

4.45 — maszyny, części maszyn,
mechanizmy, diagnostyka

Amalia Pielorz, Władysław Nadolski

ANALIZA DYNAMICZNA TURBOZESPOŁU
PODDANEGO
WYMUSZENIU KINEMATYCZNEMU
WYWOŁANEMU FALAMI POPRZECZNYMI

29/1990



P.269



Praca wpłynęła do Redakcji dnia 17 marca 1990 r.



56736



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 120 egz. Ark.wyd. 2,35 Ark.druk. 3

Oddano do drukarni w maju 1990 r.

Nr zamówienia 293/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Amalia Pielorz
Władysław Nadolski
SPDS IPPT PAN

ANALIZA DYNAMICZNA TURBOZESPOŁU
PODDANEGO WYMUSZENIU KINEMATYCZNEMU
WYWOŁANEMU FALAMI POPRZECZNYMI

W pracy rozpatrywany jest turbozespół poddany wymuszeniu kinematycznemu wywołanemu falami poprzecznymi. Przyjmujemy, że turbozespół jest posadowiony nie bezpośrednio na fundamencie lecz na warstwowym elemencie sprężystym. W rozważaniach przyjęto model dyskretno-ciągły złożony z dwóch brył sztywnych, reprezentujących odpowiednio turbozespół i fundament, i z segmentów sprężystych doznających jedynie odkształceń ścinających. Każdy segment jest jednorodny i izotropowy lecz segmenty te mogą mieć różne własności mechaniczne. W dyskusji zastosowano metodę falową, która wykorzystuje rozwiązania falowe równań ruchu. Obliczenia numeryczne wykonano dla modelu dwusegmentowego i modelu czterosegmentowego z naprzemiennymi własnościami mechanicznymi segmentów. Wyznaczono przemieszczenia turbozespołu w zależności od dwóch parametrów uwzględniających zróżnicowanie własności mechanicznych segmentów.

1. Wstęp

Badania dynamiczne obiektów zbliżonych do turbozespołów należą do zagadnień, które raczej słabo są zbadane zarówno pod względem ilościowym jak i jakościowym. Wymuszenia poprzeczne, podłużne i skrętne, którym poddawany jest fundament turbozespołu, mogą być typu sejsmicznego lub mogą być wywołane przez ruch kołowy i szynowy oraz przez zakłócenia pochodzące od różnych maszyn i urządzeń technicznych. W pracy ograniczamy się do analizy dynamicznej

Praca zlecona przez IMP PAN w Gdańsku w ramach CPBP 02.18

turbozespołu przy wymuszeniu kinematycznym wywołanym falami poprzecznymi.

We wstępnych rozważaniach przytaczamy najprostszy model reprezentujący obiekt inżynierski poddany wpływowi sejsmicznemu, tj. model dyskretny o jednym stopniu swobody. Następnie proponujemy dyskretno-ciągły model złożony z dwóch brył sztywnych, reprezentujących odpowiednio turbozespół i fundament, połączonych elementem sprężystym o strukturze warstwowej.

Tłumienie w modelu dyskretno-ciągłym uwzględniamy poprzez zastępcze tłumienie zewnętrzne i wewnętrzne i zakładamy, że wszystkie elementy modelu doznają jedynie odkształceń ścinających. Rozważania przeprowadzono za pomocą metody wykorzystującej rozwiązanie falowe równań ruchu. Metoda ta pozwala na wyznaczanie przemieszczeń, odkształceń i prędkości w dowolnych przekrojach poprzecznych elementu sprężystego modelu. Obliczenia numeryczne dotyczą modelu, którego element sprężysty złożony jest z dwóch lub czterech segmentów o różnych własnościach mechanicznych. Celem tych obliczeń jest zbadanie wpływu zróżnicowania własności mechanicznych segmentów na przemieszczenia turbozespołu poddanego wymuszeniu kinematycznemu wywołanemu falami poprzecznymi.

2. Model o jednym stopniu swobody

Najliczniejsze prace z zakresu badań dynamicznych różnych obiektów inżynierskich dotyczą tych obiektów, które poddane są wpływowi sejsmicznemu [1 - 16]. Jednakże niskie obiekty inżynierskie, które wymiarami zbliżone są do wymiarów turbozespołów, są raczej słabo zbadane w porównaniu z wysokimi obiektami inżynierskimi, do których zaliczamy budynki, kominy i elektrownie atomowe [4, 5, 7-10]. Jak wynika z przytoczonych wyżej prac, modelowanie obiektu inżynierskiego dokonuje się głównie za pomocą elementów skończonych bez podania wyczerpujących założeń, w efekcie prowadząc do dyskusji modeli dyskretnych. Uzyskiwane wyniki w oparciu o przeprowadzaną analizę dynamiczną modelu o dużej liczbie stopni swobody mają na ogół bardzo trudną interpretację fizyczną. Poniżej przedstawimy analizę dynamiczną prostego modelu obiektu inżynierskiego poddanego wpływowi sejsmicznemu, tj. modelu dyskretnego o jednym stopniu swobody, ze względu na stosunkowo prostą jego

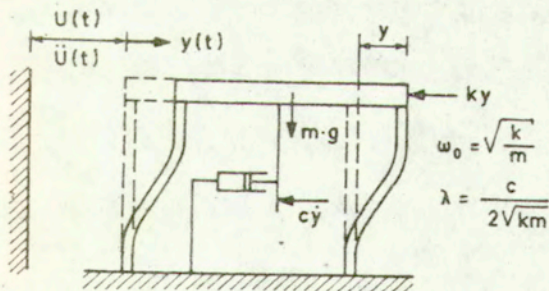
interpretację fizykalną.

W pracach [2,3] rozpatrywany jest model obiektu inżynierskiego złożony z bryły sztywnej m i dwóch podatnych elementów, rys.1. Przyjęto, że przy wymuszeniu kinematycznym poprzecznym typu sejsmicznego wszystkie masy obiektu inżynierskiego są sprowadzone do punktu elementu sztywnego przemieszczającego się translacyjnie do kierunku poziomego. W kierunku tym przyjęto również zastępczą sztywność słupów i zastępcze tłumienie.

Przy tak przyjętych założeniach, równanie ruchu bryły sztywnej ma postać

$$m \frac{d^2(U+y)}{dt^2} + ky + c \frac{dy}{dt} = 0, \quad (1)$$

- gdzie m jest masą bryły sztywnej,
 k jest stałą sprężystości słupów,
 c jest współczynnikiem tłumienia,
 U jest przemieszczeniem gruntu względem stałego układu odniesienia,
 y jest przemieszczeniem masy względem gruntu.



Rys. 1. Model o jednym stopniu swobody

Równanie powyższe można zapisać w postaci

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\lambda\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = -m\ddot{U} \quad (2)$$

z

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \lambda = \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \quad (3)$$

gdzie ω_0 jest częstością drgań własnych.

Zakładamy, że w chwili początkowej trzęsienia ziemi obiekt inżynierski jest nieruchomy. Wobec tego warunki początkowe dla $t=0$ są następujące

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = -\dot{U}(0). \quad (4)$$

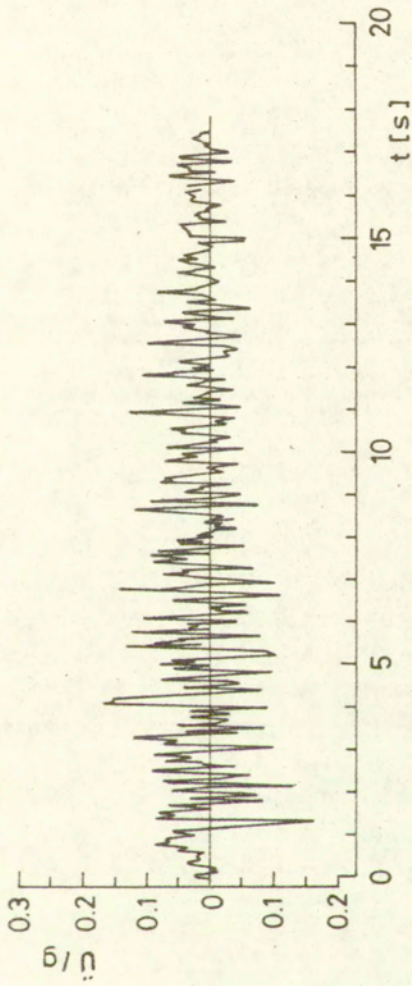
Przy tych warunkach początkowych rozwiązanie równania (2) ma postać

$$y = -\frac{1}{\omega_1} \int_0^t \ddot{U}(\tau) \exp\{-\lambda\omega_0(t-\tau)\} \sin\omega_1(t-\tau) d\tau \quad (5)$$

gdzie

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1-\lambda^2}. \quad (6)$$

Przyjmując różne postaci funkcji $\ddot{U}(t)$ i wykorzystując wzór (5) można otrzymać odpowiednie funkcje $y(t)$. Przykładowy wykres funkcji $\ddot{U}(t)$ przedstawiony jest na rys. 2, [3]. Jest to wykres przyśpieszenia zarejestrowany w czasie trzęsienia ziemi w Taft w 1952 r.



rys. 2. Przyspieszenie \ddot{u} zarejestrowane w czasie trwania trzęsienia ziemi w Taft 21 lipca 1952 r.

Oznaczając przez

$$a(t, \omega_0) = \int_0^t \ddot{U}(\tau) \exp\{-\lambda \omega_0(t-\tau)\} \cos \omega_1 \tau d\tau \quad (7)$$

$$b(t, \omega_0) = \int_0^t \ddot{U}(\tau) \exp\{-\lambda \omega_0(t-\tau)\} \sin \omega_1 \tau d\tau \quad (8)$$

$$S(t, \omega_0) = \sqrt{a^2(t, \omega_0) + b^2(t, \omega_0)} \quad (9)$$

$$\tan \varepsilon(t) = \frac{b}{a} \quad (10)$$

równanie (5) można zapisać w postaci

$$y = -\frac{1}{\omega_1} (a \sin \omega_1 t - b \cos \omega_1 t) = -\frac{1}{\omega_1} S \sin(\omega_1 t - \varepsilon(t)). \quad (11)$$

Względna prędkość otrzymana przez różniczkowanie y względem czasu, jest następująca

$$v = -\sqrt{\left(1 + \frac{\omega_0^2 \lambda^2}{\omega_1^2}\right)} S \cos(\omega_1 t - \varepsilon'(t)), \quad (12)$$

gdzie

$$\tan \varepsilon'(t) = \frac{\frac{b}{a} - \frac{\lambda \omega_0}{\omega_1}}{1 + \frac{\lambda \omega_0}{\omega_1} \frac{b}{a}} \quad (13)$$

Z punktu widzenia technicznego, w badaniach sejsmicznych istotne znaczenie ma przyspieszenie bezwzględne dane przez

$$\alpha = \ddot{U} + \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (14)$$

Wykorzystując (9), (11) i (12) mamy

$$\alpha = \omega_1 \left(1 + \frac{\lambda^2 \omega_0^2}{\omega_1^2} \right) S \sin(\omega_1 t - \varepsilon''(t)) \quad (15)$$

gdzie

$$\tan \varepsilon''(t) = \frac{-\frac{2\lambda\omega_0}{\omega_1} + \left(1 - \frac{\omega_0^2 \lambda^2}{\omega_1^2}\right) \frac{b}{a}}{1 - \frac{\lambda^2 \omega_0^2}{\omega_1^2} + \frac{2\lambda\omega_0}{\omega_1} \frac{b}{a}} \quad (16)$$

Z powyższych zależności dla modelu dyskretnego o jednym stopniu swobody wynikają m.in. następujące wnioski:

1. Postać i charakter drgań obiektu inżynierskiego w sposób istotny zależne są od jego częstości drgań własnych.
2. Przemieszczenie maleje, natomiast przyspieszenie rośnie ze wzrostem sztywności obiektu inżynierskiego i odwrotnie.
3. Historia funkcji \ddot{U} z niedalekiej przeszłości ma pewien wpływ na amplitudę w danej chwili czasu, jednakże wpływ historii funkcji \ddot{U} z dalekiej przeszłości jest nieznaczny.

Na podstawie związków (11), (12), (15) można uzyskać różne informacje, które mają istotne znaczenie praktyczne np. wyznaczyć maksymalne wartości przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń, które na ogół nie występują w tej samej chwili czasu. Wartości te wyznacza się numerycznie lub w przybliżeniu jak podano w [2].

