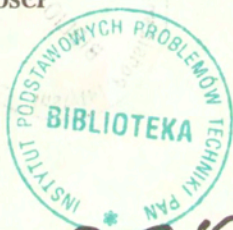


J. Ranachowski, I. Malecki

WYZNACZANIE METODAMI KŁASYCZNYMI
DYNAMICZNYCH MODUŁÓW SPRĘŻYSTOŚCI

7/1999



P.269

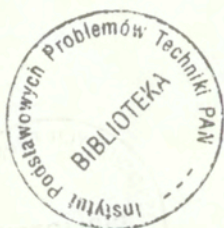
WARSZAWA 1999

<http://rcin.org.pl>

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN
BIBLIOTEKA
02-106 Warszawa, ul. Pawińskiego 5B
Tel. 22-826-74-10

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 lipca 1999 r.



56530

202.9



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 2,5 Ark. druk. 2,50
Oddano do drukarni w lipcu 1999r.

ATOS Poligrafia-Reklama, W-wa, ul. Jana Kazimierza 35/37

<http://rcin.org.pl>

Jerzy RANACHOWSKI

Ignacy MALECKI

IPPT PAN

WYZNACZANIE METODAMI AKUSTYCZNYMI
DYNAMICZNYCH MODUŁÓW SPRĘŻYSTOŚCI

S t r e s z c z e n i e

Celem pracy jest przedstawienie przeglądu dotychczas stosowanych i propozycji nowych zastosowań metod akustycznych do wyznaczania dynamicznych modułów sprężystości materiałów. Rozróżniono metody wyznaczania modułów sprężystości jako stałych materiałowych i określania wpływu na rzeczywistą reakcję sprężystą materiału parametrów pola zaburzeń mechanicznych działających na badany obiekt. Wpływ ten analizowano dla różnych typów materiałów i rodzajów sygnałów akustycznych. Rozpatrzono właściwości materiałów doskonale sprężystych i materiałów sprężystych z których występuje tłumienie fal akustycznych wywołane rozproszeniem cieplnym i tarciem wewnętrznym. Zbadano zależność od dynamicznych modułów sprężystości fali akustycznej o małej amplitudzie, fali o skończonej amplitudzie i fali uderzeniowej. Dla charakterystyki części statycznej i części dynamicznej modułów sprężystości użyto różnic w prędkości rozchodzenia fal ultradźwiękowych w zespolonej impedancji akustycznej. Rozróżniono impedancję dla fali harmonicznej i impulsu akustycznego.

Szczególłą uwagę zwrócono na zastosowanie metody akustycznej do badania dynamicznej reakcji materiału na falę uderzeniową. Stwierdzono, że dynamiczne moduły określające tę reakcję są funkcją dwóch czynników: współczynnika nieliniowości sprężystej materiału i amplitudy skoku pierwszych pochodnych względem czasu odkształceń na powierzchni nieciągłości propagującej się jako fala uderzeniowa. Zaproponowano zastosowanie metody akustycznej do wyznaczenia chwilowej wartości modułu sprężystości materiału w funkcji łącznego działania tych dwóch czynników.

1. Cel i założenia pracy

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie zastosowań metod akustycznych do wyznaczania właściwości sprężystych i tłumiących materiałów konstrukcyjnych w przypadkach, gdy mechaniczne metody wytrzymałościowe nie dostarczają informacji niezbędnych do oceny zachowania się tych materiałów w warunkach eksploatacyjnych i gdy występują szybkozmiennne obciążenia dynamiczne. Praca nie obejmuje opisu całości metod akustycznych powszechnie dziś stosowanych w materiałoznawstwie, ograniczając się do pokazania interpretacji fizycznej i ujęcia teoretycznego zależności pola akustycznego od parametrów mechanicznych i wynikających stąd nietypowych zastosowań metod akustycznych w inżynierii materiałowej.

Zasadnicza wartość metod akustycznych polega na tym, że pozwalają one na wyznaczenie dynamicznych właściwości poddanego zmiennym naprężeniom mechanicznym materiału, w szczególności jego modułów sprężystości i stałych tłumienia. Oznacza to, że przy badaniach akustycznych trzeba te parametry traktować nie jako stałe specyficzne dla danego materiału, lecz jako wielkości wprawdzie zależne głównie od właściwości mechanicznych materiału, ale także od przebiegu w czasie i natężenia zmiennych naprężeń.

Pomiary akustyczne używane w inżynierii materiałowej dotyczą z reguły prędkości rozchodzenia się i współczynnika tłumienia fal ultradźwiękowych. Pomiary wibroakustyczne odnoszące się do drgań mechanicznych elementów i konstrukcji nie wchodzi w zakres obecnych rozważań. Pomiary przeprowadza się na próbkach o ograniczonych wymiarach, np. w prętach albo płytkach, w których prędkość i tłumienie zależą także od wielkości i kształtu próbki, a wielokrotne odbicia fal komplikują interpretację wyników. Jednak otrzymane rezultaty stosunkowo łatwo przeliczyć można na układ, w którym wymiary próbki są bardzo duże w stosunku do długości fali ultradźwiękowej i badania wolno odnieść do ośrodka nieograniczonego. Założenie to przyjęto dla lepszego uwydatnienia sensu fizycznego metod akustycznych i do wyeliminowania czynników powodujących przypadkowe, zależne od warunków pomiaru różnice w ocenie właści-

ciwości materiału.

Rozważania ograniczają się do materiałów makroskopowo jednorodnych i izotropowych, gdyż badania wpływu mikrostruktury materiału na jego właściwości akustyczne stanowi osobne zagadnienie, któremu poświęcone było kilka prac autorów [1], [2].

W pracy szczególną uwagę zwrócono na wpływ zmian amplitudy występujących w polu akustycznym naprężeń na chwilowe dynamiczne wartości modułów sprężystości materiału. Jest to bowiem zagadnienie nie w pełni teoretycznie i doświadczalnie zbadane, a mające duże znaczenie praktyczne, np. w technice wojskowej. Są bowiem przypadki, gdy materiał narażony jest na bardzo silną falę uderzeniową i pod jej działaniem wykazuje inne właściwości sprężyste niż przy pomiarach przeprowadzonych metodami quasistatycznymi. Zagadnienie leży na granicy ostatecznie dynamicznie rozwijającego się działu akustyki jakim jest akustyka nieliniowa.

2. Impedancja akustyczna jako stała materiałowa

Pomiary akustyczne przydatne w inżynierii materiałowej dotyczą z reguły prędkości rozchodzenia się i tłumienia fal ultradźwiękowych o małym natężeniu. Dla opisu uzyskanych rezultatów, a zwłaszcza zależności między wielkościami akustycznymi i parametrami sprężystymi materiału wygodnie jest posługiwać się pojęciem impedancji akustycznej. Jest to bowiem wielkość fizyczna wiążąca zachodzące w polu akustycznym efekty dynamiczne wynikające z lokalnych zmian naprężeń z efektami kinematycznymi polegającymi na ruchach elementów ośrodka, co jest głównym źródłem informacji uzyskiwanych czujnikami akustycznymi o dynamicznych właściwościach testowanych materiałów.

W ogólnych warunkach wielkość ta charakteryzuje związek między pochodnymi względem czasu tensora naprężeń i tensora odkształceń, co prowadzi do bardzo skomplikowanych wzorów analitycznych. Dla potrzeb akustyki opis ten można jednak znacznie uprościć. Zgodnie z wyżej przyjętymi założeniami, że ośrodek jest nieograniczony, jednorodny i izotropowy można uwa-

zać, że fale akustyczne o różnych modach drgań rozchodzą się w nim niezależnie, w szczególności nie bierzemy pod uwagę sprzężeń występujących na powierzchni próbki w postaci fali Rayleigha. Pole akustyczne można wówczas sprowadzić do rozchodzenia się dwóch typów fal: fali dylatacyjnej i fali ścinania. Opisujące ogólnie rozchodzenie się obu typów fal równanie lokalnych przemieszczeń u ośrodka /u jest wektorem/ ma postać [3]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div} u + \mu \nabla^2 u \quad /2.1/$$

gdzie: ρ - gęstość ośrodka,
 λ, μ - stałe Lamé,
 ∇^2 - laplacian.

Równanie to jest spełnione formalnie dla ośrodka stałego bez strat, co oznacza, że energia fali akustycznej nie ulega rozproszeniu ani pochłanianiu przez ośrodek. W dalszym ciągu posługując się terminologią powszechnie stosowaną w akustyce, lokalne przemieszczenia u i lokalne prędkości v tych przemieszczeń określane będą jako "przesunięcie cząstki" i "prędkość cząstki". Przemieszczenia dla obu typów fal dogodnie jest czasem wyrazić przez odpowiednie potencjały akustyczne

$$u_d = \text{grad} \Phi, u_s = \text{rot} \Psi \quad /2.2/$$

gdzie: Φ - bezwirowy potencjał skalarny,
 Ψ - bezźródłowy potencjał wektorowy.

