

- 3. — dynamika i drgania
- 3.4. — fale w cieczech stałych
i elementach konstrukcyjnych
- 5.1. — sprężystość
- 5.13. — ustroje linowe, prętowe i belkowe

W. Nadolski, A. Pielorz

**DYNAMICZNA ANALIZA PRĘTÓW
KRATOWNICY PRZY WYKORZYSTANIU
FAL PODŁUŻNYCH**

35/1994

W A R S Z A W A 1 9 9 4

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 października 1994 r.



56614



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 2,75 Ark. druk. 3,40
Oddano do drukarni w listopadzie 1994 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul. Jasna 1

Władysław Nadolski
Amalia Pielorz
Ośrodek Mechaniki IPPT PAN
Samodzielna Pracownia
Dynamiki Stosowanej

**DYNAMICZNA ANALIZA PRĘTÓW KRATOWNICY
PRZY WYKORZYSTANIU FAL PODŁUŻNYCH**

Streszczenie

Praca dotyczy badań dynamicznych płaskiej kratownicy, w której pręty poddawane są tylko rozciąganiu i ścisaniu, przy wykorzystaniu modeli dyskretno-ciągłych. Przyjęto, że wymuszeniem zewnętrznym jest siła o zmiennej częstotliwości przyłożona do bryły sztywnej w jednym z węzłów kratownicy. W rozważaniach wykorzystano metodę falową, która pozwala wyznaczać przemieszczenia, odkształcenia i prędkości w dowolnych przekrojach poprzecznych prętów kratownicy w dowolnej chwili czasu. Obliczenia numeryczne wykonano dla dwóch prostych dyskretno-ciągłych modeli płaskiej kratownicy, zarówno w stanie ruchu ustalonego jak i w stanie ruchu nieustalonego.

1. Wstęp.

W ramach podstawowych problemów dynamicznych obiektów inżynierskich, dotyczących zarówno ich projektowania jak i eksploatacji, należy wyróżnić grupę problemów dynamicznych związanych z badaniami wpływu różnych wymuszeń oddziaływujących na obiekty, które stanowią kratownice lub w skład których wchodzi kratownice.

W rzeczywistych kratownicach szczególną cechą zjawisk dynamicznych jest występowanie w prętach kratownic głównie odkształceń podłużnych i w mniejszym stopniu odkształceń skrętno-giętnych, [1-3].

Na wielkość i charakter odkształceń prętów kratownic wpływają wszelkie oddziaływania dynamiczne generowane przez różne źródła wymuszeń bezpośrednich i pośrednich.

Do oddziaływań bezpośrednich zaliczamy oddziaływania od źródeł wymuszeń bezpośrednio związanych z kratownicą. Szereg zaburzeń wynika z samych warunków pracy np. układu napędowego współpracującego z kratownicą w czasie procesu przyśpieszania i hamowania. Jako obiekty inżynierskie poddane obciążeniom bezpośrednim należy wymienić mosty przeładunkowe, wieże wyciągowe, dźwigi samojezdne i sunnice. Oddzielną grupę bezpośrednich wymuszeń stanowią wymuszenia wywołane przez pojazdy samochodowe i szynowe przemieszczające się przez mosty drogowe czy kolejowe. W tym przypadku jedną z najprostszych przyczyn zaburzeń stanowią odśrodkowe siły bezwładności kół pojazdów jednośladowych i dwuśladowych. Do wymuszeń bezpośrednich zaliczamy również wymuszenia kinematyczne wynikające z nierównomierności powierzchni mostu drogowego, niedokładności technologicznych i montażowych toru na moście kolejowym. Do omawianych źródeł wymuszeń bezpośrednich należy zaliczyć również wymuszenia wywołane wiatrem, zwłaszcza typu impulsowego, wichury, huragany, tajfuny czy też cyklony.

Do oddziaływań pośrednich zaliczamy oddziaływania od źródeł wymuszeń zewnętrznych znajdujących się poza otoczeniem kratownic. Do oddziaływań pośrednich zaliczamy również

oddziaływania maszyn i urządzeń technicznych pracujących w sąsiedztwie kratownic oraz oddziaływania ruchu kołowego i szynowego.

Wymienione źródła wymuszeń na ogół są nieregularne w czasie, o skończonej liczbie częstości wymuszeń i skończonych amplitudach. W przypadku źródeł oddziaływań pośrednich przekazujących energię za pomocą fal przez grunt do otoczenia kratownicy, problem wymuszeń jest skomplikowany. Nadal brak wypracowanych modeli źródeł wymuszeń, charakterystyk zarówno statycznych jak i dynamicznych gruntu, oraz brak zadawalających danych odnośnie oporów powierzchni ziemi, [4].

Przy wyżej wymienionych źródłach wymuszeń powstają drgania, które w warunkach rezonansowych zwykłych i parametrycznych powodują niebezpieczne stany, przy których możliwe jest narastanie przemieszczeń, odkształceń i prędkości dowolnych przekrojów prętów i węzłów kratownicy. Stany rezonansowe mogą występować w bardzo krótkich lub w długich przedziałach czasu. W przypadku pierwszym występują one zwykle przy wymuszeniach typu impulsowego, jak również przy uruchamianiu względnie przy bardzo zróżnicowanych obrotach wirników maszyn współpracujących z kratownicą. Występują one również przy wymuszeniach kinematycznych powstałych na wskutek nierównomiernej powierzchni np. mostu drogowego jak również przy wstrząsach sejsmicznych przekazywanych za pomocą fal. Drugi przypadek stanów rezonansowych występuje zwykle przy stałych wymuszeniach zewnętrznych, przy których częstość wymuszenia pokrywa się względnie jest bliska częstości drgań własnych kratownicy poddanej wymuszeniu zewnętrznemu. Pierwszy przypadek jest trudny do uniknięcia zarówno w warunkach eksploatacyjnych jak i sejsmicznych. Wobec tego żądamy, aby model samej kratownicy lub model kratownicy uwzględniający elementy układu napędowego był mało wrażliwy na drgania zwłaszcza w czasie trwania stanów rezonansowych. To znaczy, aby obszary rezonansowe były możliwie małe przynajmniej przy dwóch pierwszych częstościach drgań własnych.

Dotychczasowe badania związane z wyznaczaniem odkształceń prętów i przemieszczeń węzłów kratownicy ograniczają się głównie do statyki. Dotyczą one badań zarówno kratownicy statycznie

wyznaczalnej jak i statycznie niewyznaczalnej i legitymują się bardzo bogatą literaturą i długotrwałą tradycją, [1-3,5-10]. Natomiast badania dynamiczne kratownic, jak wynika z literatury, są ciągle w stadium początkowym, [1,2,11]. W zasadzie badania te dotyczą wyznaczania częstości drgań własnych prostych układów prętowych, [2,11], oraz oszacowania współczynnika dynamicznego, który jest większy lub równy jedności i stosowany jest w normach, np. w Polskiej Normie PN-85/S-10030 w przypadku kratownic wchodzących w skład mostu kolejowego, [1]. Pewne próby opisu ruchu układów prętowych podjęto w [3] bez podania jakichkolwiek przykładów.

Należy wspomnieć, że doświadczalne badania dynamiczne kratownic ograniczają się głównie do wzbudzania drgań w kratownicach za pomocą pulsatorów, odpalania rakiet czy też uderzania bryłą powierzchni mostu drogowego lub kolejowego, [1].

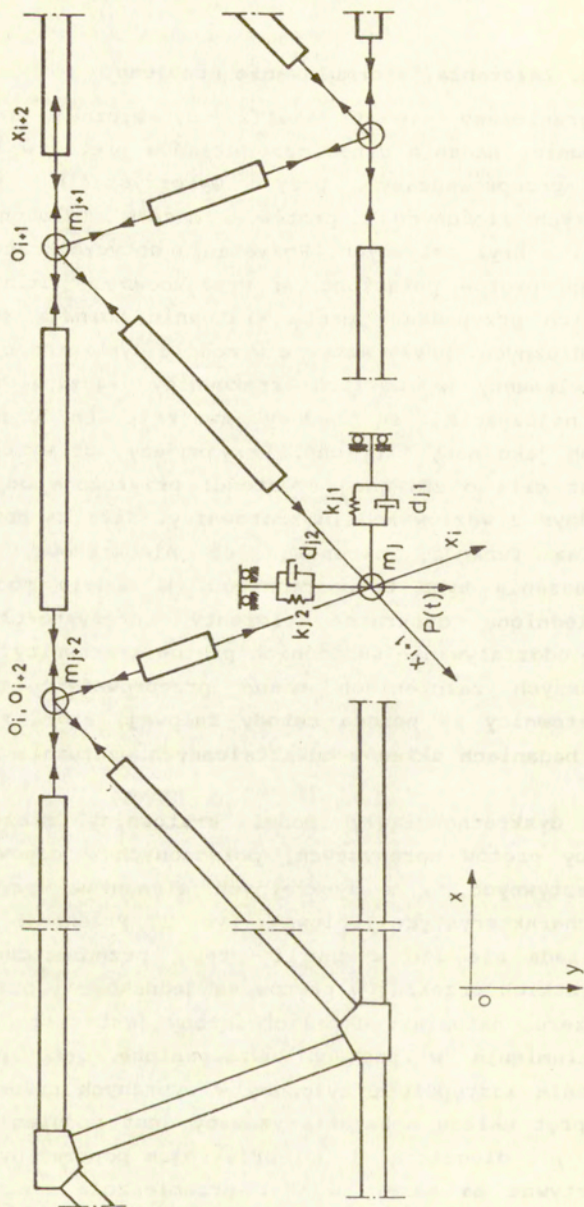
Celem prezentowanej pracy jest przedstawienie możliwości przeprowadzania badań dynamicznych kratownicy za pomocą modelu dyskretno-ciągłego, w którym masy prętów kratownicy rozłożone są w sposób ciągły. Zakłada się, że końce prętów połączone są w węzłach przegubowo z pominięciem tarcia, tj. że pręty te doznają jedynie odkształceń wzdłużnych. Przyjmuje się, że wymuszeniem zewnętrznym jest siła o zmiennej częstości przyłożona do bryły sztywnej w jednym z węzłów kratownicy. W dyskusji wykorzystuje się metodę falową, która pozwala wyznaczać przemieszczenia, odkształcenia i prędkości w dowolnych przekrojach prętów kratownicy i w dowolnej chwili czasu. Efektywność metody falowej przedstawiono na przykładzie dwóch modeli dyskretno-ciągłych fragmentu płaskiej kratownicy.

2. Założenia, sformułowanie problemu.

W pracy ograniczamy się do analizy dynamicznej prostych płaskich kratownic. Badania dynamiczne układów prętów w takich kratownicach przeprowadzamy przy wykorzystaniu modeli dyskretno-ciągłych złożonych z prętów o masach rozłożonych w sposób ciągły i z brył sztywnych. Rozważania dotyczą kratownic, w których końce prętów połączone są przegubowo z pominięciem tarcia. W takich przypadkach pręty kratownic doznają jedynie odkształceń wzdłużnych. Bryły sztywne w modelu dyskretno-ciągłym reprezentują elementy w węzłach kratownicy łączące pręty. Elementy te najczęściej są budowy zwartej, co uzasadnia traktowanie ich jako masy skupione. Przyjmujemy, że wymuszenie zewnętrzne jest siłą o zmiennej częstotliwości przyłożoną do bryły sztywnej w jednym z węzłów modelu kratownicy. Siła ta może być opisana dowolną funkcją, okresową lub nieokresową, i ma charakter wymuszenia typu bezpośredniego. W modelu mogą być również uwzględnione dyskretnie elementy sprężysto-tłumiące reprezentujące oddziaływanie sąsiednich prętów kratownicy.

Przy powyższych założeniach można przeprowadzić analizę dynamiczną kratownicy za pomocą metody falowej, która została wypróbowana w badaniach układów odkształcanych wzdłużnie m. in. w [12-15].

Rozpatrzmy dyskretno-ciągły model kratownicy złożony z dowolnej liczby prętów sprężystych, połączonych z odpowiednią liczbą brył sztywnych, i z dyskretnych elementów sprężysto-tłumiących o charakterystyce liniowej, rys. 1. Przekroje prętów są stałe. Zakłada się, że w chwili $t=0$ przemieszczenia i prędkości wszystkich przekrojów prętów są jednakowe i przyjmuje się je równe zero, natomiast układ obciążony jest siłą $P(t)$. Rzeczywiste tłumienie w prętach uwzględnione jest poprzez liniowe tłumienie zastępcze przyłożone w wybranych przekrojach prętów. I -ty pręt układu scharakteryzowany jest modulem Younga E , gęstością ρ , długością l_i i przekrojem poprzecznym A . J -ta bryła sztywna ma masę m_j i przemieszcza się ruchem płaskim.



Rys. 1. Dyskretno-ciągły model płaskiej kratownicy

Do opisu modelu dyskretno-ciągłego wykorzystujemy stały układ odniesienia Oxy oraz jednowymiarowe układy współrzędnych O_1x_1 przyporządkowane poszczególnym i-tym prętom. Początek układu O_1x_1 pokrywa się z jednym z końców i-tego pręta w stanie niezaburzonym w chwili początkowej $t=0$. W związku z tym, przemieszczenie przekroju x_1 i-tego pręta reprezentuje funkcja $u_1(x_1, t)$ zależna od położenia rozpatrywanego przekroju i od czasu, natomiast składowymi przemieszczenia j-tej bryły sztywnej umieszczonej w j-tym węźle, odpowiednio w kierunku osi x i osi y, są funkcje $U_j(t)$ i $V_j(t)$ zależne od czasu.

Przy przyjętych założeniach równaniem ruchu i-tego pręta jest klasyczne równanie falowe

$$\frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x_1 < l_1 \quad (1)$$

gdzie $a^2 = E/\rho$.

Równania ruchu z tłumieniem rozłożonym w sposób ciągły prawdopodobnie dokładniej opisywałyby ruch układów prętów w kratownicy. Jednakże brak w literaturze efektywnych metod rozwiązywania takich równań w przypadku modeli dyskretno-ciągłych. Ponadto, w pracy [16] w przypadku prostego układu mechanicznego pokazano, że po krótkim przedziale czasu rozwiązanie równania z tłumieniem rozłożonym w sposób ciągły pokrywa się z rozwiązaniem dla klasycznego równania falowego z zastępczym tłumieniem uwzględnionym w warunkach brzegowych.

Przy rozwiązywaniu konkretnych przykładów do równań (1) należy dołączyć warunki początkowe

$$u_1(x_1, 0) = \frac{\partial u_1(x_1, 0)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

oraz odpowiednie warunki brzegowe.