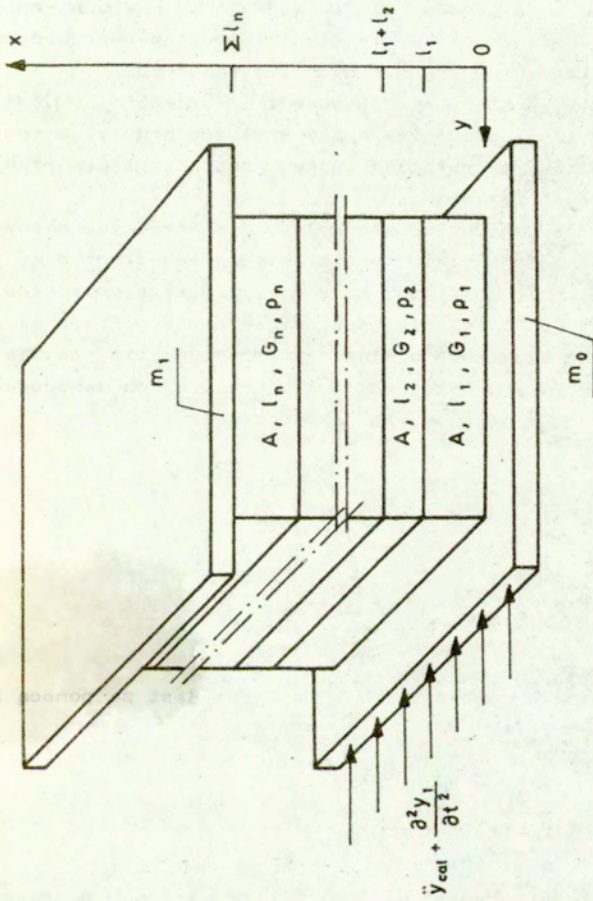
Model przedstawiony na rys. 1 był również rozpatrywany m.in.

w pracach [3-6] stosując nieco inne podejście przy wyznaczaniu maksymalnych wartości przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń. Należy nadmienić, że w literaturze technicznej spotykane są również modele obiektów inżynierskich o dużej liczbie stopni swobody. Modele te jednakże dotyczą głównie wysokich konstrukcji inżynierskich i w przypadku analizy dynamicznej turbozespołu wydają się one mniej użyteczne.

Model obiektu inżynierskiego o jednym stopniu swobody, rys. 1, charakteryzuje się liniową sztywnością i liniowym tłumieniem. W modelu tym przyjęto, że masa obiektu inżynierskiego jest skupiona w środku belki przemieszczającej się ruchem translacyjnym równoległe do kierunku poziomego. Przeprowadzona analiza dynamiczna modelu może okazać się interesująca w praktycznych rozważaniach wówczas, gdy rozważany model o jednym stopniu swobody jest z pewnym przybliżeniem adekwatny do rozpatrywanego obiektu inżynierskiego. Jednakże w powyższych rozważaniach całkowicie pominięto zagadnienie sprowadzania układu ciągłego, jakim jest obiekt inżynierski, do układu o jednym stopniu swobody oraz zagadnienie identyfikacji. Pierwszy problem, jak się wydaje, może być pominięty przy przyjęciu dyskretno-ciągłego modelu obiektu inżynierskiego zamiast modelu dyskretnego. Taka propozycja, tj. model dyskretno-ciągły, zostanie przyjęta poniżej przy rozpatrywaniu turbozespołu poddanego wymuszeniu kinematycznemu wywołanemu falami poprzecznymi.

3. Model dyskretno-ciągły

Wymuszenie kinematyczne wywołane falami poprzecznymi, jak wykazano w pracach [1-3], ma bardzo istotny wpływ na zachowanie się obiektów inżynierskich w warunkach dynamicznych. W rozważaniach dotyczących turbozespołu przy tego typu wymuszeniu przyjmujemy dyskretno-ciągły model złożony w dwóch brył sztywnych m_0 i m_1 , połączonych elementem sprężystym. Dolna bryła sztywna o masie m_0 reprezentuje masę fundamentu, natomiast górna bryła sztywna o masie m_1 reprezentuje masę turbozespołu. Pomiędzy bryłami m_0 i m_1 wprowadza się element sprężysty, za pomocą którego uwzględnia się podatność turbozespołu oraz podatność innych dodatkowo wprowadzonych elementów, rys. 3.



Rys. 3. Model dyskretno-ciężły

Zakłada się, że element sprężysty złożony jest z n segmentów o różnych własnościach mechanicznych, z których górny związany z masą m_1 , może na przykład reprezentować podatność turbozespołu. i -ty segment scharakteryzowany jest przekrojem poprzecznym A_i , modułem ścinania G_i , gęstością ρ_i , długością l_i i współczynnikiem ścinania k' . Przyjmuje się, że elementy rozważanego modelu doznają jedynie odkształceń poprzecznych /ścinających/.

Bryła sztywna m_0 doznaje przyspieszenia $\partial^2(y_0(t) + y_{gr}(t))/\partial t^2$, gdzie $y_0(t)$ jest przemieszczeniem bryły względem gruntu, natomiast $y_{gr}(t)$ jest zadany przemieszczeniem gruntu względem przyjętego stałego układu odniesienia.

Tłumienie w rzeczywistych konstrukcjach jest procesem bardzo złożonym. Choć istnieje wiele teorii dotyczących tłumienia, to jednak w konkretnych zagadnieniach są one raczej mało przydatne. Wobec tego, w pracy tej tłumienie jest uwzględnione poprzez zewnętrzne i wewnętrzne tłumienie zastępcze. Przyjmuje się, że zastępcze tłumienie zewnętrzne przyłożone jest w przekrojach zamocowania brył sztywnych m_0 oraz m_1 i jest postaci

$$R_{d0} = d_0 \frac{\partial y_0}{\partial t} \quad \text{dla } x = 0, \quad (17)$$

$$R_{d1} = d_1 \frac{\partial y_n}{\partial t} \quad \text{dla } x = \sum_{k=1}^n l_k$$

Zastępcze tłumienie wewnętrzne R_{vi} opisane jest za pomocą liniowego modelu Voigta, [17],

$$R_{vi} = D_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial x \partial t} \quad (18)$$

i chociaż może być ono położone w dowolnych przekrojach poprzecznych segmentów, dla prostoty rozważań umieszczamy je w przekrojach łączenia segmentów. Stałe d_i i D_i są odpowiednio współczynnikami zastępczego tłumienia zewnętrznego i wewnętrznego, natomiast $y_i(x,t)$ jest przemieszczeniem przekrojów poprzecznych i -tego segmentu. Ponadto zakładamy, że każdy segment jest jednorodny, izo-

tropowy i idealnie połączony z segmentami sąsiednimi.

Przyjmujemy, że kierunek osi x pokrywa się z kierunkiem propagacji fali, a jej początek z położeniem bryły w_0 w stanie niezaburzonej. W chwili $t=0$ przemieszczenia i prędkości wszystkich przekrojów rozważanego modelu są równe zeru.

Przy powyższych założeniach do opisu ruchu segmentów modelu dyskretno-ciągłego, przedstawionego na rys. 3 można wykorzystać klasyczne równanie falowe. Należy zaznaczyć, że równanie ruchu z tłumieniem rozłożonym w sposób ciągły mogłoby bardziej dokładnie opisywać rzeczywiste zjawiska występujące w rozważanym układzie, jednakże metody rozwiązywania takich równań są znacznie mniej efektywne od metody zastosowanej w tej pracy w odniesieniu do klasycznego równania falowego. Ponadto, w [18] wykazano, że odpowiednie równania z tłumieniem rozłożonym w sposób ciągły i z tłumieniem zastępczym dają praktycznie te same wyniki poza krótkim początkowym przedziałem czasu.

Problem wyznaczania przemieszczeń, odkształceń i prędkości przekrojów modelu przedstawionego na rys. 3 sprowadza się do rozwiązania równań

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} - c_i^2 \frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

z zerowymi warunkami początkowymi

$$y_i(x, t) = \frac{\partial y_i}{\partial t}(x, t) = 0 \quad \text{dla } t = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

i z następującymi warunkami brzegowymi, które są warunkami zgodności dla sił i przemieszczeń w przekrojach łączenia kolejnych segmentów,

$$-m_0(\ddot{y}_{\text{śred}}(t) + \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}) - d_0 \frac{\partial y_i}{\partial t} + A k' G_i (D_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial x \partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial x}) = 0$$

$$\text{dla } x = 0,$$

$$y_i = y_{i+1} \text{ dla } x = \sum_{k=1}^i l_k, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (21)$$

$$-Ak'G_i \left(D_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial x \partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial x} \right) + Ak'G_{i+1} \left(D_{i+1} \frac{\partial^2 y_{i+1}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial y_{i+1}}{\partial x} \right) = 0$$

dla $x = \sum_{k=1}^i l_k, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$

$$Ak'G_n \left(D_n \frac{\partial^2 y_n}{\partial x \partial t} + \frac{\partial y_n}{\partial x} \right) + m_1 \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} + d_1 \frac{\partial y_n}{\partial t} = 0 \text{ dla } x = \sum_{k=1}^n l_k,$$

gdzie $c_i^2 = k'G_i / \rho_i$, natomiast $\ddot{y}_{\text{sw}}(t)$ jest zadaną funkcją czasu reprezentującą wymuszenie kinematyczne wywołane falami poprzecznymi.

Po przyjęciu następujących wielkości bezwymiarowych

$$\bar{x} = \frac{x}{l_1}, \quad \bar{t} = c_1 \frac{t}{l_1}, \quad k_n = \frac{A \rho_1 l_1}{m_n}, \quad \bar{D}_i = \frac{D_i c_1}{l_1},$$

$$\bar{d}_i = \frac{d_i l_1}{m_n c_1}, \quad \bar{b}_i = \frac{G_i}{G_1}, \quad \bar{y}_i = \frac{y_i}{y_n}, \quad (22)$$

$$\bar{m}_i = \frac{m_i}{m_n}, \quad \bar{c}_i = \frac{c_i}{c_1}, \quad \bar{l}_i = \frac{l_i}{l_1},$$

gdzie m_n i y_n są odpowiednio stałą masą i ustaloną wartością przeszerzenia, związki (19) - (21) przyjmują postać

$$\frac{\partial^2 \bar{y}_i}{\partial \bar{x}^2} - \bar{c}_i^2 \frac{\partial^2 \bar{y}_i}{\partial \bar{x}^2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

$$y_i(x, 0) = \frac{\partial y_i}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

$$-R_0 (\ddot{y}_{i-1}(t) + \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2}) - d_0 \frac{\partial y_i}{\partial t} + k_n (D_1 \frac{\partial^2 y_i}{\partial x \partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial x}) = 0 \quad \text{dla } x=0$$

$$y_i = y_{i+1} \quad \text{dla } x = \sum_{k=1}^i l_k, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$-B_i (D_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial x \partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial x}) + B_{i+1} (D_{i+1} \frac{\partial^2 y_{i+1}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial y_{i+1}}{\partial x}) = 0$$

$$\text{dla } x = \sum_{k=1}^i l_k, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (25)$$

$$B_n k_n (D_n \frac{\partial^2 y_n}{\partial x \partial t} + \frac{\partial y_n}{\partial x}) + R_1 \frac{\partial y_n}{\partial t^2} + d_1 \frac{\partial y_n}{\partial t} = 0 \quad \text{dla } x = \sum_{k=1}^n l_k$$

We wzorach (23) - (25) kreski górne, oznaczające wielkości bezwymiarowe, opuszczono dla wygody zapisu.