Drugie pochodne tych potencjałów względem czasu pomnożone przez objętość ośrodka są miarą lokalnych zmian naprężenia towarzyszących obu falom. Pozwala to na wyrażenie impedancji akustycznej przez jedną zmienną. Dzieląc równanie /2.1/ na części odpowiadające potencjałom bezwirowym i bezźródłowym, otrzymuje się klasyczne równania ruchu fali dylatacyjnej d i fali ścinania s odniesione do prędkości cząstki

$$\rho \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla^2 u_d \quad /2.3/$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 u_s \quad /2.4/$$

Dla ośrodka nieograniczonego w założeniu, że rozchodzi się w nim akustyczna fala płaska w kierunku osi x falę dylatacyjną można uważać za falę podłużną o prędkości rozchodzenia się c_L , prędkości cząstki v_x i naprężeniu lokalnym σ_{xx} oraz traktować falę ścinania jako falę poprzeczną o odpowiednich parametrach c_T , v_y , σ_{xy} /oś y może mieć dowolny kierunek prostopadły do osi x , gdyż fala poprzeczna może nie być spolaryzowana/. Otrzymujemy wtedy równania

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad /2.5/$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \quad /2.6/$$

równanie /2.5/ różni się współczynnikiem od równania /2.3/, gdyż w fali podłużnej następuje jednocześnie zmiana objętości i kształtu elementu ośrodka.

Impedancję akustyczną zdefiniować można na podstawie stosunków energetycznych albo też zależności między prędkością cząstki i zmianą naprężenia. Strumień energii ϕ wypływający z obszaru V , w którym istnieje pole tensorowe, naprężeń σ_{ij} i pole wektorowe prędkości v_i równa się zmianie w jednostce czasu energii E zawartej w tym obszarze

$$\phi = \frac{\partial E}{\partial t} = \iiint_V \left(v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dV \quad /2.7/$$

Stosując przekształcenie Greena otrzymujemy

$$\varphi = \iint_S (\sigma_{ij} v_i) n_j dS \quad /2.8/$$

gdzie: n_j - wektor jednostkowy normalny do powierzchni S .

Zgodnie z przyjętymi założeniami wolno rozdzielić strumienie energii fali podłużnej i poprzecznej

$$\varphi_L = \iint_S (\sigma_{ii} v_i) n_i dS; \quad \varphi_T = \iint_S (\sigma_{ij} v_j) n_i dS \quad /2.9/$$

Dla ustalonych wyżej współrzędnych $i = x$, $j = y$ ponieważ fala jest płaska, Gęstość strumienia energii wynosi

$$\varphi_L = v_L \sigma_{xx}; \quad \varphi_T = v_T \sigma_{xy} \quad /2.10/$$

Wprowadzenie impedancji akustycznej ma na celu wyeliminowanie jednej ze zmiennych pola akustycznego przez wprowadzanie stałych materiałowych wiążących zmienne v_i i σ_{ij} . Definicja impedancji akustycznej opiera się na zastosowaniu pierwszego systemu analogii elektromechanicznych [4], wedle którego odpowiednikiem prądu jest prędkość, a odpowiednikiem napięcia - siła względnie naprężenie w przypadku rozłożonego pola sił. Ponieważ stosunek tych dwóch wielkości jest inny dla fali podłużnej i fali poprzecznej nieodzowne jest przypisanie innych impedancji akustycznych obu tym falom wedle wzorów

$$Z_L = \frac{\sigma_{xx}}{v_x}; \quad Z_T = \frac{\sigma_{xy}}{v_y} \quad /2.11/$$

Wynika stąd energetyczna definicja tych impedancji

$$Z_L = \frac{\sigma_{xx}^2}{\varphi_L} = \frac{\varphi_L}{v_x^2}; \quad Z_T = \frac{\sigma_{xy}^2}{\varphi_T} = \frac{\varphi_T}{v_y^2} \quad /2.12/$$

Bezpośredni pomiar gęstości strumienia energii nie jest w praktyce stosowany, pozostaje zatem przyjęcie za podstawę stosunku naprężenia do prędkości cząstki odniesiony do materiałów o określonych właściwościach sprężystych i pola akustycznego o założonych zmianach natężenia w funkcji czasu.

3. Fala akustyczna o małej amplitudzie w materiale doskonale sprężystym

Z reguły przy stosowaniu metod akustycznych do wyznaczenia stałych materiałowych pomiary realizuje się falami akustycznymi o małej amplitudzie lub używając ścisłej terminologii matematycznej falami "o nieskończenie małej amplitudzie". Dla takiej fali impedancja akustyczna może być bez zastrzeżeń traktowana jako stała materiałowa i można bez dodatkowych ograniczeń stosować wzory /2.11/. Wynika to z podstawowej cechy fali akustycznej o małej amplitudzie, dla której zależność naprężenie-przesunięcie cząstki jest ściśle liniowa.

Właściwości ośrodka doskonale sprężystego charakteryzuje jak wiadomo macierz współczynników sprężystości c_{mn} wiążących składowe tensora naprężeń σ_{ij} i odkształceń ϵ_{kl}

$$\sigma_{ij} = c_{mn} \epsilon_{kl} \quad /3.1/$$

Przy przyjętych w p. 1 założeniach zagadnienie sprowadza się do rozchodzenia się fali podłużnej

$$\sigma_{xx} = c_{11} \epsilon_x \quad /3.2/$$

i fali poprzecznej $c_{44} = c_{55} = c_{66}$

$$\sigma_{xy} = 2c_{44} \epsilon_{xy} \quad /3.3/$$

z uwagi na zależności

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}; \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad /3.4/$$

Z definicji /2.11/ i związków /3.2/, /3.3/ wynika

$$Z_L = \frac{c_{11}}{c_L}; \quad Z_T = \frac{2c_{44}}{c_T} \quad /3.5/$$

Współczynniki c_{11} i c_{44} wyraża się w teorii sprężystości współczynnikiemami Lamé λ i μ , w inżynierii materiałowej używa się powszechnie modułów sprężystości

$$c_{11} = \lambda + 2\mu = D = K + \frac{4}{3}G = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \rho c_L^2 \quad /3.6/$$

$$2c_{44} = \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \rho c_T^2 \quad /3.6a/$$

gdzie: D - moduł sprężystości fali podłużnej,

K - moduł sprężystości objętościowej,

G - moduł ścinania,

E - moduł Younga,

ν - współczynnik Poissona.

Impedancja akustyczna dla fali podłużnej i poprzecznej

$$Z_L = \rho c_L = \left[\rho \left(K + \frac{4}{3}G \right) \right]^{1/2}; \quad Z_T = \rho c_T = (\rho G)^{1/2} \quad /3.7/$$

$$c_L = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}; \quad c_T = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2} \quad /3.7a/$$

4. Różnice modułów mierzonych metodami akustycznymi i wytrzymałościowymi

Wyżej podane zależności między modułami sprężystości a naprężeniami i odkształceniami dotyczą materiału doskonale sprężystego i są dla takiego materiału teoretycznie ścisłe, w założeniu że zmiany w ośrodku są quasistatyczne, a ich prędkość nie ma wpływu na wyniki pomiarów. Natomiast przy pomiarach akustycznych dla ścisłego spełnienia równania /2.1/ potrzebne jest narzucenie dodatkowego warunku, że w materiale przy rozchodzeniu się fali akustycznej nie występują straty energii. Tymczasem takie założenie zawierałoby zbyt daleko idące uproszczenie, nie uzasadnione fizycznie nawet dla rozpatrywanych obecnie materiałów doskonale sprężystych. Wprawdzie dla tego typu materiałów pomija się straty energii związane z tarciem wewnętrznym i lepkością, ale trudno zaniedbać straty termiczne. Nie można bowiem pominąć faktu, że materiał traktowany jako doskonale sprężysty posiada skończoną przewodność cieplną. Związane z falą akustyczną zmiany temperatury muszą więc powodować termiczne rozproszenie energii.

Przyczyną lokalnych zmian temperatury ośrodka są zmiany jego gęstości. Przy rozchodzeniu się fali ścinania zmienia się tylko kształt elementów ośrodka, a ich objętość pozostaje stała, można zatem a priori założyć, że fala ścinania rozchodzi się w ośrodku jako zaburzenie izotermiczne. Moduł ścinania G /drugi współczynnik Lamé μ / wyznaczony metodą akustyczną na podstawie pomiaru prędkości fali poprzecznej ma więc teoretycznie dla materiału doskonale sprężystego tę samą wartość co odpowiedni moduł zmierzony quasistatyczną metodą wytrzymałościową.

Lokalne zmiany temperatury i związane z tym straty ciepłe powstają przy rozchodzeniu się fali dylatacyjnej, ich wielkość określa się ogólnie jako część termiczną współczynnika pochłaniania α_t . Współczynnik ten jest funkcją częstotliwości fali do czego wrócimy w następnym punkcie. Dla pewnej częstotliwości współczynnik α_t osiąga maksimum i maleje przy dalszym wzroście częstotliwości. Dla pomiarów prowadzonych na

częstotliwościach ultradźwiękowych rzędu setek kHz i wyższych okres jest zbyt krótki na wymianę ciepła i przy przejściu fali akustycznej następuje przemiana adiabatyczna. Oznacza to, że i w tym przypadku ośrodek zachowuje się jako bezstratny i równanie /2.5/ jest teoretycznie spełnione dla materiału doskonale sprężystego. Istotne jest jednak, że występujący w tym równaniu moduł K_{ad} zawarty we współczynniku $[\lambda + 2\mu] / 3.6/$ ma inną wartość niż przy pomiarze izotermicznym K_{iz} .

