

1.12 — metody numeryczne  
i komputerowe  
2.21 — akustoelektronika

**E. Danicki, D. Gafka**

**PROPAGACJA I GENERACJA AFP  
POD PERIODYCZNYM UKŁADEM  
GRUP ELEKTROD**

**13/1990**

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 3 maja 1989 r.



56753



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 120 egz. Ark.wyd. 2,3 Ark.druk. 3

Oddano do drukarni w kwietniu 1990 r.

Nr zamówienia 157/90

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,

ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Eugeniusz Danicki  
Dariusz Gafka  
Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

PROPAGACJA I GENERACJA AFP  
POD PERIODYCZNYM UKŁADEM GRUP ELEKTROD

**Streszczenie:**

W pracy rozważono propagację akustycznej fali powierzchniowej (AFP) na powierzchni piezoelektryka pokrytej układem elektrod w sposób następujący: grupa kilku równoodległych (i o równej szerokości) elektrod powtarza się periodycznie z pewnym okresem, układ jest nieograniczony. Rozpatrzony układ elektrod może modelować własności pojedynczej grupy kilku elektrod, jeśli okres powtarzania będzie dostatecznie duży. Wyprowadzono relacje dyspersyjne dla ogólnie ukośnej propagacji AFP względem elektrod. zilustrowano te relacje przykładami obliczonymi dla wybranych przypadków, w szczególności dla propagacji fali wzdłuż elektrod. Dla przypadku dwóch elektrod w grupie podano prędkości i rozkłady amplitud dwóch modów falowodowych: symetrycznego i antysymetrycznego. Dla przypadku propagacji fali w kierunku prostopadłym do elektrod rozważono różne połączenia elektryczne elektrod w grupie, a także elektrody elektrycznie swobodne ("plywające"). Wyprowadzono funkcjonalną zależność pomiędzy prądami dopływającymi do elektrod oraz napięciami na poszczególnych elektrodach. Na tej podstawie obliczono skuteczność przetwarzania elektrod w zależności od ich położenia w grupie. Przeprowadzona analiza może być użyteczna dla interpretacji takich zjawisk, jak: odbicie AFP od elektrod (struktury odbijające typu  $\Delta U/U$ ), deformacja charakterystyk częstotliwościowych kilkuelektrodowych przetworników międzypalczastych (względem modelu  $\delta$ -funkcji), czy sprzężenie między dwoma falowodami typu  $\Delta U/U$ , stosowanymi w konwolutorach.

## Wstęp

Technika akustycznych fal powierzchniowych (AFP), obejmująca filtry pasmowe, linie opóźniające, rezonatory, odbiciowe linie dyspersyjne i konwolatory znajduje coraz szersze zastosowanie w elektronice. Uzyskanie pożądanych parametrów podzespołów z AFP wymaga dokładnego zrozumienia zachodzących w nich zjawisk. Między innymi dotyczy to propagacji AFP po powierzchni podłoża piezoelektrycznego z nałożonymi na tę powierzchnię metalowymi paskami (elektrodami).

Propagacja AFP pod układem elektrod ma miejsce w szeregu kluczowych dla techniki AFP elementach:

- w przetwornikach międzypalczastych, zawierających od dwóch do kilku tysięcy elektrod, pod którymi fala się propaguje, gdzie jest generowana i odbierana,
- w rezonatorach z reflektorami w postaci periodycznego układu metalowych pasków, gdzie AFP jest synchronicznie odbijana,
- w strukturach odbijających falę pod kątem prostym stosowanych np. w zespołach filtrów i dyspersyjnych liniach opóźniających typu odbiciowego,
- w konwolatorach falowodowych [10] z jednym lub dwoma falowodami (pracującymi przeciwobnie).

Dopuszczając pewną idealizację, polegającą głównie na zaniedbaniu mechanicznych własności elektrod (masa, sprężystość, a także skończona przewodność) model matematyczny wymienionych wyżej przypadków koresponduje z problemem brzegowym z mieszanymi warunkami brzegowymi dla wielkości elektrycznych (pole elektryczne styczne do powierzchni, indukcja elektryczna normalna do powierzchni) i jednorodnymi mechanicznymi warunkami brzegowymi (znikanie odpowiednich składowych tensora naprężeń). W pracy przyjęto metodę analizy propagacji AFP pod układem elektrod zaproponowaną pierwotnie w [1,2,3,4] i rozwiniętą w [5,6,7,8] (propagacja ukośnie do elektrod, elektrycznie niejednorodne

zagadnienie dla przypadku generacji AFP), pozwalającą na uwzględnienie pierwiastkowej osobliwości pola elektrycznego na krawędzi elektrod zarówno w problemie jednorodnym (zagadnienie własne opisujące propagację fali pod elektrodami) jak i w problemie niejednorodnym (opisującym generację AFP przez elektrody, zasilane z zewnętrznego źródła napięcia).

Rozpatrywane zagadnienie brzegowe sformułowane jest w następnym punkcie. W punkcie 3 podano rozszerzenie metody [4] od przypadku elektrod periodycznych dzielonych na przypadek powtarzającej się okresowo grupy wielu elektrod. Pewne przypadki szczególne wraz z przykładami numerycznymi dyskutowane są w kolejnym punkcie. Rozważane są przypadki różnych połączeń elektrod między sobą. Punkt 5 poświęcony jest analizie propagacji fali prostopadle do elektrod. W punkcie 6 wyprowadzono funkcjonalną zależność pomiędzy prądami i napięciami na poszczególnych elektrodach (relacja transadmitancyjna wyrażająca zależność prądu dopływającego do danej elektrody od napięcia przyłożonego do innej elektrody). W punkcie 7 przedstawiono przykładowe wyniki numeryczne dotyczące skuteczności przetwarzania sygnału elektrycznego na AFP dla elektrody, w zależności od jej położenia w grupie elektrod. Modeluje to pracę skrajnych elektrod przetwornika międzypalczystego o skończonej liczbie elektrod;

W całej pracy zaniedbano całkowicie fale objętościowe, przez przyjęcie uproszczonej aproksymacji efektywnej przenikalności dielektrycznej podłoża. Uwzględnienie fal objętościowych nie nastęrcza jednak trudności i może być zrobione analogicznie jak w pracach [6,7,8].

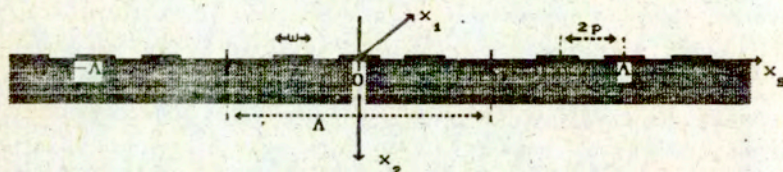
## 2. Sformułowanie zagadnienia brzegowego

Rozważana jest półprzestrzeń piezoelektryka, po której propaguje się akustyczna fala powierzchniowa, opisana przez zespoloną funkcję harmoniczną:

$$\exp j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (1)$$

gdzie  $\omega$  - częstość kołowa fali (przyjmowana za określoną w całym artykule, czynnik  $\exp(j\omega t)$  będzie dalej pomijany),  $\mathbf{k}$  - wektor

falowy, który przyjmuje wartości od  $k_v(\theta)$  dla swobodnej powierzchni piezoelektryka (graniczącej z próżnią) do  $k_o(\theta)$  dla powierzchni metalizowanej, kąt  $\theta$  określa kierunek propagacji fali w układzie współrzędnych  $x_1, x_2$  (oś  $x_2$  skierowana jest w głąb podłoża, z założenia anizotropowego - patrz rys. 1). W rozważanych przypadkach zakłada się, że  $k_o$  i  $k_v$  są liczbami rzeczywistymi i  $k_o \geq k_v$ ,  $k_o = \omega/V_o$ ,  $k_v = \omega/V_v$ , gdzie  $V_o$  i  $V_v$  są odpowiednimi prędkościami AFP, a powszechnie stosowany w teorii AFP czynnik  $\Delta U/U$  określony jest jako  $\Delta U/U = (V_v - V_o)/V_v$ .



Rys.1. Analizowana struktura elektrod (N=3).

Podłoże scharakteryzowane jest, w sposób wystarczający dla rozważanego poniżej problemu, przez efektywną przenikalność dielektryczną (ESP) określoną przez stosunek  $\Delta D_{\perp}/E_{\parallel}$  gdzie  $\Delta D_{\perp}$  jest gęstością ładunku elektrycznego na powierzchni podłoża (może to być ładunek na elektrodach położonych na powierzchni), równą różnicy składowej wektora indukcji elektrycznej, prostopadłej do powierzchni podłoża  $x_2 = 0$ , wziętej od strony podłoża ( $x_2 = 0^+$ ) i od strony próżni ( $x_2 = 0^-$ ),  $E_{\parallel}$  jest natężeniem pola elektrycznego na powierzchni podłoża (uwaga:  $\Delta D_{\perp}$  i  $E_{\parallel}$  w tekście poniżej oznaczają zespolone amplitudy odpowiednich fal harmonicznycy, opisanych przez (1)).

W przybliżeniu zaniedbania akustycznych fal objętościowych, relacja pomiędzy amplitudami  $\Delta D_{\perp}$  i  $E_{\parallel}$  fal harmonicznycy w postaci (1) określona jest przez tzw. efektywną przenikalność dielektryczną (w skrócie ESP) jak następuje [1,2] (dla  $k > 0$ ):

$$\epsilon(k) = -j \frac{\Delta D_{\perp}}{E_{\parallel}} = \epsilon_o \epsilon_{ef} \frac{k^2 - k_v^2}{k^2 - k_o^2}, \quad (2)$$

gdzie:  $k = |\vec{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  i  $\epsilon_{ef}$  są funkcjami kąta  $\theta = \arctg(k_2/k_1)$ ,  $\epsilon_0$  jest przenikalnością dielektryczną próżni.

Relacja (2) opisuje związek między amplitudą ładunku na powierzchni podłoża ( $\Delta D_{\perp}$ ), a potencjałem elektrycznym  $\phi$  (standardowo  $\vec{E} = -\text{grad}\phi$ ) na powierzchni  $x_2 = 0$ , dla różnych liczb falowych  $k$ . W przypadku fal harmonicznycch pole  $E_{\parallel}$  oznacza zespoloną amplitudę fali  $E_{\parallel} \exp(j\omega t - k\zeta)$ , gdzie  $\zeta$  jest współrzędną mierzoną wzdłuż kierunku propagacji fali o liczbie falowej  $k$ .

Rozważany układ elektrod przedstawiony jest na rys.1. Elektrody mają jednakową szerokość  $w$ , jednakowy jest odstęp  $2p$  między elektrodami wewnątrz grupy, kolejne grupy, zawierające  $N$  elektrod, powtarzają się periodycznie z okresem  $\Lambda = 2\pi/K$ . Układ jest nieograniczony.

Jak wiadomo propagująca się fala w układzie periodycznie niejednorodnym opisana może być przez sumę składowych harmonicznycch związanych z okresem układu  $\Lambda$ . Konsekwentnie, zgodnie z tw. Floquet'a pole elektryczne  $E_{\parallel}$  na periodycznie pokrytej elektrodami powierzchni piezoelektryka przedstawia się w postaci:

$$\vec{E}_{\parallel} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{E}_n \exp(-j(\vec{k} + n\vec{K}) \cdot \vec{x}), \quad (3)$$

gdzie  $\vec{k}$  jest wektorem falowym rozpatrywanego układu elektrod i ma jedną składową  $\vec{k} = [0, 0, K]$ ,  $K = 2\pi/\Lambda$ . Podobnie można przedstawić rozkład ładunku na powierzchni podłoża poprzez zastąpienie  $\vec{E}_{\parallel}$  przez  $\Delta D_{\perp}$  i  $\vec{E}_n$  przez  $D_n$ . Należy zauważyć, że  $D_n$  i  $E_n$  związane są przez relację (2), dla każdego  $n$  oddzielnie.

Zagadnienie brzegowe, które jest tu rozpatrywane, można sformułować następująco:

znaleźć pole elektryczne  $\vec{E}$ , wyrażone przez (3) i jedną ze składowycch wektora falowego  $\vec{k}$  (przy drugiej składowej zadanej - dla ograniczenia dowolności będziemy wybierać  $\vec{k}$  z I strefy Brillouin'a, tj.:  $|k_y| < K/2$ ) i przy zadanej częstotliwości  $\omega$  tak, aby:

- pole elektryczne  $\vec{E}_{\parallel}$  zerowało się na elektrodach
- rozkład gęstości ładunku powierzchniowego  $\Delta D_{\perp}$  zniknął między elektrodami.

Powyzsze mieszane warunki brzegowe zapisują się następująco:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= 0 && \text{na elektrodach} \\ \Delta D_{\perp} &= 0 && \text{między elektrodami.} \end{aligned} \quad (4)$$

### 3. Metoda rozwiązania

Jak wiadomo [9] układ dwóch funkcji:

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n P_n(\cos\Delta) e^{-jn\theta} \\ f(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(\cos\Delta) e^{-jn\theta}, \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie  $\Delta = Kw/2$ ,  $\theta = Kx_s$ ,  $S_n$  jest funkcją znaku  $n$  oraz  $P_n$  są wielomianami Legendre'a, spełnia warunki analogiczne do opisanych powyzej:

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq |\theta| \leq \Delta \\ -j \frac{\theta}{|\theta|} 2^{1/2} e^{j\theta/2} [\cos\Delta - \cos\theta]^{-1/2}, & \Delta < |\theta| \leq \pi \end{cases} \\ f(\theta) &= \begin{cases} 2^{1/2} e^{j\theta/2} [\cos\theta - \cos\Delta]^{-1/2}, & 0 \leq |\theta| \leq \Delta \\ 0, & \Delta < |\theta| \leq \pi \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Rzeczywiście, funkcje  $g(\theta)$  i  $f(\theta)$  stanowią rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia elektrostatyki dla dielektryka (to jest dla  $k_o = k_v$  w relacji (2)). Jednakże dla piezoelektryków jest  $k_o \cong k_v$ , a relacja (2) różni się istotnie od podobnej dla dielektryka w wąskim przedziale liczb falowych  $k \in [k_v, k_o]$ . Zostało to zauważone i wykorzystane w [2,3,4,5] do konstrukcji rozwiązania problemu brzegowego (4) dla podłoża piezoelektrycznego ( $k_o \neq k_v$ ).

