

R. Bogacz, B. Ryczek

**O BADANIACH
TEORETYCZNO-DOŚWIADCZALNYCH
DOTYCZĄCYCH DRGAŃ SAMOWZBUDNYCH
TYPU PRZYLEGANIE-POŚLIZG**

8/1996

P. 269



WARSZAWA 1996

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 22 kwietnia 1996 r.



56564



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 1,0 Ark. druk. 1,5
Oddano do drukarni w czerwcu 1996 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul. Jasna 1

O badaniach teoretyczno-doświadczalnych dotyczących drgań samowzbudnych typu przyleganie-poślizg

Streszczenie

Praca poświęcona jest analizie teoretyczno-doświadczalnej układu o kilku stopniach swobody z uwzględnieniem tarcia suchego. Zakłada się, że zespół mas oddziałuje ze sobą lepkość sprężystości oraz ciernie z taśmą transportera. Celem badań eksperymentalnych jest sformułowanie modelu tarcia zależnego od prędkości ruchu, przyspieszenia, czasu adhezji i prędkości narastania naprężenia w czasie poprzedzającym zerwanie przylegania.

Wstęp

Drgania samowzbudne wzbudzone tarciami (suchymi) występują zarówno w rozwiązaniach technicznych jak i życiu codziennym. W niektórych z w/w przypadków zjawisko samowzbudności jest wykorzystywane, a w innych unikane lub ograniczone. Przykładem wykorzystywania mogą być instrumenty muzyczne (głównie smyczkowe), a przykładem drgań, których dotychczas nie udało się w pełni wyeliminować są drgania generujące pisk różnego typu hamulców, tramwajów poruszających się po torach o małych promieniach łuków, robotów, czy obrabiarek do metali.

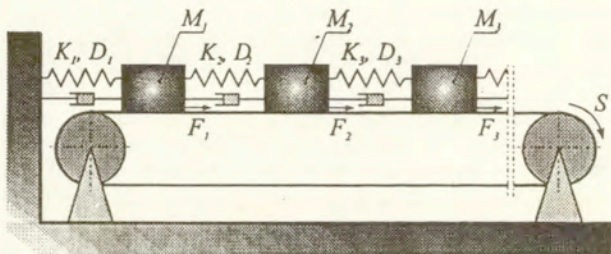
Wyjaśnienie przyczyn wzbudzania się drgań układów z tarciami suchymi, w tym szczególnie drgań typu przyleganie-poślizg, ma już bogatą literaturę. Napisano kilka poważnych monografii, wyjaśniono mechanizm samowzbudności w wielu podręcznikach. Podstawowa cecha charakterystyki tarcia sprzyjająca drganiom samowzbudnym typu poślizg-przyleganie została spostrzeżona już w ubiegłym wieku. Dotyczyła ona własności $F_{max}(W=0) > F(W \neq 0)$, która wyraża fakt, że maksymalna siła tarcia przy utracie przylegania jest większa aniżeli w przypadku poślizgu z małą prędkością względną. Obserwacje te opisali Conti (1875), Galton (1878), Franke (1882) [1-3]. Niewiele jest jednak opracowań dotyczących układów o kilku stopniach swobody.

Rozwój techniki obliczeniowej stwarza możliwość badań numerycznych coraz bardziej złożonych zagadnień, w tym dynamicznych zagadnień kontaktowych. Badania te ze względu na swą złożoność nie mogą być rozwiązywane analitycznie i zmuszają do przestrzennej dyskretyzacji zagadnienia. Symulacja numeryczna ruchu wymaga znajomości wielu cech zdykretyzowanego układu umożliwiających rozwiązanie zagadnienia, czy też poprawne sformułowanie równań ruchu. Powyższe względy spowodowały intensywne badania zagadnień kontaktowych w wielu ośrodkach naukowych, w tym w Instytucie Mechaniki w Hanowerze [4]. Niektóre z rezultatów badań teoretycznych, w szczególności dotyczących układów o kilku stopniach swobody, nie zostały dotychczas potwierdzone doświadczalnie. Trudny do uzasadnienia wydaje się efekt braku drugiej postaci ruchu (drgań w przeciwfazie) układu o dwóch stopniach swobody. Przypuszczenie, że cecha ta jest charakterystyczną w przypadku modelu Coulomba skłoniły autorów pracy [5] do badań analitycznych układu o dwóch stopniach swobody z uwzględnieniem uogólnionego modelu Coulomba. Założenia tego modelu zostały sprecyzowane w następnej części pracy. To interesujące zjawisko, że nie wszystkie formy własne są obserwowane w układach rzeczywistych, zostało potwierdzone przez autorów niniejszej pracy doświadczalnie. Nasunęło to przypuszczenie o ich niestateczności. Badaniem teoretycznym tego zagadnienia zostały poświęcone prace [4] oraz [5]. W celu zbadania istnienia stateczności układu metodą eliminującą przybliżone określenie trajektorii przyjęto charakterystykę opisaną odcinkowo liniowymi zależnościami umożliwiającą

ściśłą ocenę stateczności układu. W/w badania nie rozwiły jednak wątpliwości. Precyzyjne badania numeryczne wykazały, że w przypadku układu o dwóch stopniach swobody zarówno forma drgań w fazie, jak i w przeciwfazie istnieje i jest lokalnie stabilna. Aby zweryfikować przyjętą w tych badaniach charakterystykę zbudowano dwa stanowiska badawcze. Już wstępne badania doświadczalne wskazały na istotną zależność siły tarcia od znaku przyspieszenia. Przypuszczając, że może ten fakt mieć istotne znaczenie postanowiono zbadać bardziej precyzyjnie model tarcia pary stal - tworzywo sztuczne (poliester). Wyniki pomiarów, jak i ocena wpływu wybranych parametrów na kształt trajektorii są przedmiotem niniejszego komunikatu.

1. Model układu mechanicznego

Rozważmy układ mechaniczny przedstawiony na rys. 1.1, złożony jest z kilku mas połączonych liniowymi, nieważkimi sprężynami spoczywającymi na taśmie przesuwającej się ze stałą prędkością. Pomiędzy taśmą a masami występuje siła tarcia F_n . W celu skupienia uwagi na rozważaniach mających na celu potwierdzenie istnienia obu form własnych układu o dwóch stopniach swobody ograniczymy n do $n = 2$.



Rys. 1.1. Schemat układu o n stopniach swobody z tarciami suchymi

Przez położenie równowagi będziemy rozumieć takie położenie obu mas, w którym sprężyny nie są napięte.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- X_n - wychylenie masy M_n od położenia równowagi,
- K_n - stała sprężystości n -tej sprężyny,
- D_n - stała tłumienia lepkiego,
- F_n - siła tarcia działająca na masę M_n ,
- τ - czas,
- $S > 0$ - prędkość ruchu taśmy.