Ograniczymy się do określenia zależności między obu tymi modułami w najprostszym przypadku. Jeżeli na obszar o objętości V działa wszechstronne ciśnienie P to spełnione jest ogólne równanie termodynamiczne

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \frac{T}{\rho V C_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad /4.1/$$

gdzie: S - entropia układu,

ρ - gęstość ośrodka,

T - temperatura bezwzględna,

C_p - ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu.

Dla ciała stałego ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu i stałej objętości ma praktycznie tę samą wartość więc indeks p można dalej pominąć. Równanie to można zastosować do modułu sprężystości objętościowej K , który jest wielkością analogiczną jak dla ośrodków płynnych.

Zgodnie z obowiązującymi definicjami

$$\frac{1}{K_{ad}} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S; \quad \frac{1}{K_{iz}} \neq \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T; \quad \alpha_T = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad /4.2/$$

gdzie α_t współczynnik objętościowej rozszerzalności termicznej.

Z równania /4.1/ wynika poszukiwana zależność

$$\frac{1}{K_{ad}} = \frac{1}{K_{iz}} - \frac{\alpha_t^2 T}{\rho C} \quad /4.3/$$

W przybliżeniu, ponieważ $\frac{K_{ad} - K_{iz}}{K_{ad}} \ll 1$ można napisać
 biorąc pod uwagę wzory /3.6/, /3.6a/ i oznaczając $\gamma = \frac{\alpha_i^2 T}{\rho C}$

$$K_{ad} = K_{iz}(1 + \gamma K_{iz}), E_{ad} = E_{iz} \left(1 + \frac{\gamma E_{iz}}{9} \right)$$

$$V_{ad} = V_{iz} + (1 + V_{iz}) \frac{\gamma E_{iz}}{9}$$

i jak wyżej podano $G_{ad} = G_{iz}$.

W tabelicy 1 podano [5] różnice między adiabatycznym i izotermicznym modułem Younga $E_{ad} - E_{iz}$, moduł ten bowiem jest bardziej przydatny dla obliczeń technicznych niż moduł K.

Tabelica 1

Materiał	E [Pa × 10 ¹⁰]	E _{ad} -E _{iz} [Pa × 10 ⁸]
Glin	7,1	3,2
Miedź	12,5	3,7
Stal	20,0	4,8
Ołów	1,6	0,36
Nikiel	20,5	6,1
Srebro	7,5	2,6
Cynk	10,5	10,7
Wolfram	36,2	2,8

5. Fala akustyczna o małej amplitudzie w materiale sprężystym ze stratami

Obszerne zagadnienie badania wpływu właściwości materiałów na tłumienie fal akustycznych wykracza poza ramy niniejsze-

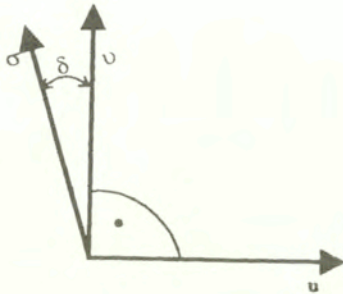
go opracowania. Dla postawionego w nim celu wystarczy ten problem potraktować formalnie i biorąc za punkt wyjścia współczynnik tłumienia α fali sinusoidalnej o częstotliwości zdefiniowany zależnością

$$a = a_{\max} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - kx)} \quad /5.1/$$

gdzie a zmienna wielkość fizyczna.

Współczynnik α stanowi sumę różnego typu strat występujących w materiale, na które składają się straty na tarcie wewnętrzne, lepkość i rozproszenie cieplne. Omówione w p.4. Tłumienie przez rozproszenie termiczne jest więc składową sumarycznego tłumienia fali. W obecnych rozważaniach rozproszenie termiczne potraktowane zostało odrębnie, z tego względu, że wpływa także bezpośrednio na część rzeczywistą modułów sprężystości i impedancji akustycznej, a nie tylko na jej składową urojoną. Tłumienie fali akustycznej trzeba uwzględnić jako poprawkę do wzorów /2.5/, /2.6/ na jej rozchodzenie się. Występujące w tych wzorach wielkości trzeba traktować jako zespolone, co pozwala przedstawić spowodowane tłumieniem ośrodka przesunięcia fazowe analogicznie jak w elektrotechnice. Dla sinusoidalnej fali akustycznej w ośrodku sprężystym bez strat fale prędkości cząstki, zmian naprężenia i zmian gęstości są w fazie a fala przemieszczenia przesunięta o $\pi/2$. Wynika stąd zgodnie z definicjami /3.7/, że prędkość rozchodzenia się fali i impedancja akustyczna traktowane są jako wielkości rzeczywiste. Obecność strat powoduje przesunięcie względem siebie faz wektorów prędkości cząstki i naprężenia. Kąt tego przesunięcia /kąt stratności/ φ_s definiowany jest jako tangens stosunku części urojonej α do części rzeczywistej c_0 prędkości rozchodzenia się fali odniesionej do jej długości fali

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\alpha \lambda}{2\pi} = \frac{\alpha c_0}{\omega} \quad /5.2/$$



Rys. 1. Przesunięcia fazowe sinusoidalnie zmiennych wielkości pola akustycznego

odpowiednio

$$\hat{c} = c_0 \left(1 + j \frac{\alpha c_0}{\omega} \right)$$

gdzie c_0 - prędkość w ośrodku bezstratnym.

Zależności te odnoszą się do fal podłużnych i poprzecznych.

Moduł wielkości \hat{c}

$$|c| = c_0 \left[1 - \left(\frac{\alpha c_0}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2}$$

odpowiada prędkości fali akustycznej w ośrodku ze stratami.

Wzór ten opisuje zatem spowodowaną tłumieniem dyspersję fali akustycznej. W niewielkim zakresie częstotliwości kąt stratności traktować można jako dogodną do zastosowań technicznych stałą materiałową. Trzeba jednak brać pod uwagę, że w dużej części materiałów w przybliżeniu stały jest stosunek α/ω^2 a nie α/ω co oznacza, że dla tych materiałów kąt stratności rośnie proporcjonalnie do częstotliwości.

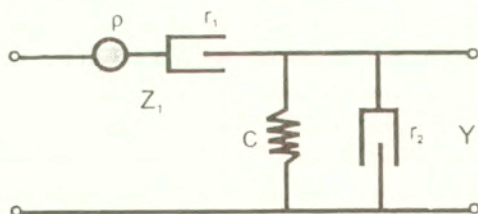
Dla stosowanych w technice materiałów konstrukcyjnych z reguły można przyjąć, że $c_0 \gg \omega \alpha$ i pominąć dyspersję fali akustycznej spowodowaną tłumieniem. Dyspersja ta występuje w materiałach silnie tłumiących np. stosowanych jako materiały izolacyjne, wzory /2.5/ i /2.6/ nie mogą być jednak w tym przypadku zastosowane, gdyż warunek że c_L względnie c_T są stałe nie jest spełniony. Dotyczące fal akustycznych w tych mate-

riałach wzory analityczne są bardziej skomplikowane i nie mieszczą się w ramach obecnego opracowania. Przesunięcie fazowe między falami prędkości cząstki i zmian naprężeń oznacza, że zgodnie z definicją /2.5/ impedancja akustyczna powinna być traktowana jako wielkość zespolona w ogólnej postaci

$$\hat{Z} = Z_0 \left(1 + j \frac{\alpha c_0}{\omega} \right) \quad /5.3/$$

Wymaga to korekty zastosowanej w p. 2 prostej analogii prędkość-natężenie prądu odnoszącej się do układów bezstratnych o stałych skupionych. Analogią rozchodzenia się fali akustycznej w ośrodku rozciąglym jest rozchodzenie się fali napięć i prądów w długiej linii telekomunikacyjnej. Analogia ta została zastosowana zarówno do ośrodków stałych [7], jak i lepkich cieczy [8], w obu przypadkach ma jednak tę samą formalną postać. Dalsze uogólnienie systemu analogii dla ośrodków ciągłych polegające na porównaniu pola akustycznego ze stratami z polem elektromagnetycznym w dielektryku [9] nie daje się jednak zastosować w rozpatrywanym tutaj problemie ze względu na konieczność łącznego traktowania pola elektrycznego i magnetycznego.