Postępując podobnie jak w [2,4,5] wprowadzono funkcje, które są analogicznymi do (6) rozwiązaniami problemu elektrostatyki dla rozpatrywanego układu grup elektrod z rys.1:



$$G_N(\theta; \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n X_n^N e^{-jn\theta}$$

$$F_N(\theta; \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^N e^{-jn\theta} \quad (7)$$

gdzie parametr związany z odległością elektrod w grupie  $\alpha = Kp$ , przy czym spełnione są warunki:

$$G_N(\theta; \alpha) = 0 \quad \text{na elektrodach}$$

$$F_N(\theta; \alpha) = 0 \quad \text{między elektrodami} \quad (8)$$

Postaci tych funkcji i ich własności podane są w Dodatku A.

Dla wygody, wyrażenia (3) dla pola elektrycznego i ładunku na powierzchni zostaną zapisane w postaci [5]:

$$\vec{E}_{\parallel} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \vec{e}_n \exp(-jk_n \xi_n)$$

$$\Delta D_{\perp} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \exp(-jk_n \xi_n), \quad (9)$$

gdzie:

$k_n = |\vec{k} + n\vec{K}| = \sqrt{k_1^2 + (k_3 + nK)^2}$ ,  $\xi_n$  współrzędna mierzona wzdłuż wektora falowego  $k_n$  tak, że

$$k_n \xi_n = (\vec{k} + n\vec{K}) \cdot \vec{x} \quad (\text{p. rys.1.})$$

oraz  $\vec{e}_n$  jest wersorem w kierunku wektora falowego  $\vec{e}_n = \vec{k}_n / k_n$ .

Odpowiednie składowe potencjału mają postać:

$$\phi_n \exp(-jk_n \xi_n), \quad \text{gdzie } \phi_n = -jE_n / k_n.$$

W tych oznaczeniach składowe  $E_3$  i  $E_1$  pola elektrycznego (dla  $x_2 = 0$ ) wyrażają się przez:

$$E_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_3 + nK}{k_n} \cdot E_n e^{-jk_3 x_3 - jnKx_3 - jk_1 x_1}$$

$$E_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_1}{k_n} \cdot E_n e^{-jk_3 x_3 - jnKx_3 - jk_1 x_1} \quad (10)$$

a warunki brzegowe (4) mogą być zapisane jako:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_s + nK}{k_n} \cdot E_n e^{-jnKx_s} = 0 \quad \text{na elektrodach}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n E_n e^{-jnKx_s} = 0 \quad \text{między elektrodami,} \quad (11)$$

gdzie wykorzystano relację (2), wiążącą  $E_n$  i  $D_n$  dla dowolnego  $n$

$$D_n = j\epsilon_n E_n$$

( $D_n$  i  $E_n$  są zespolonymi amplitudami ładunku powierzchniowego i pola elektrycznego tej samej fali harmonicznego (1)).

Należy zwrócić uwagę, że  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_\infty = \epsilon_0 \epsilon_{ef}$  dla  $|n| \rightarrow \infty$ , co więcej dla liczb falowych  $K$  niezbyt małych w porównaniu z  $k_{o,y}$  zachodzi  $\epsilon_n \approx \epsilon_\infty$  już od niewielkich  $n$ . Podobnie  $(k_s + nK)/k_n \rightarrow 1$  dla  $n \rightarrow \pm\infty$ .

Warunki (11) zapewniają zerowanie się jednej składowej pola elektrycznego na elektrodach - składowej  $E_s$ , prostopadłej do elektrod. Należy je uzupełnić przez relację dodatkową, mianowicie przez warunek zerowania się drugiej składowej pola (wzdłuż elektrod) w dowolnym miejscu elektrody. Wygodnie jest ten warunek odnieść do osi elektrod [5]. Zgodnie z (10) otrzymuje się:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_s}{k_n} \cdot E_n e^{-jnK(2l-N-1)p} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (12)$$

Warunków tych jest tyle ile elektrod w grupie.

Wykorzystując metodę [2], wyrażono wielkości  $E_n$  i  $D_n = j\epsilon_n E_n$  poprzez funkcje  $X_m$  w następujący sposób:

$$E_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m G_m(Kx_s; Kp) e^{-jmKx_s}$$

$$D_n = j \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m F_m(Kx_s; Kp) e^{-jmKx_s} \quad (13)$$

Warunki brzegowe (11) sprowadzają się wtedy do postaci:

$$\frac{k_s + nK}{k_n} E_n = \sum_{m=M}^{M_2} \alpha_m S_{n-m} X_{n-m}^N$$

$$\epsilon_n E_n = \sum_{m=M_1}^{M_2} \beta_m X_{n-m}^N, \quad (14)$$

gdzie zastąpiono nieskończone sumowanie po  $m$  sumowaniem w granicach  $M_1 \leq m \leq M_2$ . Odpowiada to obcięciu odpowiedniego nieskończonego układu równań, w tym przypadku możliwym [2,5], gdyż zarówno  $(k_s+nK)/k_n$  jak i  $\epsilon_n$  szybko się ustalają dla  $n \rightarrow \infty$ . Porównując lewe i prawe strony (14) dla  $N_1 \leq n \leq N_2$  (wybór tych granic dyskutowany będzie niżej, lecz wiadomo, iż uwzględnione muszą być wszystkie wyrazy, dla których zarówno  $(k_s+nK)/k_n$  jak i  $\epsilon_n$  są istotnie różne od ich ustalonej wielkości dla  $n \rightarrow \infty$ ), określa się  $\alpha_m$ . Tak obliczone  $\alpha_m$  muszą dać dla  $n < N_1$  i  $n > N_2$  relacje (14) w postaci niesprzecznego układu równań. Determinuje to wybór  $M_1$  i  $M_2$ , w zależności od granic  $N_1$  i  $N_2$ . Dodatkowo [2,5] z warunku niesprzeczności tego układu równań wynika, że  $N_1$  i  $N_2$  muszą być wybrane w taki sposób, aby dla  $n < N_1$  i  $n > N_2$  wyrazy leżące po lewej stronie równości (14) miały praktycznie ustalone wartości (równe w przybliżeniu wartościom dla  $|n| \rightarrow \infty$ ). Oznacza to między innymi, że

$$(k_1^2 + (k_s + (N_1 - 1)K)^2)^{1/2} > k_0 \text{ oraz } (k_1^2 + (k_s + (N_2 + 1)K)^2)^{1/2} > k_0,$$

gdzie  $k_0$  jest liczbą falową fali propagującej się prostopadle do elektrod. Wynika to stąd, że spełnienie warunku  $|(k_s+nK)/k_n| \rightarrow 1$  dla  $n < N_1$  i  $n > N_2$  oznacza, że wektor  $\vec{k}_n$  jest prostopadły do elektrod, a więc wielkości  $k_0$  i  $k_n$  występujące w (11), zgodnie z przyjętym określeniem  $\epsilon_n$  (2), odpowiadają liczbom falowym AFP propagującej się w tym samym kierunku, a więc prostopadle do elektrod.

Należy zwrócić uwagę, że liczba zmiennych  $\alpha_m$ , zawarta w granicach  $M_1 \leq m \leq M_2$ , musi być większa od liczby  $N_2 - N_1 + 1$  (to jest od liczby równań, wynikających z porównania prawej i lewej strony układu (14)), gdyż do spełnienia pozostaje jeszcze  $N$  równań (12), wynikających z zerowania się pola wzdłuż osi elektrod.

Podsumowując, porównanie pary równań (14) dla  $N_1 \leq n \leq N_2$  daje następującą relację:

$$\sum_{m=M_1}^{M_2} \left[ \frac{k_s+nK}{k_n} \cdot \epsilon_{of} - S_{n-m} \epsilon_n \right] \alpha_m X_{n-m}^N = 0, \quad (15)$$

która musi być spełniona dla każdego  $n \in [N_1, N_2]$ ,  $N_1 < 0$ ,  $N_2 > 0$ , zaś warunek (12) daje:

$$\sum_{m=M_2}^{M_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{n-m}^{\infty} \alpha_m X_{n-m}^N}{k_s + nK} e^{-jnK(2l-N-1)p} = 0, \quad (16)$$

dla każdego  $l = 1, 2, \dots, N$ .

Wyboru  $M_1$  i  $M_2$  należy dokonać po ustaleniu  $N_1$  i  $N_2$  w następujący sposób, zapewniający równą liczbę niewiadomych i równań:

$$M_1 = N_1 - \text{int}(N/2) \quad (N_1 < 0)$$

$$M_2 = N_2 + \text{int}((N+1)/2).$$

Całkowita liczba równań i niewiadomych jest wtedy równa:  $N_2 - N_1 + N + 1$ . Relacja dyspersyjna wynika z zerowania się wyznacznika charakterystycznego  $\Delta(k_s)$  układu równań (15)+(16):

$$\Delta(k_s) = 0. \quad (17)$$

#### 4. Przykłady numeryczne

a)  $k_s \neq 0$

Podane poniżej przykłady obliczone są dla podłoża  $\text{LiNbO}_3$  cięcia Y. Na początek rozważymy przypadek periodycznego układu elektrod (tj. przypadek, kiedy w przedziale  $\Lambda$  znajduje się jedna elektroda), w którym  $K \cong k_0 \sqrt{2}$ . Jest to przypadek występujący w strukturach odbijających falę pod kątem prostym, np. w dyspersyjnych liniach opóźniających typu RAC [10,11]. Dla niobianu litu cięcia Y rozważane fale propagują się w kierunkach Z i X i mają różne prędkości wynikające z anizotropii podłoża. Relacja dyspersyjna w tym przypadku może być podana w postaci wzoru przybliżonego (odpowiednio do przybliżenia określonego przez podaną w poprzednim punkcie metodę analizy). Dodatkowo założono tutaj:  $N = 1$ ,  $w = \Lambda/2$  ( $\Delta = \pi/2$  - szerokość metalizacji równa szerokości obszaru wolnego od metalizacji), wtedy funkcje Legendre'a  $P_n(\cos \Delta)$  mają zerowe argumenty. W rozwinięciach (14) można przyjąć  $N_1 = -1$ ,  $N_2 = 0$ , czyli  $M_1 = -1$ ,  $M_2 = 1$ , co oznacza, że wprowadzono tylko trzy niezerowe stałe  $\alpha_{-1}$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ :

$$\frac{k_s}{k_0} E_0 = \alpha_0 - \alpha_1 \qquad \frac{k_s - K}{k_{-1}} E_{-1} = \alpha_{-1} - \alpha_0$$

$$D_0 = j\epsilon_0 (\alpha_0 + \alpha_1) \qquad D_{-1} = j\epsilon_{-1} (\alpha_{-1} + \alpha_0) \qquad (18)$$

Do relacji dyspersyjnej prowadzi warunek (16), który dla przyjętej konfiguracji układu elektrod przyjmuje postać:

$$\sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S_{n-m} \alpha_m^P \alpha_{n-m}^Q}{k_s + nK} = 0 \qquad (19)$$

Dalsze przekształcenia, podane w skrócie w Dodatku B, prowadzą do następującej relacji dyspersyjnej:

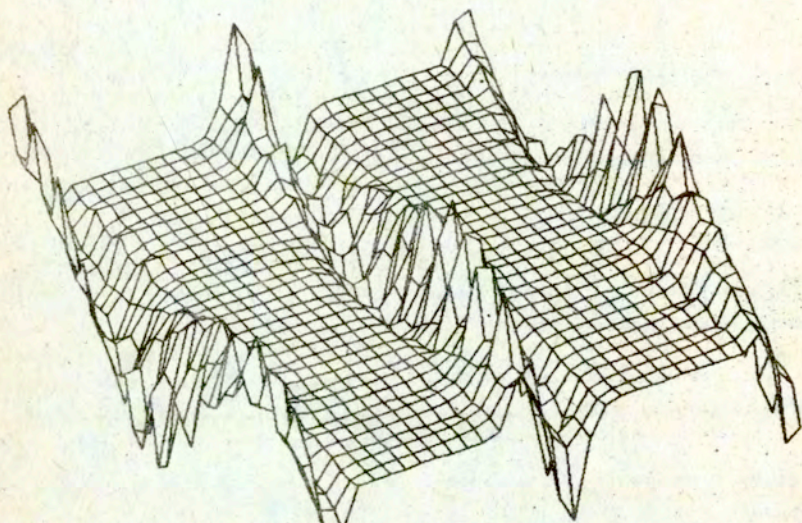
$$\delta^2 - \epsilon^2 \operatorname{tg}^2 \theta^+ = - \frac{k_{\nu^+}^2 \frac{\Delta U}{U^+} \cdot k_{\nu^-}^2 \frac{\Delta U}{U^-}}{K \cos \theta^+ \cdot K \cos \theta^-} \frac{\sin^2 \theta}{(\sin \theta^+ + \sin \theta + \sin \theta^-)^2} \qquad (20)$$

opisującej propagację fali w pobliżu synchronizmu z elektrodami ( $\delta$  i  $\epsilon$  są małe, patrz wzór (85)).

