtures of gases.

In the introduction the main research directions in the DKT are presented, the literature is reviewed, and the present state of knowledge in the considered field is discussed.

In part I the following models are proposed: the discrete gases with multiple collisions, a hierarchy of multidimensional models of gases with a change of the microscopic kinetic energy in the collisions, and a mixture of gases.

In part II the author solved the following basic boundary value problems in the DKT for the considered discrete models:

1. The problem of existence and uniqueness of solutions in the domains with boundaries for a general class of the affine boundary conditions which admit absorption, the boundary sources, and the interaction with a background, for gases with binary collisions.

2. The stationary shock wave problem for the basic in the lattice gas theory hexagonal model with the multiple collisions taken into account, and for a mixture of gases. The author also found a nonmonotonous profile of a local entropy in the shock transition zone, both in the mixtures, and in the single discrete gases.

3. Exact soliton - like solutions for the proposed hierarchy of multi - dimensional models, solutions with the nonmonotonous microscopic and total density profiles.

4. A global in time existence theorem for a class of the discrete models with multiple collisions.

The paper is accompanied by a large bibliography, which covers the principal research directions in the DKT.