Model czwórnikowy określony w I systemie analogii elektromechanicznych przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Analogowy czwórnik symulujący ośrodek sprężysty ze stratami

Model składa się z impedancji szeregowej Z_1 odpowiadającej gęstości ośrodka ρ , stratności r_1 i admitancji równoległej Y_2 złożonej z równolegle połączonych podatności C i stratności r_2 . Obie te wielkości są zatem wielkościami zespolonymi

$$\hat{Z}_1 = j\omega\rho + r_1; \quad \frac{1}{Y} = \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{r_2} \quad /5.4/$$

Wielkość ξ jest odpowiednikiem gęstości ośrodka nie wprowadzamy więc dla niej odrębnego oznaczenia, C odpowiada podatności ośrodka bez uwzględnienia strat czyli dla fali podłużnej

$$C_L = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \quad /5.5/$$

dla fali poprzecznej

$$C_T = \frac{1}{\mu} \quad /5.5a/$$

Trudność określenia parametrów czwórnika polega na tym, że oba elementy odpowiadające w systemie analogii stratom obrazują łącznie straty w materiale wywołane przewodnością cieplną, tarciem wewnętrznym i lepkością a oddzielne ich wyznaczenie jest praktycznie niemożliwe, dlatego czwórnik traktować trzeba jako całość. Zresztą analiza mechanizmów powstawania tych strat nie leży w zakresie niniejszej pracy. Dlatego wygodniej jest wprowadzić zamiast wielkości zespolonych ich przedstawienie przez kąty stratności określane wzorami

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{r_1}{\omega\rho} \quad |Z_1| \operatorname{tg}\delta_2 = \omega r_2 C \quad /5.6/$$

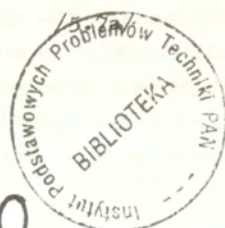
Zgodnie z przyjętym systemem analogii stała propagacji Γ wynosi

$$\Gamma = \frac{\omega}{|c|} = \sqrt{|Z_1| |Y|} \quad /5.7/$$

gdzie $|c|$ moduł prędkości propagacji fali, a impedancja akustyczna

$$\hat{Z}_a = \left(\frac{\hat{Z}_1}{Y} \right)^{1/2}$$

Po wprowadzeniu kątów stratności otrzymujemy



$$c_0 = \left(\frac{1}{\rho C} \right)^{1/2} \frac{(\cos \delta_1 \cos \delta_2)^{1/2}}{\cos \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)} \quad /5.8/$$

$$\hat{Z}_a = \left(\frac{\rho \cos \delta_2}{C \cos \delta_1} \right)^{1/2} \exp \left(j \cos \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2) \right) \quad /5.9/$$

Praktyczne zastosowanie tych wzorów napotyka jednak na duże trudności oddzielenia występujących w modelu czwórnikowym kątów stratności δ_1 i δ_2 . Dlatego wygodniej jest ograniczyć się do przyjęcia sumarycznego działania strat przyjmując np. $\delta_1 = 0$, $\delta = 2 \delta_2$, wtedy

$$\hat{c} = c_0 \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \delta} e^{j\delta} \quad /5.10/$$

$$\hat{Z}_a = Z_0 \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \delta} e^{j\delta} \quad /5.11/$$

gdzie c_0 i Z_0 odnoszą się do ośrodka bez strat.

Jest to inny sposób wyrażenia impedancji akustycznej jako wielkości zespolonej. Analogiczne przedstawienie zastosować można do modułów materiałowych, gdy testowany obiekt jest wystawiany na działanie w przybliżeniu sinusoidalnie zmiennych naprężeń. W tym przypadku decydującym czynnikiem o przydatności przedstawienia jest zależność współczynnika tłumienia od częstotliwości. Jeśli α / ω jest w przybliżeniu stałe to zgodnie z /5.10/ kąt stratności dla określonych warunków technicznych uważać można za stałą materiałową. Nasuwa się jednak zasadnicza trudność dla określenia zależności modułów materiałowych od częstotliwości polegająca na tym, że kąty stratności dla fal poprzecznych i podłużnych mają inne wartości. Rozdzielenie kątów stratności w czwórniku na rys. 2 symulującym nie da się doświadczalnie zrealizować, co również stanowi pewne ograniczenie dla teoretycznego przedstawienia takiego modelu. Pomijając grupy materiałów dźwiękochłonnych

wpływ tłumienia fali na prędkość jej rozchodzenia się jest niewielki i może być pominięty albo oszacowany w przybliżeniu. Dla danego kąta stratności dyspersję prędkości można ocenić z /5.8/. Ogólnie wolno przyjąć, że prędkość fali akustycznej o danej częstotliwości zawiera się w granicach między prędkością rozchodzenia się zaburzenia izotermicznego-quasistatycznego a prędkością fali ultradźwiękowej uważanej jako zaburzenie adiabaticzne. Znając z pomiarów /por. tablicę 1/ różnicę między modulem dynamicznym $\overset{wy}{|}$ znaczonym metodami akustycznymi a modulem wyznaczonym metodami wytrzymałościowymi można z łatwością ocenić czy, związana ze stratami cieplnymi dyspersja prędkości fali akustycznej powinna być brana pod uwagę.

Mimo wszystkich wyżej podanych ograniczeń i dowolności w interpretacji wyników pomiarów akustycznych, wydaje się, że zmierzone metodą akustyczną kąty stratności materiałów stanowią mogą wartościowe dane dla potrzeb inżynierii materiałowej.

Kąty stratności są inne dla fal podłużnych $\tilde{\zeta}_L$ i poprzecznych $\tilde{\zeta}_T$, z wzoru /5.5/ i wynika

$$\hat{Z}_L = Z_0 L e^{j\delta_L} \quad /5.12/$$

$$\hat{Z}_T = Z_0 T e^{j\delta_T} \quad /5.13/$$

przy założeniu, że współczynnik pochłaniania α spełnia warunek

$$\frac{\alpha}{f} = const$$

W przypadku, gdy

$$\frac{\alpha}{f^2} = const$$

kąt stratności uzależniony jest od częstotliwości, jeśli pomiar kąta ζ_0 odnosił się do częstotliwości f_0 trzeba zaznaczyć, że podane wzorami /5.12/, /5.13/ mają zastosowanie tylko dla fali o tej częstotliwości. Kąt stratności nie jest więc dla tych materiałów stałą materiałową. Niemniej jeśli jak to często ma miejsce w technice potrzebna jest znajomość modułów

w wąskim zakresie częstotliwości drgań, podanie przybliżonego kąta stratności dla tego zakresu może być przydatne. Wzór /5.13/ określa bezpośrednio kąt stratności dla modułu ścinania G , gdyż $\mu = G$, natomiast z /5.12/ wynika mniej praktycznie przydatny związek dla D .

6. Fala akustyczna o skończonej amplitudzie

Przy analizie rozchodzenia się fal akustycznych o małej amplitudzie zakłada się, że między wielkościami fizycznymi charakteryzującymi zaburzenia stanu równowagi ośrodka zachodzą liniowe zależności. Dotyczy to pola odkształceń, pola naprężeń i wzajemnej ich zależności, wedle prawa Hooke'a co wyrażają wzory /3.2/ i /3.3/

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \sigma_{ij} = c_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (i = j)$$

względnie

$$\sigma_{ij} = 2c_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (i \neq j)$$

Przy działaniu pola akustycznego o skończonej amplitudzie występują efekty nieliniowe wynikiem których jest między innymi zniekształcenie sinusoidalnego przebiegu fali akustycznej przy przejściu przez ośrodek. Efekty te występują wyraźnie przy działaniu silnych pól akustycznych w cieczech i gazach, co jest jednym z głównych tematów zainteresowań akustyki nieliniowej.

Zwykle w akustyce nieliniowej wielkości zmienne występujące w równaniach ruchu przedstawia się w formie szeregu Taylora i ogranicza się do uwzględnienia członu kwadratowego tego szeregu. Za podstawę bierze się zwykle zmiany ciśnienia p i gęstości ρ w ośrodku płynnym [12]

$$p = p_0 + A \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + \frac{B}{2} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2 \quad /6.1/$$

$$\text{gdzie } A = \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0, S_0} = \rho_0 c_0^2$$

$$B = \rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=\rho_0, S_0}$$

gdzie: S - entropia.

Stosunek B/A jest często stosowany zwłaszcza w hydroakustyce [13] jako dogodny wskaźnik nieliniowych właściwości ośrodka. Dla wody B/A wynosi ok. 5,2. W ciałach stałych stosunek prędkości cząstki v do prędkości rozchodzenia się fali czyli tzw. akustyczna liczba Macha

$$M = \frac{v}{c} \quad /6.2/$$

nawet przy silnych polach akustycznych ma znikomą wartość, toteż metody akustyki nieliniowej stosowane do płynów mają w inżynierii materiałowej raczej tylko teoretyczne zastosowanie. Niemniej warte są zainteresowania, pozwalają bowiem na formalnie dogodną interpretację fizyczną złożonych procesów drganiowych i mogą być wykorzystane do precyzyjnych pomiarów laboratoryjnych niektórych materiałów o stosunkowo niskich modułach sprężystości. Podobnie jak w innych problemach akustyki nieliniowej wystarczy uwzględnić drugi człon rozwinięcia zmiennej wielkości pola akustycznego np. przesunięcia cząstki. Istnieje kilka formalnych sposobów przedstawienia efektów nieliniowych zachodzących w silnych polach akustycznych. Punktem wyjścia oceny nieliniowości jest ogólne wyrażenie składowych tensora odkształceń

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad /6.3/$$

Przyjmuje się jak w poprzednich punktach, że fale poprzeczne i podłużne o skończonej amplitudzie rozchodzą się niezależnie, choć przy bliższej analizie można wykazać, że takie sprzężenie

teoretycznie istnieje, było to przedmiotem innej pracy autora [11]. Przy pominięciu strat na przewodnictwo cieplne i tarcie wewnętrzne równania ruchu dla fali podłużnej i fali poprzecznej można ogólnie przedstawić w postaci

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - c_L^2 H_L \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad /6.4/$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = c_T^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - c_T^2 H_T \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad /6.4a/$$

gdzie H_L i H_T współczynniki zależne od stopnia nieliniowości charakterystyki naprężenie-odkształcenie w zakresie naprężeń występujących w fali akustycznej. Nieco inne ujęcie stopnia nieliniowości [14] podana zostanie niżej.