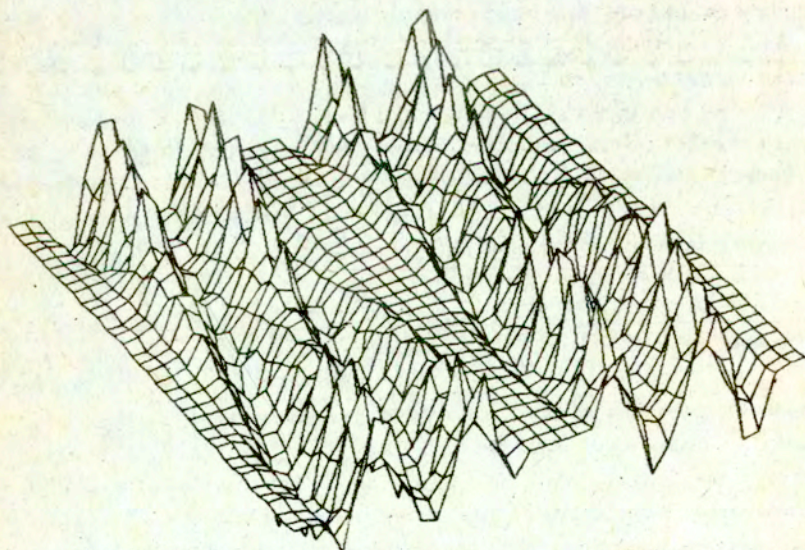
Dla przypadku synchronizmu fali ze strukturą elektrod  $\delta$  jest czysto urojone i  $\operatorname{Im} \delta$  przyjmuje swoją maksymalną wartość dla  $\epsilon = 0$ . Odpowiada to spełnieniu warunku Bragga przy odbiciu AFP od periodycznego układu elektrod. Współczynnik tłumienia fali  $\delta \neq 0$  jest rezultatem odbicia fali od poszczególnych elektrod. Taka fizyczna interpretacja wielkości  $\delta$  pozwala na obliczenie współczynnika odbicia fali  $\gamma$  (jest to zmiana mocy fali w wiązce po przejściu drogi od jednej elektrody do następnej - długość tej drogi jest liczona wzdłuż kierunku propagacji fali) [6]. Na podstawie (20) (dla  $\epsilon = 0$ ) i powyższej interpretacji otrzymuje się [6] (później podobny przypadek był rozważany w [13]):

$$\gamma = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{\Delta U}{U^+} \operatorname{tg} \theta^+ \frac{\Delta U}{U^-} \operatorname{tg} \theta^-}{\sin \theta^+ \sin \theta^-}} \frac{\sqrt{\sin \theta^+ \sin \theta^-} / \sin \theta}{\sin \theta^+ + \sin \theta + \sin \theta^-} \qquad (21)$$

Rysunki 2a i 2b prezentują przestrzenne rozkłady odpowiednio składowej pola elektrycznego  $E_y(x_1, x_2)$  oraz gęstości powierzchniowej ładunku  $\rho(x_1, x_2)$  wywołane akustyczną falą powierzchniową rozchodzącą się pod kątem  $30^\circ$  do elektrod w układzie dwuperiodycznym. Mają one charakter poglądowy i obliczone są z dokładnością do stałej multiplikatywnej.



Rys. 2a. Rozkład składowej  $E_z$  pola elektrycznego w układzie dwuperiodycznym przy ukośnym rozchodzeniu się AFP.



Rys. 2b. Rozkład gęstości powierzchniowej ładunku  $\rho$  w układzie dwuperiodycznym przy ukośnym rozchodzeniu się AFP.

b)  $k_s = 0$

Rozważony zostanie periodyczny układ grup elektrod, w którym grupę stanowią dwie blisko siebie położone elektrody, a odstęp między grupami (A) jest duży. Rozpatrywana AFP propaguje się wzdłuż elektrod ( $k_s = 0$ ). Z fizycznego punktu widzenia rozważana sytuacja może być interpretowana tak, że wpływ sąsiednich grup elektrod na propagację fali w pobliżu danej grupy jest niewielki, a to z kolei oznacza, że przytoczone poniżej wyniki opisują w przybliżeniu przypadek dwóch sprzężonych falowodów AFP typu  $\Delta U/U$  (stosowanych np. w konwolutorach).

W takim przypadku równania (15) i (12), składające się na relację dyspersyjną, są następujące (przy uwzględnieniu  $k_s = 0$  w (14)):

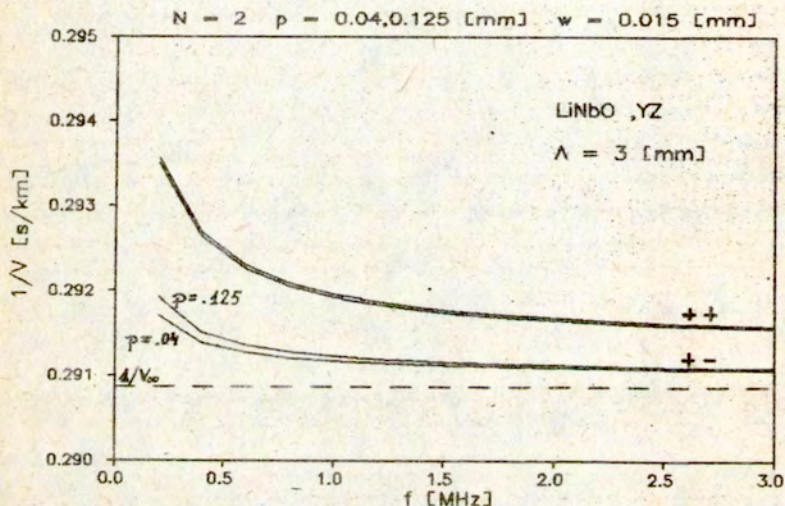
$$\sum_{m=M_1}^{M_2} \left[ \frac{nK}{k_n} \cdot \epsilon_{ef} - S_{n-m} \epsilon_n \right] \alpha_m X_{n-m}^N = 0, \quad (22)$$

$$\sum_{m=M_2}^{M_2} \alpha_m \left[ \sum_{n=0}^{N-m} \frac{S_{n-m} X_{n-m}^N}{nK} e^{-jnK(2l-N-1)p} + \frac{\epsilon_{ef}}{\epsilon_0} X_{-m}^N \right] = 0,$$

gdzie  $n \in [N_1, N_2]$  oraz  $l \in [1, N]$  (relacja dyspersyjna ponownie wynika z zerowania się wyznacznika powyższego układu równań).

Dla ilustracji przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych przy założeniu szerokości elektrod  $w = 0.015$  mm oraz dwóch wartości  $p = 0.04$  i  $p = 0.125$  mm (rozstaw elektrod 0.08 i 0.25 mm), przyjęto okres powtarzania grup elektrod  $\Lambda = 5$  mm. Dla dwuelektrodowego falowodu istnieją dwa ortogonalne do siebie rodzaje, posiadające różne prędkości rozchodzenia się AFP. Na rys.3 przedstawiono charakterystyki dyspersyjne  $1/V(f)$  dla obu rodzajów (parzystego i nieparzystego), gdzie  $V$  jest prędkością fazową modu. Na rys.4 zaprezentowano wpływ odległości między elektrodami ( $2p$ ) na  $1/V$  dla  $f = \omega/2\pi = 1$  MHz. Rodzaj nieparzysty dla  $2p$  bliskiego  $w$  powinien być odcięty, podobnie jak pierwszy wyższy (o nieparzystym rozkładzie ładunku) rodzaj w falowodzie jednoelektrodowym. Na rys.4 krzywa  $1/V$  zbliża się do miejsca odcięcia  $1/V_p$ . Dla ilustracji szybkości zanikania pola elektrycznego wokół elektrod sprzęgacza wykreślono na rys.5 zależności  $E_s(x_s/\Lambda)$  dla obu rodzajów.

Istnienie w falowodzie dwuelektrodowym dwóch modów o różnych prędkościach prowadzenia fali daje możliwość konstrukcji falowodowego sprzęgacza AFP. Na rys.6 przedstawiono współczynnik transmisji mocy AFP między elektrodami w funkcji częstotliwości dla przykładowego sprzęgacza.



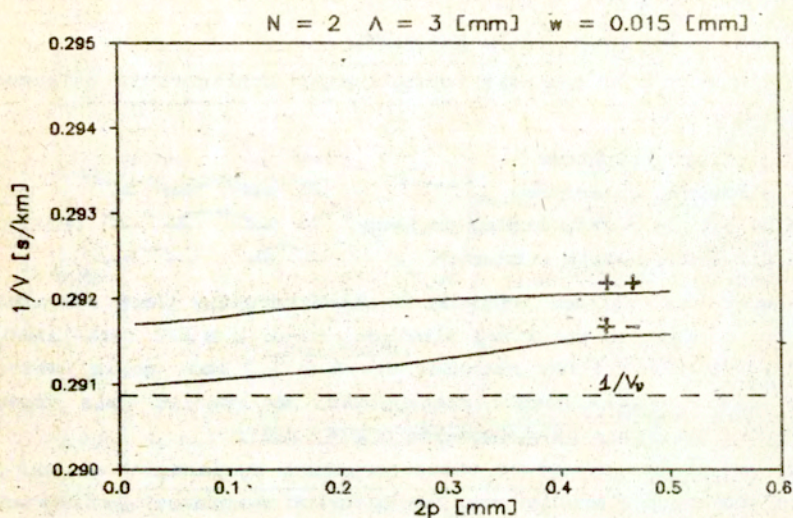
Rys.3. Dyspersja fali w dwuelektrodowym sprzężonym falowodzie.

c)  $k_x = 0$

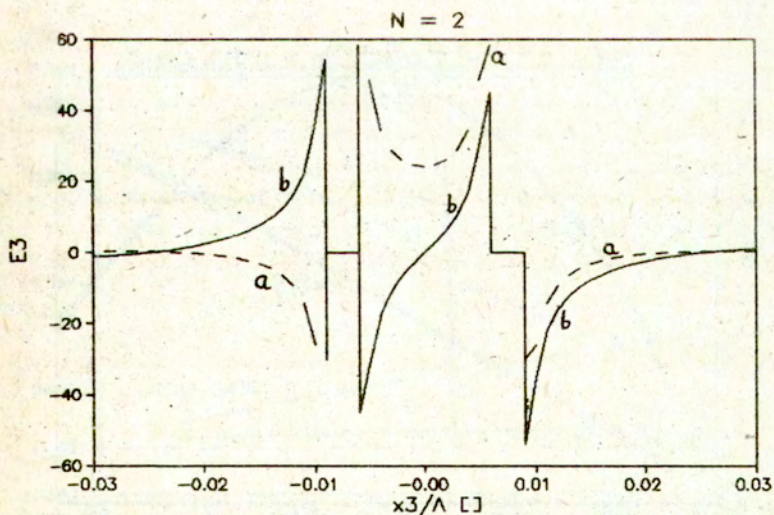
Przypadek propagacji fali prostopadle do elektrod ma duże znaczenie w teorii przetworników międzypalczastych i zostanie szerzej omówiony w następnym punkcie. Tu przytoczone zostaną jedynie wybrane rezultaty, dla kompletności tego punktu, w szczególności dla wszystkich elektrod połączonych i uziemionych.

Relacje dyspersyjne otrzymuje się z (15) i (16) dla  $k_x = 0$  tak, że czynnik  $(k_x + nK)/k_n$  występujący w (15) zastępuje się przez  $S_n$ . Dalsze obliczenia przebiegają podobnie jak w poprzednio omawianych przypadkach. Przytoczone poniżej rysunki (rys.7+11) dotyczą podłoża  $\text{LiNbO}_3$  YZ i struktury o 2,3,4 elektrodach w grupie. Na kolejnych trzech ilustracjach rys.7+rys.9 przedstawiono komplety charakterystyk dla układu o  $N = 2$ , dla trzech wybranych rozmiarów:





Rys.4. Zależność wektora falowego w funkcji odległości dwóch sprzężonych falowodów dla obu rodzajów.

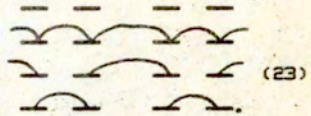


Rys.5. Rozkład składowej  $E$  pola elektrycznego w pobliżu dwóch sprzężonych pasków metalowych AFP dla obu modów: symetrycznego (a) i antysymetrycznego (b)

- rys.7.  $N = 2$   $w = \Lambda/8$   $p = \Lambda/\pi$ ,  
 rys.8.  $N = 2$   $w = \Lambda/8$   $p = \Lambda/2\pi$ ,  
 rys.9.  $N = 2$   $w = \Lambda/4$   $p = \Lambda/2\pi$ .