Przy rozwiązywaniu problemu (23) - (25) wykorzystujemy rozwiązanie falowe równań (23) typu d'Alemberta. Mianowicie, rozwiązania równań ruchu poszukujemy w postaci

$$y_1(x, t) = f_1(t-x) + g_1(t+x)$$

$$y_2(x, t) = f_2(c_2(t-1) - x + 1) + g_2(c_2(t-1) + x - 1) \quad (26)$$

$$y_i(x, t) = f_i(c_i(t - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{l_k}{c_k}) - x + \sum_{k=1}^{i-1} l_k) +$$

$$+ g_i(c_i(t - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{l_k}{c_k}) + x - \sum_{k=1}^{i-1} l_k), \quad i = 3, 4, \dots, n,$$

gdzie nieznanne funkcje f_i i g_i reprezentują fale, wywołane wymuszeniem kinematycznym $\dot{y}_{i-1}(t)$ przemieszczające się w i -tym segmencie odpowiednio w kierunku zgodnym i przeciwnym do kierunku osi x . Zakłada się, że przed dojściem pierwszego zaburzenia do i -tego segmentu, tj. dla ujemnych argumentów, funkcje f_i i g_i są tożsamościowo równe zeru. Ponadto, w argumentach tych funkcji uwzględniono fakt, że pierwsze zaburzenie w i -tym segmencie pojawia się w chwili $t = l_1/c_1 + l_2/c_2 + \dots + l_{i-1}/c_{i-1}$ w przekroju $x = l_1 + l_2 + \dots + l_{i-1}$.

Po podstawieniu przyjętej postaci rozwiązania (26) do warunków brzegowych (25) w otrzymywanych równościach można zauważyć pewne zależności pomiędzy argumentami odpowiednich funkcji.

Po oznaczeniu największego argumentu w każdej równości przez z_i otrzymujemy następujący układ równań dla nieznanymi funkcji

f_i, g_i

$$g_i(z_i) = f_2\left(\frac{c_{i+1}}{c_i}(z_i - 2l_i)\right) + g_{i+1}\left(\frac{c_{i+1}}{c_i}(z_i - 2l_i)\right) - f_i(z_i - 2l_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\alpha_{n+1,1} g_n''(z_n) + \alpha_{n+1,2} g_n'(z_n) = \alpha_{n+1,3} f_n''(z_n - 2l_n) + \alpha_{n+1,4} f_n'(z_n - 2l_n) \quad (27)$$

$$\alpha_{11} f_1''(z_1) + \alpha_{12} f_1'(z_1) = -R_0 \ddot{y}_{\text{sw}}(z_1) + \alpha_{13} g_1''(z_1) + \alpha_{14} g_1'(z_1)$$

$$\alpha_{i1} f_i''(z_i) + \alpha_{i2} f_i'(z_i) = \alpha_{i3} g_i''(z_i) + \alpha_{i4} g_i'(z_i) + \alpha_{i5} f_{i-1}''(z_{i-1}) + \alpha_{i6} f_{i-1}'(z_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

gdzie

$$\alpha_{11} = K_n D_1 + R_0, \quad \alpha_{12} = K_n + d_0,$$

$$\alpha_{13} = K_n D_1 - R_0, \quad \alpha_{14} = K_n - d_0,$$

$$\alpha_{i1} = c_i (B_i D_i + b_{i-1} D_{i-1} c_i / c_{i-1}), \quad (28)$$

$$\alpha_{i2} = b_i + b_{i-1} c_i / c_{i-1}, \quad \alpha_{i3} = c_i (b_i D_i - b_{i-1} D_{i-1} c_i / c_{i-1}),$$

$$\alpha_{i4} = \beta_i - \beta_{i-1} c_i / c_{i-1}, \quad \alpha_{i5} = 2 \beta_{i-1} D_{i-1} c_{i-1}$$

$$\alpha_{i6} = 2 \beta_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

$$\alpha_{n+1,1} = c_n (B_n K_n D_n + R_n c_n), \quad \alpha_{n+1,2} = B_n K_n + d_n c_n,$$

$$\alpha_{n+1,3} = c_n (B_n K_n D_n - R_n c_n), \quad \alpha_{n+1,4} = B_n K_n - d_n c_n.$$

Równania (27) są równaniami z odchylnym argumentem typu neutralnego. Równania te można rozwiązać analitycznie, podobnie jak równania dla modelu wielopiętrowego budynku analizowanego w [19] lub numerycznie za pomocą metody różnic skończonych, podobnie jak w pracach [20, 21]. Oznaczenie największego argumentu dla odpowiednich funkcji f_i, q_i przez z_i umożliwia wyznaczanie wartości tych funkcji z równań (27) od $z_i=0$ co krok Δz_i . Zauważyć można, że funkcje f_i, q_i zależne są od argumentu z_i , gdzie $z_i = c_i t$, czyli od wartości prędkości propagacji fali ścinania w i -tym segmencie, do którego i -te funkcje są przyporządkowane. Ze względu na fakt, że funkcje f_i i q_i są tożsamościowo równe zero dla ujemnych argumentów, prawe strony tych równań są zawsze znane, gdy równania te rozwiązywane są w podanej kolejności.

W równaniach (27) uwzględnione są różne długości i różne własności mechaniczne segmentów elementu sprężystego rozpatrywanego dyskretno-ciągłego modelu przedstawionego na rys. 3. W szczególnym przypadku, dla modelu dwusegmentowego o jednakowych długościach segmentów, tj. przy $n=1$ i $l_1 = l_2 = l$, równania (27) przyjmują postać

$$q_1(z_1) = f_2(c_2(z_1-2)) + q_2(c_2(z_1-2)) - f_1(z_1-2)$$

$$\alpha_{31} q_1''(z_2) + \alpha_{32} q_2'(z_2) = \alpha_{33} f_2''(z_2-2) + \alpha_{34} f_1'(z_2-2) \quad (29)$$

$$\alpha_{11} f_1''(z_1) + \alpha_{12} f_1'(z_1) = -R_0 \ddot{y}_{\text{eul}}(z_1) + \alpha_{13} g_1''(z_1) + \alpha_{14} g_1'(z_1),$$

$$\alpha_{21} f_2''(z_2) + \alpha_{22} f_2'(z_2) = \alpha_{23} g_2''(z_2) + \alpha_{24} g_2'(z_2) + \alpha_{25} f_1''(z_1) + \alpha_{26} f_1'(z_1),$$

gdzie stałe α_{ij} określone są przez związki (28) dla $n=2$. Z kolei dla modelu czterosegmentowego o jednakowych długościach segmentów i o naprzemiennych własnościach mechanicznych, tj. przy $n=4$ oraz dla

$$c_1 = c_3 = 1, \quad c_2 = c_4, \quad b_1 = b_3 = 1, \quad b_2 = b_4, \quad l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1 \quad (30)$$

równania dla nieznanymi funkcji f_i, g_i są postaci

$$g_1(z_1) = f_2(z_2 - 2c_2) + g_2(z_2 - 2c_2) - f_1(z_1 - 2)$$

$$g_2(z_2) = f_3(z_1 - \frac{2}{c_2}) + g_3(z_1 - \frac{2}{c_2}) - f_2(z_2 - 2)$$

$$g_3(z_1) = f_4(z_2 - 2c_2) + g_4(z_2 - 2c_2) - f_3(z_1 - 2)$$

$$\alpha_{51} g_4''(z_2) + \alpha_{52} g_4'(z_2) = \alpha_{53} f_4''(z_2 - 2) + \alpha_{54} f_4'(z_2 - 2) \quad (31)$$

$$\alpha_{11} f_1''(z_1) + \alpha_{12} f_1'(z_1) = -R_0 \ddot{y}_{\omega 2}(z_1) + \alpha_{13} g_1''(z_1) + \alpha_{14} g_1'(z_1)$$

$$\alpha_{21} f_2''(z_2) + \alpha_{22} f_2'(z_2) = \alpha_{23} g_2''(z_2) + \alpha_{24} g_2'(z_2) + \alpha_{25} f_1''(z_1) + \alpha_{26} f_1'(z_1) \quad (31)$$

$$\alpha_{31} f_3''(z_1) + \alpha_{32} f_3'(z_1) = \alpha_{33} g_3''(z_1) + \alpha_{34} g_3'(z_1) + \alpha_{35} f_2''(z_2) + \alpha_{36} f_2'(z_2)$$

$$\alpha_{41} f_4''(z_2) + \alpha_{42} f_4'(z_2) = \alpha_{43} g_4''(z_2) + \alpha_{44} g_4'(z_2) + \alpha_{45} f_3''(z_1) + \alpha_{46} f_3'(z_1)$$

z następującymi stałymi współczynnikami

$$\alpha_{11} = K_N D_1 + R_0, \quad \alpha_{12} = K_N + d_0, \quad \alpha_{13} = K_N D_1 - R_0, \quad \alpha_{14} = K_N - d_0,$$

$$\alpha_{21} = c_2 (b_2 D_2 + D_1 c_2), \quad \alpha_{22} = b_2 + c_2, \quad \alpha_{23} = c_2 (b_2 D_2 - D_1 c_2),$$

$$\alpha_{24} = b_2 - c_2, \quad \alpha_{25} = 2 D_1, \quad \alpha_{26} = 2,$$

$$\alpha_{31} = D_3 + b_2 D_2 / c_2, \quad \alpha_{32} = 1 + b_2 / c_2, \quad \alpha_{33} = D_3 - b_2 D_2 / c_2, \quad (32)$$

$$\alpha_{34} = 1 - b_2 / c_2, \quad \alpha_{35} = 2 b_2 D_2 c_2, \quad \alpha_{36} = 2 b_2,$$

$$\alpha_{41} = c_2 (b_2 D_4 + D_3 c_2), \quad \alpha_{42} = b_2 + c_2, \quad \alpha_{43} = c_2 (b_2 D_4 - D_3 c_2),$$

$$\alpha_{44} = \beta_2 - c_2, \quad \alpha_{45} = 2D_3, \quad \alpha_{46} = 2,$$

$$\alpha_{51} = c_2 (K_r \beta_2 D_4 + R_1 c_2), \quad \alpha_{52} = K_r \beta_2 + d_1 c_2,$$

$$\alpha_{53} = c_2 (K_r \beta_2 D_4 - R_1 c_2), \quad \alpha_{54} = K_r \beta_2 - d_1 c_2.$$

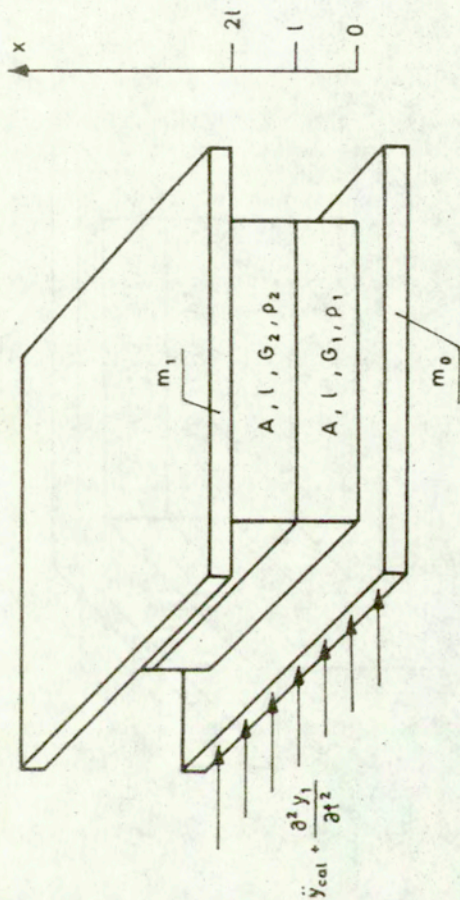
Zauważyć można, że w równaniach (27) dla $i=1,2,\dots,n$ oraz w równaniach (29) dla $i=1,2$ funkcje f_i, g_i zależne są od argumentu $z_i = c_i t$ natomiast w równaniach (31) funkcje f_1, g_1, f_3, g_3 zależne są od argumentu $z_1 = t$, a funkcje f_2, g_2, f_4, g_4 zależne są od argumentu $z_2 = c_2 t$.

W prezentowanej pracy odpowiednie równania (27), (29) czy (31) rozwiązano względem pochodnych funkcji f_i i g_i numerycznie za pomocą metody różnic skończonych. Po otrzymaniu pochodnych odpowiednie funkcje wyznaczano za pomocą metody trapezów. Znając wartości funkcji f_i i g_i oraz ich pochodnych, z zależności (26) można łatwo wyznaczyć przemieszczenia, prędkości i odkształcenia w dowolnych przekrojach poprzecznych elementu sprężystego rozpatrywanych modeli w dowolnej chwili czasu. W analizie numerycznej najbardziej będą interesowały nas przemieszczenia turbozespołu, czyli przemieszczenia przekroju $x = n$ rozważanego modelu dyskretno-ciągłego.