Dla fali podłużnej zależnie od znaku $\partial u_x / \partial x$ następują lokalne zwiększenia bądź zmniejszenia prędkości rozchodzenia zaburzenia a w rezultacie zniekształcenie sinusoidalnego przebiegu zmian prędkości fali przy jej wejściu w ośrodek

$$v = v_{\max} \sin(\omega t)$$

Dla lepszego unaocznienia tego zjawiska wystarczy przytoczyć opis fali rozchodzącej się w płynie. Zmiany w czasie takiej fali określa zależność [12]

$$v_{\max} \sin(x, t) = v_{\max} \sin \left[\omega t - \frac{\omega x}{c_0} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v}{c_0} \right)^{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \right] \quad /6.5/$$

gdzie $\kappa = \frac{C_P}{C_V}$ stosunek ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu i stałej objętości, określający właściwości nieliniowe gazu.

W tym przypadku miarą nieliniowości ośrodka jest drugi wyraz pod znakiem sin.

Jak widać ze wzoru /6.5/ silna fala akustyczna w płynie odkształca się stopniowo od przebiegu sinusoidalnego i przybiera kształt "piły". Następuje to po przejściu przez falę drogi określonej w akustyce nieliniowej jako "odległość krytyczna" l_{cr} . W płynie wyznacza ją wzór

$$l_{cr} = \frac{2c_0^2}{(\kappa + 1)\omega v_{\max}} \quad /6.6/$$

Dla orientacji warto podać [12], że dla częstotliwości 2 MHz dla fali w powietrzu o natężeniu 140 dB $l_{cr} = 1,6$ cm, w wodzie przy amplitudzie ciśnienia 1 atm $l_{cr} = 80$ cm. Dla ciała stałego odległość krytyczną można oszacować dla fali podłużnej jako

$$l_{cr} = \frac{2c_0^2}{H_L \omega^2 u_{\max}} \quad /6.7/$$

różnica formalna z wzorem /6.6/ polega tylko na wprowadzaniu amplitudy przesunięcia zamiast amplitudy prędkości. Fakt, że dla $H = 0$ l_{cr} staje się równe nieskończoności jest fizycznie zrozumiałe, bowiem w materiale o ściśle liniowych właściwościach sprężystych omówione zniekształcenia kształtu fali nie mogą wystąpić.

Przedstawiony tu obraz rozchodzenia się zaburzenia odnosi się do ośrodka bez strat. Obecność strat powoduje stopniowe zmniejszenie się amplitudy fali, a więc zwiększa odległość krytyczną. Z chwilą osiągnięcia odległości krytycznej w fali akustycznej o skończonej amplitudzie następuje nagle lokalna zmiana pola akustycznego. Charakter tej zmiany zależy od parametrów pola i oznacza, że na powierzchni czoła fali powstaje nieciągłość określonego parametru. Rozróżnia się powierzchnie tzw. słabej nieciągłości i nieciągłości silnej. Nieciągłość silna jest typowym efektem bardzo silnych zaburzeń występujących w fali uderzeniowej i będzie omówiona w następnym punkcie. Dla fali akustycznej o skończonej amplitudzie możliwe jest przyjęcie przybliżonego założenia rozchodzenia się słabej nieciągłości. Jest to nieciągłość drugich pochodnych prze-

sunięcia cząstki względem czasu co fizycznie odpowiada rozchodzeniu się fali przyspieszenia. Zgodnie z przyjętymi w całej pracy założeniami dla podłużnej fali płaskiej rozchodzącej się w kierunku osi x powierzchnia nieciągłości jest płaszczyzną normalną do tego kierunku a ruch ośrodka na jej granicy spełnia równania

$$\frac{\partial^2 u^B}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^F}{\partial t^2} = A_W c_0^2; \quad \frac{\partial^2 u^B}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^F}{\partial x^2} = A_W N_x^2 \quad /6.8/$$

gdzie indeksy B i F odnoszą się odpowiednio do wielkości za i przed nieciągłością, A_W - amplituda skoku przyspieszenia, c_w - prędkość propagacji płaszczyzny przyspieszenia, N_x - wektor jednostkowy. Odchylenia zaburzenia od przebiegu sinusoidalnego mają charakter lokalny co oznacza, że długość fali o danej częstotliwości nie ulega zmianie mimo jej zniekształcenia. Płaszczyzny nieciągłości pojawiają się zatem w odległości krytycznej okresowo w odstępach czasowych

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c_0} \quad /6.9/$$

Dla ścisłości trzeba wspomnieć, że stwierdzenie to opiera się na założeniu, że fala podłużna o skończonej amplitudzie jest symetryczna czyli przebiega podobnie dla zagęszczeń i rozrzedzeń ośrodka. Przy dokładnej analizie trzeba by wprowadzić wziąć pod uwagę, że współczynniki nieliniowości H mają dla naprężeń rozciągających i naprężeń ściskających nieco inne wartości, jednak nie ma to większego znaczenia dla jakościowego opisu zjawisk. Oznacza to, że średnia prędkość rozchodzenia się fali i średnia wartość impedancji akustycznej dla fali o skończonej amplitudzie może być opisana wzorami /2.11/. Natomiast lokalnie prędkość rozchodzenia się zaburzenia c_w ulega wahaniom, gdyż do prędkości c_0 dla fali podłużnej dodaje się lub odejmuje prędkość cząstki

$$c_w = c_0 \pm v_x \quad /6.10/$$

Zastosowanie pojęcia impedancji akustycznej do fali o skończonej amplitudzie ma tylko ograniczony sens. Z uwagi na to, że wahania prędkości rozchodzenia się fali mają jedynie lokalny charakter a średnia prędkość odniesiona do całej długości fali jest z dużym przybliżeniem równa prędkości fali akustycznej o małej amplitudzie, wzór dla ośrodka bez strat /3.7/

$$Z_0 = \rho_0 c \quad /6.11/$$

może być i tu formalnie zastosowany. Ma on jednak określony sens fizyczny jedynie w zakresie, gdzie fala o skończonej amplitudzie może być w przybliżeniu traktowana jako fala o przebiegu sinusoidalnym. Przy zbliżaniu się fali do odległości krytycznej propagujące się po obu stronach płaszczyzny nieciągłości składowe tej fali wymagają podobnego traktowania jak przy analizie fali uderzeniowej rozpatrzonej w następnym punkcie.

Jak wyżej wspomniano wpływ nieliniowości ośrodka na rozchodzenie się fali może być w różny sposób przedstawiony. W nawiązaniu do typowego dla akustyki nieliniowej współczynnika B/A /wzór 6.1/ określa ^{się} w nieco inny niż wyżej podano sposób rozchodzenie się fali o skończonej amplitudzie w ciele stałym [14]. Analogicznie do /6.1/ prędkość cząstki przy uwzględnieniu kwadratowego członu w jej rozkładzie na szereg Taylora równa się

$$v = \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) c_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2 \left(\frac{B}{2A} - 1 \right) \quad /6.12/$$

Impedancja akustyczna wynosi zatem dla ośrodka płynnego przy przejściu fali o skończonej amplitudzie

$$Z_W = \rho_0 c_0 \left(1 + \frac{B}{2A} \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \left(\frac{B}{2A} - 1 \right) \right]^{-1} \quad /6.13/$$

Wielkość tę można umownie nazwać "chwilową impedancją akustyczną", która jest funkcją właściwości ośrodka i chwilowego stanu zaburzenia jego równowagi.

Przy rozchodzeniu się fali o skończonej amplitudzie następują też lokalne zmiany jej prędkości c_w co wynika z /6.1/

$$\frac{c_w - c_0}{c_0} = \left(\frac{B}{2A} - 1 \right) \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \left(\frac{B}{2A} - 1 \right) \frac{\rho_0}{\rho_0 c_0^2} \quad /6.14/$$

Związki powyższe dotyczą chwilowej wartości zaburzenia przy fali sinusoidalnej o skończonej amplitudzie, przy której następują kolejno wzajemnie przynajmniej częściowo znoszące się wahania prędkości związane z maksymami zagęszczenia i rozrzedzenia, a więc średnia impedancja akustyczna jest także w tym ujęciu bliska impedancji o małej amplitudzie /6.11/. Dla bardzo dużych naprężeń występujących przy fali uderzeniowej co omówione będzie w rozdz. 8 można przez analogię wprowadzić akusto-sprężysty współczynnik nieliniowości H_a określony zależnością

$$\frac{c - c_0}{c_0} = H_a \sigma_l \quad /6.14a/$$

Współczynnik ten przy zastosowaniu do pomiarów ultradźwiękowych nie odnosi się jednak do fal akustycznych o skończonej amplitudzie. Naprężenie σ_L jest naprężeniem statycznym o stałej wartości działającym w kierunku rozchodzenia się fali akustycznej. Prędkość c_0 i c_L odnoszą się do fal akustycznych z reguły fal ultradźwiękowych o małej amplitudzie, różnica prędkości wynika tylko ze statycznego naprężenia materiału.