Warunki brzegowe są bądź warunkami zgodności przemieszczeń bądź warunkami dla sił działających w kolejnych węzłach modelu kratownicy, które otrzymujemy z zasady d'Alemberta analogicznie jak w przypadku układów odkształczanych wzdłużnie rozpatrywanych w [12-15]. Ostatnie warunki, przykładowo dla j-tego węzła

dwuprętowego mogą mieć postać

$$\begin{aligned}
 a_{1j} \frac{d^2 U_j}{dt^2} + a_{2j} \frac{dU_j}{dt} + a_{3j} U_j + a_{4j} \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial x_1 \partial t} + a_{5j} \frac{\partial u_{1j}}{\partial x_1} + \\
 + a_{6j} \frac{\partial^2 u_{1+1}}{\partial x_{1+1} \partial t} + a_{7j} \frac{\partial u_{1+1}}{\partial x_{1+1}} = 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{1j} \frac{d^2 V_j}{dt^2} + b_{2j} \frac{dV_j}{dt} + b_{3j} V_j + b_{4j} \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial x_1 \partial t} + b_{5j} \frac{\partial u_{1j}}{\partial x_1} + \\
 + b_{6j} \frac{\partial^2 u_{1+1}}{\partial x_{1+1} \partial t} + b_{7j} \frac{\partial u_{1+1}}{\partial x_{1+1}} + P(t) = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie a_{1j} i b_{1j} wyznaczone są przez masę bryły m_j , a_{2j} i b_{2j} reprezentują współczynniki tłumienia zewnętrznego, a_{3j} i b_{3j} związane są z charakterystykami dyskretnych elementów sprężystych, a_{4j} , b_{4j} , a_{6j} i b_{6j} reprezentują tłumienie wewnętrzne typu Voigta w kolejnych prętach, natomiast a_{5j} , b_{5j} , a_{7j} i b_{7j} wyznaczone są przez stałe materiałowe prętów. Należy podkreślić, że uwzględnienie tłumienia zastępczego umożliwia przyjęcie równań ruchu prętów w postaci (1), w których tłumienie jest pominięte. Z drugiej strony, wiele rozwiązań konstrukcyjnych dla kratownic uzasadnia przyjęcie tłumienia zastępczego ujętego odpowiednio w warunkach brzegowych.

Warunki brzegowe dla dyskretno-ciągłych modeli kratownicy, których przykładem są związki (3), przypominają warunki brzegowe w problemach rozważanych w [12-15]. Jednakże warunki brzegowe w przypadku modeli kratownicy są bardziej złożone. Wynika to z faktu, że pręty kratownicy mogą nie być współosiowe oraz że bryły sztywne w modelach kratownic mogą przemieszczać się ruchem płaskim.

Rozwiązania równań (1), przy uwzględnieniu zerowych warunków początkowych (2), poszukujemy w postaci

$$u_1(x_1, t) = f_1(a(t - t_{r1}) - x_1 + x_{r1}) +$$

$$+ g_1(a(t - t_{q_1}) + x_1 - x_{q_1}), \quad (4)$$

gdzie funkcje f_1 , g_1 reprezentują zaburzenia wywołane siłami zewnętrznymi przemieszczające się w i -tym pręcie kratownicy odpowiednio w kierunku zgodnym i przeciwnym do kierunku osi x_1 . Stałe t_{f_1} , t_{g_1} , x_{f_1} , x_{g_1} w argumentach tych funkcji oznaczają chwile czasu i położenie końca i -tego pręta, w których obserwuje się pierwsze zaburzenie w tym pręcie przemieszczające się odpowiednio w kierunku zgodnym lub przeciwnym do kierunku osi x_1 . Stałe t_{f_1} , t_{g_1} oraz x_{f_1} , x_{g_1} mogą być sobie równe, jak w pracach [12-15], lub mogą być różne.

Funkcje f_1 , g_1 są funkcjami jednej zmiennej, przy czym dla ujemnych argumentów są one tożsamościowo równe zeru. Postać tych funkcji wyznaczają warunki brzegowe konkretnego problemu. Po podstawieniu rozwiązań (4) do warunków brzegowych otrzymujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych z przesuniętym argumentem typu neutralnego dla nieznanymi funkcji f_1 , g_1 . Równania te można rozwiązać numerycznie lub analitycznie, [15]. Równania te i ich rozwiązania są różne dla różnych przypadków układów prętów kratownicy. Zaobserwować to można w rozpatrywanych poniżej modelach kratownicy płaskiej.

3. Szczególne przypadki kratownicy płaskiej.

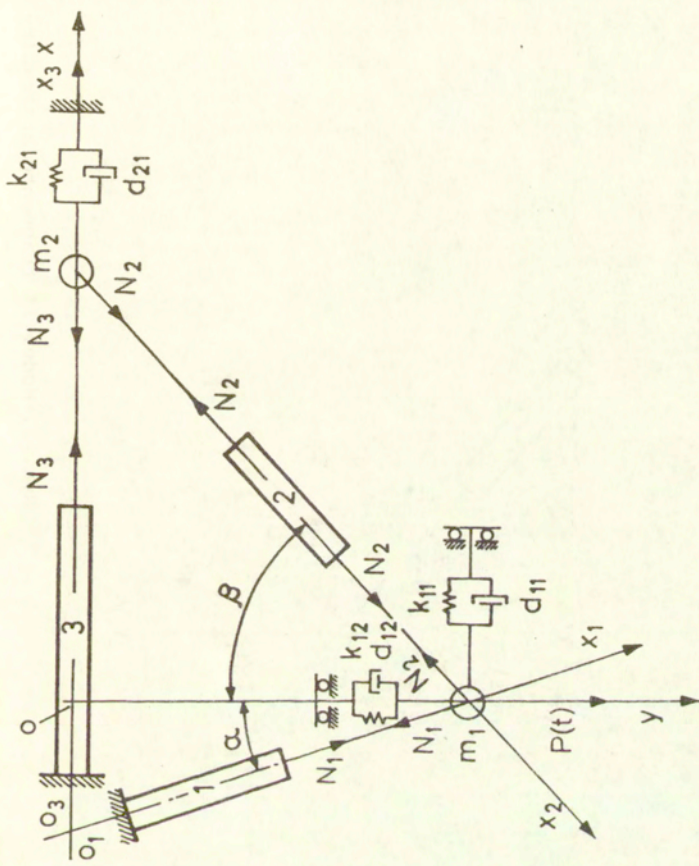
Metoda falowa opisana w p. 2 może być wykorzystana w badaniach dynamicznych dowolnie złożonych kratownic. Wiadomo jednakże, że literatura z zakresu dynamiki kratownic jest niezmiernie skromna. Przede wszystkim brak prac dotyczących modeli kratownic, w których masa prętów rozłożona jest w sposób ciągły, [7]. W związku z tym, rozpatrywanie w chwili obecnej złożonego modelu dyskretno-ciągłego kratownicy wydaje się przedwczesne. A ponadto metodykę badań przy wykorzystaniu fal podłużnych w prętach, która po raz pierwszy jest stosowana w prezentowanej pracy w odniesieniu do kratownicy, można lepiej zilustrować rozpatrując proste modele układów prętowych. Modele proste z jednej strony prowadzą do rozwiązywania mniejszej liczby równań różniczkowych, a z drugiej strony mogą już dawać użyteczne informacje dotyczące przemieszczeń dynamicznych i sił w prętach kratownicy.

W zasadzie kratownice złożone są z powtarzających się fragmentów. Poniżej skoncentrujemy się na dwóch modelach pojedynczych fragmentów, przy czym w modelu pojedynczego fragmentu oddziaływanie sąsiednich fragmentów jest uwzględnione za pomocą dyskretnych elementów sprężysto-tłumiących.

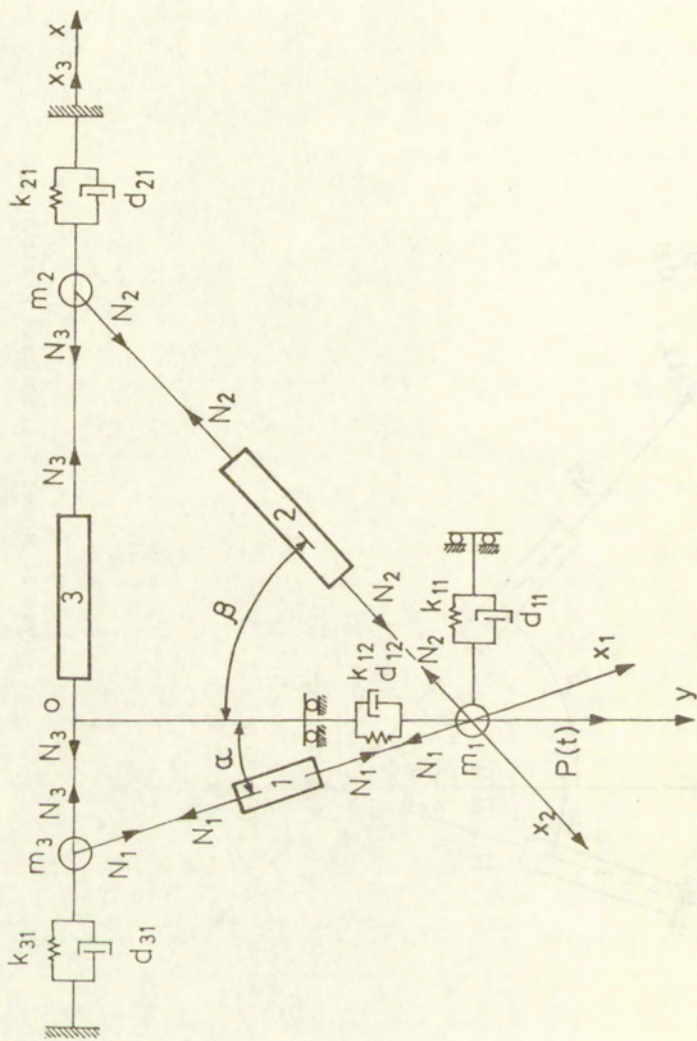
Na rys. 2 i 3 pokazano dwa modele fragmentu kratownicy. Każdy z nich złożony jest z 3 prętów o długościach l_1, l_2, l_3 , odpowiednio, które wchodzi w skład złożonego modelu kratownicy przedstawionego na rys. 1.

Do opisu ruchu prętów w przyjętych modelach kratownicy wykorzystujemy stały układ odniesienia Oxy oraz jednowymiarowe układy współrzędnych O_1x_1 związane z poszczególnymi prętami. Pręty (1), (2) tworzą z osią y odpowiednio kąty α, β .

W modelu I w węzle o współrzędnych $x=0, y=l_1 \cos \alpha$ ($x_1=l_1, x_2=l_2$) umieszczono bryłę sztywną o masie m_1 , która reprezentuje jednocześnie masę napędu związanego z kratownicą i masę elementu łączącego pręty. Bryła m_1 jest obciążona siłą $P(t)$ działającą w kierunku osi y . W wyniku działania tej siły i reakcji prętów bryła ta przemieszcza się ruchem płaskim w



Rys. 2. Model I fragmentu kratownicy



Rys. 3. Model II fragmentu kratownicy

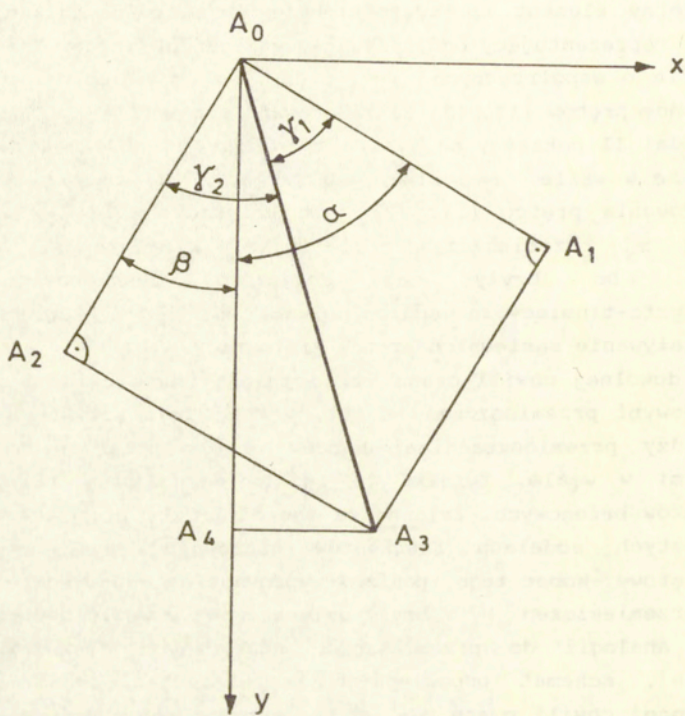
płaszczyźnie xy , ($U_1 \neq 0$, $V_1 \neq 0$). W związku z tym, z bryłą o masie m_1 związane są odpowiednio w kierunku osi x i osi y dwa dyskretne elementy sprężysto-tłumiące o stałych sztywnościach k_{1j} i współczynnikach tłumienia wiskotycznego d_{1j} , $j=1,2$. W węźle o współrzędnych $x=l_2 \sin \beta$, $y=0$ ($x_2=0$, $x_3=l_3$) umieszczono bryłę sztywną o masie m_2 przemieszczającą się tylko w kierunku x , ($U_2 \neq 0$, $V_2=0$). Do bryły m_2 dołączono dyskretny element sprężysto-tłumiący ze współczynnikami k_{21} , d_{21} , reprezentujący oddziaływanie sąsiednich prętów kratownicy. W węźle o współrzędnych $x=-l_1 \sin \alpha$, $y=0$ ($x_1=0$, $x_3=0$) przyjęto, że końce prętów (1), (3) są zamocowane sztywno.

Model II pokazany na rys. 3 różni się od modelu I na rys. 2 tym, że w węźle $x=-l_1 \sin \alpha$, $y=0$ ($x_1=0$, $x_3=0$) zamiast sztywnego zamocowania prętów (1), (3) jest umieszczona bryła sztywna o masie m_3 przemieszczająca się tylko w kierunku osi x ($U_3 \neq 0$, $V_3=0$). Do bryły tej dołączono dyskretny element sprężysto-tłumiący ze współczynnikami k_{31} i d_{31} , reprezentujący oddziaływanie sąsiednich prętów kratownicy.

W dowolnej chwili czasu t istnieją pewne związki pomiędzy składowymi przemieszczeń $U_j(t)$, $V_j(t)$ brył sztywnych m_j i pomiędzy przemieszczeniami końców prętów połączonych z tymi bryłami w węźle. Związki te są konieczne przy formułowaniu warunków brzegowych. Zależne są one od liczby prętów w węźle. W przyjętych modelach fragmentów kratownicy występują węzły dwuprętowe. Wobec tego, poniżej wyprowadzimy odpowiednie związki dla przemieszczeń U , V bryły umieszczonej w węźle dwuprętowym.