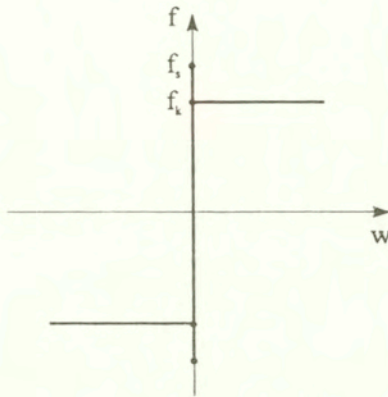
Jeżeli założyć, że siła tarcia F_n zależy od prędkości ruchu masy M_n względem taśmy W_n :

$$W_n = \frac{d}{d\tau} X_n - S,$$

to następująca relacja:

$$\begin{aligned} F_n(W_n) &= -H \operatorname{sgn}(W_n) \quad \text{przy } W_n \neq 0, \\ F_n(0) &\in (-H_n - G_n, H_n + G_n), \end{aligned} \quad (1.1)$$

gdzie: $H_n > 0$, $G_n \geq 0$ - stałe charakteryzujące tarcie, została przedstawiona na rys. 1.2.



Rys. 1.2. Model tarcia

Przy przyjętych założeniach ruch badanego układu mechanicznego opisany jest następującym układem równań:

$$M_1 \frac{d^2}{d\tau^2} X_1 = -K_1 X_1 + K_2 (X_2 - X_1) - D_1 \dot{X}_1 + D_2 (\dot{X}_2 - \dot{X}_1) + F_1(W_1), \quad (1.2)$$

$$M_2 \frac{d^2}{d\tau^2} X_2 = -K_2 (X_2 - X_1) - D_2 (\dot{X}_2 - \dot{X}_1) + F_2(W_2).$$

Opis ruchu przy pomocy równań (1.2), w przypadku przyjęcia relacji (1.1) ma pewne cechy charakterystyczne utrudniające analizę zachowania się układu. W szczególności przy pewnych stanach początkowych ($W = 0$) nie jest zapewniona jednoznaczność. Niżej przedstawione w dalszej części pracy rozwiązania są jednymi z możliwych, zależących od parametrów $G_n \geq 0$.

Po wprowadzeniu następujących bezwymiarowych wielkości:

$$t = \sqrt{\frac{K_2}{M_2}} \tau, \quad x_n = \sqrt{\frac{K_2}{M_2}} \frac{X_n}{S}, \quad d_n = \frac{D_n}{\sqrt{K_2 M_2}}, \quad f_n(w) = \frac{F_n(W)}{S \sqrt{M_2 K_2}},$$

$$k = \frac{K_1}{K_2}, \quad m = \frac{M_2}{M_1}, \quad g_n = \frac{l}{\sqrt{M_2 K_2}} \frac{G_n}{S}, \quad h_n = \frac{l}{\sqrt{M_2 K_2}} \frac{H_n}{G_n}, \quad n = 1, 2,$$

przyjmując $D_n = 0$, układ (1.2) zapiszemy w postaci:

$$\ddot{x}_1 = m - (1+k)x_1 + x_2 + f_1(\dot{x}_1 - 1), \quad (1.3)$$

$$\ddot{x}_2 = x_1 - x_2 + f_2(\dot{x}_2 - 1),$$

gdzie: $\ddot{x}_n = \frac{d^2}{dt^2} x_n$, $\dot{x}_n = \frac{d}{dt} x_n$, $n = 1, 2$.

Relacje oznaczone symbolami f_n określone są następująco:

$$f_n(\dot{x}_n - 1) = -h_n \operatorname{sgn}(\dot{x}_n - 1), \quad \text{gdzy } \dot{x}_n - 1 \neq 0, \quad (1.4)$$

$$f_n(0) \in (-h_n - g_n, h_n + g_n), \quad n = 1, 2.$$

Łatwo jest sprawdzić, że rozwiązanie:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{k}h_1 + \frac{1}{k}h_2, & \dot{x}_1 &= 0, \\x_2 &= \frac{1}{k}h_1 + \frac{1+k}{k}h_2, & \dot{x}_2 &= 0,\end{aligned}$$

jest rozwiązaniem stałym układu (1.3). Jeżeli wprowadzimy zmienne y_n związane z x_n następującym związkiem:

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 - \frac{1}{k}h_1 - \frac{1}{k}h_2, & \dot{y}_1 &= \dot{x}_1, \\y_2 &= x_2 - \frac{1}{k}h_1 - \frac{1+k}{k}h_2, & \dot{y}_2 &= \dot{x}_2,\end{aligned}\tag{1.5}$$

wtedy układ (1.3) przyjmie postać

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= m[-(1+k)y_1 + y_2 - h_1 + f_1(y_1 - 1)], \\ \ddot{y}_2 &= y_1 - y_2 - h_2 + f_2(y_2 - 1).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Poszukując rozwiązań spełniających warunek:

$$\dot{y}_1 \leq 1 \quad \text{i} \quad \dot{y}_2 \leq 1,\tag{1.7}$$

rozważmy cztery szczególne przypadki warunku (1.7):

$$\text{I} \quad \ddot{y}_1 = m[-(1+k)y_1 + y_2],\tag{1.7.a}$$

przy $\dot{y}_1 < 1, \dot{y}_2 < 1,$

$$\ddot{y}_2 = y_1 - y_2.$$

$$\text{II} \quad \dot{y}_1 = 1,\tag{1.7.b}$$

przy $\dot{y}_1 = 1, \dot{y}_2 < 1,$

$$\ddot{y}_2 = y_1 - y_2.$$

$$\text{III} \quad \ddot{y}_1 = m[-(1+k)y_1 + y_2],\tag{1.7.c}$$

przy $\dot{y}_1 < 1, \dot{y}_2 = 1,$

$$\ddot{y}_2 = 1.$$

$$\text{IV} \quad \dot{y}_1 = 1,\tag{1.7.d}$$

przy $\dot{y}_1 = 1, \dot{y}_2 = 1.$

$$\ddot{y}_2 = 1.$$

Układ równań (1.7.a) można przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},\tag{1.8}$$

$$\text{gdzie: } \Omega = \begin{bmatrix} -m(1+k) & m \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny macierzy Ω zapiszemy następująco:

$$\lambda^2 + [m(1+k) + 1]\lambda + mk = 0,\tag{1.9}$$

którego wyróżnik dany jest wzorem:

$$\Delta = (m - 1 + km)^2 + 4m > 0.$$

Istnieją więc dwa różne pierwiastki λ_1, λ_2 równania (1.9). Po odpowiednim oznaczeniu pierwiastków zachodzą nierówności:

$$\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 0. \quad (1.10)$$

Rozwiązanie układu (1.7.a) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} y_1 &= \gamma_1 A \sin(\alpha_1 t + \varphi_1) + \gamma_2 B \sin(\alpha_2 t + \varphi_2), \\ y_2 &= A \sin(\alpha_1 t + \varphi_1) + B \sin(\alpha_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (1.11)$$

gdzie stałe $A, B, \varphi_1, \varphi_2$, zależą od wartości początkowych, a stałe γ_n oraz α_n są określone zależnościami:

$$\begin{aligned} \gamma_n &= 1 + \lambda_n, \\ \alpha_n^2 &= -\lambda_n. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Stałe γ_n spełniające następujące nierówności czynią zadość warunkowi (1.10):

$$\gamma_1 < 0 < \gamma_2 < 1. \quad (1.13)$$

Po zróżniczkowaniu (1.11) względem czasu określimy prędkości ruchu \dot{y}_1, \dot{y}_2 :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \gamma_1 A \alpha_1 \cos(\alpha_1 t + \varphi_1) + \gamma_2 B \alpha_2 \cos(\alpha_2 t + \varphi_2), \\ \dot{y}_2 &= A \alpha_1 \cos(\alpha_1 t + \varphi_1) + B \alpha_2 \cos(\alpha_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Rozwiązanie (1.14) jest superpozycją dwóch typów rozwiązań okresowych układu (1.7.a): drgań w fazie i drgań w przeciwfazie. Drgania w fazie otrzymujemy, gdy spełnione są następujące warunki:

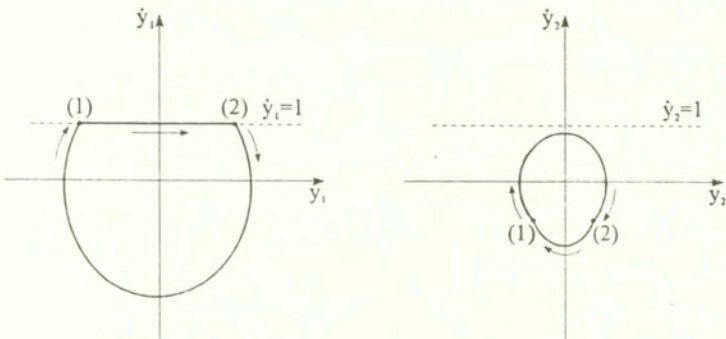
$$A = 0 \quad \text{oraz} \quad |B \alpha_2| < 1, \quad (1.15)$$

a drgania w przeciwfazie w przypadku, gdy zachodzi

$$B = 0 \quad \text{oraz} \quad \max(|\gamma_1 A \alpha_1|, |A \alpha_1|) < 1. \quad (1.16)$$

2. Przypadek kontaktu z przyleganiem. Rozwiązania okresowe w przeciwfazie

Charakterystyczne cechy poszukiwanego rozwiązania przedstawiono na rys. 2.1.



Rys. 2.1. Drgania typu przyleganie-poślizg "w przeciwfazie"
(występuje tylko przyleganie masy M_1)

Ze względu na przyjętą postać prawa tarcia wygodnie jest podzielić rozwiązanie na dwie części. Część pierwszą rozwiązania stanowić będzie trajektoria pomiędzy punktami (1) i (2), a część druga trajektorii zaczynać się będzie w punkcie (2) i kończyć w punkcie (1). Konstrukcja rozwiązania okresowego polega na rozwiązaniu układu równań (1.7.a) oraz (1.7.b) i spełnieniu warunków ciągłości trajektorii (1) i (2). Zakładając, że stałe m i k zapewniają $|\gamma_1| > 1$, nietrudno wykazać, że układ równań (1.7.b) ma rozwiązanie postaci:

$$\begin{aligned} y_1 &= t + c, \\ \dot{y}_1 &= 1, \quad \text{gd}y \ t \in [p, -p], \quad p \leq 0, \\ y_2 &= r \sin(t + \varphi) + (t + c), \\ \dot{y}_2 &= r \cos(t + \varphi) + 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie: c, φ, r są stałymi zależnymi od warunków początkowych.

Porównując wartości $p(y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2)$ w punkcie (1) otrzymamy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} p &= \gamma_1 A s_1 + \gamma_2 B s_2, \\ l &= \gamma_1 A c_1 + \gamma_2 B c_2, \\ r \sin p + p &= A s_1 + B s_2, \\ r \cos p + 1 &= A c_1 + B c_2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie: $s_n = \sin \alpha_n T$, $c_n = \alpha_n \cos \alpha_n T$.

Wykorzystując powyższe związki otrzymamy wyrażenia umożliwiające określenie czasu przylegania:

$$p = \frac{s_1 + \frac{\gamma_2 A}{\gamma_1 B} s_2}{c_1 + \frac{\gamma_2 B}{\gamma_1 A} c_2}, \quad \text{tg } p = \frac{s_1 + \frac{1 - \gamma_2 A}{1 - \gamma_1 B} s_2}{c_1 + \frac{1 - \gamma_2 B}{1 - \gamma_1 A} c_2}. \quad (2.3), (2.4)$$

ostatecznie otrzymamy:

$$\text{tg } p = \frac{s_1 s_2 - z_1 s_1 c_2 + z_2 s_2 c_1 p}{z_2 s_1 c_2 + z_1 s_2 c_1 + c_1 c_2 p}, \quad (2.5)$$

gdzie: z_n oznacza stałe zależne od γ_n spełniające relacje:

$$\begin{aligned} z_n &> 0 \quad \text{przy } n = 1, 2, \\ z_1 + z_2 &= 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

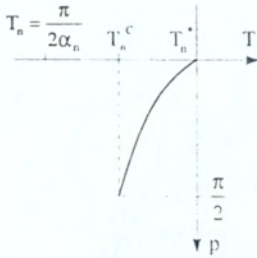
Równanie (2.5) stanowi związek między p i T .

W wyniku analizy numerycznej równania (2.5) przy $m=1$ i $k=1$ stwierdzono istnienie wartości granicznej T_1^C spełniającej nierówności:

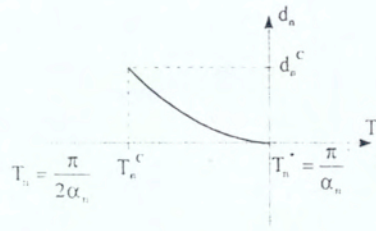
$$\frac{\pi}{2\alpha_1} < T_1^C < T_1^* = \frac{\pi}{\alpha_1},$$

posiadającej tę własność, że dla każdego $T \in (T_1^C, T_1^*)$ istnieje dokładnie jedno $p < 0$ takie, że

para (p, T) spełnia związek (2.6) tworząc poprawne rozwiązanie. Generowane przez T_1^C rozwiązanie nie spełnia warunku (1.7.a). Na rysunku 2 2 przedstawiono zależność $p(T)$, przy $n=1$, odpowiadającą równaniu (2.5).



Rys. 2.2. Zależność parametru p od czasu T w przypadku równania (2.5)



Rys. 2.3 Zależność parametru d_n od czasu T

Jednym z rozwiązań równania (2.5) jest para

$$A = 0, \quad T = T_1^* = \frac{\pi}{\alpha_1}. \quad (2.7)$$

Generowane przez (2.7) rozwiązanie jest granicznym rozwiązaniem typu drgania w przeciwfazie (tzn. $|y_1 A \alpha_1| = 1$). Wówczas stałe A i B są określone następująco:

$$|y_1 A \alpha_1| = 1 \text{ oraz } B = 0.$$

Rozwiązanie to otrzymamy, gdy:

$$d_1 = m[(1+q)y_1'^2 - y_2'^2] = -\dot{y}_1 = 0.$$

Na rysunku 2 3 przedstawiono zależność parametru $d_n(T)$, $T \in (T_n^C, T_n^*)$, $n=1, 2$.

Oznaczmy przez d_1^C wartość parametru d_1 rozwiązania generowanego przez T_1^C . Z analizy związku (2.5) i równań (2.2) wynika, że przy $\alpha_1 \in [0, d_1^C)$ istnieją rozwiązania okresowe układu równań (1.2) o cechach przedstawionych na rysunku (2.1) Wniosek ten można wyciągnąć na podstawie kształtu krzywej przedstawionej na rys. 2.3.