Wzór /6.14a/ ma sens fizyczny dla materiału o określonych właściwościach sprężystych czyli krzywej naprężenie-odkształcenie σ/ε . W zakresie liniowym tej krzywej prędkość rozchodzenia się zaburzenia jest niezależna od wielkości naprężenia, czyli $H_a = 0$. Nieliniowość występuje powyżej punktu prze-

gięcia dla naprężenia $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_p$ i zależy od kształtu zakrzywienia krzywej $\bar{\sigma} / \bar{\epsilon}$ czyli teoretycznie współczynnik H_z jest dla $\bar{\sigma} > \bar{\sigma}_p$ funkcją naprężenia. Jednakże nawet przy precyzyjnych pomiarach laboratoryjnych wystarczy brać pod uwagę tylko stałe sprężyste do trzeciego rzędu czyli traktować H_a jako stałą materiałową.

Pomiary prędkości fali ultradźwiękowej [10] dały wartości współczynnika $H_a = -12,1 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$ dla stali i $H_a = -77,5 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$ dla duraluminium. Znak minus wynika ze zwyczajnie przyjmowanych w teorii sprężystości znaków naprężeń ściskających i rozciągających. Zamiast współczynnika H_a można wprowadzić poprzednio omówiony współczynnik B/A traktując naprężenie jako odpowiednik ciśnienia. Wtedy z /6.14/ i /6.14a/ wynika

$$\frac{B}{2A} = -(H_a \rho_0 c_0^2 + 1) \quad /6.15/$$

co dla wyżej podanych wartości H_a daje $B/A = 3,5$ dla stali, $B/A = 13,5$ dla duraluminium.

Na podstawie tych ostatnich zależności można wydedukować jakie zmiany gęstości materiału towarzyszą przejściu fali ultradźwiękowej. Przykładowo nawet dla ciśnienia 100 MPa wynoszą 0,05% dla stali i 0,36% dla duraluminium.

7. Fala uderzeniowa

Do realizacji postawionego na wstępie zadania wykorzystania metod akustycznych do wyznaczania dynamicznych modułów sprężystości badanie rozchodzenia się fali uderzeniowej jest szczególnie ważne dla potrzeb techniki i interesujące naukowo. Wynika to z następujących okoliczności:

- przy rozchodzeniu się fali uderzeniowej różnice między wartościami statycznymi i dynamicznymi modułów sprężystości materiałów są większe niż w poprzednio rozpatrywanych przypadkach,
- fala uderzeniowa nie jest falą okresowo zmienną, przez co stosowane zwykle w akustyce liniowej pojęcia prędkości fazowej i współczynnika tłumienia muszą być odpowiednio dostosowane

wane,

- metody akustyczne są dotychczas stosunkowo słabo wykorzystane w monitorowaniu fali uderzeniowej, a wydaje się że mogą być do tego celu bardzo pożyteczne,
- wyznaczenie dynamicznych modułów sprężystości jakie wykazuje materiał przy przejściu fali uderzeniowej mogą mieć ogromne znaczenie praktyczne dla określenia wytrzymałości tych materiałów na silne uderzenia, np. skuteczność osłon pancernych na uderzenia pocisków.

Rozchodzenie się fali uderzeniowej można w pewnym zakresie opisać formalnie metodami akustyki fizycznej co dodatkowo uzasadnia zainteresowanie akustyków tym zagadnieniem, niemniej różni się ono od klasycznych problemów akustyki pod dwoma zasadniczymi względami:

- 1/ Falę uderzeniową rozpatruje się zawsze jako pojedyncze zaburzenie równowagi ośrodka. Nawet w przypadku powtarzających się uderzeń nie traktuje się ich jako wzajemnie na siebie oddziaływujących i regularnie powtarzających się procesów.
- 2/ Przyjmuje się, że fala uderzeniowa ma znacznie większą amplitudę niż fale akustyczne ^{w porównaniu} nawet z większością przypadków rozpatrywanych w zakresie akustyki nieliniowej.

Dla uproszczenia złożonego formalizmu opisu procesów i uwydatnienia ich sensu fizycznego przyjmujemy, że fala uderzeniowa rozchodzi się w założonym na wstępie /p. 1/ układzie. Jest to układ, w którym fala płaska rozchodząca się wzdłuż osi x w materiale izotropowym i jednorodnym, a obszar rozchodzenia się traktowany jest jako nieograniczony. Rozpatrzona zostanie jedynie uderzeniowa fala podłużna, gdyż fale poprzeczne mają przede wszystkim znaczenie jako fale powierzchniowe, a więc wymagają do opisu innych założeń wyjściowych.

Zaburzenie powstające przy rozchodzeniu się fali uderzeniowej przedstawia skok określonych wielkości ośrodka na powierzchni nieciągłości. Dla przyjętego układu powierzchnia ta jest płaszczyzną o współrzędnych yz prostopadłą do kierunku x rozchodzenia się fali. Jest to w zasadzie powierzchnia tzw. silnej nieciągłości. Ogólnie przyjmuje się, że na takiej powierzchni nieciągłe są odniesione do danego punktu i chwili

z góry założone wielkości fizyczne i ich pierwsze pochodne. Jeśli jednak podobnie jak w poprzednich rozważaniach przyjmą za wielkość odniesienia przesunięcie cząstki u , to nieciągłość u czyli

$$u^B \neq u^F \quad /7.1/$$

gdzie indeksy B i F dotyczą jak poprzednio ośrodka za i przed nieciągłością, oznaczałaby powstanie pęknięcia i związane z tym nieodwracalne zmiany struktury materiału, co nie odpowiada przyjętym na wstępie założeniom i wymaga zupełnie innego ujęcia teoretycznego. Dlatego przyjmujemy, że fala uderzeniowa powoduje powstanie i rozchodzenie się nieciągłości na której następuje tylko skok pierwszych pochodnych przesunięcia cząstki czyli jest to propagująca się powierzchnia nieciągłości prędkości. Skok prędkości cząstki na płaszczyźnie nieciągłości oznaczymy przez A_v . Na tej płaszczyźnie powinny być spełnione warunki [16]

$$\frac{\partial u_x^B}{\partial x} - \frac{\partial u_x^F}{\partial x} = A_v N_x; \quad \frac{\partial u_x^B}{\partial t} - \frac{\partial u_x^F}{\partial t} = A_v c_u \quad /7.2/$$

gdzie N_x wektor jednostkowy, c_u - prędkość rozchodzenia się fali uderzeniowej równoznaczna z propagacją płaszczyzny nieciągłości.

Na powierzchni nieciągłości muszą być spełnione równania bilansu pędu i bilansu energii.

$$\left(\frac{\partial e^B}{\partial x} - \frac{\partial e^F}{\partial x} \right) N_x = \left(\frac{\partial u_x^B}{\partial t} - \frac{\partial u_x^F}{\partial t} \right) c_u \quad /7.3/$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x^B}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_x^F}{\partial t} \right)^2 + (e^B - e^F) \right] c_u = \left(\frac{\partial e^B}{\partial x} \frac{\partial u_x^B}{\partial t} - \frac{\partial e^F}{\partial x} \frac{\partial u_x^F}{\partial t} \right) N_x /7.3a/$$

Gęstość energii wewnętrznej zależy od rozkładu naprężeń, w ogólnym przypadku

$$T_i^j = \rho_0 \frac{\partial e}{(\partial u_i / \partial x_j)} \quad /7.4/$$

gdzie: T_i^j - tensor naprężenia,

ρ_0 - gęstość ośrodka niezaburzonego.

Zmiana energii wewnętrznej wiąże się z lokalną zmianą temperatury T i entropii S

$$T = \frac{\partial e}{\partial S} \quad /7.5/$$

Przy przejściu fali uderzeniowej proces po obu stronach nieciągłości ma charakter przemiany adiabatycznej, co powoduje zmianę temperatury i zważywszy na warunki /7.3/ i /7.3a/ wzrost entropii po przejściu nieciągłości, czyli

$$\Delta S = S^B - S^F > 0 \quad /7.6/$$

Oznacza to, że energia fali uderzeniowej przy zagłębianiu się w ośrodek zostaje stopniowo rozproszona a amplituda nieciągłości maleje. Jest to istotna różnica w porównaniu z rozchodzeniem się adiabatycznej fali akustycznej rozpatrzonym w p. 4, której entropia nie ulega zmianie. Zmiany tensora naprężeń i gęstości energii wewnętrznej

$$\Delta e = e^B - e^F \quad /7.7/$$

można przedstawić w funkcji przesunięć.

Pomijamy tu teoretyczną analizę tego zagadnienia [15] ograniczając się do podania wynikających z niej zależności analitycznych

$$\Delta e = \frac{\partial e}{\partial u_x} \Delta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \frac{\partial e}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e}{\partial u_x^2} \left[\Delta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \right]^2 + \dots \quad /7.8/$$

$$\Delta T_i^j = \rho \frac{\partial^2 e}{\partial u_x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 e}{\partial u_x^3} \left[\Delta \frac{\partial u_x}{\partial x} \right]^2 + \dots \quad /7.9/$$

gdzie dla skrócenia zapisu oznaczono $\Delta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_x^B}{\partial x} - \frac{\partial u_x^F}{\partial x}$
 Do powyższych zależności wprowadzamy warunki /7.2/ na granicy nieciągłości. We wszystkich tych wzorach wystarczy jednak ograniczyć się do wyrazów drugiego rzędu w rozkładzie na szereg Taylora, a zatem napisać [14]

$$A_v = m A_0 + m^2 A_1 \quad /7.10/$$

$$c_u = c_0 + m c_1 \quad /7.10a/$$

gdzie współczynnik m zależy od zbieżności szeregu.