W analogii do przemieszczeń statycznych diskutowanych w [17,18], schemat odpowiednich przemieszczeń dynamicznych w ustalonej chwili czasu dla węzła dwuprętowego pokazany jest na rys. 4, gdzie $z_1=A_0A_1$ i $z_2=A_0A_2$ są przemieszczeniami końców sąsiednich prętów, A_0A_3 jest przemieszczeniem bryły sztywnej o składowych $U=A_3A_4$ i $V=A_0A_4$. Przemieszczenia A_0A_3 wyznacza się przy założeniu, że kąty α i β są stałe i że z_1 oraz z_2 są rzutami prostokątnymi przemieszczenia bryły. Założenia te uzasadnione są tym, że rozważane pręty kratownicy doznają małych odkształceń i małych przemieszczeń.

Z rys. 4 wynika, że



Rys. 4. Przesunięcia dwuprętowego węzła kratownicy

$$z_1 \cos \gamma_2 = z_2 \cos(\alpha + \beta - \gamma_2), \quad (5)$$

skąd

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = [z_1 - z_2 \cos(\alpha + \beta)] z_2^{-1} \sin^{-1}(\alpha + \beta). \quad (6)$$

Wobec tego

$$U = A_3 A_4 = A_0 A_3 \sin(\gamma_2 - \beta) = (z_1 \cos \beta - z_2 \cos \alpha) \sin^{-1}(\alpha + \beta) \quad (7)$$

$$V = A_0 A_4 = A_0 A_3 \cos(\gamma_2 - \beta) = (z_1 \sin \beta + z_2 \sin \alpha) \sin^{-1}(\alpha + \beta). \quad (8)$$

W szczególnych przypadkach kątów α, β mamy

$$U = z_1, \quad V = (z_1 \sin \beta + z_2) \cos^{-1} \beta \quad \text{dla } \alpha = \pi/2, \beta = \beta, \quad (9)$$

oraz

$$U = z_1, \quad V = (-z_1 \sin \beta + z_2) \cos^{-1} \beta \quad \text{dla } \alpha = \pi/2, \beta = -\beta. \quad (10)$$

Uzyskane zależności (7), (8) oraz (9) i (10) są wykorzystywane przy formułowaniu warunków brzegowych dla konkretnych modeli dyskretno-ciągłych. Wynikają one z faktu, że pręty w rozpatrywanych modelach nie są współosiowe i że bryły sztywne mogą przemieszczać się ruchem płaskim. Konieczność uwzględnienia tych związków stwarza dodatkowe trudności obliczeniowe przy wyznaczaniu przemieszczeń dynamicznych w prętach kratownicy w porównaniu z obliczeniami przytoczonymi w pracach [12-15].

Poniżej zostaną podane szczegółowe rozwiązania wraz z obliczeniami numerycznymi kolejno dla modelu I, rys. 2, i dla modelu II pokazanym na rys. 3.

4. Rozwiązanie dla modelu I.

Przed sformułowaniem problemu początkowo-brzegowego dla przemieszczeń prętów modelu I przedstawionego na rys. 2, rozważmy siły występujące w kolejnych węzłach tego modelu fragmentu kratownicy.

W węźle o współrzędnych $x=0$, $y=l_1 \cos \alpha$, w którym umieszczona jest bryła sztywna m_1 o składowych przemieszczenia U_1 , V_1 , mamy $x_1=l_1$, $x_2=l_2$. $z_1=u_1(l_1, t)$, $z_2=u_2(l_2, t)$, $\alpha=\alpha$, $\beta=\beta$. Przy wykorzystaniu zasady d'Alemberta, sumy rzutów sił na oś x i oś y w tym węźle są następujące

$$-m_1 \ddot{U}_1 - d_{11} \dot{U}_1 - k_{11} U_1 - N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \beta = 0, \quad (11)$$

$$-m_1 \ddot{V}_1 - d_{12} \dot{V}_1 - k_{12} V_1 - N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \beta + P(t) = 0,$$

gdzie $U_1(t)$ i $V_1(t)$ wyznaczone są przez (7), (8), natomiast wielkości

$$N_1(t) = AE \left(D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \quad (12)$$

uwzględniają siły sprężyste i tłumienie wewnętrzne typu Voigta ze współczynnikiem D_1 .

W szczególnym przypadku można przyjąć, że bryła m_1 przemieszcza się tylko w kierunku osi y . Wówczas odpowiednie ograniczenia wynikające z $U_1=0$ otrzymuje się z (7).

W węźle o współrzędnych $x=l_2 \cos \beta$, $y=0$, w którym umieszczona jest bryła sztywna m_2 o składowych przemieszczenia U_2 , V_2 , mamy $x_2=0$, $x_3=l_3$, $z_1=u_3(l_3, t)$, $z_2=u_2(0, t)$, $\alpha=\pi/2$, $\beta=\beta$. Z (9) i z warunków ruchu bryły m_2 otrzymujemy $U_2(t)=u_3(l_3, t)$ i $V_2=0$, natomiast związki analogiczne do (11) przyjmują postać

$$-m_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - d_{21} \frac{\partial u_3}{\partial t} - k_{21} u_3 - N_3 - N_2 \sin \beta = 0 \quad (13)$$

$$u_3 \sin \beta + u_2 = 0,$$

gdzie N_2 i N_3 wyrażone są przez (12).

W pozostałym węźle modelu I końce prętów (1), (3) są sztywno zamocowane, tj. $u_1(0,t)=u_3(0,t)=0$.

Biorąc pod uwagę (11)-(13), wyznaczenie przemieszczeń przekrojów prętów (1)-(3) modelu I sprowadza się do rozwiązania równań ruchu

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = 0, \quad i=1,2,3, \quad (14)$$

z warunkami początkowymi

$$u_1(x_1, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(x_1, 0) = 0, \quad i=1,2,3 \quad (15)$$

oraz z następującymi warunkami brzegowymi

$$u_1(x_1, t) = 0 \quad \text{dla } x_1=0,$$

$$\begin{aligned} & - \frac{m_1}{\sin(\alpha+\beta)} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \cos\beta - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \cos\alpha \right] - \frac{d_{11}}{\sin(\alpha+\beta)} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} \cos\beta - \right. \\ & \left. - \frac{\partial u_2}{\partial t} \cos\alpha \right] - \frac{k_{11}}{\sin(\alpha+\beta)} (u_1 \cos\beta - u_2 \cos\alpha) - \\ & - AE \sin\alpha \left[D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] + AE \sin\beta \left[D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{dla } x_1=l_1, x_2=l_2 \quad \text{gdy } U_1 \neq 0,$$

$$u_1 \cos\beta - u_2 \cos\alpha = 0 \quad \text{dla } x_1=l_1, x_2=l_2 \quad \text{gdy } U_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} & - \frac{m_1}{\sin(\alpha+\beta)} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \sin\beta + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \sin\alpha \right] - \frac{d_{12}}{\sin(\alpha+\beta)} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} \sin\beta + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u_2}{\partial t} \sin\alpha \right] - \frac{k_{12}}{\sin(\alpha+\beta)} (u_1 \sin\beta + u_2 \sin\alpha) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - AE \cos \alpha \left[D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] - AE \cos \beta \left[D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] + \\
 & + P(t) = 0 \quad \text{dla} \quad x_1 = l_1, \quad x_2 = l_2, \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - m_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - d_{21} \frac{\partial u_3}{\partial t} - k_{21} u_3 - AE \left[D_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] - \\
 & - AE \sin \beta \left[D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 = 0, \quad x_3 = l_3,
 \end{aligned}$$

$$u_3 \sin \beta + u_2 = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 = 0, \quad x_3 = l_3,$$

$$u_3(x_3, t) = 0 \quad \text{dla} \quad x_3 = 0.$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_1 &= x_1 / l_0, \quad \bar{t} = at / l_0, \quad \bar{u}_1 = u_1 / u_0, \quad \bar{d}_{ij} = d_{ij} l_0 / (m_0 a), \\
 \bar{D}_1 &= D_1 a / l_0, \quad R_1 = m_1 / m_0, \quad K_0 = A \rho l_0 / m_0, \quad \bar{p} = p l_0 / a, \\
 \bar{P} &= P l_0^2 / (m_0 u_0 a^2), \quad \bar{k}_{ij} = k_{ij} l_0^2 / (m_0 a^2), \quad \bar{l}_i = l_i / l_0
 \end{aligned} \quad (17)$$

związki (14)-(16) przyjmują postać

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = 0, \quad i=1,2,3, \quad (18)$$

$$u_i(x_i, 0) = \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_i, 0) = 0, \quad i=1,2,3, \quad (19)$$

$$u_i(x_i, t) = 0 \quad \text{dla} \quad x_i = 0,$$

$$- \frac{R_1}{\sin(\alpha + \beta)} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \cos \beta - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \cos \alpha \right] - \frac{d_{11}}{\sin(\alpha + \beta)} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} \cos \beta -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial u_2}{\partial t} \cos \alpha \Big] - \frac{k_{11}}{\sin(\alpha+\beta)} (u_1 \cos \beta - u_2 \cos \alpha) - \\
& - K_0 \sin \alpha \left[D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] + K_0 \sin \beta \left[D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] = 0
\end{aligned}$$

dla $x_1=1_1, x_2=1_2$ gdy $U_1 \neq 0$,

$$u_1 \cos \beta - u_2 \cos \alpha = 0 \quad \text{dla } x_1=1_1, x_2=1_2 \quad \text{gdy } U_1=0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{R_1}{\sin(\alpha+\beta)} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \sin \beta + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \sin \alpha \right] - \frac{d_{12}}{\sin(\alpha+\beta)} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} \sin \beta + \right. \\
& \left. + \frac{\partial u_2}{\partial t} \sin \alpha \right] - \frac{k_{12}}{\sin(\alpha+\beta)} (u_1 \sin \beta + u_2 \sin \alpha) - \\
& - K_0 \cos \alpha \left[D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] - K_0 \cos \beta \left[D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] + \\
& + P(t) = 0 \quad \text{dla } x_1=1_1, x_2=1_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - R_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - d_{21} \frac{\partial u_3}{\partial t} - k_{21} u_3 - K_0 \left[D_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] - \\
& - K_0 \sin \beta \left[D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] = 0 \quad \text{dla } x_2=0, x_3=1_3,
\end{aligned}$$

$$u_3 \sin \beta + u_2 = 0 \quad \text{dla } x_2=0, x_3=1_3,$$

$$u_3(x_3, t) = 0 \quad \text{dla } x_3=0,$$

gdzie kreski górne oznaczające wielkości bezwymiarowe pominięto dla wygody zapisu, natomiast l_0, m_0, u_0 są odpowiednio wzorcową długością, masą i przemieszczeniem.

Rozwiązań równań (18), przy wykorzystaniu (19), poszukujemy w postaci

$$u_1(x_1, t) = f_1(t-x_1+1_1) + g_1(t+x_1-1_1),$$

$$u_2(x_2, t) = f_2(t-x_2+l_2) + g_2(t+x_2-l_2), \quad (21)$$

$$u_3(x_3, t) = f_3(t-l_2-x_3+l_3) + g_3(t-l_2+x_3-l_3),$$

gdzie funkcje f_i i g_i reprezentują fale przemieszczające się w i -tym pręcie w kierunku zgodnym i przeciwnym do kierunku osi x_i . W rozwiązaniach (21) uwzględniono, że pierwsze zaburzenie wystąpiło w prętach (1)-(3) w chwilach czasu $t_{r1}=t_{g1}=t_{r2}=t_{g2}=0$, $t_{r3}=t_{g3}=l_2$ w przekrojach $x_{r1}=x_{g1}=l_1$, $x_{r2}=x_{g2}=l_2$, $x_{r3}=x_{g3}=l_3$, zgodnie z oznaczeniami w (4).

Po podstawieniu postaci szukanych rozwiązań (21) do warunków brzegowych (20) i po oznaczeniu największego argumentu w każdej równości przez z , otrzymujemy następujące liniowe równania różniczkowe zwyczajne z odchylnym argumentem dla 6 nieznanymi funkcji $f_i, g_i, i=1,2,3$,

$$f_1(z) = -g_1(z-2l_1),$$

$$f_2(z) = -g_2(z-2l_2) - [f_3(z-2l_2) + g_3(z-2l_2)]\sin\beta,$$

$$f_3(z) = -g_3(z-2l_3),$$

$$\begin{aligned} r_1 g_1''(z) + r_2 g_1'(z) + r_3 g_1(z) + r_4 g_2''(z) + r_5 g_2'(z) + r_6 g_2(z) = \\ = r_7 f_1''(z) + r_8 f_1'(z) + r_9 f_1(z) + r_{10} f_2''(z) + r_{11} f_2'(z) \\ + r_{12} f_2(z) \quad \text{gd}y \quad U_1 \neq 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$g_1(z)\cos\beta - g_2(z)\cos\alpha = -f_1(z)\cos\beta + f_2(z)\cos\alpha \quad \text{gd}y \quad U_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} r_{13} g_1''(z) + r_{14} g_1'(z) + r_{15} g_1(z) + r_{16} g_2''(z) + r_{17} g_2'(z) \\ + r_{18} g_2(z) = P(z) + r_{19} f_1''(z) + r_{20} f_1'(z) + r_{21} f_1(z) \\ + r_{22} f_2''(z) + r_{23} f_2'(z) + r_{24} f_2(z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{25} g_3''(z) + r_{26} g_3'(z) + r_{27} g_3(z) = r_{28} f_3''(z) + r_{29} f_3'(z) \\ + r_{30} f_3(z) + r_{31} g_2''(z) + r_{32} g_2'(z), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
r_1 &= R_1 C_4 + K_0 D_1 \sin \alpha, & r_2 &= d_{11} C_4 + K_0 \sin \alpha, \\
r_3 &= k_{11} C_4, & r_4 &= -R_1 C_3 - K_0 D_2 \sin \beta, \\
r_5 &= -d_{11} C_3 - K_0 \sin \beta, & r_6 &= -k_{11} C_3, \\
r_7 &= -R_1 C_4 + K_0 D_1 \sin \alpha, & r_8 &= -d_{11} C_4 + K_0 \sin \alpha, \\
r_9 &= -r_3, & r_{10} &= R_1 C_3 - K_0 D_2 \sin \beta, \\
r_{11} &= d_{11} C_3 - K_0 \sin \beta, & r_{12} &= -r_6, \\
r_{13} &= R_1 C_2 + K_0 D_1 \cos \alpha, & r_{14} &= d_{12} C_2 + K_0 \cos \alpha, \\
r_{15} &= k_{12} C_2, & r_{16} &= R_1 C_1 + K_0 D_2 \cos \beta, \\
r_{17} &= d_{12} C_1 + K_0 \cos \beta, & r_{18} &= k_{12} C_1, & (23) \\
r_{19} &= -R_1 C_2 + K_0 D_1 \cos \alpha, & r_{20} &= -d_{12} C_2 + K_0 \cos \alpha, \\
r_{21} &= -r_{15}, & r_{22} &= -R_1 C_1 + K_0 D_2 \cos \beta, \\
r_{23} &= -d_{12} C_1 + K_0 \cos \beta, & r_{24} &= -r_{18}, \\
r_{25} &= R_2 + K_0 D_3 + K_0 D_2 \sin^2 \beta, & r_{26} &= d_{21} + K_0 + K_0 \sin^2 \beta, \\
r_{27} &= k_{21}, & r_{28} &= -R_2 + K_0 D_3 - K_0 D_2 \sin^2 \beta, \\
r_{29} &= -d_{21} + K_0 - K_0 \sin^2 \beta, & r_{30} &= -k_{21}, \\
r_{31} &= -2K_0 D_2 \sin \beta, & r_{32} &= -2K_0 \sin \beta, \\
C_1 &= (\sin(\alpha+\beta))^{-1} \sin \alpha, & C_2 &= (\sin(\alpha+\beta))^{-1} \sin \beta, \\
C_3 &= (\sin(\alpha+\beta))^{-1} \cos \alpha, & C_4 &= (\sin(\alpha+\beta))^{-1} \cos \beta.
\end{aligned}$$

Równania (22) rozwiązano za pomocą metody różnic skończonych, przy czym zauważyć należy, że równania (22)_{4,5,6} dla funkcji $g_1(z)$ i $g_2(z)$ są sprzężone. Po wyznaczeniu funkcji f_1 , g_1 i ich pochodnych na podstawie (21) można otrzymać przemieszczenia, odkształcenia i prędkości w dowolnych przekrojach prętów w dowolnej chwili czasu.