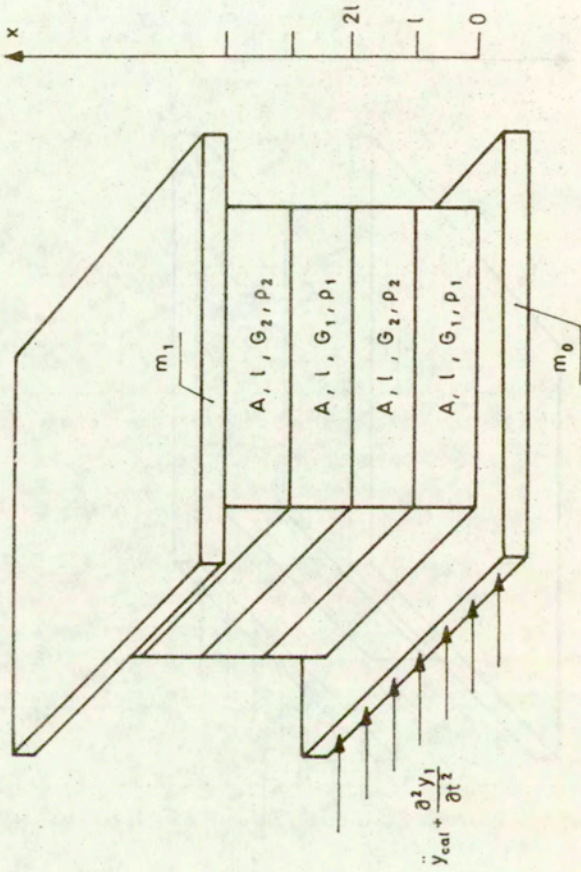
4. Analiza numeryczna modelu dyskretno-ciągłego.

Analizę numeryczną przeprowadzono dla dwóch przypadków modelu dyskretno-ciągłego tj. dla modelu złożonego z dwóch brył sztywnych i dwóch segmentów o jednakowych długościach oraz dla modelu złożonego z dwóch brył sztywnych i czterech segmentów o jednakowych długościach, przedstawionych odpowiednio na rysunkach 4 i 5. W obu modelach przyjęto dane dotyczące turbiny 13 K-215 tj. przyjęto masę fundamentu $m_0 = 1204 [t]$ i masę $m_1 = 2325 [t]$, która jest sumą mas płyty górnej, części maszyny i części wirujących, skąd $R_0 = 1$, $R_1 = 1.931$ przy $m_r = m_1$, (22).

W równaniach (29) i (31), wyprowadzonych dla dwóch wspomnianych przypadków rozważanego modelu dyskretno-ciągłego, występują



Rys. 4. Model dwusegmentowy



Rys. 5. Model czterosegmentowy

stałe, które są zależne od wielu bezwymiarowych parametrów takich jak k_n, c_i, b_i, R_i oraz od współczynników tłumienia zewnętrznego d_i i tłumienia wewnętrznego D_i , (22). Spośród tych parametrów c_i i b_i zależne są bezpośrednio od stałych materiałowych G_i, ρ_i segmentów modelu. Z założenia segmenty są jednorodne i izotropowe, lecz charakteryzują się różnymi wartościami stałych materiałowych. Dlatego interesujące jest najpierw zbadanie współzależności tych parametrów. Przykładowo dla $i = 2$ mamy

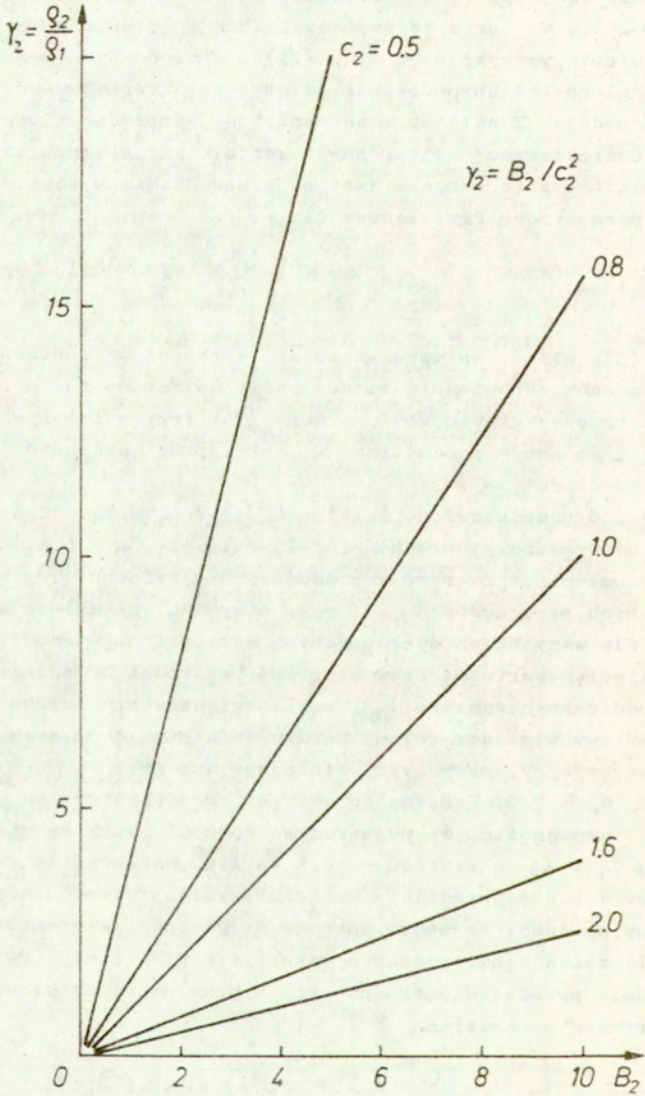
$$c_2^2 = b_2 / \chi_2, \quad \text{gdzie} \quad b_2 = \frac{G_2}{G_1}, \quad \chi_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (33)$$

Ze wzoru (33) widać, że wszelka zmiana wartości parametrów c_2 i b_2 pociąga za sobą odpowiednią zmianę wartości parametru χ_2 . Zmianę χ_2 można przedyskutować według wzoru (33) przy ustalonych prędkościach c_2 i zmiennym parametrze b_2 , oraz przy ustalonym b_2 i zmiennej prędkości c_2 .

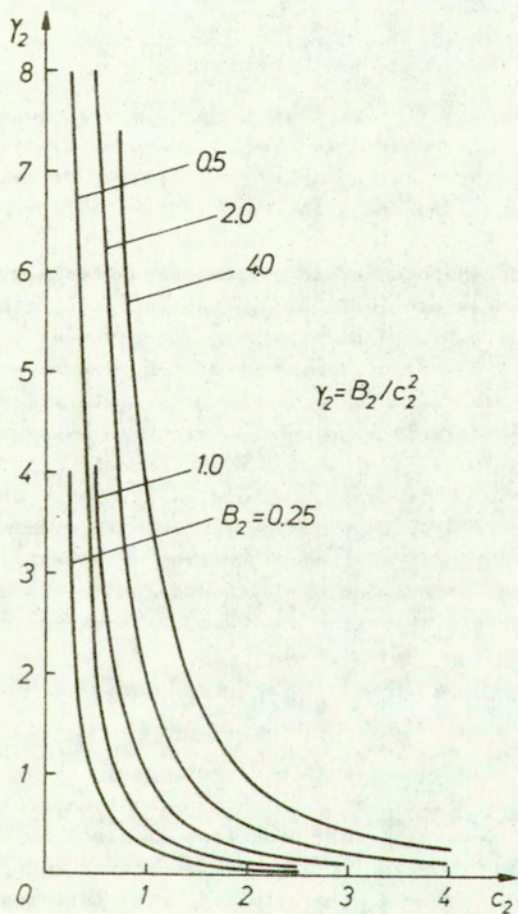
Na rys. 6 przedstawiono zależność χ_2 od b_2 przy wybranych wartościach bezwymiarowej prędkości fali ścinania $c_2 = 0,5, 0,8, 1,0, 1,6, 2,0$, natomiast na rys. 7 przedstawiono zależność χ_2 od c_2 dla wybranych parametrów b_2 . Z rys. 6 wynika, że zależność χ_2 od b_2 , dla wszystkich dyskutowanych wartości c_2 jest liniowa i że z maleniem wartości bezwymiarowej prędkości c_2 rośnie szybko wartość badanego parametru χ_2 , czyli zwiększa się szybko gęstość górnej warstwy względem dolnej warstwy. Zależność χ_2 od c_2 jest nieliniowa, rys. 7, przy czym wolniejsze zmiany $\chi_2 = \rho_2 / \rho_1$ występują dla $0,5 \leq c_2 \leq 2,0$. Porównując wykresy przedstawione na rysunkach 6 i 7 wydaje się, że najbardziej godnymi uwagi są wartości parametru b_2 i c_2 z zakresu od 0,5 do 2,0, ponieważ zmiany tych parametrów w takim przedziale wartości wywołują stosunkowo mniejsze zmiany gęstości segmentu górnego do gęstości segmentu dolnego.

W obliczeniach numerycznych wykorzystano równania (29) w przypadku modelu przedstawionego na rys. 4 przy następujących stałych bezwymiarowych parametrach

$$\begin{aligned} m_n = m_0, \quad R_0 = 1, \quad R_1 = 1,931, \quad d_0 = d_1 = D_1 = D_2 = 0,1, \\ b_1 = b_2 = 1, \quad c_1 = 1, \quad \rho_2 = 1/16 \end{aligned} \quad (34)$$



rys. 6. Zależność γ_2 od B_2



Rys. 7. Zależność γ_2 od c_2

oraz równania (31) w przypadku modelu przedstawionego na rys. 5 dla bezwymiarowych parametrów

$$\begin{aligned} m_n = m_0, \quad R_0 = 1, \quad R_1 = 1.931, \quad d_0 = d_1 = \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_4 = 0.1, \\ l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1, \quad c_1 = c_3 = 1, \quad c_2 = c_4, \\ \beta_1 = \beta_3 = 1, \quad \beta_2 = \beta_4, \quad \delta_2 = 1/16. \end{aligned} \quad (35)$$

Funkcja wymuszenia kinematycznego $\ddot{y}_{\text{ca}}(t)$, występująca w równaniach (29) i (31) w zasadzie może być dowolna. Jej wykres może być w czasie nieregularny czyli być zbliżonym do wykresu przyspieszenia zarejestrowanego 21 lipca 1952 r. w Taft w Japonii i przedstawionego na rys. 2.

W konkretnych obliczeniach można bezpośrednio wykorzystać dane dotyczące przyspieszeń $\ddot{y}_{\text{ca}}(t)$ naniesionych na rys 2, można również wykres zadanych przyspieszeń aproksymować łamanymi, funkcjami odcinkowo-stalymi, trapezowymi lub przeprowadzić analizę harmoniczną Fouriera tych danych. W pracy [22] wykazano, że rozwiązania uzyskane przy aproksymacji zadanego wymuszenia zewnętrznego za pomocą funkcji sinusoidalnej, trapezów bądź funkcji odcinkowo-stalych praktycznie nie różnią się między sobą.

Wobec powyższego, ze względów poznawczych w dalszych rozważaniach ograniczymy się do zbadania wpływu wymuszenia kinematycznego opisanego za pomocą funkcji sinusoidalnej na zachowanie się rozważanych modeli dyskretno-ciągłych. Mianowicie, przyjmujemy

$$\ddot{y}_{\text{ca}}(t) = a_0 \sin pt, \quad a_0 = 1.0 \quad (36)$$

i w obliczeniach numerycznych skoncentrujemy się na badaniu rozwiązań odpowiednio równań (29) lub (31) w stanach ustalonych.

W obu przypadkach modelu dyskretno-ciągłego najbardziej interesujące są przemieszczenia bryły m , reprezentującej turbozespół. W modelu dwusegmentowym położenie tej bryły odpowiada $x = 2$, rys. 4, natomiast w modelu czterosegmentowym pokazanym na rys. 5 położenie bryły m , odpowiada przekrojowi $x = 4$.