Z równań /7.3/, /7.4/ i przy założeniu /7.2/ otrzymuje się równania wiążące prędkość rozchodzenia się v_x i amplitudę nieciągłości A z gęstością energii wewnętrznej

$$\left(\frac{\partial^2 e}{\partial u_x^2} N_x^2 - c_0^2 \right) A_0 = 0 \quad /7.11/$$

$$\left(\frac{\partial^2 e}{\partial u_x^2} N_x^2 - c_0^2 \right) A_1 - 2c_0 c_1 A_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 e}{\partial u_x^3} A_0^2 N_x^3 = 0 \quad /7.11a/$$

Istotny jest sens fizycznych występujących w tych równaniach pochodnych gęstości energii.

$$\frac{\partial e}{\partial u_x} = \sigma \quad - \text{odpowiada naprężeniu,}$$

$$\frac{\partial^2 e}{\partial u_x^2} = \lambda + 2\mu = D\sigma^2 \quad - \text{odpowiada modułowi sprężystości fali podłużnej.}$$

Moduł D traktować można jako izotermiczny /quasistatyczny/, bądź adiabatyczny /dynamiczny/. Z uwagi na prędkość rozchodzenia się fali uderzeniowej i stromość jej czoła właściwą jest druga hipoteza.

$$\frac{\partial^3 e}{\partial u_x^3} = H_u \sigma^3 \quad \text{jest współczynnikiem określającym odchylenie}$$

krzywej naprężenie-odkształcenie od przebiegu liniowego czyli jest miarą nieliniowości ośrodka.

Wynika stąd, że równanie /7.11/ jest prosto równaniem fali akustycznej rozchodzącej się w ośrodku nie zaburzonym z prędkością c^F . Jest rzeczą oczywistą, że przed dojściem nieciągłości ośrodek jest niezaburzony, a zatem

$$c_0 = c^F \quad /7.12/$$

Natomiast w drugim wyrazie szeregu /7.10a/ występuje wielkość

$$c_1 = \frac{1}{4c_0} H_u A_0^3 N_x^3 \quad /7.12a/$$

Ostatecznie dla prędkości rozchodzenia się fali uderzeniowej otrzymujemy wyrażenie

$$c_u = c_0 + \frac{m}{4c_0} H_u A_0^3 N_x^3 \quad /7.13/$$

a biorąc pod uwagę /7.10a/ odpowiednio

$$c_B = c_0 + \frac{m}{2c_0} H_u A_0^3 N_x^3 \quad /7.14/$$

czyli

$$c_0 < c_u < c^B \quad /7.15/$$

8. Zastosowanie metody akustycznej do określenia działania na materiał fali uderzeniowej

Podane tu wzory dla ich ilościowego zastosowania wymagają zmuśnych badań laboratoryjnych, w szczególności wyznaczenia współczynnika nieliniowości H materiału i amplitudy parametrów powierzchni nieciągłości. Natomiast sens fizyczny tych wzorów pozwalających na jakościową ocenę i wyjaśnienie mechanizmu rozchodzenia się fali uderzeniowej wydaje się bardzo istotny dla potrzeb inżynierii materiałowej. Jak widać fala uderzeniowa rozchodzi się z prędkością c_u większą niż fala akustyczna o małej amplitudzie, która ma prędkość $c_o = c_F$ i może się rozchodzić przed falą uderzeniową w ośrodku niezaburzonym. Interesujący jest fakt, że zaburzenie za płaszczyzną nieciągłości ma formalnie większą prędkość niż właściwa fala uderzeniowa. Wynika to z różnic chwilowych naprężeń i odkształceń w warstwie zaburzonej tuż za powierzchnią nieciągłości. Energia powstała chwilowo za falą uderzeniową zaburzenia jest stale przez nią pochłaniana, gdy fala c^B "dogania" falę c_u .

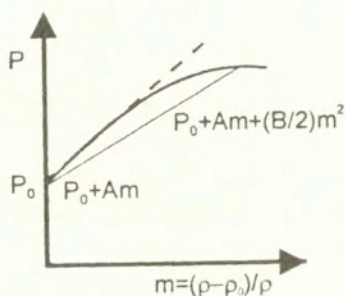
W ośrodku sprężystym liniowym, gdy $H = 0$ prędkość fali uderzeniowej jest niezależna od jej amplitudy i równa prędkości fali akustycznej o małej amplitudzie, to samo dotyczy lokalnego zaburzenia równowagi ośrodka za falą uderzeniową czyli dla takiego materiału

$$c_o = c^F = c_u = c^B \quad /8.1/$$

Metody akustyczne nie wnoszą w tym przypadku dodatkowych informacji o rozchodzeniu się fali uderzeniowej. Wydaje się natomiast, że nowe, dotychczas nie w pełni wykorzystane możliwości, otwiera zastosowanie metody akustycznej do badania procesów dynamicznych zachodzących pod działaniem fali uderzeniowej w materiałach wykazujących wyraźnie nieliniowe właściwości sprężyste.

Jak widać było z powyższej analizy zbadanie tradycyjnymi metodami właściwości dynamicznych takich materiałów wymaga

złożonych i kosztownych badań laboratoryjnych, a ze względu na złożoność zachodzących procesów wyznaczenie poszczególnych parametrów tych procesów nie pozwala na prawidłową ocenę wypadkowego efektu. Tymczasem właśnie metoda akustyczna daje możliwość takiej sumarycznej oceny procesu bez analizy jego składowych. W problemie technicznym którego dotyczy niniejsza praca wielkością będącą przedmiotem zainteresowania jest nie tyle stopień nieliniowości materiału co jego rzeczywista sprężysta reakcja na falę uderzeniową. Pokazuje to poglądowo rys. 3.



Rys. 3. Zastępczy moduł sprężystości ośrodka sprężysto nieliniowego

Ważny jest nie tyle przebieg krzywej σ / ε , co kąt nachylenia prostej $\Delta \sigma / \Delta \varepsilon$, który charakteryzuje reakcję materiału na odkształcenie o danej amplitudzie w tym przypadku na amplitudę fali uderzeniowej. Reakcję tę można by nazwać "pozornym dynamicznym modułem sprężystości". Jest to wielkość, która nie jest jednoznaczna stałą materiałową, jest ona nie tylko funkcją właściwości sprężystych, przede wszystkim właściwości nieliniowych tego materiału, ale także amplitudy i prędkości propagacji fali uderzeniowej. Wydaje się, że posługując się ujęciem akustycznym dogodnie jest wprowadzenie do tej charakterystyki odpowiednika impedancji akustycznej

$$Z_u = \xi c_u \quad /8.2/$$

Sens fizyczny tej wielkości jest jednak odmienny niż powszech-

nie stosowanej w akustyce liniowej impedancji akustycznej /3.7/. Impedancja akustyczna definiowana jest w odniesieniu do fali akustycznej o małej amplitudzie i przebiegu sinusoidalnym, a więc prędkość c_0 jest prędkością fazową c_φ . Tymczasem fala uderzeniowa jest krótkotrwałym impulsem o szerokim widmie częstotliwości, a zatem c_u odnosi się zawsze do prędkości grupowej c_γ nie do prędkości fazowej c_φ . Jak wiadomo

$$c_\gamma = c_\varphi + k \frac{\partial c_\varphi}{\partial k} \quad /8.3/$$

gdzie k - liczba falowa.