4.1. Obliczenia numeryczne.

W obliczeniach numerycznych przyjęto jednakowe długości $l_1=l_2=l_3=2\text{m}$ prętów (1)-(3), przekrój poprzeczny prętów $A=2\cdot 10^{-3}\text{m}^2$, gęstość materiału $\rho=0.8\cdot 10^4\text{kg/m}^3$, moduł Younga $E=2.1\cdot 10^{11}\text{N/m}^2$, zastępcze sztywności sąsiednich prętów $k_{1j}=2.1\cdot 10^8\text{N/m}$, masy brył w węzłach kratownicy $m_1=20\text{kg}$ i $m_2=3.2\text{kg}$, prędkość propagacji fali podłużnej w pręcie $a=5000\text{m/s}$, amplitudę wymuszenia zewnętrznego $P_0=50\text{kN}$, wzorcową długość $l_0=2\text{m}$, wzorcowe przemieszczenie $u_0=10^{-3}\text{m}$, wzorcową masę $m_0=32\text{kg}$, $\alpha=\beta=\pi/6$, [1,5].

Bezwymiarowe wielkości przy powyższych danych zgodnie z (17) są następujące

$$R_1=0.625, R_2=0.1, \bar{l}_1=1.0, K_0=1.0, \bar{P}_0=0.25, \bar{k}_{1j}=1.05. \quad (24)$$

Wymuszenie zewnętrzne $P(t)$ występujące w równaniach (22) może być wyrażone przez dowolną funkcję, za pomocą której można uwzględnić przejściowe i ustalone warunki ruchu kratownicy. Wymuszenie to można opisać funkcją stałą i zmienną, okresową i nieokresową.

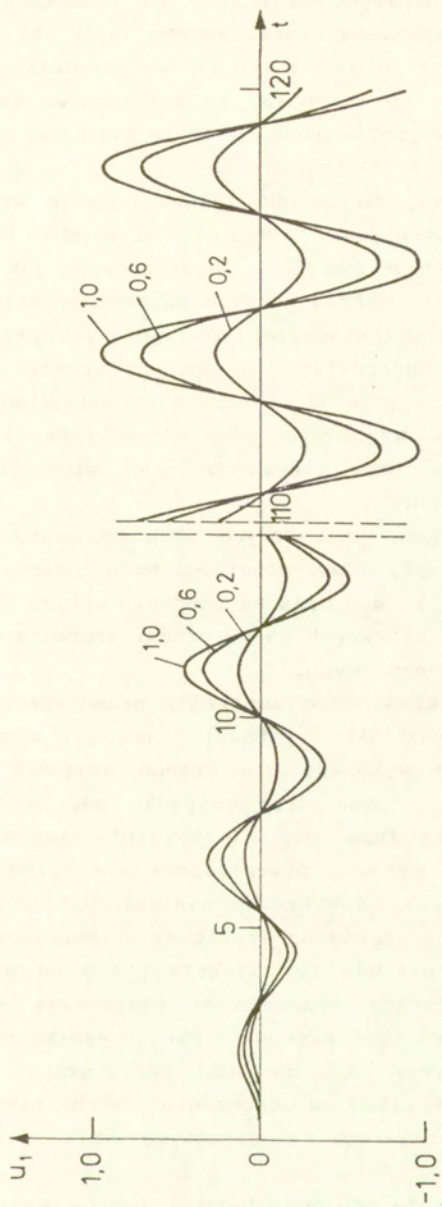
W obliczeniach numerycznych przyjęto bezwymiarowe wymuszenie zewnętrzne opisane funkcją harmoniczną postaci

$$P(t) = P_0 \sin(pt), \quad (25)$$

gdzie p jest bezwymiarową częstością wymuszenia zewnętrznego, $P_0=0.25$. Należy podkreślić, że metoda falowa umożliwia wykonanie obliczeń numerycznych w stanie ruchu przejściowego a następnie w stanie ruchu ustalonego.

Przykładem rozwiązań w stanie przejściowym są przemieszczenia przekrojów pręta (1) modelu I, przedstawionego na rys. 2, które pokazano na rys. 5. Wykonano je przy danych (24), dla współczynników tłumienia $d_{11}=d_{12}=d_{21}=0.1$, $D_1=D_2=D_3=0$, oraz dla $p=\omega_0=1.41$. Przyjęta wartość częstości wymuszenia zewnętrznego odpowiada pierwszej częstości drgań własnych wyznaczonej dla danych (24) z równania częstości (D4) zamieszczonego w Dodatku.

Rozwiązania w stanie ruchu ustalonego dla tych samych danych



Rys. 5. Przemieszczenia przekrojów pręta (1) w modelu I dla $x=0.2$,
0.6, 1.0 w stanie ruchu niustalonego i ustalonego przy $p=1.41$

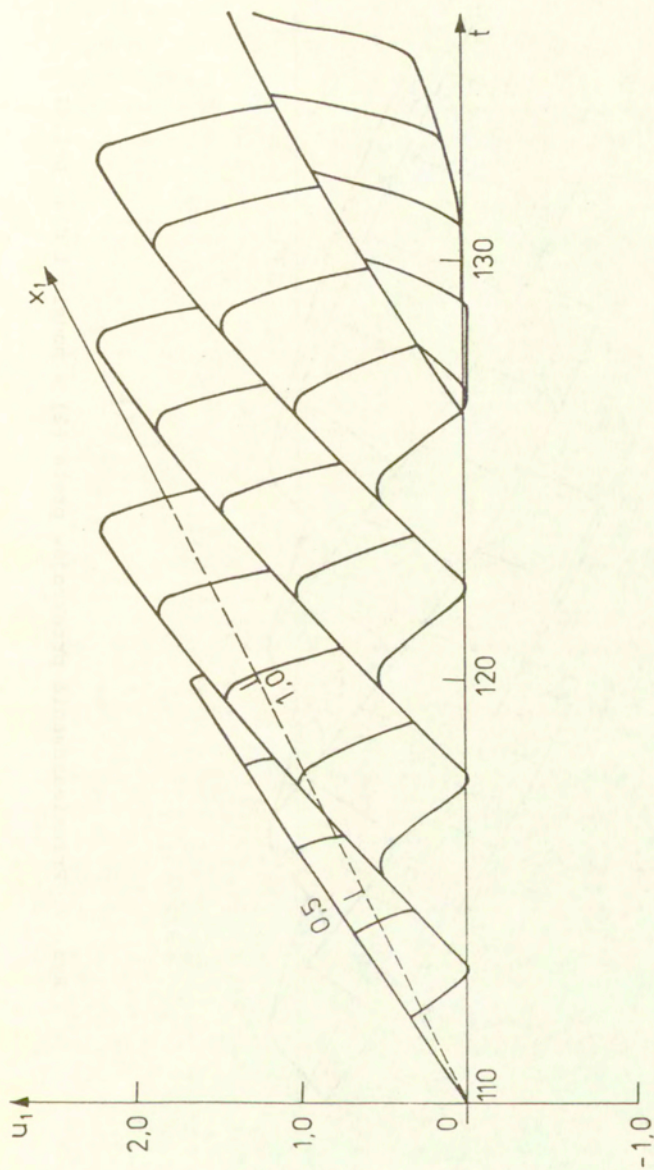
i dla częstości rezonansowych naniesiono na rysunkach 6-8 w postaci przestrzennych wykresów przemieszczeń $u_i(x_i, t)$ prętów (1), (2), (3) modelu I dla $x_i \in \langle 0, 1 \rangle$ w przedziale czasu $t \in \langle 110, 126 \rangle$. Z wykresów tych wynika, że rezonansowe amplitudy przemieszczeń przekrojów prętów rosną wraz ze wzrostem zmiennej przestrzennej x_i , $i=1, 2, 3$.

Z rysunków 5-8 wynika, że metoda falowa pozwala wyznaczać przemieszczenia w dowolnych przekrojach prętów modelu. Uwaga ta dotyczy rozwiązań zarówno w obszarach rezonansowych jak i poza rezonansem. Celem zbadania wpływu różnych parametrów należy się raczej skoncentrować na przemieszczeniach wybranych przekrojów prętów układu. Trzeba podkreślić, że znając przemieszczenia granicznych przekrojów prętów i korzystając odpowiednio ze wzorów (7), (8) można wyznaczyć również w funkcji czasu przemieszczenia U_j , V_j brył sztywnych m_j umieszczonych w węzłach rozpatrywanego modelu.

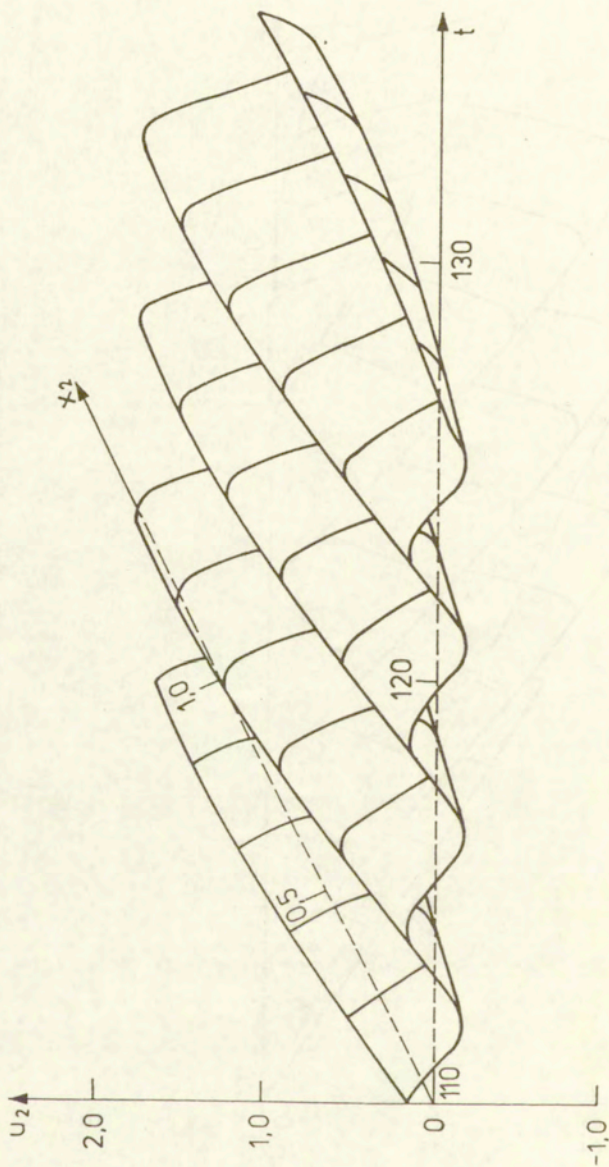
W dalszych obliczeniach numerycznych skoncentrowano się na wyznaczaniu krzywych amplitudowo-częstościowych przemieszczeń U_1 , V_1 i U_2 brył m_1 i m_2 oraz na zbadaniu wpływu długości prętów i wpływu mas brył sztywnych na te przemieszczenia w kilku pierwszych obszarach rezonansowych.

I tak, na rys. 9 zamieszczono amplitudy przemieszczeń V_1 bryły m_1 w zależności od częstości $p \leq 4.5$ wymuszenia zewnętrznego. Obliczenia wykonano dla trzech długości prętów $L=1_1=1_2=1_3=0.5, 1.0, 1.5$, oraz dla przypadku gdy bryła m_1 przemieszcza się w płaszczyźnie Oxy , $U_1 \neq 0$ (linie ciągłe), oraz dla przypadku gdy bryła sztywna przemieszcza się tylko wzdłuż osi y , $U_1 = 0$ (gwiazdki). Z wykresów naniesionych na rys. 9 wynika, że wpływ długości prętów na amplitudy przemieszczeń V_1 jest bardzo istotny. Amplitudy te zwiększają się ze wzrostem długości prętów, a obszary rezonansowe poszerzają się ze zmniejszaniem się długości tych prętów. Z rys. 9 wynika również, że ograniczenie ruchu bryły m_1 do ruchu tylko wzdłuż osi y powoduje zwiększenie amplitud w otoczeniu dwóch pierwszych rezonansów. W dalszych obszarach rezonansowych wyniki dla $U_1 \neq 0$ i $U_1 = 0$ pokrywają się.