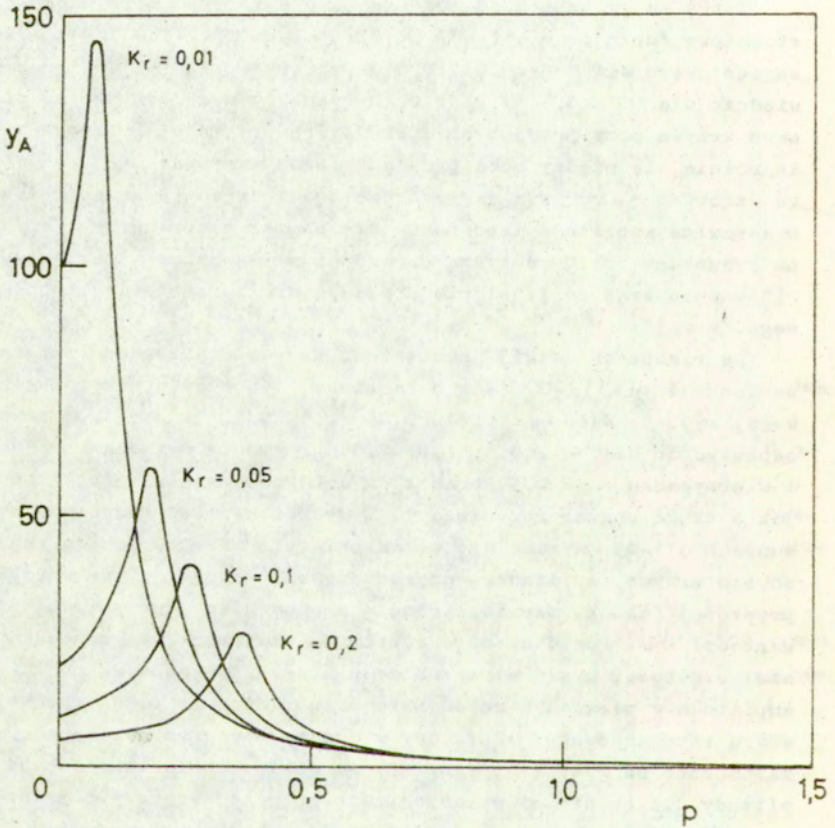
W obliczeniach numerycznych w pierwszej kolejności wyznaczono

przykładowe krzywe amplitudowo-częstościowe funkcji będącej różnicą przemieszczeń przekroju odpowiadającego położeniu bryły m_1 , oraz przemieszczeń przekroju $x=0$.

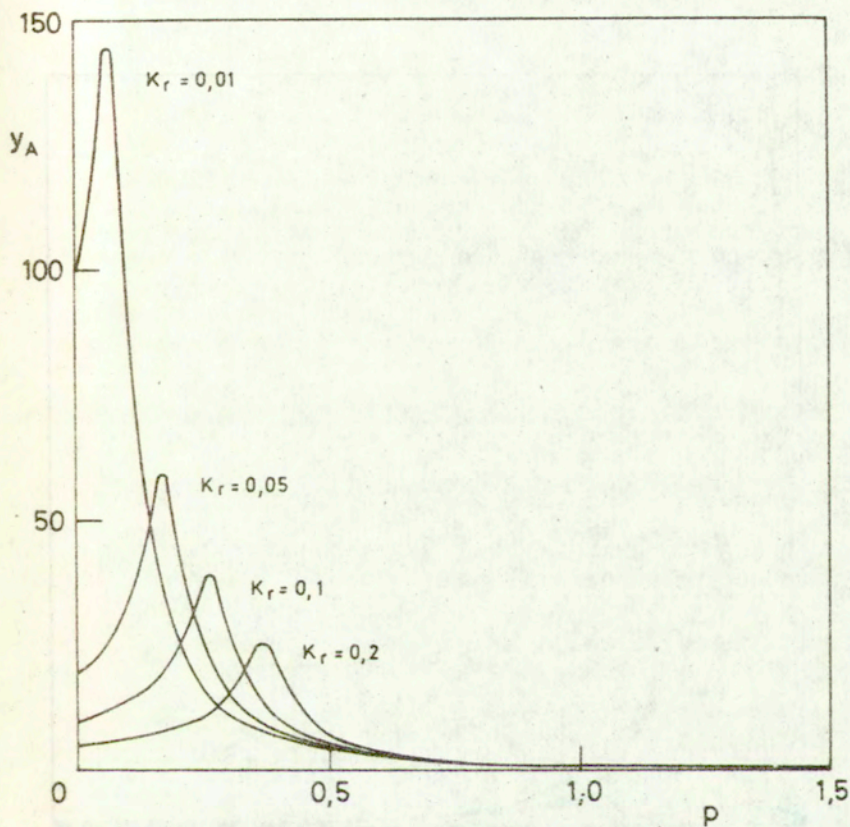
I tak na rysunkach 8-10 naniesiono krzywe amplitudowo-częstościowe funkcji $y(2,t) - y(0,t)$ dla parametrów (34) modelu dwusegmentowego dla $k_{\pi} = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$, $\beta_2 = 1.0$, oraz odpowiednio dla $c_2 = 0.5, 1.0, 2.0$. Z rysunków tych wynika, że otrzymane krzywe przy przyjętych wartościach prędkości fali c_2 niewiele różnią się między sobą przy ustalonej wartości k_{π} . Ponadto, ze wzrostem k_{π} wzrasta wartość częstości drgań własnych, maleje maksymalna amplituda i poszerza się obszar rezonansowy. Krzywe na rysunkach 8-10 dotyczą częstości p wymuszenia zewnętrznego (36) mniejszej od 1.5 i nie obejmują drugiego obszaru rezonansowego.

Na rysunkach 11-13 naniesiono krzywe amplitudowo-częstościowe funkcji $y(4,t) - y(0,t)$ dla parametrów (35) modelu czterosegmentowego, rys. 5, dla $k_{\pi} = 0.01, 0.03, 0.1, 0.2$, $\beta_2 = 1.0$ oraz odpowiednio dla $c_2 = 0.5, 1.0, 2.0$. Krzywe te dotyczą $p \leq 4.0$ i w przypadku $c_2 = 0.5$ oraz $c_2 = 1.0$ obejmują zarówno pierwszy jak i drugi obszar rezonansowy. Z wykresów przedstawionych na rysunkach 11-13 wynika, że w zakresie pierwszego obszaru rezonansowego krzywe amplitudowo-częstościowe przy przyjętych wartościach prędkości fali c_2 niewiele różnią się od siebie przy ustalonej wartości k_{π} . Ponadto, ze wzrostem k_{π} zwiększa się wartość pierwszej częstości drgań własnych modelu czterosegmentowego, maleje amplituda w pierwszym rezonansie oraz następuje rozszerzenie obszaru rezonansowego. Amplitudy w drugim obszarze rezonansowym, zaznaczone na rys. 11 i rys. 12, są wielokrotnie mniejsze od amplitudy dla częstości wymuszenia zewnętrznego równej pierwszej częstości drgań własnych modelu czterosegmentowego,

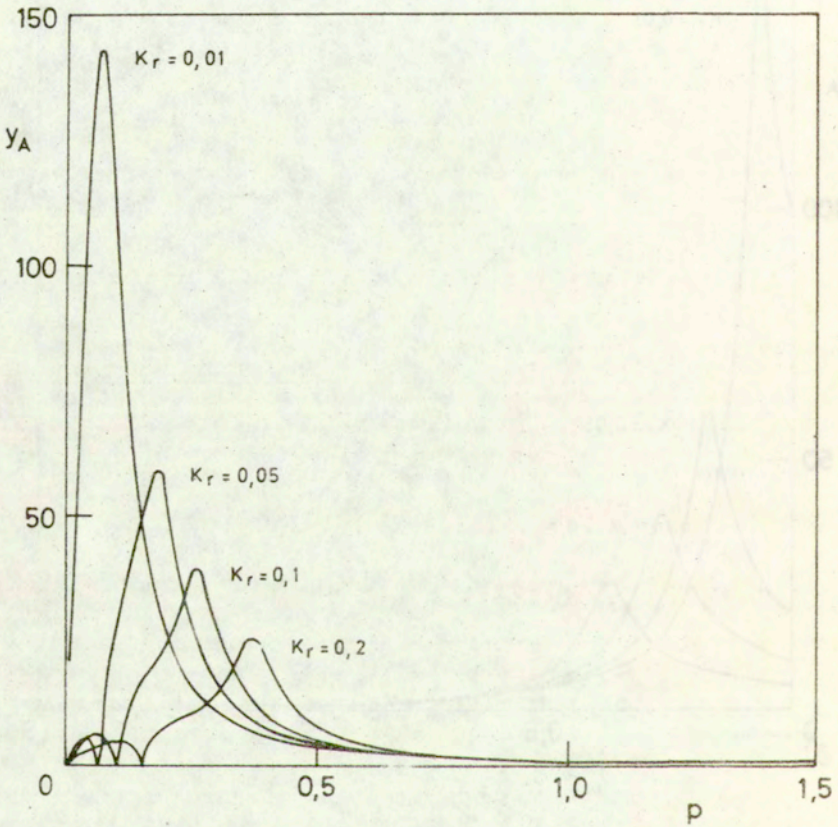
Z porównania wykresów na rysunkach 8-10 i na rys. 11-13 wynika, że przy przejściu od modelu dwusegmentowego do modelu czterosegmentowego następuje zwiększenie maksymalnej amplitudy przy ustalonej wartości k_{π} , zmniejszenie wartości pierwszej częstości drgań własnych oraz pewne zwięźlenie obszaru rezonansowego. Różnice pomiędzy amplitudami rezonansowymi maleją ze wzrostem parametru k_{π} , który jest stosunkiem masy pierwszego segmentu do masy m_0 , (22).



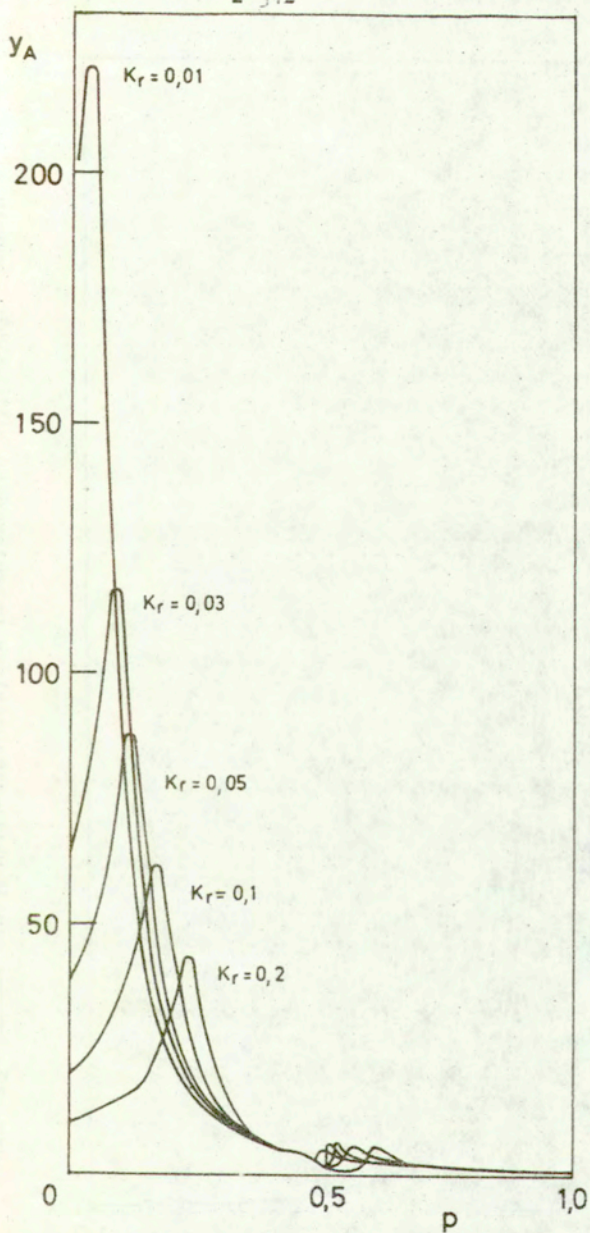
Rys. 8 Krzywe amplitudowo-częstościowe przemieszczeń $y(2,t) - y(0,t)$ modelu dwusegmentowego dla $\epsilon_v = 0,5$
 $\xi_v = 1,0$