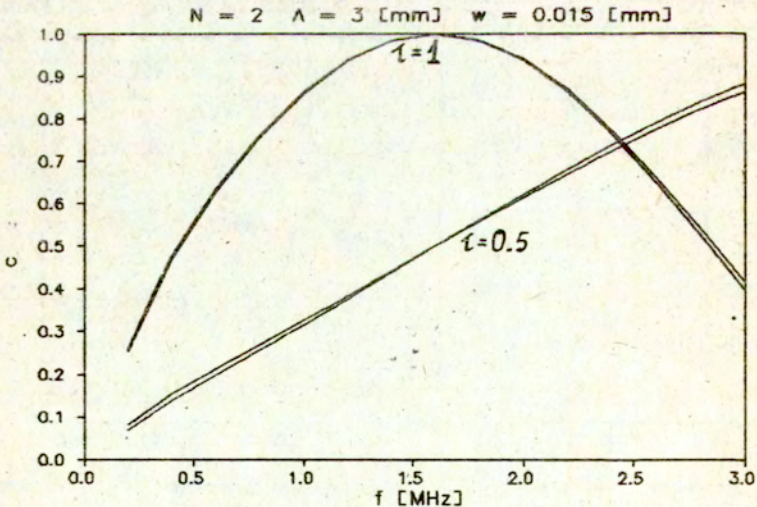
Cyframi oznaczono krzywe dla następujących konfiguracji połączeń elektrod:

- 1 - elektrody swobodne  
 2 - elektrody uziemione  
 3 - elektrody zwarte między grupami  
 4 - elektrody zwarte w grupach

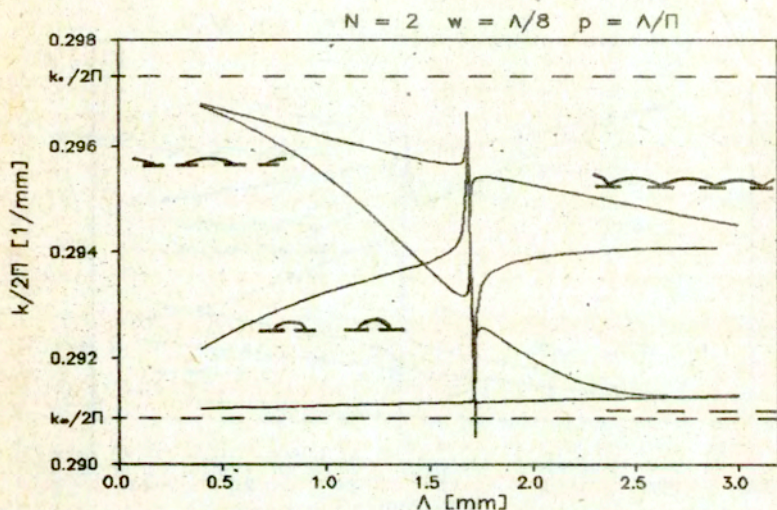


Obszar nieciągłości wszystkich charakterystyk jest obszarem synchronizmu fali ze strukturą elektrod, tzn.:  $k \cong K/2$  (dla  $\text{LiNbO}_3$ , YZ przy  $f = \omega/2\pi = 1$  MHz zachodzi dla  $\Lambda \cong 1.7$  mm), gdzie wektor falowy oprócz stałej części rzeczywistej ma również małą część urojoną (sprzężenie z falą wsteczną o  $k = -K/2$ ).

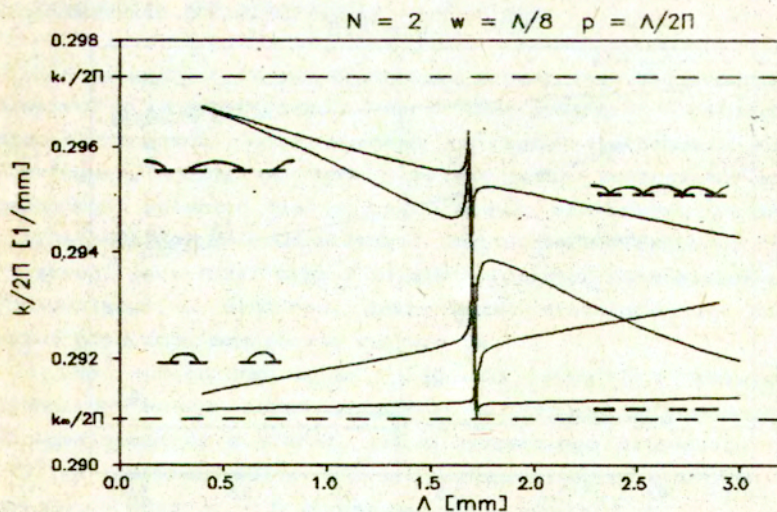
Na rys.10 przedstawiono charakterystyki dyspersyjne układu o  $N = 3$  elektrodach w grupie przy zwartych lub swobodnych wszystkich elektrodach, dla  $w = \Lambda/8$   $p = 3\Lambda/16$  lub  $\Lambda/8$ . Podobne charakterystyki, lecz dla układu o  $N = 4$ ,  $w = \Lambda/8$  i  $p = \Lambda/8$  lub  $\Lambda/12$  zaprezentowano na rys.11.



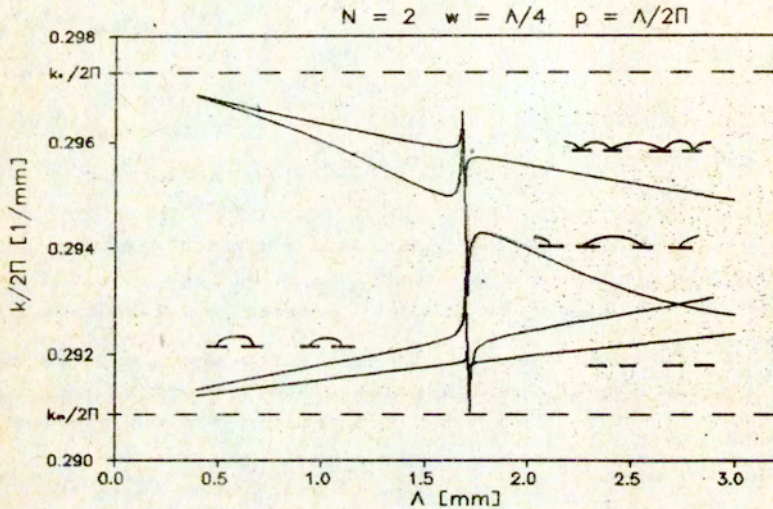
Rys.6. Charakterystyki częstotliwościowe dwuelektrodowych sprzęgaczy AFP.



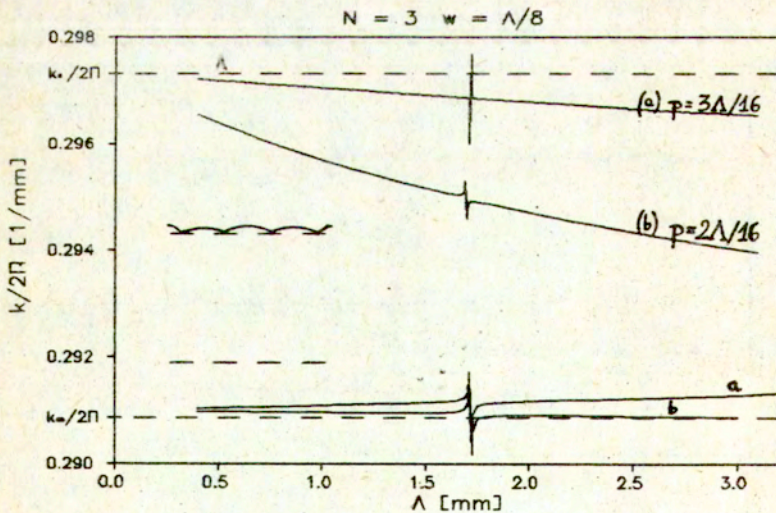
Rys.7. Charakterystyki dyspersyjne dla  $N=2$  przy różnych konfiguracjach połączenia elektrod, schematycznie pokazanego na rysunku.



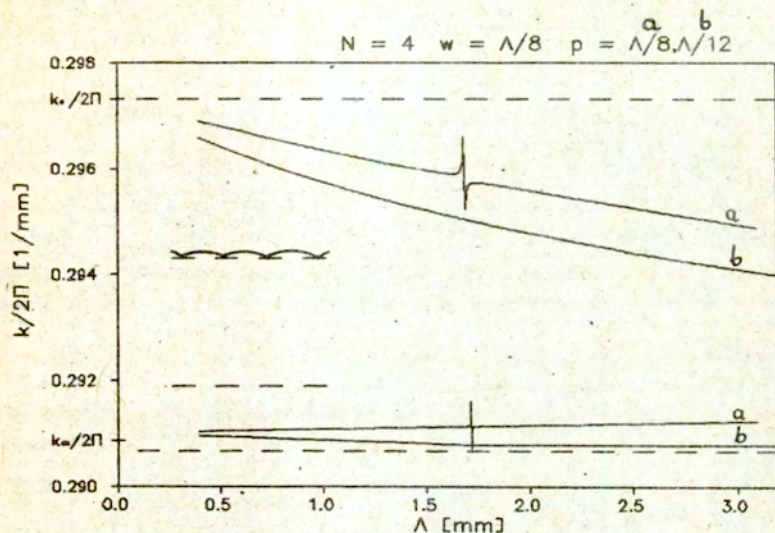
Rys.8. Charakterystyki dyspersyjne dla  $N=2$  przy różnych konfiguracjach połączenia elektrod, schematycznie pokazanego na rysunku.



Rys.9. Charakterystyki dyspersyjne dla  $N=2$  przy różnych konfiguracjach połączenia elektrod, schematycznie pokazanego na rysunku.



Rys.10. Charakterystyki dyspersyjne dla  $N=3$  przy zwartych i otwartych elektrodach.



Rys.11. Charakterystyki dyspersyjne dla  $N=4$  przy zwartych i otwartych elektrodach.

### 5. Propagacja AFP prostopadle do elektrod

Akustyczna fala powierzchniowa propagująca się prostopadle do elektrod rozłożonych na powierzchni półprzestrzeni piezoelektrycznej może wywołać na tych elektrodach potencjał elektryczny różny od zera. Wartość tego potencjału wynika z założonych połączeń elektrycznych między elektrodami (w przypadku wieloelektrodowych grup elektrod jest wiele możliwych konfiguracji połączeń (por. (23)) albo z zależności między potencjałem a prądem dopływającym do elektrod, jeśli każda elektroda jest obciążona przez dołączone zewnętrzne obciążenie.

Oba wymienione wyżej przypadki mogą być rozwiązane w jednolity sposób przez dopuszczenie zarówno niezerowego prądu dopływającego do elektrod, jak i niezerowego potencjału elektrod [7]. Na podstawie (9) i (13) prąd dopływający do elektrod w grupie położonej wokół  $x_s = 0$  wyraża się zależnością:

$$\underline{I}^k = j\omega \int_{x_k - w/2}^{x_k + w/2} \Delta D_1 dx_s = -2\omega c \sum_{m=1}^M \alpha_m I_m^k, \quad (24)$$

gdzie:

$$I_m^k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x_{n-m}^N \sin[(k_s + nK)w/2]}{k_s + nK} \cdot e^{-j(k_s + nK)x_k}$$

$x_k = (2k-N-1)p$  jest środkiem  $k$ -tej elektrody  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Potencjał elektrod określa się podobnie jak w przypadku relacji (16) jako potencjał w środku elektrody. Na podstawie (10) i (13), kładąc  $(k_s + nK)/k_n = S_n$ , otrzymuje się:

$$\underline{U}^l = \int_{x_l}^{\infty} E_s dx_s = -j \sum_{m=1}^M \alpha_m U_m^l, \quad (25)$$

gdzie:

$$x_l = (2l-N-1)p$$

$$U_m^l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S_{n-m} x_{n-m}^N}{k_s + nK} \cdot e^{-j(k_s + nK)x_l}$$

W relacjach (24) i (25) występują stałe  $\alpha_m$ , jedynie częściowo określone przez układ równań (15) (w rozważanym przypadku należy położyć  $(k_s + nK)/k_n = S_n$ ). Dla pełnego wyznaczenia wszystkich stałych  $\alpha_m$  należy jeszcze założyć  $N$  dodatkowych warunków na potencjały lub ładunki na elektrodach (w przypadku swobodnej elektrody całkowity ładunek na niej musi być równy zero). Warunki te, łącznie z (15) dają pełny układ równań ze względu na  $\alpha_m$ , prowadzący bezpośrednio do relacji dyspersyjnej dla AFP, podobnie jak w [2,4,5].

Ponizej, zamiast poszukiwać relacji dyspersyjnej dla AFP, wymagającej ustalenia połączeń między elektrodami, założona zostanie możliwość istnienia niezerowych potencjałów i ładunków na elektrodach. W takim przypadku stałe  $\alpha_m$  nie mogą być bezpośrednio wyznaczone, ale zostaną określone pośrednio poprzez potencjały i prądy dopływające do elektrod (uwaga: prąd  $I$  dopływający do elektrody związany jest z ładunkiem  $Q$  na elektrodzie poprzez relację  $I = j\omega Q$ , wielkości  $Q$  i  $I$  odnoszą się do elektrody o jednostkowej długości). Pozwoli to na określenie funkcjonalnej zależności między prądem a potencjałem elektrod [5].

Zgodnie z powyższym, relacje (15) i (25) pozwalają na określenie wszystkich  $\alpha_m$  przez wielkości  $\underline{U}^l$  ( $l=1,2,\dots,N$ ), z kolei relacja (24) pozwala na określenie wszystkich  $\underline{I}^k$  w funkcji  $\underline{U}^l$ . Zarówno  $\underline{I}^k$ ,  $\underline{U}^l$ , jak i  $\alpha_m$  zależą od liczby falowej  $k_s$  (zredukowanej do I strefy Brillouin'a). W ten sposób otrzymuje się związek pomiędzy  $\underline{I}^k$  oraz  $\underline{U}^l$  w postaci (patrz Dodatek C):

$$\underline{I}^k = \sum_{kl} u_{kl} \underline{U}^l \quad (\text{sumować po } l), \quad k, l = 1, 2, \dots, N, \quad (26)$$

gdzie  $u_{kl}$  zależą od  $k_s$ , podobnie należy rozumieć, że  $\underline{I}^k = \underline{I}^k(k_s)$  oraz  $\underline{U}^l = \underline{U}^l(k_s)$ .

Relacje (26) prowadzą bezpośrednio do relacji dyspersyjnych, wspomnianych wyżej (p.4, [2,4,5]), należy tylko położyć związki między  $\underline{I}^k$  i  $\underline{U}^l$ , wynikające z określonych wzajemnych połączeń elektrod i przyrównać wyznacznik charakterystyczny tak otrzymanego układu równań do zera, skąd wyznaczyć  $k_s$  (por. równanie (17)).