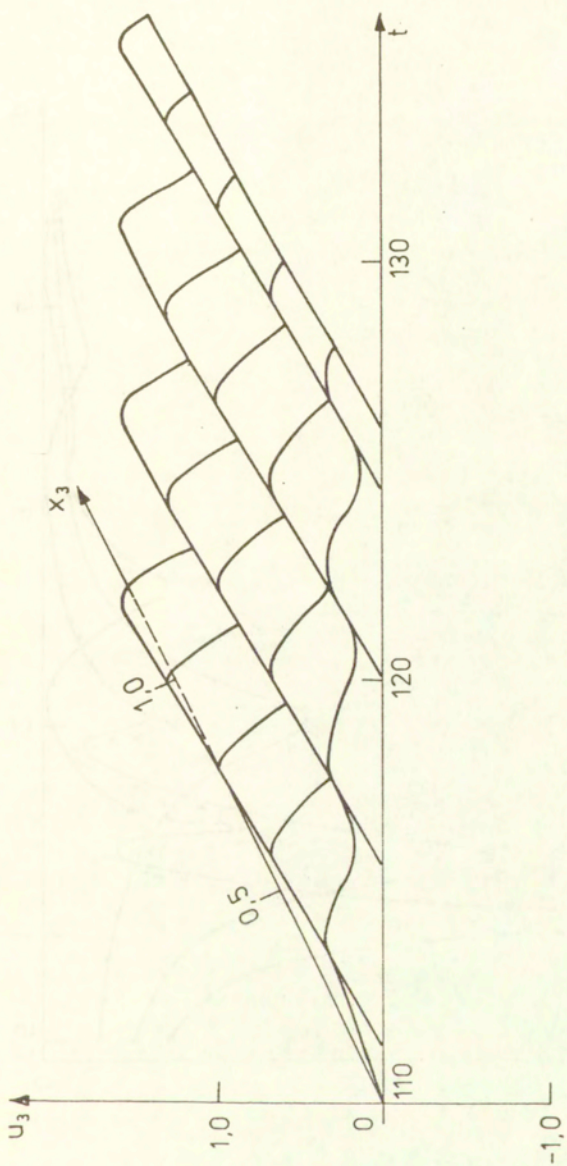
Podobne wnioski odnośnie wpływu długości prętów wynikają z rys. 10, na którym naniesiono amplitudy przemieszczeń



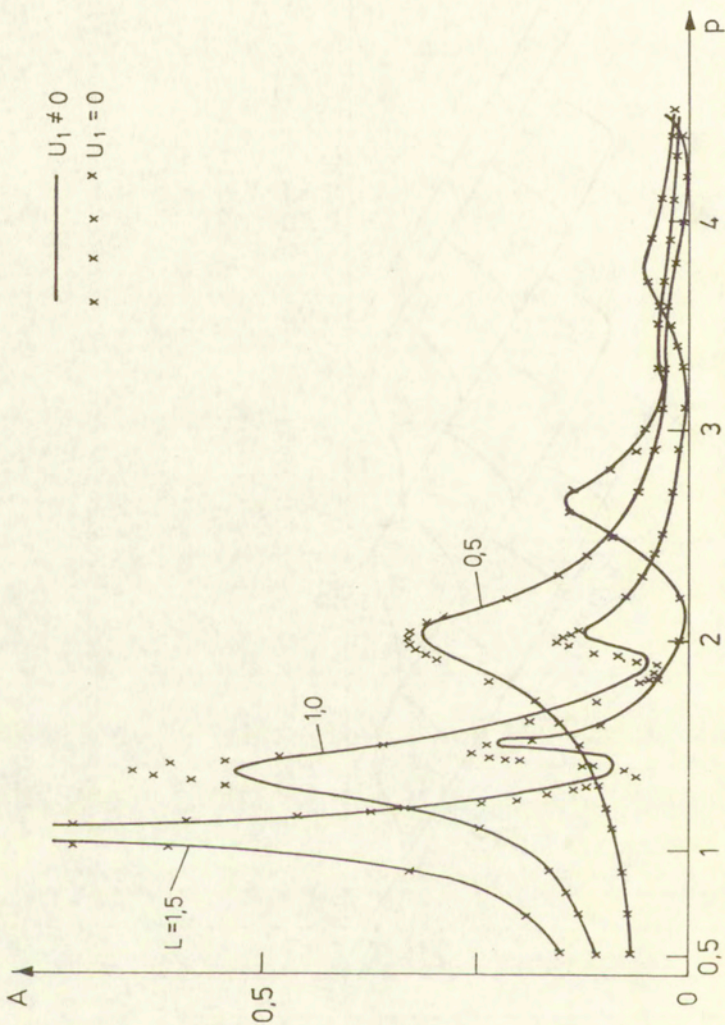
Rys. 6. Przemieszczenia przekrojów pręta (1) w modelu I dla $p=1.41$



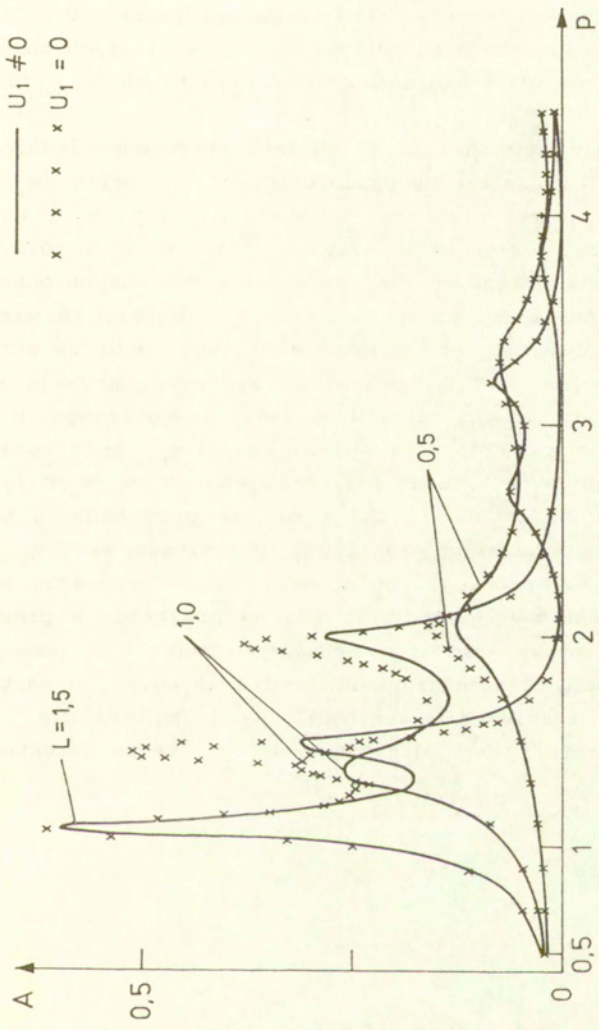
Rys. 7. Przemieszczenia przekrojów pręta (2) w modelu I dla $p=1.41$



Rys. 8. Przemieszczenia przekrojów pręta (3) w modelu I dla $p=1.41$



Rys. 9. Krzywe amplitudowo-częstościowe przemieszczenia v bryły m w modelu I przy $L_1 = 0.5, 1.0, 1.5$ oraz dla $U_1 \neq 0$ i $U_1 = 0$



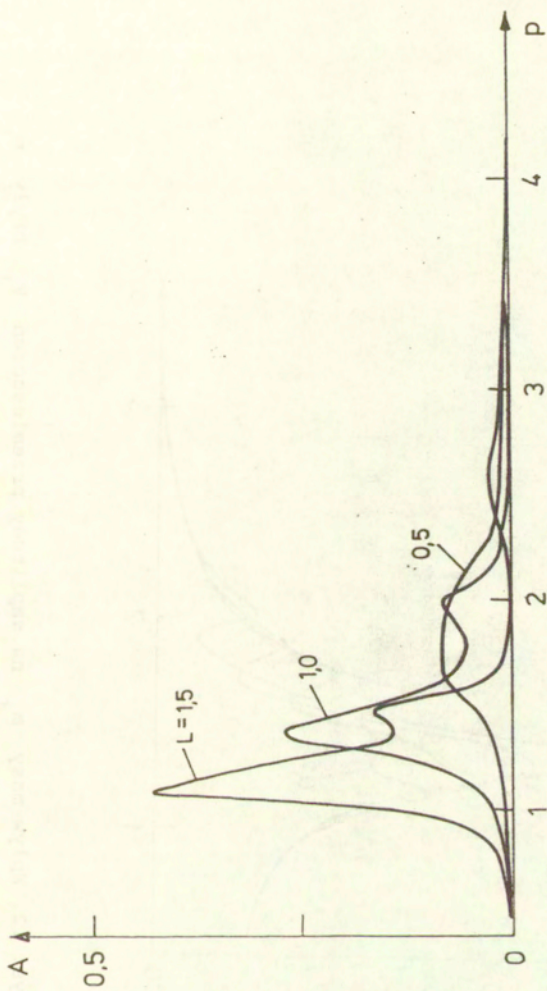
Rys. 10. Krzywe amplitudowo-częstościowe przemieszczeń $U_2(t) = u_3(l_3, t)$ bryły m_2 w modelu I przy $L=1.5, 1.0, 1.5$ oraz dla $U_1 \neq 0$ i $U_1 = 0$

$U_2(t)=u_3(l_3,t)$ bryły m_2 ($V_2=0$) w zależności od częstości wymuszenia zewnętrznego $p \leq 4.5$ zarówno przy $U_1 \neq 0$ i $U_1=0$.

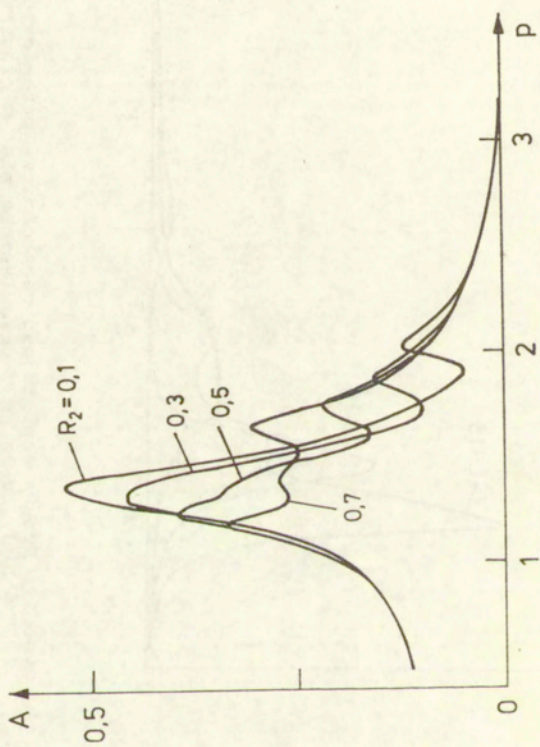
Na rys. 11 naniesiono amplitudy przemieszczeń U_1 bryły m_1 w przypadku, gdy bryła m_1 przemieszcza się w płaszczyźnie xy . Z rysunku tego wynika, że dla $p > 2$ we wszystkich przypadkach długości prętów L przemieszczenia U_1 szybko maleją do zera. Uzasadnia to pokrywanie się w dalszych obszarach rezonansowych wykresów naniesionych na rysunkach 9 i 10 przy $U_1 \neq 0$ i $U_1=0$.

Z kolei, na rysunkach 12 i 13 zbadano wpływ odpowiednio masy m_2 i masy m_1 na amplitudy przemieszczeń V_1 bryły m_1 przy $U_1 \neq 0$. Wykresy na rys. 12 dotyczą ustalonej masy m_1 , tj. $R_1 = m_1/m_0 = 0.625$, oraz takich zmian masy m_2 , że $R_2 = m_2/m_0 = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$. Z rysunku tego wynika, że w dwóch pierwszych obszarach rezonansowych amplitudy przemieszczeń V_1 maleją ze wzrostem R_2 , w trzecim obszarze rezonansowym amplitudy rosną ze wzrostem R_2 , natomiast dla $p > 2.2$ wszystkie wykresy pokrywają się w rozważanym przedziale częstości wymuszenia zewnętrznego p .

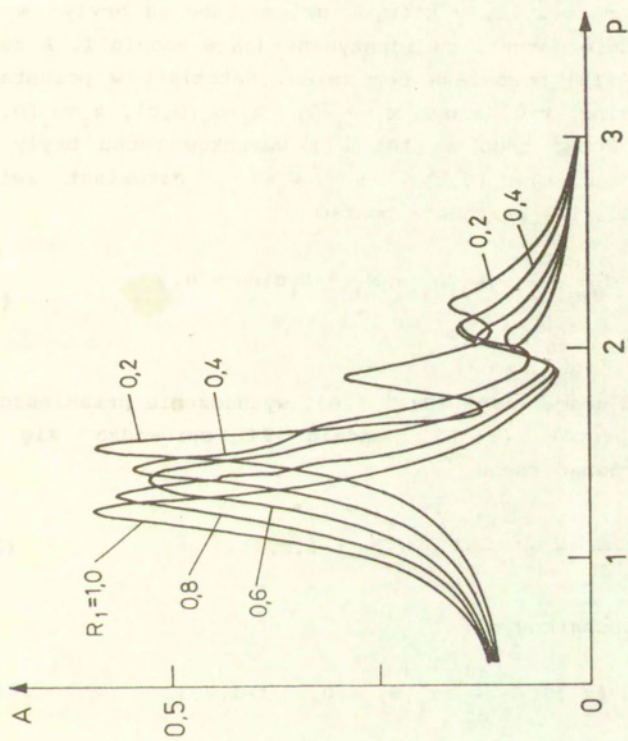
Wykresy na rys. 13 dotyczą wpływu masy m_1 przy ustalonej masie m_2 , $R_2 = m_2/m_0 = 0.1$, dla $p=3$. Przyjęto $R_1 = m_1/m_0 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$. Z rysunku tego wynika, że przy badaniu wpływu masy m_1 na maksymalne amplitudy przemieszczeń V_1 nie obserwuje się tak prostej regularności jak w przypadku wpływu masy m_2 zilustrowanego na rys. 12. Na przykład, w pierwszym obszarze rezonansowym amplitudy przemieszczeń V_1 początkowo maleją przyjmując najmniejszą wartość dla $R_1 = 0.6$, a następnie rosną ze zmniejszaniem się wartości R_1 . Dopiero dla $p > 2.2$ obserwuje się regularność polegającą na tym, że ze wzrostem R_1 amplitudy maleją.



Rys. 11. Krzywe amplitudowo-częstotliwościowe przemieszczeń U_1 bryły m_1 gdy bryła m_1 przemieszcza się w płaszczyźnie xy



Rys. 12. Wpływ masy m_2 na amplitudy przemieszczeń V_1 bryły m_1



Rys. 13. Wpływ masy m_1 na amplitudy przemieszczeń V_1 bryły m_1

5. Rozwiązanie dla modelu II.

Model fragmentu kratownicy II przedstawiony na rys. 3 różni się od modelu I na rys. 2 jedynie tym, że w węźle $x=-l_1 \sin\alpha$, $y=0$ w miejscu zamocowania końców prętów (1), (3) umieszczona jest bryła sztywna o masie m_3 . Do bryły tej dołączony jest dyskretny element sprężysto-tłumiący scharakteryzowany sztywnością k_{31} i współczynnikiem tłumienia d_{31} . Zakłada się, że bryła m_3 przemieszcza się tylko wzdłuż osi x , tj. $V_3=0$.