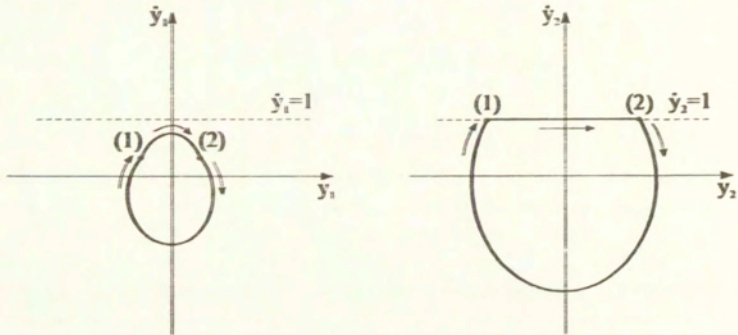
3. Przypadek ruchu w fazie

Część pierwszą rozwiązania w tym przypadku stanowi trajektoria wychodząca z punktu (1) do punktu (2) Część druga zamkniętej trajektorii wychodzi z punktu (2) i kończy się w punkcie (1), (rys. 3.1)

Postępując dalej podobnie jak w przypadku ruchu w przeciwfazie otrzymamy

$$\begin{aligned}
 y_1 &= r \sin(xt + \varphi) + \frac{l}{l+k}(t+c), \\
 \dot{y}_1 &= rx \cos(xt + \varphi) + \frac{l}{l+k}, \\
 y_2 &= t+c, \\
 \dot{y}_2 &= l, \quad \text{gd}y \ t \in [p, -p], \quad p \leq 0
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

gdzie: r, φ, c - stałe zależne od warunków początkowych.



Rys. 3.1. Drgania typu przyleganie-poślizg "w fazie"
(występuje tylko przyleganie masy M_2)

Z ciągłości trajektorii w punkcie (1) wynika następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
 r \sin xp + \frac{l}{l+k} p &= \gamma_1 A s_1 + \gamma_2 B s_2, \\
 rx \cos xp + \frac{l}{l+k} &= \gamma_1 A c_1 + \gamma_2 B c_2, \\
 p &= A s_1 + B s_2, \\
 l &= A c_1 + B c_2.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Przekształcając pierwsze dwa równania (3.2) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 r \sin xp &= \left(\delta_1 - \frac{l}{l+k} \right) A s_1 + \left(\gamma_2 - \frac{l}{l+k} \right) B s_2, \\
 rx \cos xp &= \left(\gamma_1 - \frac{l}{l+k} \right) A c_1 + \left(\gamma_2 - \frac{l}{l+k} \right) B c_2.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Po wyznaczeniu $\frac{A}{B}$ z równania (3.3) i wykorzystaniu (3.2) otrzymamy:

$$\frac{l}{x} \lg xp = \frac{s_2 s_2 - l_2 s_2 c_2 + l_2 s_2 c_1 p}{l_2 s_2 c_2 + l_1 s_2 c_1 + c_2 c_2 p}
 \tag{3.4}$$

gdzie: l_n oznacza stałe zależne od γ_n , przy czym l_n spełniają zależności:

$$\begin{aligned} l_n > 0 \text{ przy } n = 1, 2, \\ l_1 + l_2 = 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Równanie (3.4) stanowi związek między p i T . Podobnie jak w poprzedniej części (p, T) spełniająca (3.4) generuje jednoznacznie rozwiązanie. Na podstawie analizy numerycznej tego związku przy $m=1$ i $k=1$, gdy $x^2=2$, stwierdzono istnienie takiej wartości T_2^C , że:

$$\frac{\pi}{2\alpha_2} < T_2^C < T_2^* = \frac{\pi}{\alpha_2}, \quad (3.6)$$

przy $T \in (T_2^C, T_2^*)$ istnieje jedno $p < 0$ takie, że (p, T) spełnia (3.4). Analogicznie jak poprzednio zależności p od T odpowiadające równaniu (3.4) oraz d_n od T , przy $T \in (T_2^C, T_2^*)$, przedstawiono odpowiednio na rysunkach 2.2 oraz 2.3. Wartość d_2 jest określona wzorem:

$$d_2 = y_2 - y_1 = -\bar{y}_2.$$

Z analizy wynika, że przy $\alpha_2 \in [0, d_2^C)$ istnieją rozwiązania okresowe układu równań (1.2) o cechach przedstawionych na rys. 3.1, gdzie d_2^C jest wartością parametru d_2 rozwiązania generowanego przez T_2^C .

Rozważania przedstawione w niniejszej części mają charakter wstępny. Celem ich było wykazanie, że w przypadku układu o dwóch stopniach swobody wzbudzanych tarcie możliwe są różne postacie ruchu. Warunki ich istnienia są zależne od charakterystyki tarcia. Uzyskane wyniki można uogólnić na przypadek większej liczby stopni swobody oraz bardziej złożonej zależności siły tarcia od parametrów ruchu i parametrów układu uogólniając pracę [7]. Przypadek drgań "w fazie" podczas przylegania dwóch lub trzech mas omówiono w pracy [6].

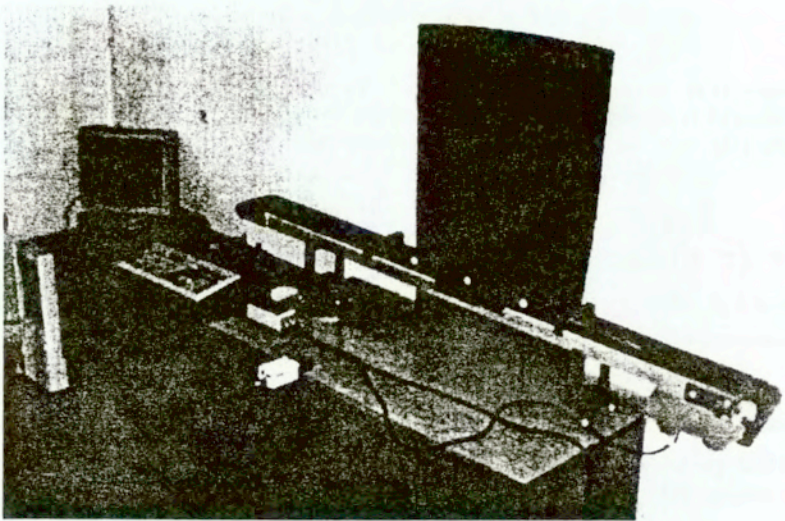
Następną część pracy poświęcimy zagadnieniom bardziej złożonego modelu tarcia oraz określeniu wpływu tego modelu na kształt trajektorii, ograniczając rozważania do przypadku $n = 1$.

4. Badania eksperymentalne

Podczas badań eksperymentalnych mających na celu wyznaczenie zależności siły tarcia od parametrów dynamicznych oraz odpowiadających tym charakterystykom cech układu przedstawionego na rys. 1.1, zastosowano metodę optyczną określania ruchu masy w przestrzeni przy zadanej prędkości ruchu taśmy transportera. Identyfikację modelu tarcia przeprowadzono wykorzystując stanowisko badawcze (rys. 4.1) służące do badań drgań samowzbudnych, w tym typu stick-slip (przyleganie-poślizg), składające się z układów:

- mechanicznego,
- optyczno-elektronicznego układu pomiarowego.