Wolno jednak bez popełnienia dużego błędu ograniczyć się do pomiaru prędkości zaburzenia generowanego przez falę uderzeniową w dość wąskim paśmie częstotliwości, w którym przynoszone jest maximum strumienia energii tej fali. Wtedy wpływ dyspersji prędkości fazowej jest do pominięcia i zmierzoną prędkość propagacji fali uderzeniowej można traktować formalnie jak prędkość fazową i przez analogię uważać Z_u za akustyczną impedancję falową. Dodatkowe uproszczenia polegają na traktowaniu ośrodka jako bezstratnego i gęstości ρ jako równej gęstości w ośrodku niezaburzonem. To pierwsze uproszczenie zakłada wprawdzie niezmiennosć entropii czyli ΔS równałoby się zeru we wzorze /7.6/, jednakże spowodowany tym błąd nie powinien dla badania materiałów konstrukcyjnych mieć znaczenia, ze względu na mały współczynnik tłumienia tych materiałów. Wprowadzając pozorny moduł dynamiczny D' można analogicznie do wzoru /3.6/ napisać

$$Z_u = \sqrt{\rho(\lambda' + 2\mu')} = \sqrt{\rho D'} \quad /8.4/$$

i

$$D' = \frac{Z_u^2}{\rho} = \rho c_u^2 \quad /8.4a/$$

Dla dokładniejszej oceny wpływu nieliniowej charakterystyki materiału na rozchodzenie się fali uderzeniowej trzeba porównać moduł D' z modulem dynamicznym D zmierzonym falą akustycz-

ną o małej amplitudzie, np. wyznaczyć stosunek

$$q = (D' - D)/D \quad /8.5/$$

Zgodnie z przyjętym poprzednio założeniem, że pomija się zmiany gęstości materiału

$$q = \frac{c_u^2}{c_0^2} \quad /8.6/$$

Można jednak pójść o krok dalej i wykorzystać przedstawione w poprzednim punkcie pojęcie akusto-sprężystego współczynnika nieliniowości /6.14/, którego interpretację trzeba dostosować do pomiaru fali uderzeniowej. Można mianowicie porównać różnice prędkości rozchodzenia się fali uderzeniowej i fali akustycznej o małej amplitudzie¹⁾ wynikającą z zależności /7.13/ różnicę prędkości rozchodzenia się fal ultradźwiękowych o małej amplitudzie w obecności statycznego pola naprężeń wedle /6.14/. Wydaje się, że takie porównanie może mieć przy opracowaniu odpowiedniej techniki pomiarowej duże znaczenie praktyczne. Wynika to z następujących okoliczności. Wzór /7.13/ daje dobry opis mechanizmu rozchodzenia się fali uderzeniowej i pozwala na lepszą teoretyczną analizę reakcji materiału na działanie tej fali, natomiast pomiar występujących w nim wielkości jest bardzo kłopotliwy, zwłaszcza o ile chodzi o wyznaczenie amplitudy skoku prędkości na nieciągłości, co jest niezbędne dla wyznaczenia charakteryzującego materiał parametru mH . Znacznie łatwiejsza byłaby sytuacja przy odpowiednim zastosowaniu wzoru /6.14/. Przypomnijmy, że naszym celem jest określenie dynamicznego a nie statycznego modułu sprężystości, względnie jego nieliniowej składowej. Wobec tego zamiast statycznego naprężenia występującego we wzorze /6.14/ można wprowadzić naprężenie dynamiczne towarzyszące fali uderzeniowej $\tilde{\sigma}_u$ co prowadzi do zależności

$$\frac{c_u - c_0}{c_0} = H_{ua} \sigma_u \quad /8.7/$$

σ_u można by uważać za równoznaczne z iloczynem $A_{VX} N_x$ we wzorze /7.2/. Zarysowana tu koncepcja wymagałaby dalszego rozwinięcia i uściślenia, niemniej wydaje się możliwa do zastosowania przy opisie dynamicznych właściwości materiałów narażonych na silne uderzenia.

9. Zakończenie

W pracy starano się przedstawić przede wszystkim interpretację fizyczną i podstawy ujęcia teoretycznego nierutynowych zastosowań metod akustycznych w inżynierii materiałowej. Problem ten jest o tyle ważny dla potrzeb techniki i badań naukowych, że często nie docenia się unikalnych cech informacji o właściwościach dynamicznych materiału zawartych w rezultatach pomiarów akustycznych. Uważa się bowiem, że metody akustyczne stanowią jedynie uzupełnienie i weryfikację badań materiałów prowadzonych tradycyjnymi metodami wytrzymałościowymi. Tymczasem pomiary akustyczne pozwalają na specyficzną analizę procesów zachodzących w materiałach stosowanych w obiektach technicznych, a mianowicie na przejście od warunków statycznych w których dokonuje się rutynowych pomiarów wytrzymałościowych, na dynamiczne warunki, które mają miejsce w czasie eksploatacji obiektów technicznych. Dlatego w pracy zwrócono szczególną uwagę na rozróżnienie statycznych i dynamicznych modułów sprężystości. Przede wszystkim na fakt, że moduły dynamiczne nie powinny być traktowane jako jednoznacznie określone stałe materiałowe, lecz także jako wielkości będące funkcją przebiegów czasowych i energii działających w obiekcie naprężeń. Stanowiło to punkt wyjścia do podziału przedstawionych w pracy zagadnień w zależności od parametrów pola akustycznego służącego do uzupełnienia tradycyjnych pomiarów materiałowych. Jest zrozumiałe, że różnice między statycznymi i dynamicznymi właściwościami materiałów są tym większe im większe wartości mają pochodne zmian w czasie i gradienty przestrzenne działających naprężeń. Wynika stąd, że szczególnie interesujące mogą być zastosowania metody akustycznej do badania reakcji materiału na fale uderzeniowe, względnie fale akustyczne o skończonej amplitudzie. Właśnie ten aspekt

oceny przydatności metod akustycznych w inżynierii materiałowej został podkreślony w pracy.

Jak jednak zaznaczono na wstępie, praca musiała być ograniczona do analizy działania pola akustycznego w możliwie najprostszych warunkach, a więc w obszarze nieograniczonym, materiale jednorodnym i izotropowym. Oczywiście przy praktycznym zastosowaniu metod akustycznych do badania materiałów warunki te nie są spełnione, a podane w pracy ogólne zależności formalne muszą być przy realizacji pomiarów znacznie bardziej skomplikowane. Dotyczy to przede wszystkim przejścia od analizy rozchodzenia się fal akustycznych w obszarze nieograniczonym, do badania próbek w których następują złożone procesy nakładania się, sprzężenia i odbijania różnych typów fal o prędkościach zależnych od rozmiarów i kształtu próbki. Zagadnienia te są zresztą dokładnie zbadane teoretycznie i doświadczalnie dla fal akustycznych o małej amplitudzie. Nieco mniej szczegółowo zbadane są pola o skończonej amplitudzie, co jest chyba jednym z powodów dynamicznego rozwoju w ostatnich latach akustyki nieliniowej. Wydaje się także, że zastosowanie typowych metod akustycznych może dać nowe wartościowe rezultaty przy badaniu działania fal uderzeniowych.

W końcowej części pracy zarysowano wstępnie koncepcję tego rodzaju pomiarów, wymagać to jednak będzie rozwinięcia dalszych prac teoretycznych i dostosowania techniki pomiarowej do wyznaczenia wielkości charakterystycznych fali uderzeniowej.

P o d z i ę k o w a n i e

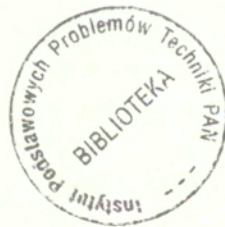
Pracę wykonano w ramach Projektu Badawczego KBN

Nr 7 T07B-03413

Literatura

1. Malecki I., Ranachowski J.: The acoustic Cross-section Method for Evaluation of Porous Material Parameters. Bull. Pol. Ac. Sc., Vol.45, No 1, s. 43-56 /1997/.
2. Ranachowski J.: Propagation of ultrasonic waves in porous ceramics. Ultrasonics, Vol. 13, s. 203-210 /1975/.
3. Śliwiński A.: Ultradźwięki i ich zastosowania. WNT, Warszawa, 1993.
4. Malecki I.: Teoria fal i układów akustycznych. PWN, Warszawa, 1964 /rozd. 3/.
5. Malecki I.: Analogie elektro-mechano-akustyczne. Wyd. Pol. Warsz., Warszawa, 1981.
6. Mason P.: Physical acoustics and properties of solids. Wyd. Van Nostrand., NY /1958/.
7. Wehr J.: Pomiary prędkości i tłumienia fal ultradźwiękowych. Wyd. IPPT-PAN, Warszawa /1972/.
8. Płowiec R.: Lepkość i sprężystość cieczy określana za pomocą ultradźwiękowych fal ścinania. PWN, Warszawa, 1990.
9. Malecki I.: Application of electromechanical analogies to the study of continuous isotropic media. Bull. Pol. Ac. Sc., Vol. 4, No 6 /1953/.
10. Deputat J.: Własności i wykorzystanie zjawiska elastoakustycznego do pomiarów naprężeń własnych. Prace IPPT 28 /1987/.
11. Malecki I.: Interaction of finite amplitude waves in solids. Proc. Conf. Acoustics of Solid Media., Warszawa, s. 155-166, /1966/.
12. Beyer R.T.: Nonlinear Acoustics /w książce/ Physical Acoustics, Vol. II, part B, rozdz. 10 /1965/.
13. Kozaczka E., Grelowska G.: Badania nieliniowych właściwości wody morskiej. Prace XII Symposium z Hydroakustyki. Jurata 1995, s. 161-169.

14. Filipczyński L., Grabowska A.: Variation of the acoustic pressure to particle velocity ratio from the ξ_c value in liquids and solids at high pressures. Arch. Acoust., Vol. 14 /1989/, s. 173-179.
- 14a. Filipczyński L.: Metody pomiarowe w akustyce nieliniowej. Prace XV Sympozjum z Hydroakustyki, Jurata 1998, s. 3-12.
15. Wesołowski Z.: Strong discontinuity wave in initially strained elastic medium. Arch. Mech., Vol. 30 /1978/, s. 309-322.
16. Wesołowski Z.: Shock wave in piecewise linear elastic material. Arch. Mech., Vol. 34 /1982/, s. 351-358.
17. Polesiński Z., Dziubak C., Rećko W.M.: Ceramika korundowa na pancerze. Problemy Techniki Uzbrojenia i Radiolokacji, XXVII, 27, 55 /1998/.



56530