## 6. Skuteczność przetwarzania AFP

Relacja (26) może być rozpatrywana jako związek między transformatami funkcji dyskretnych, to jest prądów  $I^k = I(x=x_k)$  i napięć  $U^l = U(x=x_l)$  dla poszczególnych elektrod. Ponieważ układ elektrod jest periodyczny, parametr transformaty  $k_s$  zmienia się tylko w granicach jednej strefy Brillouin'a, na przykład w granicach I strefy:  $-K/2 \leq k_s < K/2$ , stąd postać retransformaty, określającej dyskretne funkcje w punktach  $x_l$ , jest następująca:

$$F^l = \frac{1}{K} \int_{-K/2}^{K/2} \underline{F}^l(k_s) e^{-jk_s x_l} dk_s, \quad (27)$$

gdzie za  $\underline{F}^l$  należy położyć  $\underline{U}^l$  lub  $\underline{I}^k$ .

W celu jednoznacznego określania wybranej elektrody wprowadzono następującą notację:

$s, t$  - multiindeksy określające wybraną elektrodę:

$s = (m, k), t = (n, l)$

$n, m$  - numerują grupę elektrod,  $m, n \in \mathbb{N}$

$k, l$  - numerują kolejną elektrodę w grupie,  $k, l \in [1, N]$ .

Wtedy środek wybranej elektrody  $s$  lub  $t$  leży w punkcie:

$$\begin{aligned} x_s &= n\Lambda + x_k = n\Lambda + (2k-N-1)p \\ x_t &= n\Lambda + x_l = n\Lambda + (2l-N-1)p \end{aligned} \quad (29)$$

oraz:

$$\begin{aligned} U_s &= U(x=x_s) \\ I_s &= I(x=x_s). \end{aligned} \quad (30)$$

Niech jedna elektroda o multiindeksie  $t = (n, l)$  będzie zasilana przez zewnętrzne źródło i ma potencjał  $U_t = 1$ , podczas gdy wszystkie pozostałe elektrody o multiindeksach  $(m, k) = s$  niech są uziemione. Jak łatwo obliczyć z (27) transformata potencjału w takim przypadku ma postać:

$$U_s = \delta_{st} e^{-jx_t k_s}, \quad (31)$$

gdzie  $\delta_{st} = 1$  dla  $s = t$  oraz  $\delta_{st} = 0$  dla  $s \neq t$ .

Korzystając z (25) relacja powyższa pozwala obliczyć  $\alpha_m$ , które z kolei podstawione do (26), pozwalają na obliczenie  $I_s^k$ .

Retransformata (26) daje prąd dopływający do dowolnej elektrody znajdującej się w pozycji  $x_s$ . Podobnie można wyznaczyć prądy wywołane przyłożeniem potencjału do dowolnej elektrody położonej w  $x_t$ , czyli:

$$I_s = \sum_{st} U_t \quad (\text{sumować po } t), \quad (32)$$

gdzie na podstawie Dodatku C i postaci retransformaty (27):

$$y_{st} = -j \frac{2}{K} \omega \cdot \epsilon_{st} \int_{-K/2}^{K/2} R_{kl} e^{j(x_s - x_t)k_s} dk_s, \quad (33)$$

$$R_{kl} = \sum_{m=M_1}^{M_2} I_m^k [J^{-1}]_m^l, \quad (34)$$

$I_m^k$  oraz  $J_m^l$  określono w (24) i w Dodatku C, odpowiednio.

Funkcje  $R_{kl}$ , wyrażone skomplikowaną zależnością (34), posiadają dwa bieguny  $\pm k_p$ , gdzie  $k_p$  jest wartością wektora falowego  $k_s$  dla przypadku zwarcia wszystkich elektrod (przypadek  $U_t = 0$ ). Wartości  $k_p$  dyskutowane były w punkcie 3, gdzie wyprowadzono relację dyspersyjną (por. (17)). (Uwzględnienie nieskończenie małego tłumienia materiałowego, powoduje, że  $k_p$  posiada bardzo małą część urojoną, co należy wziąć pod uwagę przy



korzystaniu z lematu Jordana przy obliczaniu retransformaty (27), w przyjętym opisie  $k_p$  ma ujemną część urojoną.) Do obliczenia całki (33) wykorzystano podany w [5] rozkład funkcji posiadającej bieguny w punktach  $\pm k_p$ :

$$R_{kl}(k_s) = \left[ R_{kl}(k_s) - \frac{KB_{kl}(-k_p)}{k_s + k_p} - \frac{KB_{kl}(k_p)}{k_s - k_p} \right] + K \left[ \frac{B_{kl}(-k_p)}{k_s + k_p} + \frac{B_{kl}(k_p)}{k_s - k_p} \right] \quad (35)$$

Współczynniki  $B_{kl}$  wybrano tak, aby wyrażenie w pierwszym nawiasie kwadratowym (35) nie miało biegunów, czyli:

$$B_{kl}(\pm k_p) = \frac{\sum_{m=1}^{M-1} I_m^k [J^{-1}]_m^l \det(J_m^l)}{K \frac{d}{dk_s} \left( \det(J_m^l) \right) \Big|_{k_s = \pm k_p}} \quad (36)$$

Korzystając z przyjętej postaci rozwiązania dla składowej pola elektrycznego  $E_s$  i skoku indukcji elektrycznej  $\Delta D_{\perp}$  (9) można napisać następujące relacje słuszne dla  $k_s < 0$  [5]:

$$R_{kl}(-k_s) = R_{kl}(k_s) \quad (37)$$

i dalej na podstawie (36)

$$B_{kl}(-k_p) = -B_{kl}(k_p). \quad (38)$$

Wykorzystując (38) (35) można przepisać w postaci:

$$R_{kl}(k_s) = \left[ R_{kl}(k_s) - \left[ \frac{KB_{kl}}{k_s - k_p} - \frac{KB_{kl}}{k_s + k_p} \right] \right] + \left[ \frac{KB_{kl}}{k_s - k_p} - \frac{KB_{kl}}{k_s + k_p} \right], \quad (39)$$

gdzie parametr  $B_{kl}$  jest skutecznością przetwarzania  $k$ -tej elektrody względem elektrody 1, przy czym:

$$B_{kl} = B_{kl}(k_p) = -B_{kl}(-k_p). \quad (40)$$

Wykorzystując (39) całka występująca w (33) może być rozłożona na sumę dwóch innych całek:

$$\int_{-k/2}^{k/2} R_{kl} \cdot e^{j(x_s - x_t)k_s} dk_s = C_{kl}^1 + C_{kl}^2, \quad (41)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} C_{kl}^1 &= \int_{-k/2}^{k/2} \left[ R_{kl} - \frac{2KB_{kl} k_p}{k_s^2 - k_p^2} \right] \cdot e^{j(x_s - x_t)k_s} dk_s = \\ &= 2 \int_0^{k/2} \left[ R_{kl} - \frac{2KB_{kl} k_p}{k_s^2 - k_p^2} \right] \cdot \cos[k_s(x_s - x_t)] dk_s, \end{aligned} \quad (42)$$

$$C_{kl}^2 = \int_{-k/2}^{k/2} KB_{kl} \left[ \frac{1}{k_s - k_p} - \frac{1}{k_s + k_p} \right] \cdot e^{j(x_s - x_t)k_s} dk_s, \quad (43)$$

Funkcja podcałkowa w (42) nie posiada biegunów i może być łatwo obliczona numerycznie. Wnosi ona wkład do susceptancji wzajemnej elektrod. Natomiast całka (43) może być obliczona przez odpowiednie domknięcie konturu całkowania w górnej lub dolnej półprzestrzeni  $k_s$  [5].

Ostatecznie otrzymuje się wyrażenie określające transadmitancję pomiędzy dwiema wybranymi elektrodami:

$$\begin{aligned} y_{st} &= y_{st}^R + y_{st}^C \\ y_{st}^R &= 4\pi B_{kl} \omega \epsilon_{of} \cdot e^{-j|x_s - x_t|k_p} \\ y_{st}^C &= -j \frac{2\omega}{K} \cdot \epsilon_{of} \cdot (C_{kl}^1 + C_{kl}^2), \end{aligned} \quad (44)$$

gdzie  $C_{kl}^1$  określono w (42) natomiast  $C_{kl}^2$  można zaniedbać [5], gdyż daje ona wkład do wzajemnej pojemności elektrod,  $k_p = k_s$  jest liczbą falową dyskutowaną w Rozdziale 3.

Jak wiadó transadmitancja  $y_{st}$  zależy od względnej odległości rozpatrywanych elektrod,  $|x_s - x_t|$ , i od  $\Delta U/U$  poprzez parametr  $B_{kl}$ . Kolejne składniki wyrażenia (44) przedstawiają:

- pierwszy składnik  $y_{st}^R$  - transadmitancja elektrod, proporcjonalna do  $\Delta U/U$ , związana z akustyczną falą powierzchniową przenoszącą energię między elektrodami
- drugi składnik  $y_{st}^C$  - susceptancja elektrod, określona głównie poprzez dielektryczne własności podłoża

Z postaci (44) widać wyraźnie sens fizyczny parametru  $B_{kl}$ , który nazwano (za [5]) skutecznością przetwarzania (transadmitancja jest do niego wprost proporcjonalna). W ścisłej teorii, zastosowanej powyżej, będącej rozszerzeniem [5], wynika on w prosty sposób z rozkładu funkcji podcałkowej (33) na część regularną i osrbliwą.

Należy dodać, że uwzględnienie fal objętościowych w analizie transadmitancji prowadzi do niewielkiej zmiany wartości parametru  $B_{kl}$  [8], ale całkowita transadmitancja elektrod zmienić się może w znaczny sposób o część związaną z promieniowaniem fal objętościowych. Wpływ fal objętościowych na admittancję elektrod i w konsekwencji na admittancję przetworników częstotliwościowych uwidacznia się zwłaszcza na częstotliwościach wyższych (powyżej pasma pracy). Analiza tego zagadnienia może być dokonana na podobnej drodze jak w [8].

#### 7. Zależność skuteczności przetwarzania elektrody od jej pozycji w grupie elektrod

Ponizej rozważony zostanie przypadek, gdy grupy elektrod (po  $N$  elektrod o szerokości  $w$  i odległości między ich środkami  $2p$ , przy czym  $p = w$ ) położone są tak daleko od siebie ( $\Lambda \gg 2Np$ ), że można wzajemny elektrostatyczny wpływ grup elektrod na siebie zaniedbać. Przypadek ten modeluje prosty przetwornik międzypalczsty o ograniczonej liczbie elektrod (w obliczeniach ponizej przyjmowano  $w = p = .1$  mm i  $\Lambda = 3$  mm).

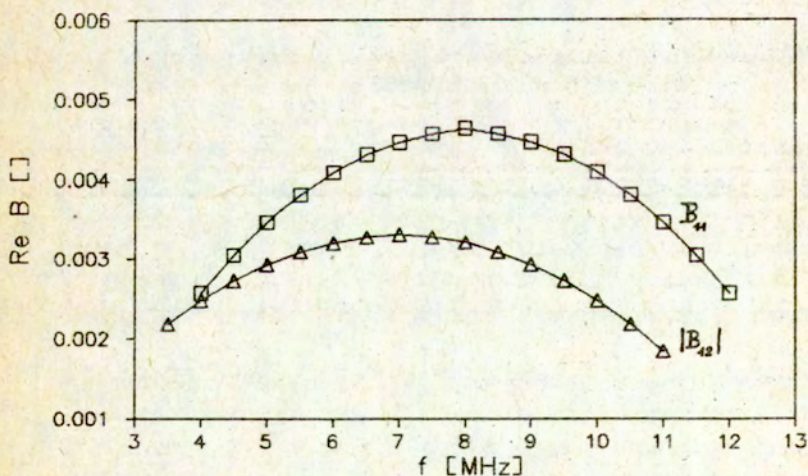
W [7] podano relację analogiczną do (44) przepisaną ponizej w uproszczeniu poprawnym poza wąskim pasmem częstotliwości Braggowskiego odbicia AFP od elektrod w postaci (używany w [7] okres  $\Lambda$  zastąpiono ponizej przez  $2p$ ):

$$y_{mn} = 4\pi\omega\epsilon_0 \frac{\Delta V}{V} \cdot s(1-s)e^{-j2p|m-n|/r_0} \cdot \sin n\pi s, \quad (45)$$

gdzie  $s = r_0/K$ ,  $s(1-s)$  aproksymuje czynnik związany z wielomianami Legendre'a, a  $r_0$  jest liczbą falową AFP pod periodycznym układem elektrod ( $k_p < r_0 < k_0$ ). Jak łatwo sprawdzić czynnik  $B_{kl}$  w relacji (44) odpowiada, w przypadku periodycznych elektrod, czynnikiowi

$(\Delta V/U)s(1-s)\sin ms$  w relacji (45), który dla częstotliwości  $f_0 = V/4p$ , gdzie  $s = 1/2$  wynosi  $\Delta V/V/4$  ( $f_0$  jest częstotliwością środkową prostego przetwornika międzypalczystego o elektrodach zasilanych kolejno potencjałem  $+U$  lub  $-U$ , naprzemiennie).