Układ mechaniczny stanowi zespół mas połączonych sprężynami, będących w ruchu i oddziałujących z taśmą transportera. Rolę układu pomiarowego spełnia system wizualizacji, gromadzenia i obróbki cyfrowej danych, którego elementy ilustruje rys. 4.2. W systemie tym zastosowano kartę przetwornika sygnału video, przetwarzającą analogowy sygnał wizyjny na postać cyfrową.



Rys. 4.1. Stanowisko do badań drgań układów dyskretnych z tarcie suchym



Rys. 4.2. System wizualizacji, gromadzenia i obróbki cyfrowej danych

Stanowisko umożliwia badania drgań układu przy wybranych wartościach następujących parametrów:

- liczba mas $i_m = 1, 2, 3$,
- prędkość taśmy S ,
- warunki początkowe X_0, \dot{X}_0 ,
- sztywności K_n , masy M_n .

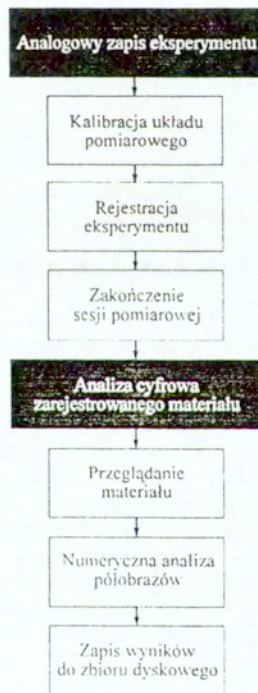
Wybór dotyczy również materiałów na elementy trące.

4.1. Pomiary drgań układu

Przeprowadzenie eksperymentu na stanowisku przebiega w dwóch etapach (rys. 4.3):

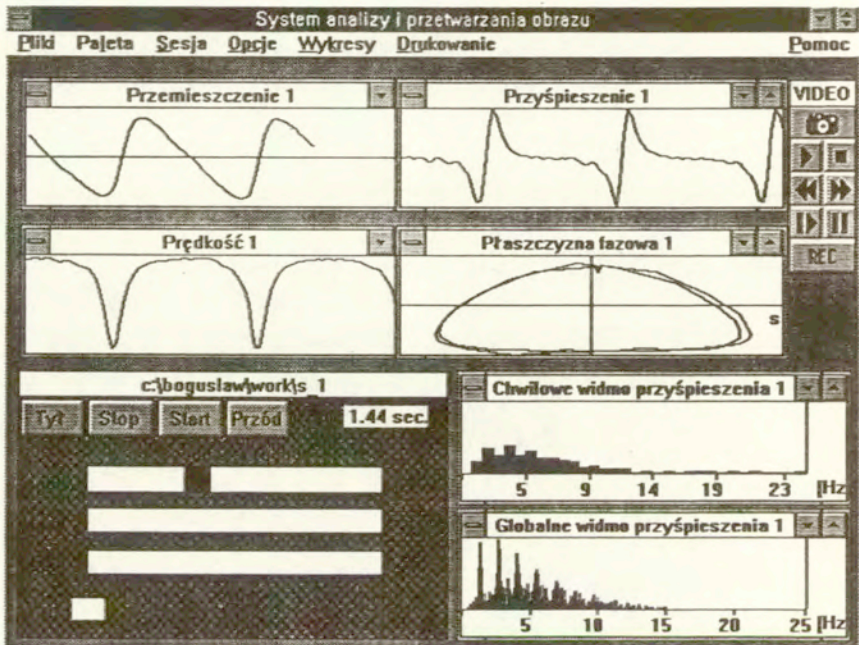
- 1) analogowy zapis eksperymentu poprzez układ kamera - magnetowid,
- 2) komputerowa analiza zarejestrowanego materiału z wykorzystaniem oprogramowania dedykowanego "SPO" (System Przetwarzania Obrazów).

Zastosowanie analogowego zapisu eksperymentu (na taśmie magnetycznej) pozwala przeprowadzić obróbkę cyfrową zarejestrowanego materiału bezpośrednio po zakończeniu rejestracji lub później.



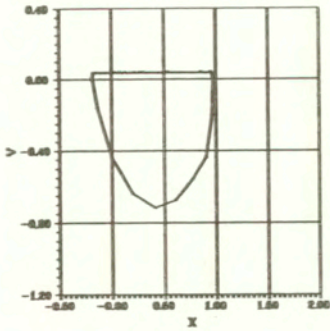
Rys. 4.3. Przebieg eksperymentu

W wyniku przeprowadzenia eksperymentu otrzymuje się współrzędne położenia mas w czasie ruchu. Wykorzystując oprogramowanie "SPO" można wyznaczyć charakterystyki dynamiczne ruchu masy tj. przemieszczenia, prędkości, przyspieszenia w czasie, płaszczyznę fazową, widma przyspieszeń (chwilowe i globalne). Pozwala to na dokonanie wstępnej analizy drgań układu. Przykładowe zależności zaobserwowane na ekranie monitora ilustruje rys. 4.4.

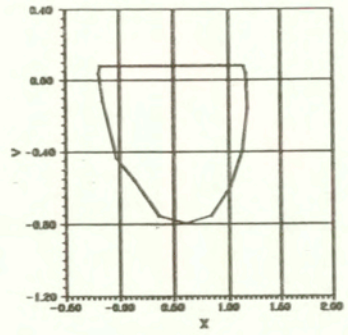


Rys. 4.4. Charakterystyczne parametry drgań układu uzyskane na monitorze, dzięki wykorzystaniu systemu "SPO"

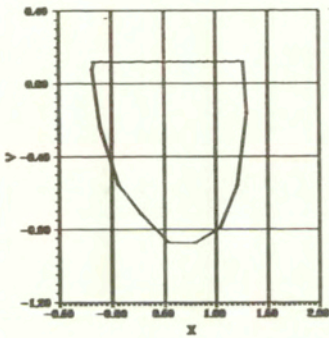
W celu określenia kinetycznej siły tarcia w funkcji prędkości względnej wyznaczono charakterystyki dynamiczne układu. Okresowość drgań oceniono wykorzystując funkcję opartą na idei odwzorowania pierwszego powrotu Poincare'go wg [7]. Na rys. 4.5 pokazano przykładowe, uzyskane doświadczalnie trajektorie fazowe przy różnych prędkościach ruchu taśmy s odpowiadające drganiom okresowym układu. Na podstawie otrzymanych charakterystyk, stosując metodę najmniejszych kwadratów (dzięki przyjętym wcześniej założeniom dotyczącym modelu tarcia), dokonano aproksymacji kinetycznej siły tarcia w funkcji prędkości względnej, co przedstawia rys. 4.6.