W węzłach modelu II, w których umieszczone są bryły m_1 i m_2 , odpowiednie warunki są identyczne jak w modelu I. A zatem związki (11)-(13) pozostają bez zmian. Natomiast w pozostałym węźle $x=-l_1 \sin\alpha$, $y=0$ mamy $x_1=x_3=0$, $z_1=u_3(0,t)$, $z_2=u_1(0,t)$, $\alpha=\pi/2$, $\beta=-\beta$. Wobec tego z (10) i z warunków ruchu bryły m_3 otrzymujemy $U_3(t)=u_3(0,t)$ i $V_3=0$, natomiast związki analogiczne do (11) przyjmują postać

$$-m_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - d_{31} \frac{\partial u_3}{\partial t} - k_{31} u_3 + N_3 + N_1 \sin\alpha = 0, \quad (26)$$

$$-u_3 \sin\beta + u_1 = 0.$$

Biorąc pod uwagę (11)-(13) i (26), wyznaczenie przemieszczeń przekrojów prętów (1)-(3) modelu II sprowadza się do rozwiązania równań ruchu

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = 0, \quad i=1,2,3, \quad (27)$$

z warunkami początkowymi

$$u_i(x_i, 0) = \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_i, 0) = 0, \quad i=1,2,3, \quad (28)$$

i z następującymi warunkami brzegowymi

$$- m_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - d_{31} \frac{\partial u_3}{\partial t} - k_{31} u_3 + AE \left[D_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] +$$

$$+ AE \sin \alpha \left[D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] = 0 \quad \text{dla } x_1 = x_3 = 0,$$

$$- u_3 \sin \beta + u_1 = 0 \quad \text{dla } x_1 = x_3 = 0,$$

$$- \frac{m_1}{\sin(\alpha+\beta)} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \cos \beta - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \cos \alpha \right] - \frac{d_{11}}{\sin(\alpha+\beta)} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} \cos \beta - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial u_2}{\partial t} \cos \alpha \right] - \frac{k_{11}}{\sin(\alpha+\beta)} (u_1 \cos \beta - u_2 \cos \alpha) -$$

$$- AE \sin \alpha \left[D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] + AE \sin \beta \left[D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] = 0$$

$$\text{dla } x_1 = l_1, x_2 = l_2 \quad \text{gdz } U_1 \neq 0,$$

$$u_1 \cos \beta - u_2 \cos \alpha = 0 \quad \text{dla } x_1 = l_1, x_2 = l_2 \quad \text{gdz } U_1 = 0,$$

$$- \frac{m_1}{\sin(\alpha+\beta)} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \sin \beta + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \sin \alpha \right] - \frac{d_{12}}{\sin(\alpha+\beta)} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} \sin \beta + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u_2}{\partial t} \sin \alpha \right] - \frac{k_{12}}{\sin(\alpha+\beta)} (u_1 \sin \beta + u_2 \sin \alpha) -$$

$$- AE \cos \alpha \left[D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] - AE \cos \beta \left[D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] +$$

$$+ P(t) = 0 \quad \text{dla } x_1 = l_1, x_2 = l_2, \quad (29)$$

$$- m_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - d_{21} \frac{\partial u_3}{\partial t} - k_{21} u_3 - AE \left[D_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] -$$

$$- AE \sin \beta \left[D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] = 0 \quad \text{dla } x_2 = 0, x_3 = l_3,$$

$$u_3 \sin\beta + u_2 = 0 \quad \text{dla } x_2=0, x_3=l_3.$$

W warunkach (29) uwzględniono zarówno przypadek gdy bryła sztywna m_1 przemieszcza się w płaszczyźnie xy ($U_1 \neq 0$) jak i przypadek gdy bryła ta przemieszcza się jedynie w kierunku osi y ($U_1=0$).

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych (17) związki (27)-(29) przyjmują postać

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = 0, \quad i=1,2,3, \quad (30)$$

$$u_i(x_i, 0) = \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_i, 0) = 0, \quad i=1,2,3, \quad (31)$$

$$-R_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - d_{31} \frac{\partial u_3}{\partial t} - k_{31} u_3 + K_0 \left[D_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] +$$

$$+ K_0 \sin\alpha \left[D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] = 0 \quad \text{dla } x_1=x_3=0,$$

$$-u_3 \sin\beta + u_1 = 0 \quad \text{dla } x_1=x_3=0,$$

$$-\frac{R_1}{\sin(\alpha+\beta)} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \cos\beta - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \cos\alpha \right] - \frac{d_{11}}{\sin(\alpha+\beta)} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} \cos\beta - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial u_2}{\partial t} \cos\alpha \right] - \frac{k_{11}}{\sin(\alpha+\beta)} (u_1 \cos\beta - u_2 \cos\alpha) -$$

$$- K_0 \sin\alpha \left[D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] + K_0 \sin\beta \left[D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] = 0$$

$$\text{dla } x_1=l_1, x_2=l_2 \quad \text{gdym } U_1 \neq 0,$$

$$u_1 \cos\beta - u_2 \cos\alpha = 0 \quad \text{dla } x_1=l_1, x_2=l_2 \quad \text{gdym } U_1 = 0, \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{R_1}{\sin(\alpha+\beta)} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \sin\beta + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \sin\alpha \right] - \frac{d_{12}}{\sin(\alpha+\beta)} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} \sin\beta + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial u_2}{\partial t} \sin\alpha \right] - \frac{k_{12}}{\sin(\alpha+\beta)} (\gamma \sin\beta + \eta \sin\alpha) - \\
& - K_0 \cos\alpha \left[D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] - K_0 \cos\beta \left[D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \\
& + P(t) = 0 \quad \text{dla } x_1=1_1, x_2=1_2, \\
& - R_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - d_{21} \frac{\partial u_3}{\partial t} - k_{21} u_3 - K_0 \left[D_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] - \\
& - K_0 \sin\beta \left[D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] = 0 \quad \text{dla } x_2=0, x_3=1_3, \\
& u_3 \sin\beta + u_2 = 0 \quad \text{dla } x_2=0, x_3=1_3,
\end{aligned}$$

gdzie kreski górne oznaczające wielkości bezwymiarowe pominięto ponownie dla wygody zapisu.

Rozwiązania równań (30), przy wykorzystaniu (31), poszukujemy w postaci

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, t) &= f_1(t-x_1+1_1) + g_1(t+x_1-1_1), \\
u_2(x_2, t) &= f_2(t-x_2+1_2) + g_2(t+x_2-1_2), \\
u_3(x_3, t) &= f_3(t-1_1-x_3) + g_3(t-1_2+x_3-1_3),
\end{aligned} \tag{33}$$

gdzie funkcje f_i i g_i reprezentują fale przemieszczające się w i -tym pręcie w kierunku zgodnym i przeciwnym do kierunku osi x_i .

Porównując rozwiązania (33) dla modelu II z rozwiązaniami (21) dla modelu I rozważanego w p. 4, zauważyć można, że rozwiązania te różnią się jedynie argumentem funkcji f_3 . Związane jest to z faktem, że w modelu II zaburzenia wywołane

przez wymuszenie zewnętrzne $P(t)$ dochodzi do pręta (3) zarówno poprzez pręt (1) jak i poprzez pręt (2). Wobec tego, zgodnie ze wzorem (4) w argumente funkcji f_3 rozwiązania (33) uwzględniono, że $t_{r_3}=l_1$ i $x_{r_3}=0$, gdy $t_{g_3}=l_2$ i $x_{g_3}=l_3$.

Po podstawieniu postaci szukanych rozwiązań (33) do warunków brzegowych (32) i po oznaczeniu największego argumentu w każdej równości przez z , otrzymujemy następujące liniowe równania różniczkowe zwyczajne z odchylnym argumentem dla 6 nieznanymi funkcji $f_i, g_i, i=1,2,3$,

$$\begin{aligned}
 f_1(z) &= -g_1(z-2l_1) + [f_3(z-2l_1) + g_3(z-l_1-l_2-l_3)]\sin\beta, \\
 f_2(z) &= -g_2(z-2l_2) - [f_3(z-l_1-l_2-l_3) + g_3(z-2l_2)]\sin\beta, \\
 r_1 g_1''(z) + r_2 g_1'(z) + r_3 g_1(z) + r_4 g_2''(z) + r_5 g_2'(z) + r_6 g_2(z) &= \\
 &= r_7 f_1''(z) + r_8 f_1'(z) + r_9 f_1(z) + r_{10} f_2''(z) + r_{11} f_2'(z) \\
 &+ r_{12} f_2(z) \quad \text{gdy} \quad U_1 \neq 0, \tag{34}
 \end{aligned}$$

$$g_1(z)\cos\beta - g_2(z)\cos\alpha = -f_1(z)\cos\beta + f_2(z)\cos\alpha \quad \text{gdy} \quad U_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 r_{13} g_1''(z) + r_{14} g_1'(z) + r_{15} g_1(z) + r_{16} g_2''(z) + r_{17} g_2'(z) \\
 + r_{18} g_2(z) = P(z) + r_{19} f_1''(z) + r_{20} f_1'(z) + r_{21} f_1(z) \\
 + r_{22} f_2''(z) + r_{23} f_2'(z) + r_{24} f_2(z),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{25} g_3''(z) + r_{26} g_3'(z) + r_{27} g_3(z) = r_{28} f_3''(z-l_1+l_2-l_3) + \\
 + r_{29} f_3'(z-l_1+l_2-l_3) + r_{30} f_3(z-l_1+l_2-l_3) + \\
 + r_{31} g_2''(z) + r_{32} g_2'(z),
 \end{aligned}$$

$$r_{33} f_3''(z) + r_{34} f_3'(z) + r_{35} f_3(z) = r_{36} g_3''(z+l_1-l_2-l_3) +$$

$$+ r_{37} g_3'(z+l_1-l_2-l_3) + r_{38} g_3(z+l_1-l_2-l_3) +$$

$$+ r_{39} g_1''(z) + r_{40} g_1'(z),$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 r_1 &= R_1 C_4 + K_0 D_1 \sin \alpha, & r_2 &= d_{11} C_4 + K_0 \sin \alpha, \\
 r_3 &= k_{11} C_4, & r_4 &= -R_1 C_3 - K_0 D_2 \sin \beta, \\
 r_5 &= -d_{11} C_3 - K_0 \sin \beta, & r_6 &= -k_{11} C_3, \\
 r_7 &= -R_1 C_4 + K_0 D_1 \sin \alpha, & r_8 &= -d_{11} C_4 + K_0 \sin \alpha, \\
 r_9 &= -r_3, & r_{10} &= R_1 C_3 - K_0 D_2 \sin \beta, \\
 r_{11} &= d_{11} C_3 - K_0 \sin \beta, & r_{12} &= -r_6, \\
 r_{13} &= R_1 C_2 + K_0 D_1 \cos \alpha, & r_{14} &= d_{12} C_2 + K_0 \cos \alpha, \\
 r_{15} &= k_{12} C_2, & r_{16} &= R_1 C_1 + K_0 D_2 \cos \beta, \\
 r_{17} &= d_{12} C_1 + K_0 \cos \beta, & r_{18} &= k_{12} C_1, \\
 r_{19} &= -R_1 C_2 + K_0 D_1 \cos \alpha, & r_{20} &= -d_{12} C_2 + K_0 \cos \alpha, \\
 r_{21} &= -r_{15}, & r_{22} &= -R_1 C_1 + K_0 D_2 \cos \beta, \\
 r_{23} &= -d_{12} C_1 + K_0 \cos \beta, & r_{24} &= -r_{18}, \\
 r_{25} &= R_2 + K_0 D_3 + K_0 D_2 \sin^2 \beta, & r_{26} &= d_{21} + K_0 + K_0 \sin^2 \beta, \\
 r_{27} &= k_{21}, & r_{28} &= -R_2 + K_0 D_3 - K_0 D_2 \sin^2 \beta, \\
 r_{29} &= -d_{21} + K_0 - K_0 \sin^2 \beta, & r_{30} &= -k_{21}, \\
 r_{31} &= -2K_0 D_2 \sin \beta, & r_{32} &= -2K_0 \sin \beta, \\
 r_{33} &= R_3 + K_0 (D_1 \sin \alpha \sin \beta + D_3), & r_{35} &= k_{31}, \\
 r_{34} &= d_{31} + K_0 \sin \alpha \sin \beta + K_0, & r_{38} &= -k_{31}, \\
 r_{36} &= -R_3 - K_0 (D_1 \sin \alpha \sin \beta - D_3), & r_{39} &= 2K_0 D_1 \sin \alpha,
 \end{aligned} \tag{35}$$

$$r_{37} = -d_{31} - K_0 \sin \alpha \sin \beta + K_0, \quad r_{40} = 2K_0 \sin \alpha.$$

$$C_1 = (\sin(\alpha+\beta))^{-1} \sin \alpha, \quad C_2 = (\sin(\alpha+\beta))^{-1} \sin \beta,$$

$$C_3 = (\sin(\alpha+\beta))^{-1} \cos \alpha, \quad C_4 = (\sin(\alpha+\beta))^{-1} \cos \beta.$$

Równania (34) rozwiązano za pomocą metody różnic skończonych, przy czym zauważyć należy, że równania (34)_{3,4,5} dla funkcji $g_1(z)$ i $g_2(z)$ są sprzężone. Po wyznaczeniu funkcji f_1, g_1 i ich pochodnych na podstawie (33) można otrzymać przemieszczenia, odkształcenia i prędkości w dowolnych przekrojach prętów w dowolnej chwili czasu.

5.1. Obliczenia numeryczne.

W obliczeniach numerycznych podobnie jak w modelu I przyjęto jednakowe długości $l_1=l_2=l_3=2\text{m}$ prętów (1), (2), (3), przekrój poprzeczny prętów $A=2 \cdot 10^{-3} \text{m}^2$, gęstość materiału $\rho=0.8 \cdot 10^4 \text{kg/m}^3$, moduł Younga $E=2.1 \cdot 10^{11} \text{N/m}^2$, zastępczą sztywność sąsiednich prętów $k_{ij}=2.1 \cdot 10^8 \text{N/m}$, masy brył sztywnych w węzłach kratownicy $m_1=20\text{kg}$, $m_2=3.2\text{kg}$ i $m_3=3.2\text{kg}$, prędkość propagacji fali podłużnej w pręcie $a=5000\text{m/s}$, amplitudę wymuszenia zewnętrznego $P_0=50\text{kN}$, wzorcowe przemieszczenie $u_0=10^{-3}\text{m}$, wzorcową masę $m_0=32\text{kg}$ i wzorcową długość $l_0=2\text{m}$, $\alpha=\beta=\pi/6$, [1,2].