Rysunek 12 przedstawia przebieg  $B_{11}$  i  $|B_{12}|$  dla układu dwóch elektrod (analizowany przypadek odpowiada  $N = 2$ ,  $p = w = 0.1$  mm,  $A = 3$  mm patrz punkt 5). Pominąwszy zaburzony obszar synchronicznego odbicia, widoczne jest charakterystyczne przesunięcie maksimum  $|B_{12}|$  w lewo od częstotliwości środkowej  $f_0$  ( $f_0 = V/4p = 8.41$  Mhz, w przyjętych do obliczeń parametrach). Rys. 13 przedstawia  $B_{kl}$  odpowiednio unormowane na wykresie wskazowym, na płaszczyźnie zespolonej, pokazującym wyraźną zależność modułu i fazy transadmitancji od częstotliwości. Na osi pionowej odłożono  $\text{Im} \{B_{kl}\}$ , na osi poziomej  $\text{Re} \{B_{kl}\}$ .



Rys.12. Zależność skuteczności przetwarzania od częstotliwości w układzie dwóch elektrod.

Interpretacja czynnika fazowego w  $B_{12}$  jest następująca. Podany w (44) czynnik  $\exp(-jk-1|2p_p)$  opisuje przesunięcie fazy fali na odcinku jej propagacji  $|k-1|2p$  między elektrodą  $k$  i  $l$  (rozważania tu prowadzone dotyczą jednej grupy elektrod, tj. w (44) należy przyjąć  $m = n$ ). Liczba falowa  $k_p$  dotyczy jednak całego

rozpatrywanego periodycznego układu grup elektrod, przy  $A \rightarrow \infty$ , wówczas mamy  $k_p \rightarrow k_v$  (patrz Rozdział 4). W rzeczywistości, prędkość propagacji fali między elektrodami w grupie jest różna od  $V_v$ , różnica uwzględniona jest właśnie poprzez odpowiednią fazę  $B_{kl}$ .

Przytoczone przykłady zostały obliczone dla  $\text{LiNbO}_3$ , YZ, ale mogą być użyte w podobny sposób dla dowolnego materiału podłoża, przy czym zależności będą podobne (za wyjątkiem bardzo wąskiego pasma częstotliwości synchronicznej, Braggowskiego odbicia fali od elektrod). Dla wygody odpowiednich przeliczeń podane niżej wyniki odniesiono do analizowanego w [7] przypadku elektrod periodycznych, w sposób następujący:

$$B_{kl} = b_{kl} \cdot \frac{\Delta V}{V} \cdot s(1-s) \sin kx, \quad (47)$$

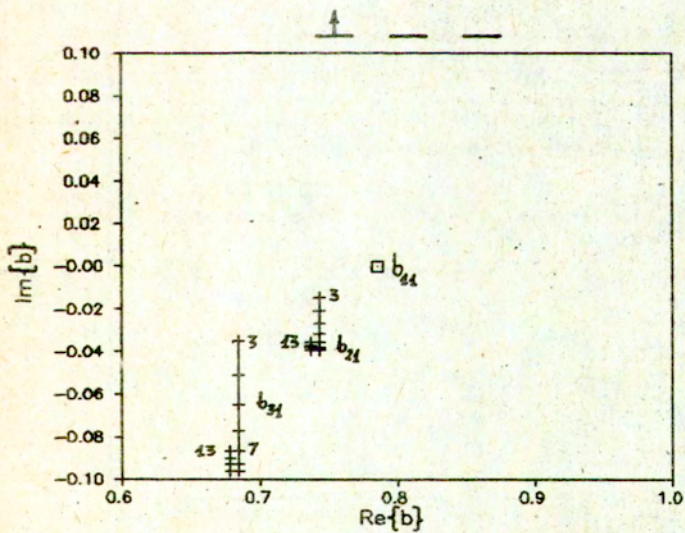
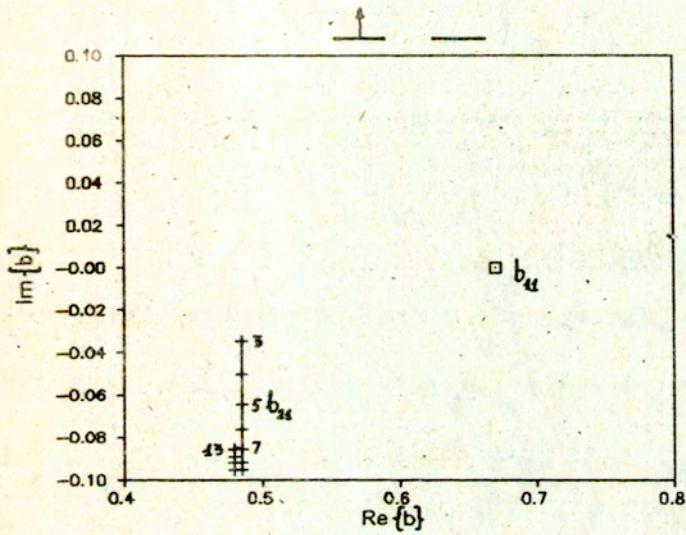
$$s = V_v / 4p.$$

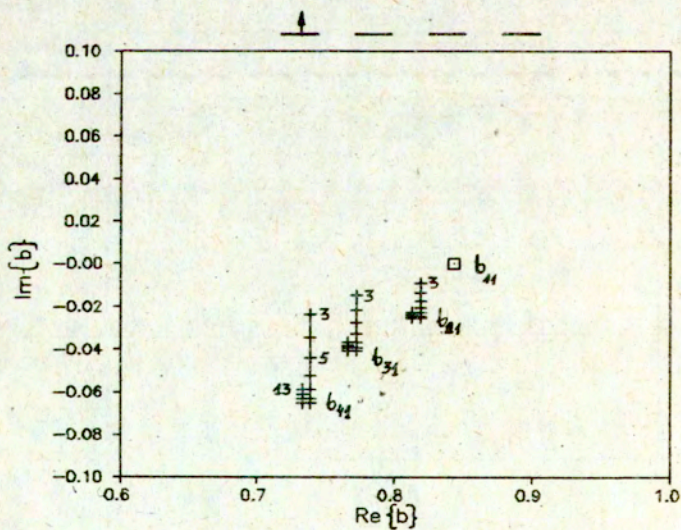
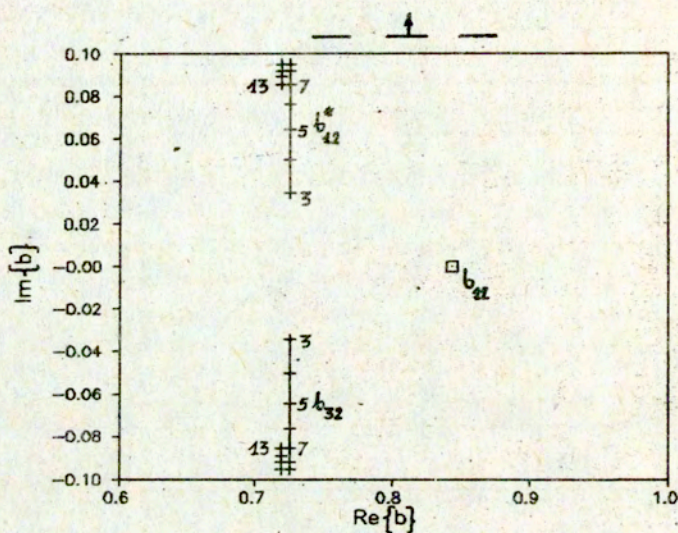
Przytoczone na rys. 13 obliczenia pokazują, że parametr  $b_{kl}$  zależy od indeksów  $l$  i  $k$ , to znaczy, że skuteczność przetwarzania elektrod jest różna, w zależności od jej pozycji w grupie elektrod. Jak to zostało pokazane na rysunkach poniżej, admitancja promieniowania, określona przez  $y_{kl}^R$ , podobnie jak i transadmitancja  $y_{kl}^C$  (42) zależą nie tylko od pozycji elektrod w grupie, ale i od częstotliwości. Interpretując pokazane poniżej rysunki w języku modelu  $\delta$  - funkcji dla przetworników międzypalczastych, okazuje się, że efektywne źródło ( $\delta$  - funkcja) nie tylko jest przesunięte względem środka danej elektrody, ale przesunięcie to zależy zarówno od pozycji zajmowanej przez elektrodę w grupie, jak i od częstotliwości.

## 8. Podsumowanie

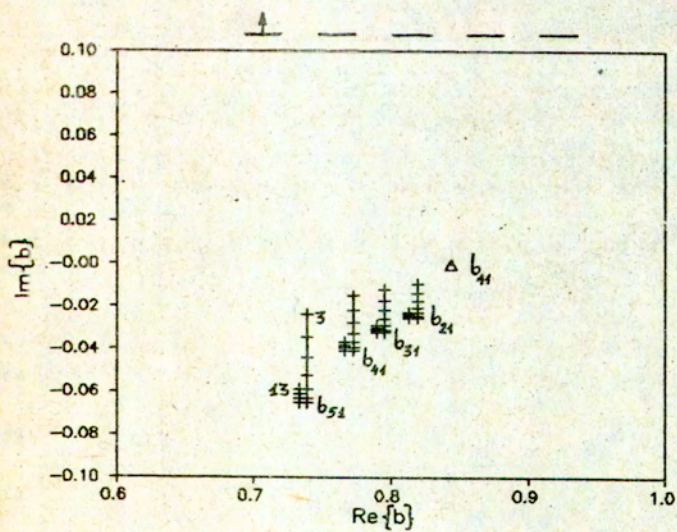
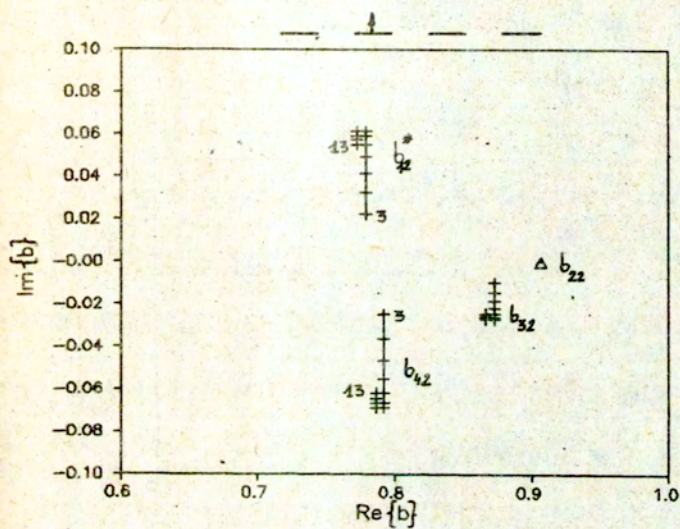
W literaturze szeroko stosowane jest numeryczne modelowanie układu elektrod, uwzględniające jedynie elektrostatyczne własności podłoża [12,15]. W przeciwieństwie do tych modeli, przedłożona wyżej ścisła teoria uwzględnia czynnik falowy w rozpatrywanych zjawiskach i daje jasną interpretację otrzymanych wyników teoretycznych, ważną zarówno w pracach teoretycznych, jak i przy projektowaniu urządzeń z AFP. W tym ostatnim przypadku dane przedstawione na rys.13, mogą znaleźć bezpośrednie zastosowanie, poprawiając model obliczeniowy przetworników, przedstawiony w [16], przez uwzględnienie zmienionej skuteczności przetwarzania skrajnych elektrod przetwornika.

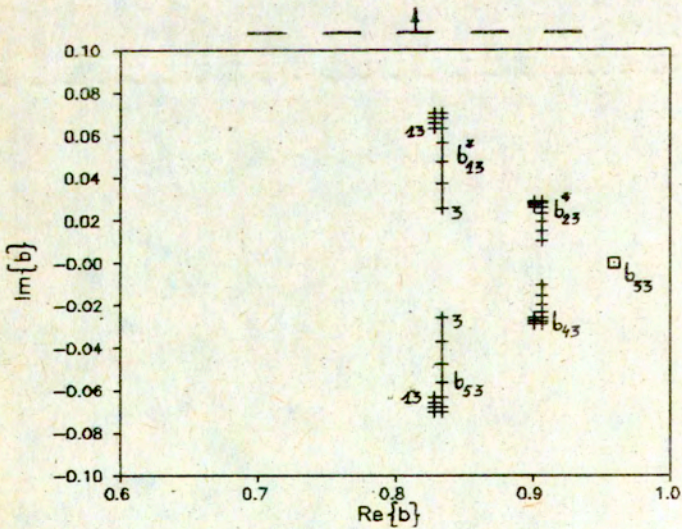
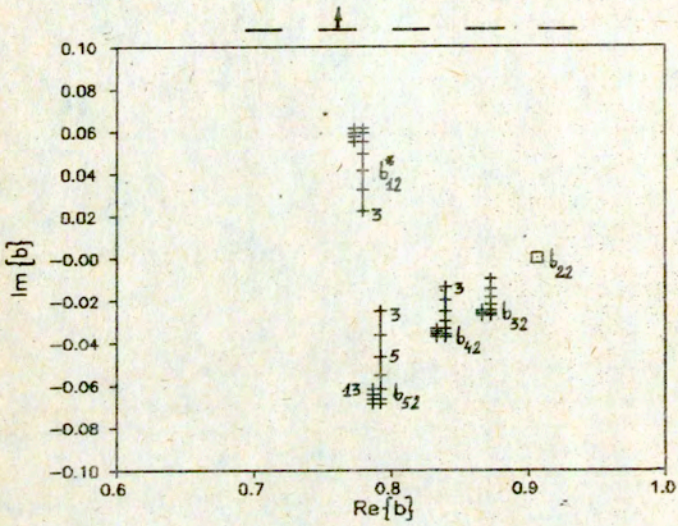
Powyzsza praca, stanowiąca kontynuację [5], zawiera częściowo wyniki rozprawy doktorskiej jednego z autorów (D.G.).