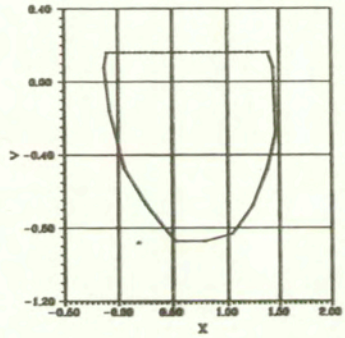
$s=0.039$



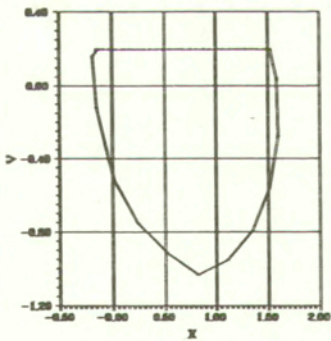
$s=0.080$



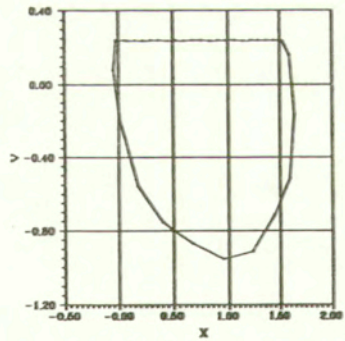
$s=0.119$



$s=0.159$

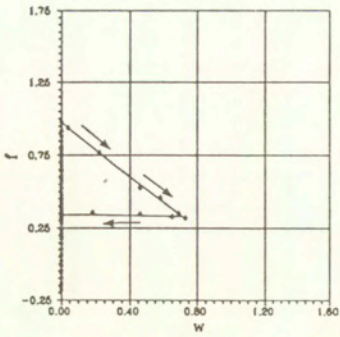


$s=0.198$

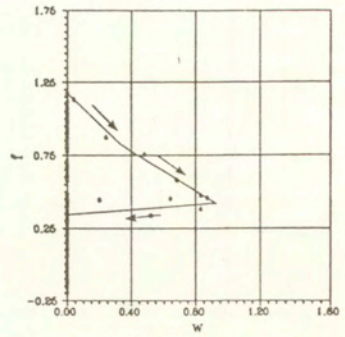


$s=0.239$

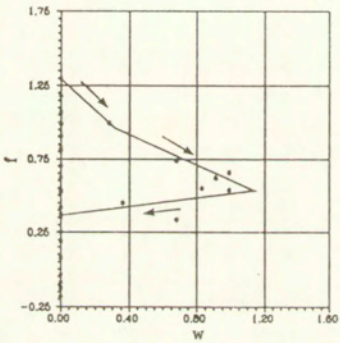
Rys. 4.5. Trajektorie fazowe ruchu masy przy różnych prędkościach taśmy s otrzymane doświadczalnie



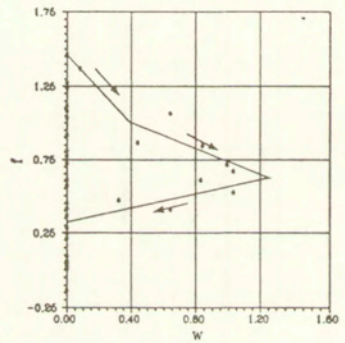
$s=0.039$



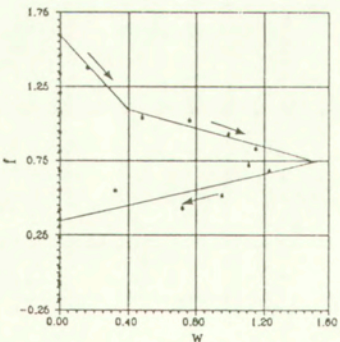
$s=0.080$



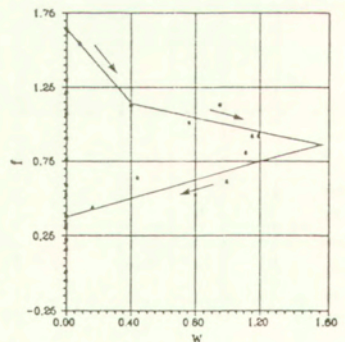
$s=0.119$



$s=0.159$



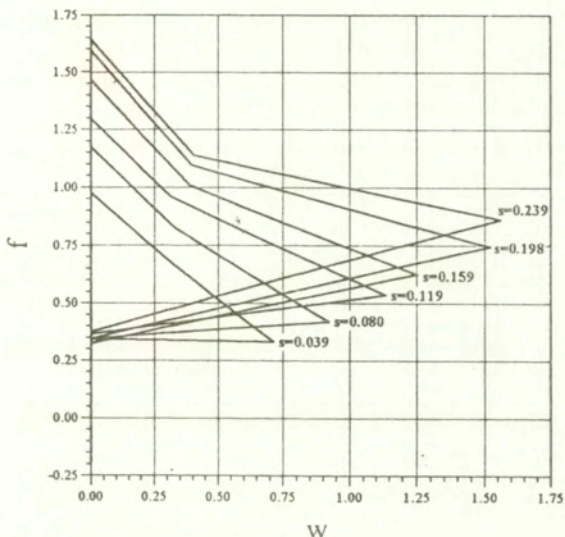
$s=0.198$



$s=0.239$

Rys. 4 6. Aproxymacja kinetycznej siły tarcia f w funkcji prędkości względnej w przy różnych prędkościach taśmy s

Przebieg siły tarcia kinetycznego w funkcji prędkości względnej przy różnych prędkościach taśmy, uzyskane po aproksymacji wyników doświadczalnych ilustruje rys. 4.7. Na podstawie powyższych wyników można stwierdzić, że kinetyczna siła tarcia przy przyspieszaniu masy jest większa niż przy opóźnianiu oraz że wraz ze wzrostem prędkości taśmy wzrasta zarówno wartość siły tarcia kinetycznego przy odpowiednich wartości prędkości względnej, jak również siła tarcia statycznego w momencie zerwania adhezji między powierzchniami współpracujących ciał.



Rys. 4.7. Zależności $f(w, \text{sgn } \dot{w})|_{s=\text{const}}$ odpowiadające różnym prędkościom taśmy s po aproksymacji wyników doświadczalnych

Na podstawie rezultatów przeprowadzonych badań założono, że statyczna siła tarcia jest funkcją następujących dwóch parametrów:

$$f_s = f_s(t_s, \delta), \quad (4.1)$$

gdzie:

t_s - czas przylegania masy do pasa,

$$t_s = t_{sm} + t_{ss},$$

t_{sm} - czas przylegania przy ruchu taśmy,

t_{ss} - czas przylegania przy taśmie będącej w spoczynku,

δ - prędkość narastania działającej siły,

$$\delta = \frac{df_s}{dt_{sm}} = s.$$

Zależność (4.1) została wyznaczona doświadczalnie w [8].