Bezwymiarowe wielkości przy powyższych danych zgodnie z (17) są następujące

$$\begin{aligned} R_1 &= 0.625, & R_2 &= R_3 = 0.1, & \bar{I}_1 &= \bar{I}_2 = \bar{I}_3 = 1.0, \\ K_0 &= 1.0, & \bar{P}_0 &= 0.25, & \bar{k}_{ij} &= 1.05. \end{aligned} \quad (36)$$

Przyjmujemy, że wymuszenie zewnętrzne opisane jest funkcją harmoniczną (25) i koncentrujemy się na rozwiązaniach w stanie ruchu ustalonego.

Przy powyższych danych przemieszczenia w prętach (1), (2) są sobie równe dla $x_1=x_2$, natomiast przemieszczenia w pręcie (3) są antysymetryczne względem przekroju $x_3=0.5$. Ponadto, bryła m_1 nie przemieszcza się w kierunku osi x , tj. $U_1(t)=0$.

Proponowana w pracy metoda falowa pozwala wyznaczać

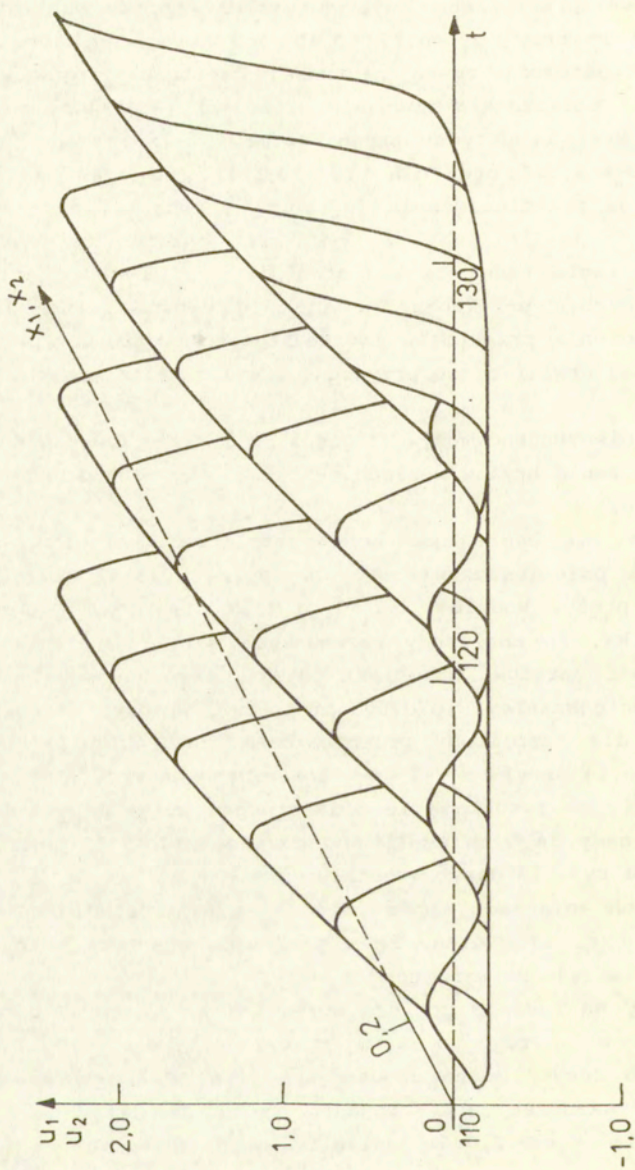
przemieszczenia w dowolnych przekrojach prętów modelu. Przykładowe przestrzenne wykresy przemieszczeń naniesiono na rys. 14 i 15 przy $d_{1j}=0.1$, $D_1=0$, przy wymuszeniu zewnętrznym (25) z częstością równą pierwszej częstości drgań własnych $p=\omega_0=1.37$ obliczoną z równania częstości (D6) umieszczonego w Dodatku. Rys. 14 dotyczy przemieszczeń $u_1(x_1, t)$ i $u_2(x_2, t)$ dla $x_1, x_2 \in \langle 0, 1 \rangle$ oraz dla $t \in \langle 110, 126 \rangle$, natomiast na rys. 15 pokazane są przemieszczenia $u_3(x_3, t)$ pręta (3) dla $x_3 \in \langle 0, 1 \rangle$ i dla $t \in \langle 110, 126 \rangle$. Z rys. 14 wynika, że maksymalne przemieszczenia rosną ze wzrostem x_1 . Z rys. 15 widać, że przemieszczenia przekroju $x_3=0.5$ są równe zero, natomiast przemieszczenia przekrojów równoodległych od przekroju $x_3=0.5$ w ustalonej chwili czasu przyjmują wartości różniące się jedynie znakiem.

Następnie zbadano wpływ długości prętów i wpływ mas modelu na przemieszczenia brył w węzłach. Przyjęto $d_{11}=d_{12}=d_{21}=d_{31}=0.1$ i $D_1=D_2=D_3=0.1$.

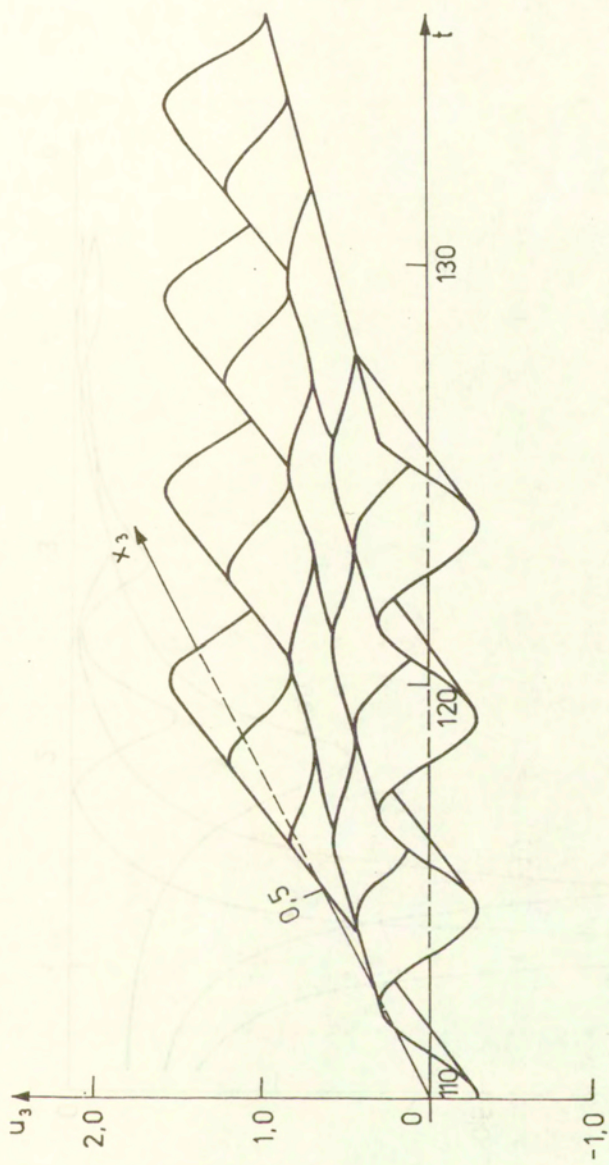
Na rys. 16 naniesiono krzywe amplitudowo-częstościowe dla $p=4.5$ dla przemieszczenia V_1 bryły m_1 dla 3 bezwymiarowych długości prętów modelu $L=1_1=1_2=1_3=0.5, 1.0, 1.5$. Z rysunku tego wynika, że amplitudy rezonansowe maleją ze zmniejszaniem się długości prętów, natomiast obszary rezonansowe rozszerzają się ze zmniejszaniem się długości prętów. Wnioski te również są słuszne dla amplitud przemieszczeń $U_2(t)=u_3(1_3, t)$ i $U_3(t)=u_3(0, t)$ brył m_2 i m_3 pokazanych na rys. 17.

Z kolei, na rysunkach 18 i 19 zbadano wpływ odpowiednio mas $m_2=m_3$ i masy m_1 na amplitudy przemieszczeń V_1 bryły m_1 . Wykresy na rys. 18 dotyczą ustalonej masy m_1 , $R_1=m_1/m_0=0.625$, oraz takich zmian mas $m_2=m_3$ że $R_1=m_1/m_0=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, i=2, 3$. Z rys. 18 wynika, że w pierwszym obszarze rezonansowym amplitudy maleją ze wzrostem $R_2=R_3$.

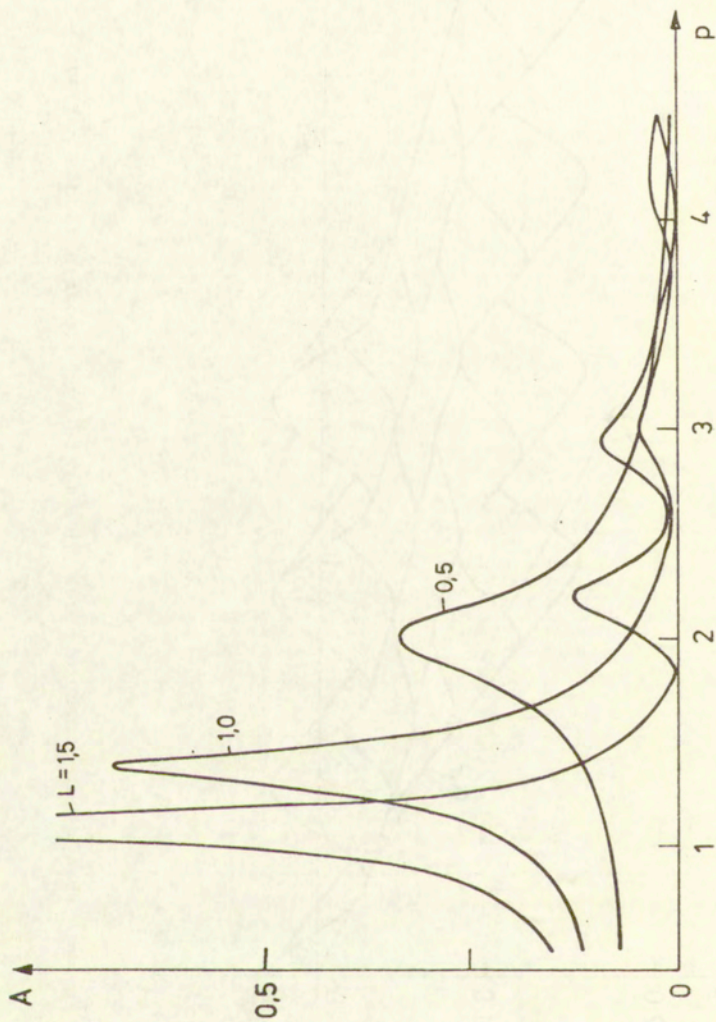
Wykresy na rys. 19 dotyczą wpływu masy m_1 przy ustalonych masach $m_2=m_3$. Przyjęto $R_1=m_1/m_0=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$. Przy przyjętych danych można zaobserwować, że amplitudy rezonansowe maleją ze wzrostem R_1 . Ponadto, zmiany amplitud są znacznie większe dla $R_1 \in \langle 0.2, 0.6 \rangle$ aniżeli dla $R_1 \in \langle 0.6, 1.0 \rangle$.



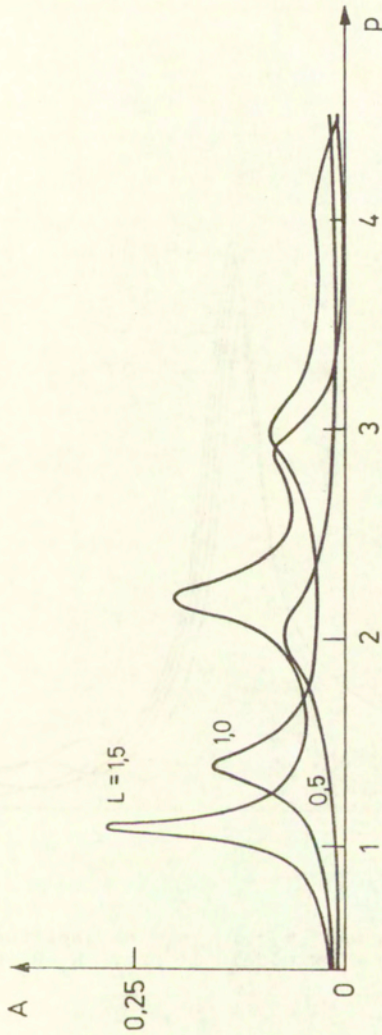
Rys. 14. Przemieszczenia przekrojów prętów (1), (2) w modelu II dla $p=1.37$



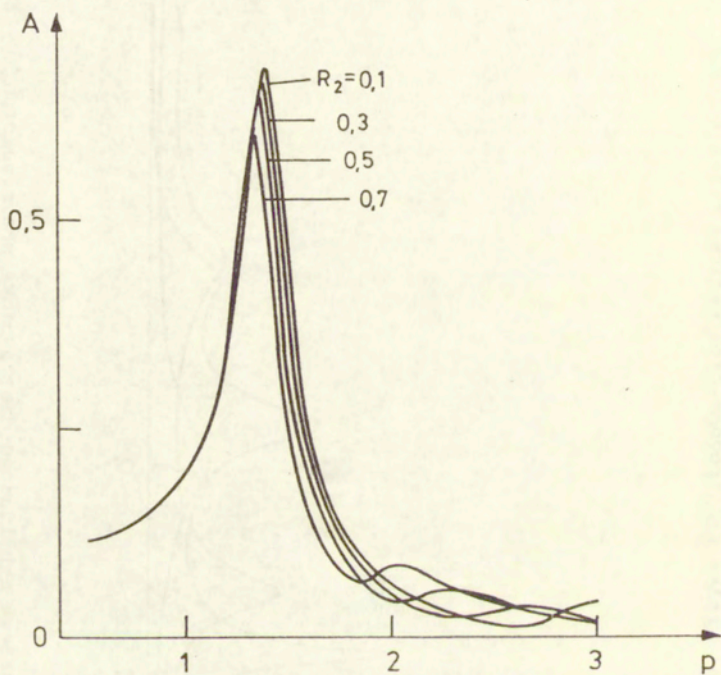
Rys. 15. Przemieszczenia przekrojów pręta (3) w modelu II dla $p=1.37$