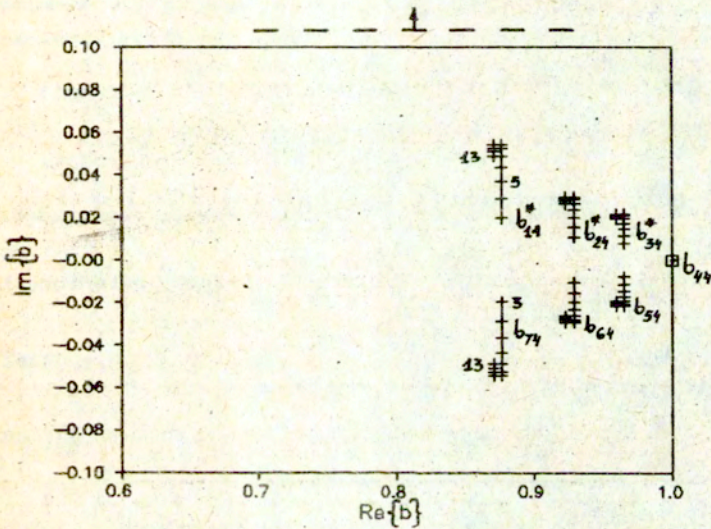












Rys.13. Wykresy wskazowe skuteczności przetwarzania elektrod dla różnych liczb elektrod w grupie, uwidocznionych na szkicowych rysunkach powyżej. Strzałka określa elektrodę o numerze 1, do której przykładany jest potencjał, a uwidocznione na rysunkach trajektorie wskazów dotyczą wielkości  $b_{kl}$  przy  $k$  przebiegających wszystkie elektrody w grupie. Częstotliwość względna  $s$ , zaznaczona na tych trajektoriach kreskami zmienia się od 0.245 do 0.745 co 0.05 (skrajne wartości są opisane).

DODATEK A

Układ funkcji  $g(\theta)$  i  $f(\theta)$  opisany równaniami (5), (6) podany w [2] stanowi rozwiązanie elektrostatycznego zagadnienia z mieszanymi warunkami brzegowymi dla dielektryka w przypadku układu periodycznego o okresie  $2\pi$  (w grupie znajduje się tylko jedna elektroda). W [4] skonstruowano nowe funkcje spełniające podobne warunki w przypadku dzielonych elektrod, podano tam układ funkcji:

$$G_2(\theta; \alpha) = \frac{1}{2} \cdot g(\theta - \alpha)g(\theta + \alpha)e^{-j\theta} = 0 \quad \text{na elektrodach} \quad (A1)$$

$$F_2(\theta; \alpha) = \frac{1}{2} \cdot [f(\theta - \alpha)g(\theta + \alpha) + f(\theta + \alpha)g(\theta - \alpha)]e^{-j\theta} = 0 \quad \text{poza elektrodami}$$

gdzie wielkość  $\alpha$  określona jest przez odległość między elektrodami  $\alpha = Kp$ , natomiast zmienna  $\theta = Kx_s$ .

Ich rozwinięcia w szeregi Fouriera (w nieco zmienionych oznaczeniach) są następujące:

$$G_2(\theta; \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^2 S_n e^{-jn\theta}$$

$$F_2(\theta; \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^2 e^{-jn\theta}, \quad (A2)$$

gdzie:

$$X_0^2 = 0; \quad X_n^2 = \sum_{m=0}^{n-1} P_m(\cos \Delta) \cdot P_{n-m-1}(\cos \Delta) \cdot \cos(2m-n+1)\alpha$$

$$X_{-n}^2 = -X_n^2, \quad \text{za } \alpha = \pm Kp \text{ - są środkami elektrod.}$$

Korzystając z wyników (A1) i (A2) poniżej skonstruowano uogólniony układ funkcji spełniający analogiczne mieszane warunki brzegowe w układzie, w którym z okresem  $2\pi$  (w zmiennej  $\theta$ ) powtarza się grupa o dowolnej liczbie ( $N$ ) elektrod. Funkcje  $G_N, F_N$  można zapisać w następujący rekurencyjny sposób:

$$G_N(\theta; \alpha) = G_2(\theta; (N-1)\alpha) \cdot G_{N-2}(\theta; \alpha) \quad (A3)$$

$$F_N(\theta; \alpha) = F_2(\theta; (N-1)\alpha) \cdot G_{N-2}(\theta; \alpha) + G_2(\theta; (N-1)\alpha) \cdot F_{N-2}(\theta; \alpha),$$

gdzie założono, że środki kolejnych elektrod położone są w punktach  $\theta_l = (2l-N-1)\alpha$ ,  $l$  zmienia się od 1 do  $N$  ( $2\alpha$  - odległość

między elektrodami w grupie) oraz oczywiście:  $\Delta \leq \alpha \leq (\pi - \Delta)/(N-1)$ ,  
(A4)(A4)

gdzie  $\Delta$  związane jest z szerokością elektrody  $\Delta = Kw/2$ .

Układ funkcji (A3) spełnia następujące warunki dla N-elektrodowej grupy elektrod:

$$G_N(\theta; \alpha) = 0 \quad \text{na elektrodach}$$

$$F_N(\theta; \alpha) = 0 \quad \text{między elektrodami.} \quad (A5)$$

Po zwinięciu wzorów rekurencyjnych (A3) funkcje  $F_N$  i  $G_N$  zapisać można w postaci:

$$G_N(\theta; \alpha) = \frac{1}{2^{\text{int}(N/2)}} e^{-\text{int}(N/2)\theta} \prod_{l=1}^N g(\theta - \theta_l) \quad (A6)$$

$$F_N(\theta; \alpha) = \frac{1}{2^{\text{int}(N/2)}} e^{-\text{int}(N/2)\theta} \sum_{l=1}^N f(\theta - \theta_l) \prod_{j=1, j \neq l}^N g(\theta - \theta_j),$$

gdzie:

$$\theta_l = (2l - N - 1)\alpha,$$

int - oznacza część całkowitą.

#### TWIERDZENIE:

Rozwinięcia funkcji  $G_N$  i  $F_N$  w szeregi Fouriera, analogiczne do (5) oraz (A2), są następujące:

$$\begin{aligned} G_N(\theta; \alpha) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n X_n^N e^{-jn\theta} \\ F_N(\theta; \alpha) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^N e^{-jn\theta}, \end{aligned} \quad (A7)$$

przy czym:

dla  $n \geq 0$

$$\left\{ \begin{aligned} X_n^1 &= P_n(\cos \Delta) \\ X_n^2 &= \sum_{m=0}^{n-1} P_m P_{n-m-1} \cos[(2m-n+1)\alpha]; \quad X_0^2 = 0 \\ &\dots \\ X_n^N &= 2 \sum_{m=1}^n X_m^2 \Big|_{(N-1)\alpha} X_{n-m}^{N-2} \end{aligned} \right. \quad (A8)$$

gdzie  $X_m^2 \Big|_{\beta}$  oznacza, że  $X_m^2$  są współczynnikami rozwinięcia funkcji  $F_2(\theta; \beta)$ .

Dla  $n \leq -1$  spełnione są następujące relacje symetrii:

$$\begin{aligned} X_{-n-1}^N &= X_n^N && \text{dla } N \text{ nieparzystego} \\ X_{-n}^N &= -X_n^N && \text{dla } N \text{ parzystego.} \end{aligned} \quad (A9)$$

Zależności (A8) i (A9) wymagają uzasadnienia. Poniżej przedstawiono ich dowód oparty o zasadę indukcji matematycznej.

**DOWÓD:**

- 1) Dla  $N=1$  (A8) jest trywialne.
- 2) Dla  $N=2$  (A8) udowodniono w [4] (inne oznaczenia).
- 3) Zakładając, że dane jest rozwinięcie dla  $N=2$  (A2) oraz dla  $N-2$ :

$$\begin{aligned} G_{N-2}(\theta; \alpha) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^{N-2} S_n e^{-jn\theta} \\ F_{N-2}(\theta; \alpha) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^{N-2} e^{-jn\theta} \end{aligned} \quad (A10)$$

przy czym  $X_n^{N-2}$  spełnia zależności (A8+A9),

4) należy udowodnić, że w rozwinięciach (A7) współczynniki  $X_n^N$  spełniają ostatnie równanie (A8) oraz relacje (A9). Korzystając z (A3) oraz podstawiając (A2) i (A10) najpierw dla  $G_N$  otrzymuje się:

$$\begin{aligned} G_N &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_n S_m X_m^2 X_{n-m}^{N-2} e^{-jn\theta} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{n-m} S_m X_m^2 X_{n-m}^{N-2} \right] e^{-jn\theta} \end{aligned} \quad (A11)$$

Porównanie (A7) z (A11) daje:

$$S_n X_n^N = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{n-m} S_m X_m^2 X_{n-m}^{N-2}, \quad (A12)$$

co dla różnych  $n$  można zapisać jako:

$$\begin{aligned} S_n X_n^N &= -C_n + 2 \sum_{m=0}^n X_m^2 X_{n-m}^{N-2} && \text{dla } n \geq 0, \\ S_n X_n^N &= -C_n && \text{dla } n = -1 \\ S_n X_n^N &= -C_n + 2 \sum_{m=n+1}^{-1} X_m^2 X_{n+m}^{N-2}, && \text{dla } n \leq -2 \end{aligned} \quad (A13)$$

gdzie:

$$C_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m^2 X_{n-m}^{N-2} \equiv 0,$$

są współczynnikami rozwinięcia w szereg Fouriera funkcji:

$$F_{2^2 N-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m^2 X_{n-m}^{N-2} \right] e^{-jn\theta},$$

która jest tożsamościowo równa zero [4].

Wykorzystanie równości  $X_0^2 = 0$  w (A13) daje:

$$\begin{aligned} S_n X_n^N &= 2 \sum_{m=1}^n X_m^2 X_{n-m}^{N-2} && \text{dla } n \geq 1 \\ S_n X_n^N &= 0 && \text{dla } n = 0, -1 \\ S_n X_n^N &= 2 \sum_{m=n+1}^{-1} X_m^2 X_{n-m}^{N-2} && \text{dla } n \leq -2. \end{aligned} \quad (A14)$$

Podobnie dla  $F_N$ , korzystając z (A3), (A2) i (A10), otrzymuje się:

$$\begin{aligned} F_N &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ S_m X_m^{N-2} X_n^2 + S_n X_n^{N-2} X_m^2 \right] e^{-jn+m\theta} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_m \left[ X_m^{N-2} X_{n-m}^2 + X_{n-m}^{N-2} X_m^2 \right] \right] e^{-jn\theta}. \end{aligned} \quad (A15)$$

Porównując (A15) z (A7):

$$X_n^N = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_m \left[ X_m^{N-2} X_{n-m}^2 + X_{n-m}^{N-2} X_m^2 \right], \quad (A16)$$

co dla różnych zakresów  $n$  daje:

$$\begin{aligned} \text{dla } n \geq 0 \quad X_n^N &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[ X_m^{N-2} X_{n-m}^2 + X_{n-m}^{N-2} X_m^2 \right] - \sum_{m=-\infty}^{-1} \left[ X_m^{N-2} X_{n-m}^2 + X_{n-m}^{N-2} X_m^2 \right] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[ X_m^{N-2} X_{n-m}^2 + X_{n-m}^{N-2} X_m^2 \right] - \sum_{m=n+1}^{\infty} \left[ X_m^{N-2} X_{n-m}^2 + X_{n-m}^{N-2} X_m^2 \right] = \\ &= \sum_{m=0}^n \left[ X_m^{N-2} X_{n-m}^2 + X_{n-m}^{N-2} X_m^2 \right] = 2S_n \sum_{m=0}^n X_m^{N-2} X_{n-m}^2 = 2S_n \sum_{m=0}^n X_m^2 X_{n-m}^{N-2} \end{aligned}$$

dla  $n = -1$

$$X_{-1}^N = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_m \left[ X_m^{N-2} X_{-1-m}^2 + X_{-1-m}^{N-2} X_m^2 \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m^2 X_{-1-m}^{N-2} \left[ S_m + S_{-m-1} \right] \equiv 0$$

dla  $n \leq -2$

$$X_n^N = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ X_m^{N-2} X_{n-m}^2 + X_{n-m}^{N-2} X_m^2 \right] - \sum_{m=-\infty}^{-1} \left[ X_m^{N-2} X_{n-m}^2 + X_{n-m}^{N-2} X_m^2 \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=-0}^n \left[ X_m^{N-2} X_{n-m}^2 + X_{n-m}^{N-2} X_m^2 \right] - \sum_{m=-0}^{-1} \left[ X_m^{N-2} X_{n-m}^2 + X_{n-m}^{N-2} X_m^2 \right] = \\
 &= - \sum_{m=n+1}^{-1} \left[ X_m^{N-2} X_{n-m}^2 + X_{n-m}^{N-2} X_m^2 \right] = 2S_n \sum_{m=n+1}^{-1} X_m^2 X_{n-m}^{N-2}
 \end{aligned}$$

lub ostatecznie:

$$\begin{aligned}
 X_n^N &= 2S_n \sum_{m=0}^n X_m^2 X_{n-m}^{N-2} && \text{dla } n \geq 1 \\
 X_n^N &= 0 && \text{dla } n = -1, 0 \\
 X_n^N &= 2S_n \sum_{m=n+1}^{-1} X_m^2 X_{n-m}^{N-2} && \text{dla } n \leq -2
 \end{aligned} \tag{A17}$$

Otrzymane relacje (A14) i (A17) dowodzą poprawności rozwinięcia (A7) ze współczynnikami  $X_n^N$  określonymi przez (A8). Pozostają do udowodnienia relacje symetrii (A9).