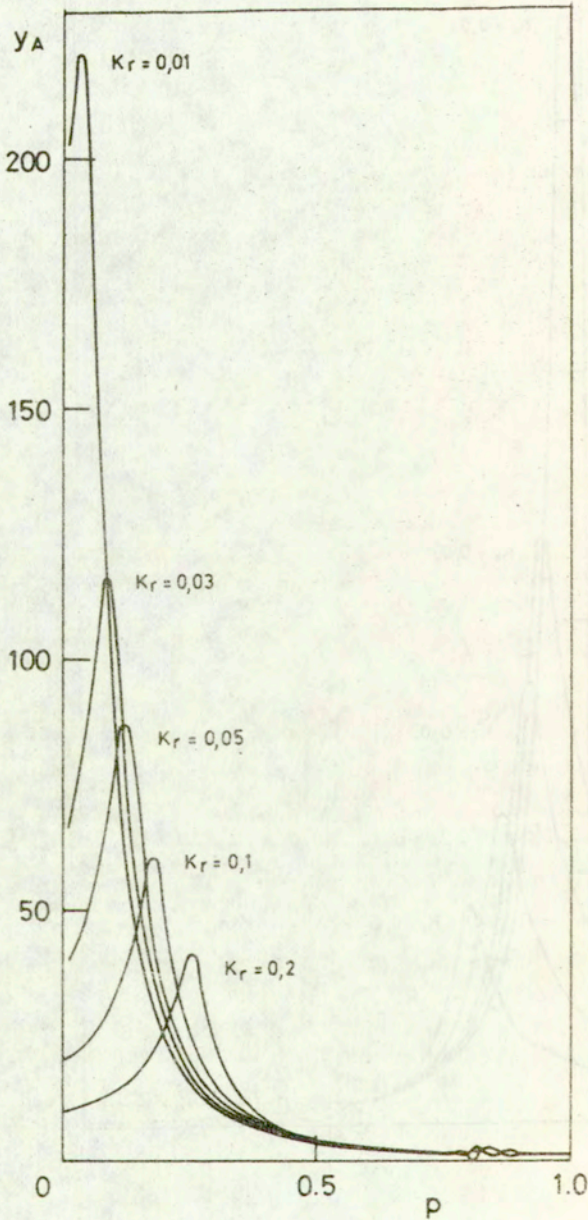
Rys. 9. Krzywe amplitudowo-częstotliwościowe przemieszczeń $y(2,t) - y(0,t)$ modelu dwusegmentowego dla $c_2 = 1,0$ $b_1 = 1,0$



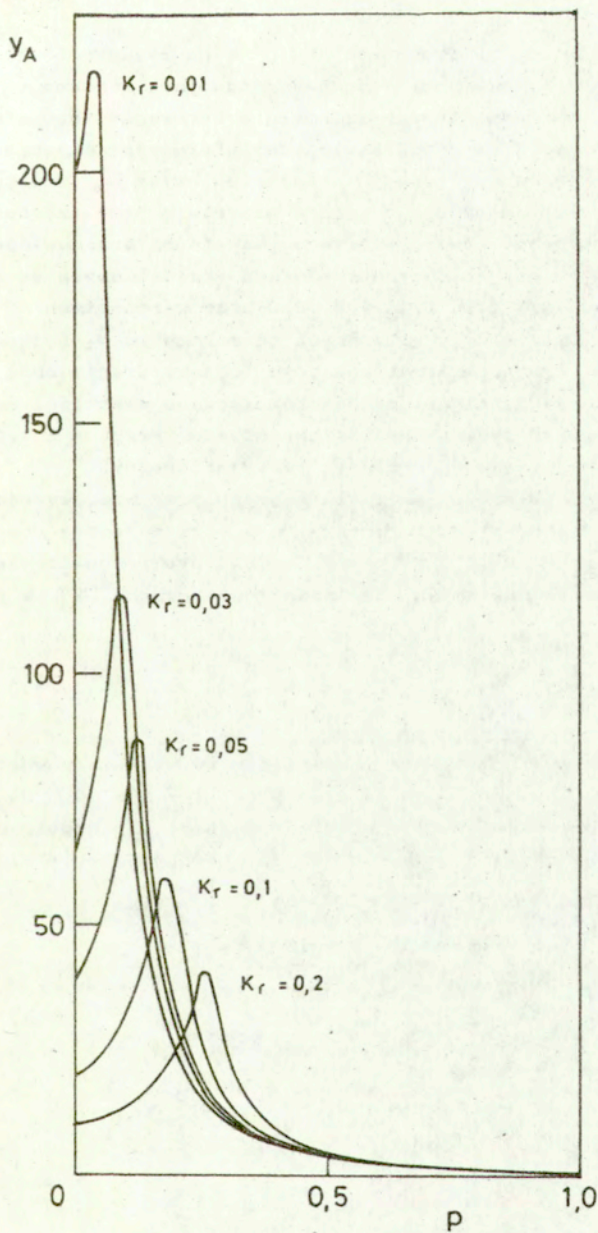
Rys. 10. Krzywe amplitudowo-częstościowe przemieszczeń $y_0^{(2,t)} - y_0^{(0,t)}$ modelu dwusegmentowego dla $c_1 = 2.0$
 $b_2 = 1.0$



Rys. 11. Krzywe amplitudowo-częstotliwościowe przemieszczeń $y^{(4,t)} - y(0,t)$ modelu cztero-segmentowego dla $c_1 = 0.5$, $b_1 = 1.0$.



rys. 12. Krzywe amplitudowo-częstotliwościowe przemieszczeń $y^{(4,t)} - y^{(0,t)}$ modelu czterosegmentowego dla $c_1 = 1.0$ i $b_1 = 1.0$



Rys. 13. Krzywe amplitudowo-częstościowe przemieszczeń $y(x,t) - y(0,t)$ modelu czterosegmentowego dla $c_1 = 2,0$ i $\theta_2 = 1,0$

Wykresy naniesione na rysunkach 8-10 i na rysunkach 11-13 wskazują na to, że krzywe amplitudowo-częstościowe zarówno w przypadku modelu dwusegmentowego i modelu czterosegmentowego mają podobny charakter i że najistotniejsze informacje dotyczące przemieszczeń bryły w_1 względem przemieszczeń bryły w_0 uzyskuje się w obszarach rezonansowych, a przede wszystkim przy częstości wymuszenia zewnętrznego równej pierwszej częstości drgań własnych.

W związku z tym, na kolejnych rysunkach przedstawione są amplitudy rezonansowe dla $c_2 = 0.5, 1.0, 2.0$ przy wartościach $K_r = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$ w zależności od parametru β_2 będącego ilorazem G_2 i G_1 . Przypomnieć trzeba, że β_2 jest drugim obok c_2 parametrem, w którym uwzględnione są zróżnicowane własności mechaniczne rozważanego dyskretno-ciągłego modelu. Przy $\beta_2 = 1.0$ i $c_2 = 1.0$ materiał segmentów modelu jest jednorodny.

Częstości drgań własnych ω_i , dla których przy $p = \omega_i$ wyznaczymy amplitudy w zależności od parametru β_2 , otrzymujemy z równania częstości. Równanie to w przypadku modelu dyskretno-ciągłego uzyskuje się przy poszukiwaniu rozwiązań równań ruchu (23) w postaci

$$y_i(x, t) = X_i(x) T(t) \quad (37)$$

dla warunków brzegowych (25) przy pominięciu wymuszenia zewnętrznego i tłumienia, tj. przy $\ddot{y}_0 = 0$ oraz przy $d_i = \mathcal{D}_i = 0$. Po dokonaniu szeregu przekształceń, równanie częstości dla modelu dwusegmentowego przedstawionego na rys. 4 jest następujące ($n = 2$)

$$\begin{aligned} & a_{44}(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}) - a_{43}(a_{11}a_{22}a_{34} + \\ & + a_{12}a_{24}a_{31} - a_{11}a_{24}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{34}) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

gdzie

$$a_{11} = K_{\pi}, \quad a_{12} = R_0 \omega,$$

$$a_{21} = \sin \omega, \quad a_{22} = \cos \omega, \quad a_{23} = -\sin \frac{\omega}{c_2}, \quad a_{24} = -\cos \frac{\omega}{c_2},$$

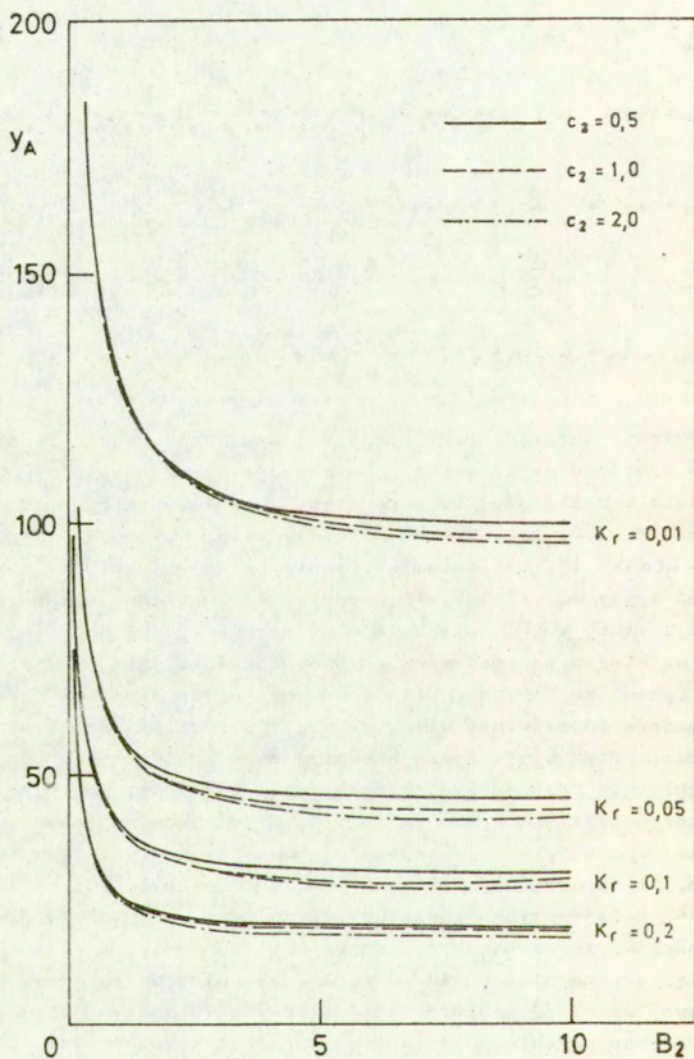
$$a_{31} = -\cos \omega, \quad a_{32} = \sin \omega, \quad a_{33} = \beta_2 \frac{1}{c_2} \cos \frac{\omega}{c_2}, \quad (39)$$

$$a_{34} = -\beta_2 \frac{1}{c_2} \sin \frac{\omega}{c_2}, \quad a_{43} = \beta_2 K_{\pi} \frac{1}{c_2} \cos 2 \frac{\omega}{c_2} - R_1 \omega \sin 2 \frac{\omega}{c_2},$$

$$a_{44} = -\beta_2 \frac{1}{c_2} K_{\pi} \sin 2 \frac{\omega}{c_2} - R_1 \omega \cos 2 \frac{\omega}{c_2}.$$

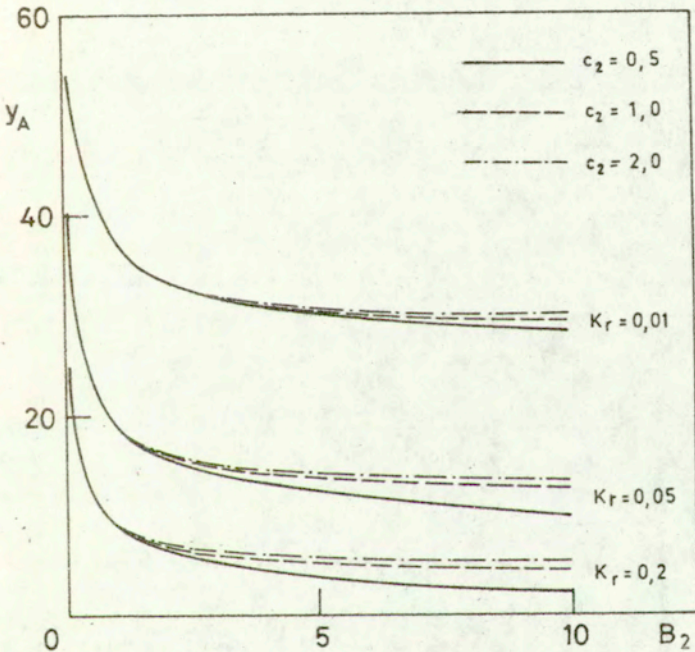
Wykresy amplitud przy częstotliwości wymuszenia zewnętrznego $p = \omega_1$, gdzie częstota drgań własnych otrzymuje się z równania (38), naniesiono w zależności od parametru $\beta_2 \in 10.0$ na rys. 14 dla $c_2 = 0.5, 1.0, 2.0$ przy $K_{\pi} = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$ dla funkcji $y(2,t) - y(0,t)$, tj. dla przemieszczenia bryły m_1 względem przemieszczeń bryły m_0 . Z rys. 14 wynika, że amplitudy rezonansowe funkcji $y(2,t) - y(0,t)$ nie zależą od prędkości fali c_2 dla $\beta_2 \leq 1$ przy ustalonym parametrze K_{π} . Równocześnie jest to uzasadnieniem faktu, że krzywe amplitudowo-częstotściowe na rysunkach 8-10 naniesione odpowiednio dla $c_2 = 0.5, 1.0, 2.0$ są praktycznie jednakowe. Przy $\beta_2 > 1$ można zauważyć niewielki wpływ prędkości na amplitudy rezonansowe przemieszczeń bryły m_1 względem przemieszczeń bryły m_0 . Dla każdego K_{π} największe amplitudy występują dla $c_2 = 0.5$, a najmniejsze dla $c_2 = 2.0$. Z rys. 14 wynika ponadto, że bardzo duży wpływ na amplitudy ma parametr K_{π} . Ze wzrostem K_{π} maleją szybko amplitudy, przy czym dla każdej przyjętej wartości K_{π} ze wzrostem β_2 krzywe amplitud przy $\beta_2 < 1.0$ szybko maleją, w przedziale $\beta_2 \in (1, 3)$ względnie wolno zmieniają się nieliniowo, by dla $\beta_2 > 3.0$ przyjąć praktycznie stałą wartość.