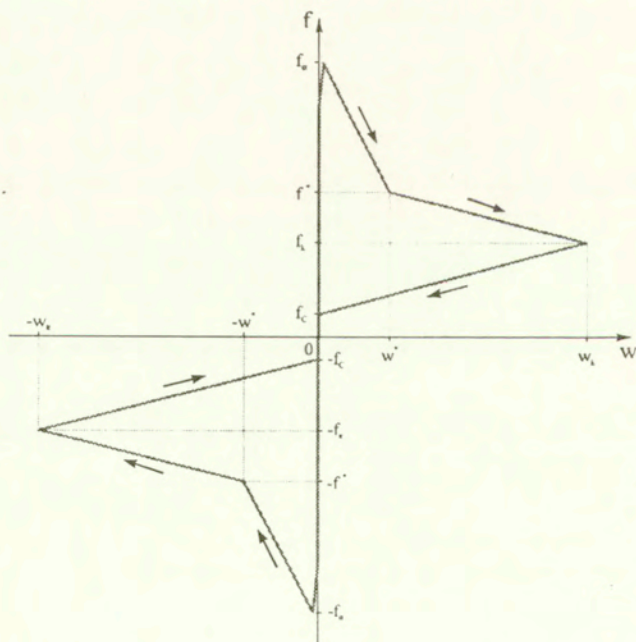
5. Propozycja modelu tarcia

Zależności doświadczalne: kinetycznej siły tarcia od prędkości względnej oraz statycznej siły tarcia jako funkcji czasu kontaktu i prędkości zmiany działającej siły, pozwalają (po przyjęciu pewnych założeń upraszczających) zbudować model tarcia suchego odpowiadającego danej parze cieiernej (stal-poliester). Analiza otrzymanych wyników umożliwia określenie własności oraz parametrów geometrycznych i odpowiadających im parametrów fizycznych modelu. Założony wstępnie model to model odcinkowoliniowy (rys. 5.1), o różnych nachyleniach poszczególnych odcinków charakterystyki tarcia w zależności od parametrów t_s , δ , tj. czasu przylegania i prędkości zmiany działającej siły.

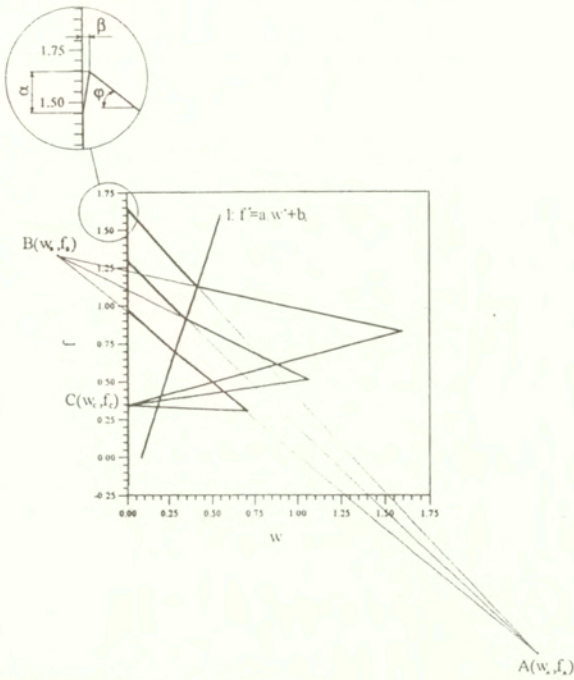
Przyjęto następujące uproszczenia pozwalające na wyznaczenie parametrów geometrycznych proponowanego modelu (rys. 5.2):

- przy różnych prędkościach unoszenia odpowiadające sobie odcinki liniowe przecinają się w jednym punkcie (odpowiednio: A, B, C),
- punkty przecięcia górnych odcinków liniowych przy danych prędkościach unoszenia leżą na jednej prostej (l),
- przy zadanych prędkościach unoszenia współrzędne $w_{max} = w_k$ otrzymujemy z warunku $\dot{w} = 0$.

Parametry opisujące wzrost lub spadek siły tarcia w chwili zerwania kontaktu oraz parametr występujący w przypadku $A \rightarrow \infty$, oznaczono odpowiednio: α , β , φ .

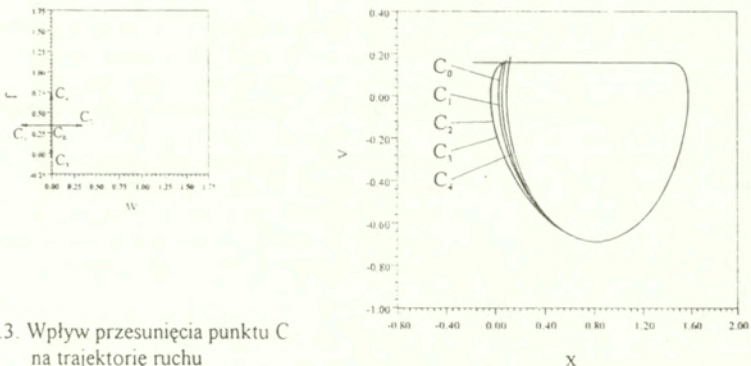


Rys. 5.1. Proponowany model tarcia suchego

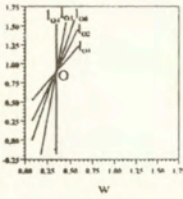


Rys. 5.2. Parametry geometryczne modelu tarcia

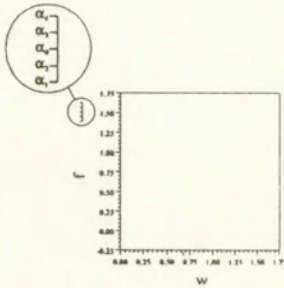
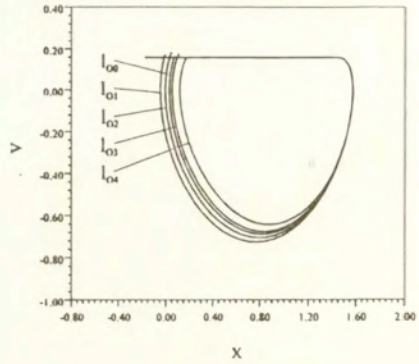
Na rysunkach 5.3 - 5.5 zilustrowano wpływ zmiany wybranych parametrów modelu tarcia na trajektorie fazowe ruchu układu przy ustalonej wartości prędkości unoszenia i warunków początkowych. Przesunięcia punktu C i wywołane nim różne postacie trajektorii przedstawione są na rys. 5.3. Inny kształt trajektorii (rys. 5.4) można uzyskać w przypadku obrotu prostej l dookoła przyjętego na podstawie badań eksperymentalnych punktu o współrzędnych $O(0.35, 0.9)$. Trajektorie fazowe przy różnych wartościach parametru α wykazują różnice (rys. 5.5). Parametry oznaczone na rysunkach indeksem "0" odpowiadają wartościom średnim wstępnie przyjętym na podstawie wyników badań eksperymentalnych.



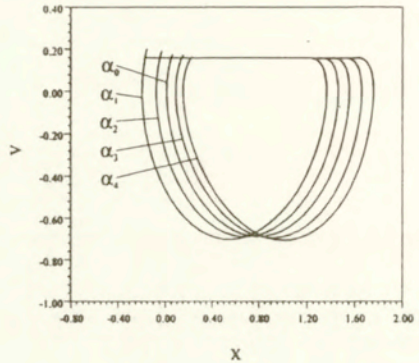
Rys. 5.3. Wpływ przesunięcia punktu C na trajektorię ruchu



Rys. 5.4. Wpływ obrotu prostej l dookoła punktu O na trajektorię ruchu

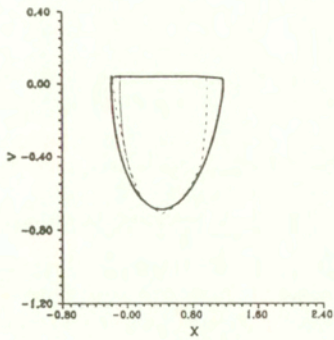


Rys. 5.5. Wpływ zmiany parametru α na trajektorię ruchu

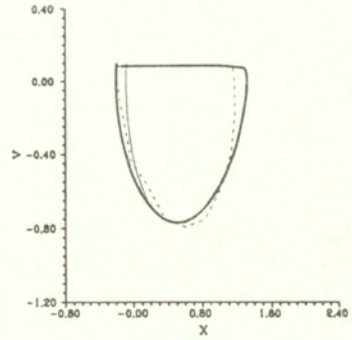


Jak wynika z przeprowadzonej analizy zmiana parametrów modelu tarcia pozwala otrzymać różne postacie trajektorii fazowych, co spowodowane jest zmianą intensywności tłumienia w układzie w różnych fazach cyklu drgań.