Jeśli  $n \leq -2$  ( $k = -n$ ), to (A17) daje:

$$X_{-k}^N = 2S_{-k} \sum_{m=-k+1}^{-1} X_m^2 X_{-k-m}^{N-2} \tag{A18}$$

co po zmianie indeksu  $m = p-k$  daje:

$$X_{-k}^N = -2 \sum_{p=1}^{k-1} X_{p-k}^2 X_{-p}^{N-2} = -2 \sum_{p=1}^k X_{p-k}^2 X_{-p}^{N-2}.$$

Dla  $N$  parzystego ( $X_{-p}^{N-2} = -X_p^{N-2}$  z założenia /3/) jest:

$$X_{-k}^N = 2 \sum_{p=1}^k X_{-(k-p)}^2 X_p^{N-2} = -2 \sum_{p=1}^k X_{k-p}^2 X_p^{N-2}.$$

Porównanie tego wyrażenia z pierwszym równaniem (A17) daje:

$$X_{-n}^N = -X_n^N.$$

Dla  $N$  nieparzystego ( $X_{-p}^{N-2} = X_{p-1}^{N-2}$ ) jest:

$$X_{-k}^N = 2 \sum_{p=1}^k X_{k-p}^2 X_{-p}^{N-2} = 2 \sum_{p=1}^k X_{k-p}^2 X_{p-1}^{N-2} = 2 \sum_{m=0}^{k-1} X_{k-m-1}^2 X_m^{N-2} = X_{k-1}^N,$$

skąd analogicznie:

$$X_n^N = X_{-n-1}^N,$$

co kończy dowód słuszności rozwinięcia (A7) wraz z (A8) i (A9).



DODATEK B

Korzystając z rozwinięcia Dougall'a [9] nieskończony szereg w (19) po  $n$  można wysumować, co daje:

$$\sum_{m=-1}^{\infty} \alpha_m (-1)^m \Pi \cdot \frac{P_{m-1+k_0/K}^{(0)}}{\sin(\Pi k_0/K)} = 0, \quad (B1)$$

czyli:

$$-\alpha_{-1} P_{1-k_0/K} + \alpha_0 P_{-k_0/K} - \alpha_1 P_{k_0/K} = 0 \quad (B2)$$

Wykorzystanie zależności  $P_{1-\nu}/P_{\nu} \cong \nu$  dla  $|\nu| < 1$  oraz podstawienie (18) do (B2) prowadzi do:

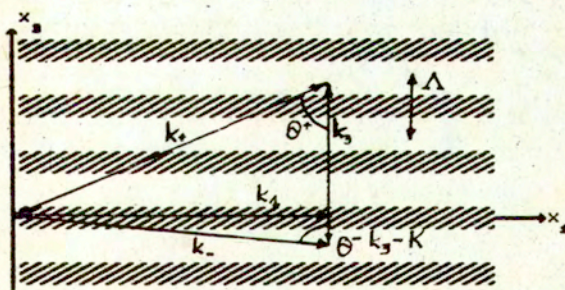
$$K\phi_0 = \frac{D_0}{\epsilon_0} - \frac{D_{-1}}{\epsilon_{-1}}; \quad \phi_{-1} = -\phi_0. \quad (B3)$$

Na mocy definicji (2) i (B3) dla  $n = 0, -1$  otrzymuje się następujący układ równań:

$$D_0 \left[ 1 + \frac{k_0}{K} \cdot \frac{k_0^2 - k_{v0}^2}{k_0^2 - k_{00}^2} \right] - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{-1}} \cdot \frac{k_0}{K} \cdot \frac{k_0^2 - k_{v0}^2}{k_0^2 - k_{00}^2} D_{-1} = 0 \quad (B4)$$

drugie równanie powstaje przez zamianę indeksów  $0 \leftrightarrow -1$ .

Położenie wektorów falowych ( $k_+$  - fali padającej,  $k_-$  - fali odbitej) w przypadku odbicia fali od periodycznego układu elektrod zilustrowano na rys. B1.



Rys. B1.

W przypadku bliskim do odbicia Bragg'a można przyjąć:

$$\begin{aligned}
 k_3 &= k_+ \cos \theta^+ + \delta \\
 k_1 &= k_+ \cos \theta^+ + \epsilon \\
 k_+ \cos \theta^+ + k_- \cos \theta^- &= K \\
 k_+ \sin \theta^+ - k_- \sin \theta^- &= 0,
 \end{aligned} \tag{B5}$$

gdzie  $\epsilon, \delta$  - liczby zespolone takie, że:

$$|\epsilon|, |\delta| \ll k_+ \cong k_- \tag{B6}$$

Ponieważ  $k_n = |\vec{k} + n\vec{k}|$ , więc:

$$\begin{aligned}
 k_0^2 &= k_1^2 + k_3^2 \\
 k_{-1}^2 &= k_1^2 + (k_3 - K)^2
 \end{aligned} \tag{B7}$$

i korzystając z (B5):

$$\begin{aligned}
 k_0^2 &\cong k_+^2 + 2k_+(\epsilon \sin \theta^+ + \delta \cos \theta^+) \\
 k_{-1}^2 &\cong k_-^2 + 2k_-(\epsilon \sin \theta^- - \delta \cos \theta^-)
 \end{aligned} \tag{B8}$$

oraz:

$$\begin{aligned}
 k_+ &= K \cdot \frac{\sin \theta^+}{\sin(\theta^+ + \theta^-)} \\
 k_- &= K \cdot \frac{\sin \theta^-}{\sin(\theta^+ + \theta^-)}
 \end{aligned} \tag{B9}$$

Podstawienie (B8) i (B9) do wyznacznika układu równań (B4) prowadzi do równania dyspersyjnego wiążącego małe poprawki  $\epsilon$  i  $\delta$ . Przy wyprowadzaniu tego równania  $k_+$  i  $k_-$  dobierane są tak, aby w wynikowej relacji dyspersyjnej nie występowały  $\epsilon$  i  $\delta$  w pierwszych potęgach. Otrzymuje się:

$$\frac{k_+^2 - k_{v+}^2}{2k_+ \cos \theta^+} = \frac{k_{v+}^2 \frac{\Delta U}{U_+}}{k_+ \cos \theta^+} \frac{\sin \theta^+ + \sin \theta^-}{\sin \theta^+ + \sin \theta^+ + \sin \theta^-}, \tag{B10}$$

gdzie:  $\theta = \theta^+ + \theta^-$ .

Po długich przekształceniach uzyskuje się równanie:

$$\begin{aligned}
 k^2 \left( \sin \theta^+ + \sin \theta^- + \sin \theta^- \right)^2 \cos \theta^- \left[ \delta^2 \cos \theta^+ - \epsilon^2 \sin^2 \theta^+ / \cos \theta^+ \right] + \\
 + k_{v+}^2 \cdot \frac{\Delta U}{U_+} \cdot k_{v-}^2 \cdot \frac{\Delta U}{U_-} \cdot \sin^2 \theta = 0,
 \end{aligned} \tag{B11}$$

które ostatecznie przekształca się do równania dyspersyjnego (20), podanego w tekście pracy. Powyżej  $k_{v+}$ ,  $\Delta U / U_+$  oznaczają parametry

anizotropowego podłoża, odpowiadające kierunkowi określoneemu przez wektor falowy  $\vec{k}_+$ , analogiczne jest znaczenie wielkości ze znakiem minus.

### DODATEK C

Do układu równań (15) (położyć  $(k_z + nK)/k_n = S_n$ ) należy dołączyć  $N$  brakujących warunków, aby jednoznacznie określić stałe  $\alpha_m$ . Warunki te wynikają z określenia potencjałów na  $N$  elektrodach w grupie (albo z określenia prądów dopływających do elektrod). Aby te warunki można było ustlić, należy najpierw wziąć pod uwagę relację, wyrażającą potencjały elektrod poprzez niewiadome  $\alpha_m$  w postaci (25):

$$\sum_{m=M_1}^{M_2} \alpha_m U_m^l = j \underline{U}^l, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (C1)$$

Zakładając, że  $\underline{U}^l$  są znane, dołączenie (C1) do relacji (15) prowadzi do następującego niejednorodnego układu równań, zapisanego w postaci macierzowej:

$$\sum_{m=M_1}^{M_2} \mathcal{J}_m^l \alpha_m = j \varphi^l, \quad l = 1, 2, \dots, (M_2 - M_1 + 1), \quad (C2)$$

gdzie:

$$\mathcal{J}_m^l = \begin{cases} U_m^l & \text{dla } l = 1, 2, \dots, N \\ (\epsilon_n S_{n-n-m} - \epsilon_{of} S_n) X_{n-m}^N & \text{dla } l = (N+1), \dots, (M_2 - M_1 + 1) \\ & \text{przy } n = N_1 + l - N - 1 \end{cases} \quad (C3)$$

$m \in [M_1, M_2]$ ,  $M_1, M_2$  określono w (17)

$$\varphi^l = \begin{cases} \underline{U}^l & \text{dla } l = 1, 2, \dots, N \\ 0 & \text{dla } l = (N+1), \dots, (M_2 - M_1 + 1) \end{cases} \quad (C4)$$

Rozwiązanie niejednorodnego układu równań (C2) ze względu na  $\alpha_m$  (liczba równań  $M_2 - M_1 + 1$  jest zgodna z liczbą niewiadomych) daje:

$$\alpha_m = j \cdot \sum_{n=1}^{M_2 - M_1 + 1} [\mathcal{J}^{-1}]_m^n \varphi^n, \quad m = M_1, \dots, M_2, \quad (C5)$$

gdzie  $\mathcal{J}^{-1}$  jest macierzą odwrotną do  $\mathcal{J}$ .

Wyznaczone w (C5) stałe  $\alpha_m$  podstawione do (24) dają poszukiwaną funkcjonalną relację między napięciami na elektrodach  $U^l$  i prądami dopływającymi do elektrod  $I^k$ :

$$I^k = -j2\omega\epsilon_0 \sum_{m=M_1}^{M_2} \sum_{l=1}^N I_m^k [\mathcal{J}^{-1}]_m^l U^l = u_{kl} U^l, \quad (\text{sumować po } l) \quad (C5)$$

przy czym  $I_m^k$  jest macierzą o wymiarze  $N$  ( $M_2 - M_1 + 1$ ) określoną w (24).

Relację tę można w skrócie zapisać w postaci:

$$I^k = u_{kl} U^l, \quad (C7)$$

gdzie:

$$u_{kl} = -j2\omega\epsilon_0 I_m^k [\mathcal{J}^{-1}]_m^l \quad (\text{sumować po } m). \quad (C8)$$

(C7) wiąże potencjały i prądy elektrod dla danej, założonej liczby falowej  $k_s$ , od której zależy  $u_{kl}$ .

LITERATURA:

- [1] K.A.Ingebrigtsen, *Surface waves in piezoelectrics*, J. Appl. Phys., Vol 40, June 1969, pp. 2681-2686
- [2] K.Blotekjar, K.A.Ingebrigtsen, H.Skeie, *A method for analyzing waves in structures consisting of metal strips on dispersive media*, IEEE Trans., ED 20, 12(1973), pp. 1133-1138
- [3] K.Blotekjar, K.A.Ingebrigtsen, H.Skeie, *Acoustic surface waves in piezoelectric materials with periodic metal strip on the surface*, IEEE Trans., ED 20, 12(1973), pp.1139-1146
- [4] T.Aoki, K.A.Ingebrigtsen, *Acoustic surface waves in split strip periodic metal gratings on a piezoelectric surface*, IEEE Trans., SU 24, 3(1977), pp. 179-193
- [5] E.Danicki, *Propogation and generation of SAW*, Biul. WAT 11(1976), suplement in Polish also see:  
E.Danicki, *Theory of periodic interdigital transducer (IDT) of surface acoustic waves (SAW)*, J. Tech. Phys. 19, No 1(1978), pp. 89-102  
E.Danicki, *Theory of surface acoustic wave slant propagation in the periodic electrode system*, ibid., pp.69-77
- [6] E.Danicki, *General theory of SAW reflection from periodic metal strip, oblique incidence angle*, ITR Rep. 1982 (in Polish) also see:  
E.Danicki, *Reflection of SAW from an array of periodic metal strips*, Proc. of ISSWAS, Novosibirsk 1986, pp.185-188
- [7] E.Danicki, *Unified theory of interdigital transducer and SAW reflectors*, J. Tech. Phys. 21, 3(1980), pp. 387-403
- [8] E.Danicki, *Influence of bulk wave penetration on SAW filter performance*, J. Tech. Phys. 21, 3(1980), pp.405-420
- [9] H.Bateman, A.Erdelyi, *Higher transcendental functions*, Vol 1, New York 1953
- [10] P.A.Dufilie, *Low cost SAW convolver with high spurious suppression*, 1980 Ultrasonic Symp. Proc., pp. 43-47
- [11] P.U.Wright, H.A.Haus, *A closed form solution of reflective-array gratings*, ibid., pp. 282-287
- [12] B.Lewis, P.M.Jordan, R.F.Milson, D.P.Morgan, *Charge and field superposition methods for analysis of generalised SAW interdigital transducer*, ibid., pp. 709-714
- [13] L.H.Bertoni, *Right-angle reflection of SAW from an array of conducting strips*, IEEE Trans. on SU, 30, 2(1983), pp.90-99

- [14] K.R.Laker, E.Cohen, A.J.Slobodnik Jr., *Electric field interactions within finite arrays and the design of withdrawal weighted SAW filters at fundamental and higher harmonics*, 1976 Ultrasonic Symp. Proc., pp. 317-321
- [15] W.R.Smith, W.F.Pedler, *Fundamental and harmonic frequency circuit model analysis of interdigital transducer with arbitrary metalization and polarity sequences*, IEEE Trans. on MTT, 23, No 11(1975), pp. 853-864
- [16] E.Danicki, *Analysis of narrowband dispersive interdigital transducers by scattering matrix method for periodic metal strips*, to be published in Arch. Acoustics