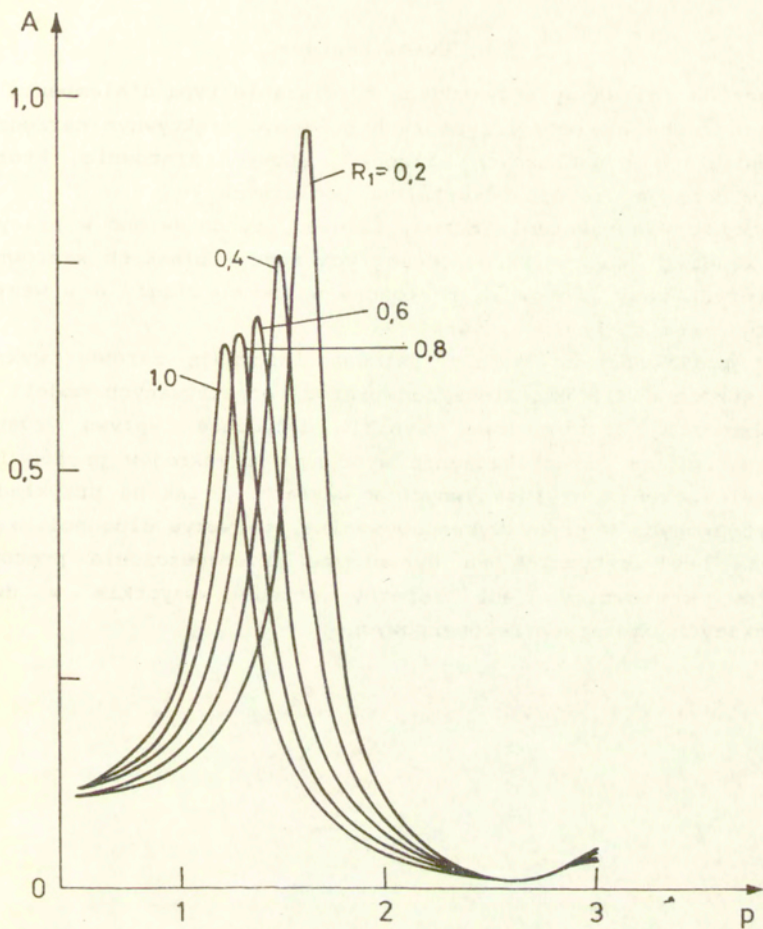
Rys. 16. Krzywe amplitudowo-częstościowe przemieszczeń V_1 bryły m_1 w modelu II przy $L=1$, $m_1=0.5, 1.0, 1.5$



Rys. 17. Krzywe amplitudowo-częstościowe przemieszczeń $U_2(t)=u_3(1, t)$ i $U_3(t)=u_3(0, t)$ brył m_2 i m_3 w modelu II przy $L_{z1} = 0.5, 1, 0, 1.5$



Rys. 18. Wpływ mas m_2 i m_3 na amplitudy przemieszczeń v bryły m_1 w modelu II³ przy $R_2=R_3=0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ ¹



Rys. 19. Wpływ masy m_1 na amplitudy przemieszczeń V_1 bryły m_1 w modelu 1II przy $R_1=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$

6. Uwagi końcowe.

Metoda falowa wykorzystująca rozwiązanie typu d'Alemberta dla równań ruchu w wielu przypadkach może być efektywnym narzędziem w badaniach dynamicznych układów prętowych kratownic, których pręty doznają głównie odkształceń podłużnych.

Sposób wykorzystania metody falowej przedstawiono w pracy na przykładzie dwóch dyskretno-ciągłych modeli płaskich kratownic, w których masy prętów są rozłożone w sposób ciągły a w węzłach umieszczone są bryły sztywne.

O możliwościach metody falowej informują zarówno wykresy przestrzenne dla przemieszczeń prętów rozpatrywanych modeli jak i bardziej szczegółowe wyniki dotyczące wpływu różnych parametrów na przemieszczenia wybranych przekrojów prętów i na przemieszczenia brył sztywnych w węzłach. I tak na przykład, z przytoczonych w pracy wykresów wynika, że wpływ długości prętów i mas brył sztywnych na dynamiczne przemieszczenia prętów i węzłów kratownicy jest istotny przede wszystkim w dwóch pierwszych obszarach rezonansowych.

Literatura

1. A.Niemierko, Rzecz o kratownicach, WKiŁ, Warszawa 1987.
2. I.Kisiel, Dynamika ustrojów prętowych, PWN, Warszawa 1956.
3. W.Gutkowski, Mechanics of an elastic continuum with a discrete lattice structure, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 22, 357-363, 1970.
4. E.Włodarczyk, Fale uderzeniowe w ośrodkach ciągłych, Część I: Fenomenologiczna teoria fal uderzeniowych, WAT 626/77, Warszawa 1977.
5. P.Jastrzębski, R.Solecki, J.Szymkiewicz, Kratownice, Obliczenia statyczne, Arkady, Warszawa 1970.
6. J.Pietrzak, J.Popłewska, Obliczenia kratownic przy użyciu teorii sieci, PWN, Warszawa-Poznań 1976.
7. W.Gutkowski, W.Nowacki, Cz. Woźniak, Dźwigary powierzchniowe, Ossolineum, Wrocław 1975.
8. W.Gutkowski, J.Bauer, Z.Iwanow, Explicit formulation of Kuhn-Tucker necessary conditions in structural optimization, *Computers and Structures*, 37, 753-758, 1990.
9. F.Geiger, Aufgabensammlung aus dem Gebiet der Statik, Band II, Verner-Verlag GMBH, Düsseldorf 1960.
10. J.M.Gere, W.Weaver, Analysis of framed structures, D.Van Nostrand Company, Inc., New York 1965.
11. R.Solecki, J.Szymkiewicz, Układy prętowe i powierzchniowe, Obliczenia dynamiczne, Arkady, Warszawa 1964.
12. A.Pielorz, Longitudinal collision of mechanical systems consisting of rods and rigid bodies, *Archiwum Budowy Maszyn*, 33, 249-263, 1986.
13. A.Pielorz, W.Nadolski, Longitudinal waves in a damped layered system, *Ingenieur-Archiv*, 60, 110-116, 1989.
14. W.Nadolski, A.Pielorz, Dynamic analysis of a multi-mass discrete-continuous layered system, *Ingenieur-Archiv*, 60, 237-247, 1990.
15. A.Pielorz, Fale sprężyste w dyskretno-ciągłych układach mechanicznych, Rozprawa Habilitacyjna, Prace IPPT 21/1992.
16. A.Pielorz, Application of wave method in investigation of drive systems, comparison with other methods, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 26, 97-112, 1988.
17. Z.Brzoska, Wytrzymałość materiałów, PWN, Warszawa 1972.
18. M.M.Bielajew, Wytrzymałość materiałów, WMON, Warszawa 1956.

DODATEK

Ze względu na fakt, że obliczenia numeryczne przytaczane w pracy dotyczą głównie krzywych amplitudowo-częstościowych, użyteczna jest znajomość częstości drgań własnych rozpatrywanych modeli dyskretno-ciągłych.

Równania częstości drgań własnych dyskretno-ciągłych modeli kratownicy otrzymuje się poszukując rozwiązania równań ruchu prętów kratownicy za pomocą metody rozdzielenia zmiennych przy pominięciu sił zewnętrznych i tłumienia w warunkach brzegowych.

Poszukując zatem rozwiązań równań (18) i (30) w postaci

$$u_i(x_i, t) = X_i(t)T(t), \quad i=1,2,3, \quad (D1)$$

mamy

$$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t) \quad (D2)$$

oraz

$$X(x_i) = A_i \sin(\omega x_i) + B_i \cos(\omega x_i), \quad i=1,2,3. \quad (D3)$$

Po podstawieniu (D2) i (D3) odpowiednio do warunków brzegowych (20) i (32) przy $d_{1j}=0$, $\dot{D}_1=0$ oraz przy $P(t)=0$ otrzymujemy poszukiwane równania częstości.

I. W przypadku modelu I przedstawionego na rys. 2 równanie częstości drgań własnych dla ω przyjmuje postać

$$a_{32} a_{44} (a_{13} a_{21} - a_{11} a_{23}) - a_{34} a_{43} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = 0, \quad (D4)$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_{11} &= C_4 \sin(\omega l_1) (R_1 \omega^2 - k_{11}) - K_0 \omega \sin \alpha \cos(\omega l_1), \\ a_{12} &= C_3 \sin(\omega l_2) (-R_1 \omega^2 + k_{11}) + K_0 \omega \sin \beta \cos(\omega l_2), \\ a_{13} &= C_3 \cos(\omega l_2) (-R_1 \omega^2 + k_{11}) - K_0 \omega \sin \beta \sin(\omega l_2), \\ a_{21} &= C_2 \sin(\omega l_1) (R_1 \omega^2 - k_{12}) - K_0 \omega \cos \alpha \cos(\omega l_1), \\ a_{22} &= C_1 \sin(\omega l_2) (R_1 \omega^2 - k_{12}) - K_0 \omega \cos \beta \cos(\omega l_2), \end{aligned} \quad (D5)$$

$$a_{23} = C_1 \cos(\omega l_2) (R_1 \omega^2 - k_{12}) + K_0 \omega \cos \beta \sin(\omega l_2),$$

$$a_{32} = -K_0 \omega \sin \beta,$$

$$a_{34} = (R_2 \omega^2 - k_{21}) \sin(\omega l_3) - K_0 \omega \cos(\omega l_3),$$

$$a_{43} = 1, \quad a_{44} = \sin(\omega l_3) \sin \beta,$$

$$C_1 = (\sin(\alpha + \beta))^{-1} \sin \alpha, \quad C_2 = (\sin(\alpha + \beta))^{-1} \sin \beta,$$

$$C_3 = (\sin(\alpha + \beta))^{-1} \cos \alpha, \quad C_4 = (\sin(\alpha + \beta))^{-1} \cos \beta.$$

Gdy $U_1 = 0$, to

$$a_{11} = \sin(\omega l_1) \cos \beta, \quad a_{12} = -\cos \alpha \sin(\omega l_2),$$

$$a_{13} = -\cos \alpha \cos(\omega l_2).$$

I. W przypadku modelu II, przedstawionego na rys. 3, równanie częstości drgań własnych dla ω jest następujące

$$\begin{aligned} & a_{15} a_{26} a_{53} a_{64} (-a_{32} a_{41} + a_{31} a_{42}) - a_{55} a_{64} [-a_{33} (a_{16} a_{22} a_{41} + \\ & + a_{11} a_{26} a_{42}) + a_{43} (a_{16} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{26} a_{32})] + a_{15} a_{22} a_{56} a_{64} \cdot \\ & \cdot (-a_{33} a_{41} + a_{31} a_{43}) - a_{53} a_{65} [-a_{34} (a_{16} a_{22} a_{41} + a_{11} a_{26} a_{42}) + \\ & + a_{44} (a_{16} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{26} a_{32})] - a_{11} a_{22} a_{56} a_{65} (a_{33} a_{44} - a_{34} a_{43}) + \\ & + a_{15} a_{22} a_{53} a_{66} (a_{31} a_{44} - a_{34} a_{41}) + a_{11} a_{22} a_{55} a_{66} \cdot \\ & \cdot (a_{33} a_{44} - a_{34} a_{43}) = 0, \end{aligned} \tag{D6}$$

gdzie

$$a_{11} = \omega K_0 \sin \alpha, \quad a_{15} = \omega K_0, \quad a_{16} = R_3 \omega^2 - k_{31},$$

$$a_{22} = 1.0, \quad a_{26} = -\sin \beta,$$

$$a_{31} = C_4 \sin(\omega l_1) (R_1 \omega^2 - k_{11}) - K_0 \omega \sin \alpha \cos(\omega l_1),$$

$$a_{32} = C_4 \cos(\omega l_1) (R_1 \omega^2 - k_{11}) + K_0 \omega \sin \alpha \sin(\omega l_1),$$

$$a_{33} = C_3 \sin(\omega l_2) (-R_1 \omega^2 + k_{11}) + K_0 \omega \sin \beta \cos(\omega l_2),$$

$$a_{34} = C_3 \cos(\omega l_2) (-R_1 \omega^2 + k_{11}) - K_0 \omega \sin \beta \sin(\omega l_2),$$

$$a_{41} = C_2 \sin(\omega l_1) (R_1 \omega^2 - k_{12}) - K_0 \omega \cos \alpha \cos(\omega l_1),$$

$$\begin{aligned}
a_{42} &= C_2 \cos(\omega l_1) (R_1 \omega^2 - k_{12}) + K_0 \omega \cos \alpha \sin(\omega l_1), & (D7) \\
a_{43} &= C_1 \sin(\omega l_2) (R_1 \omega^2 - k_{12}) - K_0 \omega \cos \beta \cos(\omega l_2), \\
a_{44} &= C_1 \cos(\omega l_2) (R_1 \omega^2 - k_{12}) + K_0 \omega \cos \beta \sin(\omega l_2), \\
a_{53} &= -K_0 \omega \sin \beta, \\
a_{55} &= (R_2 \omega^2 - k_{21}) \sin(\omega l_3) - K_0 \omega \cos(\omega l_3), \\
a_{56} &= (R_2 \omega^2 - k_{21}) \cos(\omega l_3) + K_0 \omega \sin(\omega l_3), \\
a_{64} &= 1, \quad a_{65} = \sin(\omega l_3) \sin \beta, \quad a_{66} = \cos(\omega l_3) \sin \beta, \\
C_1 &= (\sin(\alpha + \beta))^{-1} \sin \alpha, \quad C_2 = (\sin(\alpha + \beta))^{-1} \sin \beta, \\
C_3 &= (\sin(\alpha + \beta))^{-1} \cos \alpha, \quad C_4 = (\sin(\alpha + \beta))^{-1} \cos \beta.
\end{aligned}$$

Gdy $U_1 = 0$, to

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \sin(\omega l_1) \cos \beta, & a_{32} &= \cos \beta \cos(\omega l_1), \\
a_{33} &= -\cos \alpha \sin(\omega l_2), & a_{34} &= -\cos \alpha \cos(\omega l_2).
\end{aligned}$$

Spis treści

1. Wstęp	4
2. Założenia, sformułowanie problemu	7
3. Szczególne przypadki kratownicy płaskiej	12
4. Rozwiązanie dla modelu I	18
4.1. Obliczenia numeryczne	24
5. Rozwiązanie dla modelu II	36
5.1. Obliczenia numeryczne	42
6. Uwagi końcowe	50
Literatura	51
Dodatek	52