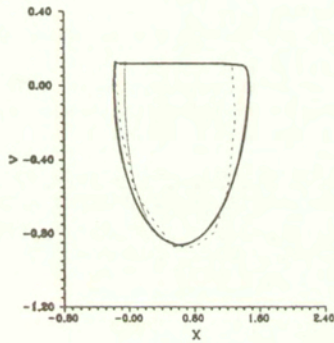
Badając zgodność trajektorii fazowych uzyskanych w wyniku eksperymentu z teoretycznymi, można zauważyć pewne rozbieżności. Wywołane są one zarówno ograniczoną dokładnością aparatury pomiarowej jak również przyjętymi uproszczeniami podczas analizy teoretycznej. Jednak w przypadku założenia modelu tarcia o charakterystyce niezależnej od znaku przyspieszenia [7], występują znacznie większe różnice zarówno ilościowe (określone wartościami przemieszczeń i prędkości) jak i jakościowe (dotyczące okresowości ruchu układu) w porównaniu z proponowanym modelem. Na rys. 5.6 podano kształt trajektorii fazowych wyznaczonych doświadczalnie (zaznaczone linią przerywaną), a także trajektorii teoretycznych w przypadku przyjętego modelu tarcia (linia ciągła gruba) oraz dla modelu niezależnego od znaku przyspieszenia (linia ciągła cienka), przy różnych prędkościach unoszenia.



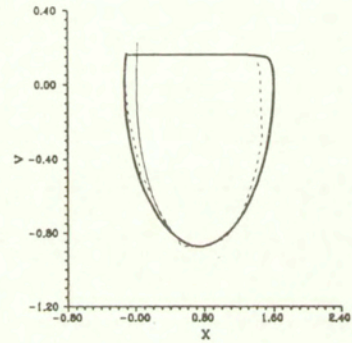
$s=0.039$



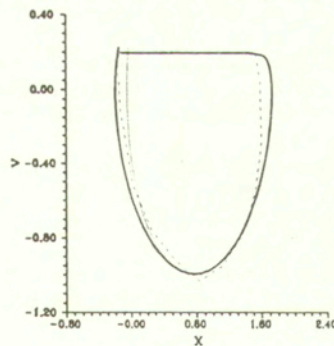
$s=0.080$



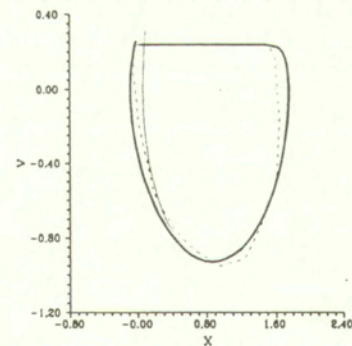
$s=0.119$



$s=0.159$



$s=0.198$



$s=0.239$

Rys. 5.6. Porównanie trajektorii fazowych otrzymanych teoretycznie z doświadczalnymi

6. Zakończenie

Z badań eksperymentalnych oraz analizy teoretycznej drgań układu dyskretnego z wykorzystaniem symulacji komputerowej, w przypadku przyjętego modelu tarcia, wynikają następujące wnioski:

- przy małych prędkościach unoszenia w układzie zaobserwować można występowanie drgań typu stick-slip, których amplituda rośnie wraz ze wzrostem prędkości,
- okresowe drgania samowzbudne pozbawione fazy przylegania występują przy relatywnie dużych prędkościach unoszenia,
- wraz ze wzrostem prędkości unoszenia częstość drgań rośnie dążąc do wartości granicznej,
- niewielki wzrost tłumienia zewnętrznego wywołuje spadek amplitudy oraz częstości drgań,
- czas przylegania ciał maleje do zera przy wzroście prędkości unoszenia do wartości granicznej,
- maksymalna siła tarcia wzrasta ze wzrostem czasu przylegania ciał przy stałej prędkości narastania siły. Wzrost ten można również zaobserwować w przypadku zwiększania się prędkości narastania siły przy ustalonym czasie przylegania,
- przy przyspieszaniu ciała siła tarcia kinetycznego jest istotnie większa aniżeli przy opóźnianiu,
- istnienie dwóch punktów statycznego położenia równowagi pozwala przypuszczać, że forma drgań własnych w przeciwfazie, której nie zaobserwowano w badaniach doświadczalnych, jest niestateczna.

W dalszych badaniach doświadczalnych i teoretycznych drgań wzbudzonych tarciami rozważone zostaną układy o większej liczbie stopni swobody. Przeprowadzona zostanie teoretyczna analiza wrażliwości i stateczności ruchu tych układów. Uwzględniony będzie również wpływ tłumienia zewnętrznego na kształt trajektorii ruchu i ich stateczność.

Literatura

- [1] P. Conti: *Sulla Resistanza die Attrio*, Accad. Lincei 11 (16), (1875),
- [2] I. Galton: *The action of brakes. On the effect of brakes upon railway trains*, Engineering 25, (1878), 469-472,
- [3] J. Franke: *Über die Abhängigkeit der gleitender Reibung von der Geschwindigkeit*, Civ. Ing., (1882),
- [4] K. Popp, N. Hinrichs and M. Oestreich: *Dynamical behaviour of a friction oscillator with simultaneous self and external excitation*, Sādhanā, Vol. 20, Parts 2-4, (1995), 627-654,
- [5] R. Bogacz, H. Irretier, J. Sikora: *On discrete modelling of contact problems with friction*, Z. angew. Math. Mech. 70, (1990) 4, T 31 - T 32,
- [6] J. Sikora, R. Bogacz: *On dynamics of several degrees of freedom system in relative motion with friction*, Z. angew. Math. Mech. 73, (1993) 4, T 118 - T 122,
- [7] J. Sikora: *Drgania w strefie kontaktu ciał z tarciami suchym w ujęciu dyskretnym* (praca doktorska), IPPT-PAN, Warszawa, (1991),
- [8] B. Ryczek: *O symulacji dynamiki układu dyskretnego dla pewnego modelu tarcia suchego identyfikowanego doświadczalnie*, Symulacja w Badaniach i Rozwoju, red. R. Bogacz i in., Warszawa, (1995), w druku.

Abstract

The paper is devoted to the experimental and theoretical analysis of a set composed of several degrees of freedom mass system interacting with a moving belt by means of dry friction. The experimental study allows to formulate the friction model depending on velocity of motion, acceleration, time of adhesion and velocity of stress increasing.