Podobny przebieg mają krzywe amplitud rezonansowych przemieszczeń bryły m_1 , tj. funkcji $y(2,t)$, w zależności od parametru β_2 naniesione na rys. 15 dla $K_{\pi} = 0.01, 0.05, 0.2$ i dla $c_2 = 0.5, 1.0, 2.0$. W przypadku funkcji $y(2,t)$ największe amplitudy wystę-



Rys. 14. Amplitudy rezonansowe przemieszczeń $y(1,t) - y(0,t)$ dwusegmentowego modelu

pują przy $c_1 = 2,0$, a najmniejsze przy $c_1 = 0,5$. Z porównania wykresów na rys. 14 z odpowiednimi wykresami na rys. 15 wynika, że amplitudy rezonansowe przemieszczeń bryły w_4 są dużo mniejsze od odpowiednich amplitud przemieszczenia tej bryły względem przemieszczenia bryły w_0 w całym rozważanym przedziale zmienności parametru B_2 .



Rys. 15. Amplitudy rezonansowe przemieszczeń $y(2,t)$ dwusegmentowego modelu

Analogiczną dyskusję amplitud rezonansowych przeprowadzono w przypadku modelu czterosegmentowego, rys. 5. Obecnie równanie częstości otrzymuje się poszukując rozwiązań równań ruchu (23) w postaci (37) dla $n = 4$ i przy pominięciu tłumienia i obciążenia zewnętrznego w warunkach brzegowych (25). Przy uwzględnieniu (30) równanie to jest następujące

$$(a_{88}a_{77} - a_{87}a_{78})S_1 + (a_{87}a_{66} - a_{86}a_{67})S_2 = 0, \quad (40)$$

gdzie:

$$a_{11} = k_{\pi}, \quad a_{12} = \omega k_0,$$

$$a_{21} = \sin \omega, \quad a_{22} = \cos \omega, \quad a_{23} = -\sin \frac{\omega}{c_2}, \quad a_{24} = -\cos \frac{\omega}{c_2},$$

$$a_{31} = -\cos \omega, \quad a_{32} = \sin \omega, \quad a_{33} = b_2 \frac{1}{c_2} \cos \frac{\omega}{c_2},$$

$$a_{34} = -b_2 \frac{1}{c_2} \sin \frac{\omega}{c_2},$$

$$a_{43} = \sin 2 \frac{\omega}{c_2}, \quad a_{44} = \cos 2 \frac{\omega}{c_2}, \quad a_{45} = -\sin 2\omega, \quad a_{46} = -\cos 2\omega,$$

$$a_{53} = -b_2 \frac{1}{c_2} \cos 2 \frac{\omega}{c_2}, \quad a_{54} = b_2 \frac{1}{c_2} \sin 2 \frac{\omega}{c_2},$$

$$a_{55} = \cos 2\omega, \quad a_{56} = -\sin 2\omega,$$

(41)

$$a_{65} = \sin 3\omega, \quad a_{66} = \cos 3\omega,$$

$$a_{67} = -\sin 3 \frac{\omega}{c_2}, \quad a_{68} = -\cos 3 \frac{\omega}{c_2},$$

$$a_{75} = -\cos 3\omega, \quad a_{76} = \sin 3\omega, \quad a_{77} = b_2 \frac{1}{c_2} \cos 3 \frac{\omega}{c_2}, \quad a_{78} = -b_2 \frac{1}{c_2} \sin 3 \frac{\omega}{c_2},$$

$$a_{87} = k_{\pi} b_2 \frac{1}{c_2} \cos 4 \frac{\omega}{c_2} - \omega k_0 \sin 4 \frac{\omega}{c_2},$$

$$a_{88} = -k_{\pi} b_2 \frac{1}{c_2} \sin 4 \frac{\omega}{c_2} - \omega k_0 \cos 4 \frac{\omega}{c_2},$$

$$S_1 = (a_{66}a_{55} - a_{65}a_{56})S_3 + (a_{65}a_{46} - a_{66}a_{45})S_4,$$

$$S_2 = (a_{36}a_{55} - a_{35}a_{56})S_3 + (a_{35}a_{46} - a_{36}a_{45})S_4,$$

$$S_3 = a_{44}S_5 - a_{43}S_6,$$

$$S_4 = a_{54}S_5 - a_{53}S_6,$$

$$S_5 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

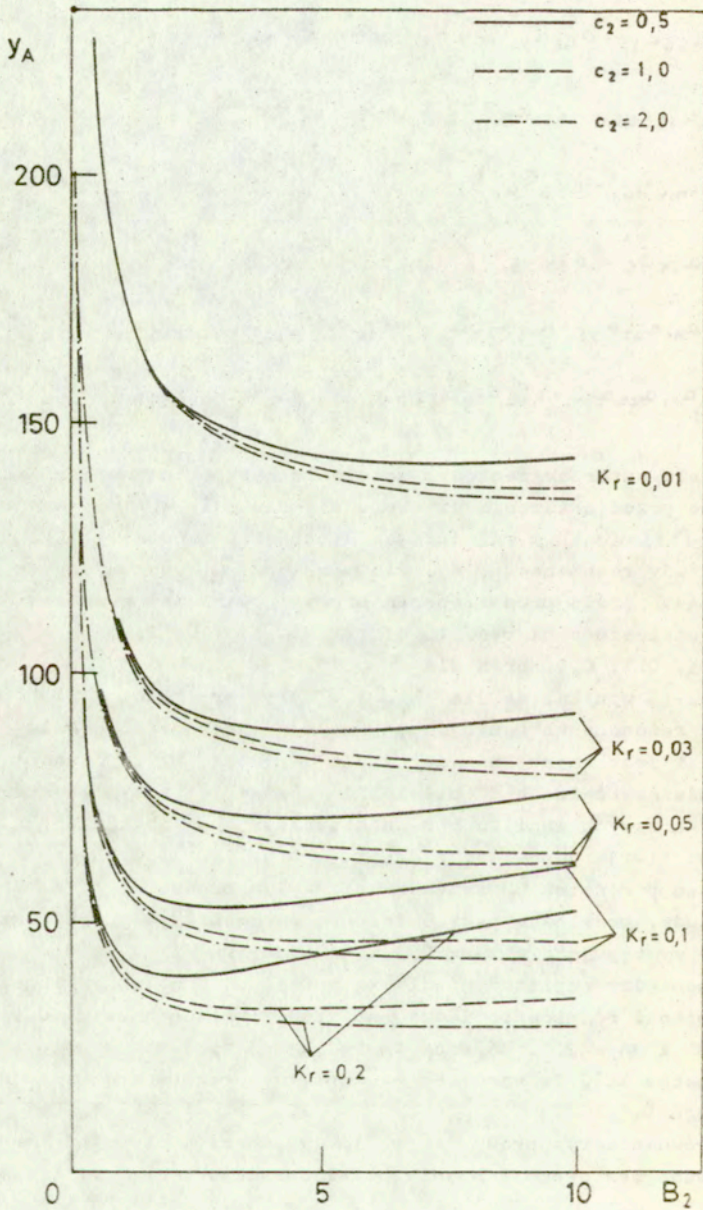
$$S_6 = a_{11}a_{22}a_{34} + a_{12}a_{24}a_{31} - a_{11}a_{24}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{34}.$$

W modelu czterosegmentowym położenie masy m_1 odpowiada $x = 4$, wobec tego przemieszczenia uzyskano dla funkcji $y(4,t)$ bądź funkcji $y(4,t) - y(0,t)$ uwzględniając wartości parametrów (35).

Amplitudy rezonansowe, tj. dla $p = \omega_1$ przy ω_1 wyznaczonym z równania (40), dla przemieszczeń bryły m_1 względem przemieszczeń bryły m_0 naniesiono na rys. 16 dla $c_2 = 0.5, 1.0, 2.0$, $k_r = 0.01, 0.03, 0.05, 0.1, 0.2$ oraz dla $\beta_2 \in 10$.

Z rys. 16 wynika, że dla $\beta_2 \in 1.0$ wpływ prędkości fali c_2 na amplitudy rezonansowe funkcji $y(4,t) - y(0,t)$ jest niezauważalny dla $k_r \in 0.05$ i jest raczej niewielki dla $k_r = 0.1, 0.2$. Uzasadnione są więc niezauważalne bądź niewielkie różnice w maksymalnych amplitudach krzywych amplitudowo-częstościowych przedstawionych na rysunkach 11-13 odpowiednio dla $c_2 = 0.5, 1.0, 2.0$. Natomiast ze wzrostem parametru β_2 zwiększa się wpływ prędkości c_2 na badane amplitudy, przy czym przy ustalonym parametrze k_r największe amplitudy występują dla $c_2 = 0.5$ a najmniejsze dla $c_2 = 2.0$. Różnice pomiędzy amplitudami dla $c_2 = 0.5$ i $c_2 = 1.0$ są znacznie wyższe aniżeli różnice pomiędzy amplitudami rezonansowymi dla $c_2 = 1.0$ i $c_2 = 2.0$. Różnice te zwiększają się ze wzrostem β_2 i ze wzrostem k_r . Ze wzrostem k_r amplitudy rezonansowe maleją dla każdego β_2 .

Z porównania rysunków 14 i 16 wykonanych odpowiednio dla modelu dwusegmentowego i modelu czterosegmentowego, rys. 4 i 5

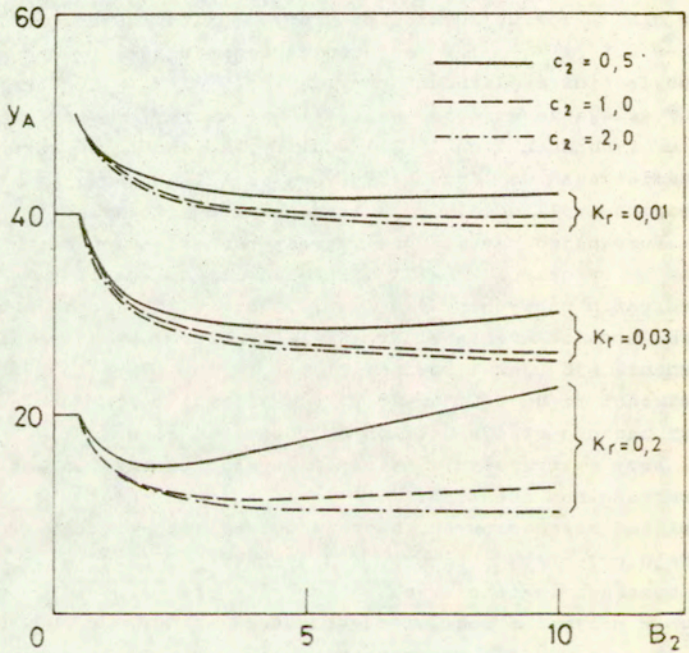


Rys. 16. Amplitudy rezonansowe przemieszczeń $y^{(1,t)} - y^{(0,t)}$ czterosegmentowego modelu

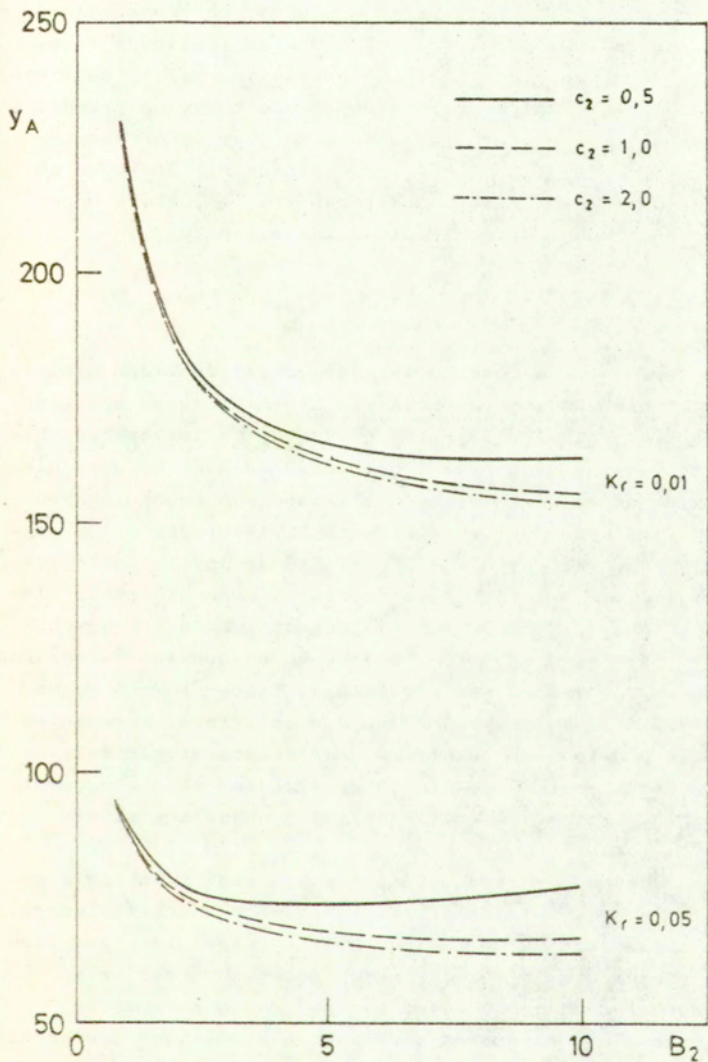
wynika, że przy zwiększonej liczbie segmentów nie tylko występują wyższe amplitudy rezonansowe, ale również amplitudy te są bardziej wrażliwe na zmianę prędkości c_2 , szczególnie w przypadku $c_1 = 0.5$.

Amplitudy rezonansowe dla przemieszczeń bryły m_1 , tj. dla funkcji $y_1(y, t)$, przedstawione są na rys. 17 dla $K_* = 0.01, 0.03, 0.2$ i $c_1 = 0.5, 1.0, 2.0$. Zauważyć można, że podobnie jak w przypadku amplitud przemieszczeń względnych, wpływ c_2 zwiększa się ze wzrostem b_2 , amplitudy są największe dla $c_1 = 0.5$ a najmniejsze dla $c_1 = 2.0$, różnice pomiędzy amplitudami rezonansowymi przy $c_1 = 0.5$ i $c_1 = 1.0$ są dużo większe aniżeli różnice pomiędzy odpowiednimi amplitudami przy $c_1 = 1.0$ i $c_1 = 2.0$ oraz że amplitudy maleją ze wzrostem wartości parametru K_* . Porównując wykresy na rysunkach 16 i 17 widzimy, że amplitudy rezonansowe przemieszczeń względnych bryły m_1 są kilkakrotnie wyższe od odpowiednich amplitud dla przemieszczeń bezwzględnych.

Porównując odpowiednie wykresy naniesione na rysunkach 8-13 oraz na rysunkach 14-17 można zauważyć pewne różnice w amplitudach rezonansowych przy $b_2 = 1.0$. Różnice te wynikają z uzyskiwanych wartości częstości drgań własnych przy wykorzystaniu zarówno równania (38) jak i równania (40), które różnią się zaledwie o wielkości rzędu 0.01 czy 0.02 od wartości rezonansów otrzymywanych przy badaniu stanów ustalonych rozwiązań równań (29) i równań (31) tj. przy wykorzystaniu metody falowej. Jednakże znikome różnice w wartościach częstości mogą dawać istotne różnice w wartościach amplitud rezonansowych. Jest to szczególnie widoczne w przypadku modelu czterosegmentowego, gdzie krzywe amplitudowo-częstościowe w obszarach rezonansowych są bardziej strome od odpowiednich krzywych w przypadku modelu dwusegmentowego, por. rys. 8-10 i rys. 11-13. Ze względu na czasochłonność wyznaczania rezonansów według metody falowej, ograniczono się do określenia "poprawionych" rezonansów dla $K_* = 0.01$ i $K_* = 0.05$, oraz dla $c_1 = 0.5, 1.0, 2.0$. w przypadku względnych przemieszczeń bryły m_1 . Krzywe amplitud w tych rezonansach w zależności od b_2 naniesiono na rys. 18. Z porównania wykresów na rysunkach 16 i 18 wynika, że poprawienie wartości pierwszej częstości drgań własnych jest istotne jedynie przy $K_* = 0.01$, gdyż wtedy amplitudy są znacznie wyższe niż przy uwzględnieniu częstości obliczonej na podstawie równania (40).



Rys. 17. Amplitudy rezonansowe przemieszczeń $y(\nu, t)$ czterosegmentowego modelu



Rys. 18. Amplitudy przemieszczeń $y^{(k)}(t) - \chi^{(k)}(t)$ czterosegmentowego modelu dla częstotliwości rezonansowych uzyskanych metodą falową

Wiąże się to z dużo szybszymi zmianami amplitud w obszarze rezonansowym przy $K_* = 0.01$ aniżeli przy $K_* = 0.05$, por. rys. 11-13. Wnioski dotyczące wpływu parametrów c_1 i K_* na amplitudy rezonansowe, które mogą być wyciągnięte na podstawie rys. 18 pokrywają się z wnioskami sformułowanymi na podstawie krzywych przedstawionych na rys. 16. Wobec tego, uzasadnionym jest wykorzystywanie równań częstości (38) lub (40) przy wyznaczeniu krzywych amplitud rezonansowych w zależności od parametru b_2 , które mogą być pomocne przy dyskusji przemieszczeń turbozespołu.

5. Zakończenie

W pracy zaproponowano model dyskretno-ciągły do badań dynamicznych turbozespołu poddanego wymuszeniu kinematycznemu wywołanemu falami poprzecznymi. W modelu tym przyjęto, że turbozespół nie jest posadowiony bezpośrednio na fundamencie lecz na pewnych elementach sprężystych o zróżnicowanych własnościach mechanicznych. Rozważany model złożony jest więc z dwóch brył sztywnych i z segmentów sprężystych, z których każdy jest jednorodny i izotropowy lecz segmenty te mogą się różnić własnościami mechanicznymi. Elementy sprężyste modelu doznają jedynie odkształceń ścinających.

Do dyskusji dyskretno-ciągłego modelu zaproponowano metodę falową, w której wykorzystuje się rozwiązania falowe równań ruchu i która prowadzi do rozwiązywania równań z odchylonym argumentem typu neutralnego. Metoda ta pozwala wyznaczać przemieszczenia, prędkości i odkształcenia w dowolnych przekrojach modelu w dowolnej chwili czasu zarówno w stanie nieustalonym jak i w stanie ustalonym.

W obliczeniach numerycznych skoncentrowano się na analizie modelu dwusegmentowego i modelu czterosegmentowego z naprzemiennymi własnościami mechanicznymi segmentów. Dyskusję przemieszczeń turbozespołu reprezentowanego w rozważanych modelach przez bryłę sztywną m_1 , przeprowadzono w zależności od dwóch parametrów uwzględniających różne własności mechaniczne segmentów: prędkości fali c_1 i stosunku modułów ścinania kolejnych segmentów b_2 , oraz w zależności od parametru K_* będącego stosunkiem masy dolnego segmentu do masy fundamentu m_0 .

Wyznaczone krzywe amplitudowo-częstościowe i krzywe amplitud przy częstotliwości wymuszenia równej częstotliwości drgań własnych dają ponadto informacje odnośnie położenia i występowania niebezpiecznych stanów rezonansowych oraz odnośnie występowania drgań o stosunkowo małych amplitudach. Informacje te mogą okazać się bardzo pomocne przy opracowywaniu wytycznych dotyczących posadowienia turbozespołu nie bezpośrednio na fundamencie lecz przy zastosowaniu elementów sprężystych o zasugerowanych własnościach mechanicznych.

Literatura

- 1 N.M.Newmark, R.Rosenblueth, Fundamentals of earthquake engineering, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1971
- 2 S.Okamoto, Introduction to earthquake engineering, University of Tokyo Press, 1973
- 3 J.Solnes, Engineering seismology and earthquake engineering Noordhoff-Leiden 1974
- 4 G.C.Hart, R.Vasudevan, Earthquake Design of Buildings: Damping, Journal of the Structural Division, Vol. 101, No.ST 1, 1975 11-30
- 5 J.A.Blume, Hi-Rise Building Characteristics and Responses Determined from Nuclear Seismology, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 62, No 2, Apr. 1972, 519-540
- 6 J.G.Bouwkamp, J.K.Blohm, Dynamic Response of a Two-Story Steel Frame Structure, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol 56, No 6, Dec 1963, 1289-1303
- 7 R.E.Englekirk, R.B.Matthiesen, Forced Vibration of an Eight-Story Reinforced Concrete Building, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 57, No 3, June 1967, 421-436
- 8 J.E.Goldberg, J.L.Bogdanoff, Z.L.Moh, Forced Vibration and Natural Frequencies of Building Frames, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 49, No.1, 1959, 33-47
- 9 D.E.Hudson, Resonance Testing of Full-Scale Structures, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 90, No EM3, Proc.Paper 3923, June, 1964, 1-19
- 10 W.C.Hurty, M.Rubinstein, Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1964
- 11 L.S.Jacobsen, Steady Forced Vibration as Influenced by Damping, Transactions American Society of Mechanical Engineers, APM-52-13, 1930, 169-181
- 12 K.Kanai, Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground, Bull. Earthquake Research Institute 35, 307, Tokyo, 1957

- 13 K.Kanai, An empirical formula for the spectrum of strong earthquake motions, Bull. Earth. Res. Inst., 39, 85, Tokyo 1961
- 14 G.W.Housner, Behaviour of structures during earthquakes, Proc. ASCE, Journal of Eng. Mech. Div., 85, 109, 1959
- 15 J.L.Beck, P.C.Jennings, Structural identification using linear models and earthquake records, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 8, 145-160, 1980
- 16 J.L.Sackman, J.M.Kelly, Seismic analysis of internal equipment and components in structures, Eng. Struct., 1, 179-190, 1979
- 17 J.A.Morrison, Wave propagation in rods of Voigt material and visco-elastic materials with three parameter models, Quart. Appl. Math., 14, 153-169, 1956
- 18 A.Pielorz, Application of wave method in investigation of drive systems, comparisons with other methods, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 26, 97-112, 1988
- 19 W.Nadolski, A.Pielorz, Shear waves in buildings subject to seismic loading, Building and Environment, 16, 279-285, 1980
- 20 W.Nadolski, Application of wave method in investigations of single gear transmission, Ingenieur Archiv, 58, 329-338, 1988
- 21 W.Nadolski, Dynamic investigations of single gear transmission taking into account microcracks, Ingenieur Archiv, 59, 362-370, 1989
- 22 W.Nadolski, A.Pielorz, Wykorzystanie skrętnych fal sprężystych w badaniach dynamicznych napędu dwumasowego z wielostopniowym wałem i z uwzględnieniem tłumienia, Archiwum Budowy Maszyn, 30, 173-186, 1983

Spis treści

1. Wstęp	3
2. Model o jednym stopniu swobody	4
3. Model dyskretno-ciągły	10
4. Analiza numeryczna modelu dyskretno-ciągłego	20
5. Zakończenie	44
Literatura	45



56736