

Praca habilit.  
Cao van Phuong

METODY OPTYMALNEGO  
STEROWANIA RUCHEM W KONSTRUKCJI  
OBCIĄŻONEJ DYNAMICZNIE

35/1986

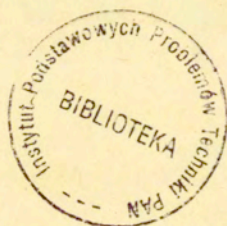
WARSZAWA 1986

ISSN 0208-5658

Praca habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 1 października 1986 r.

56886



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 190 egz. Ark.wyd. 5,4 Ark.druk. 7,5

Oddano do drukarni w październiku 1986 r.

Nr zamówienia 539/86.

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul. Śniadeckich 8



Cao van Phuong  
Zakład Mechaniki  
Ośrodków Ciągłych

METODY OPTIMALNEGO STEROWANIA RUCHEM  
W KONSTRUKCJI OBCIĄŻONEJ DYNAMICZNIE

Streszczenie

Analizując dotychczasowe osiągnięcie w zakresie optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji wynika, że tradycyjne pasywne metody zwalczania wibracji są efektywne tylko dla wąskich spektrów częstotliwości. Budowa takiego sterującego układu jest kosztowna. Z tego względu trzeba opracować zasadniczo nowe wysoko efektywne metody tłumienia ruchu w konstrukcji na podstawie aktywnego dodatkowego oddziaływania, aby zabezpieczyć konstrukcję od zniszczenia.

Celem obecnej pracy jest zastosowanie teorii optymalnego i aktywnego sterowania ruchem w rozpatrywaniu zagadnień teorii konstrukcji obciążonej dynamicznie. Konstrukcyjne obiekty rozpatrywane są tu jako belki, pręty, płyty, powłoki. Praca omawia metody ogólne oraz zawiera szereg rozwiązań konkretnych problemów brzegowych. W końcowej części pracy omówiono problem stabilizacji ruchu konstrukcji przedstawiając efektywne rozwiązania.

## I. WPROWADZENIE

Obecnie teoria optymalnego sterowania przeniknęła do wszystkich badań o charakterze konkretnym i do opracowań konstrukcyjnych w różnych dziedzinach techniki i ekonomii. Liczbę prac poświęconych problemom optymalnego sterowania szacuje się na kilkaset. Wśród nich należy koniecznie wymienić pracę D.E. OCHOCIMSKIEGO 1946r. Praca ta zawierała już współczesne sformułowanie zadań teorii sterowania.

Wybitny wkład do teorii sterowania optymalnego wniósł L.S. PONTRAGIN [55]. Jego zasada maksimum pozwala za pomocą mnożników Lagrange'a sprowadzić zadanie optymalnego sterowania do pewnego szczególnego zagadnienia brzegowego dla równań różniczkowych zwyczajnych. Rozkwit teorii sterowania, uwarunkowany całą prohistorią jej rozwoju wiąże się ściśle z powstaniem elektronicznej techniki obliczeniowej, dzięki której nabrało sensu tworzenie skomplikowanych algorytmów sterowania.

Wraz z rozwojem nauki i techniki nabierają znaczenia problemy zwiększenia jakości, niezawodności i ekonomiczności oraz problemy zwalczania drgań elementów maszyn w konstrukcji. W ostatnich latach problem optymalnego, aktywnego sterowania ruchem w konstrukcji stał się aktualnym i interesującym problemem dla wielu badaczy. We współczesnej technice spotykamy przykłady konstrukcji, które są narażone, bądź poddane przypadkowe lub celowo działaniu krótkotrwałych obciążeń dynamicznych o dużej intensywności. Na skutek tych oddziaływań elementy konstrukcji wprawiane są w ruch, który wywołuje ich zmiany geometryczne i fizyczne. Przy długotrwałym ruchu w konstrukcji, zmiany te mogą być tak duże, że konstrukcja przestaje spełniać swoje funkcje.

Z tego względu niezwykle potrzebnym i ważnym z teoretycznego i praktycznego punktu widzenia stał się problem poszukiwania najlepszego sposobu dodatkowego oddziaływania na konstrukcję w celu sterowania ruchem w niej, aby zabezpieczyć ją od zniszczenia.

Warto zauważyć, że problem optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji obciążonej dynamicznie w jakimś stopniu jest związany z zagadnieniem optymalizacji konstrukcji, ku któremu



w drugiej połowie bieżącego stulecia nastąpił gwałtowny zwrot zainteresowania. Wiele sformułowań i ciekawych wyników w tym zakresie można znaleźć w książkach i w pracach wielu autorów między innymi: W. PRAGER., Z. MRÓZ., K. I. MAJID., A. BRANDT., A. BORKOWSKI., R. I. SHIELD., W. GUTKOWSKI., M. ŻYCZKOWSKI... Zagadnienia optymalizacji sformułowane są jako problem matematycznego programowania. Obok problemów geometrycznych i fizycznych metoda ta zawiera więcej myśli skemetycznej. Dąży ona do najlepszego użycia dostępnych środków, do wykonania określonego zadania zapewniającego optymalizację funkcji celu. Funkcja ta może być minimum kosztów ciężaru konstrukcji lub maksimum wyżytków.

Podobnie jak przy rozwiązaniu problemu optymalizacji konstrukcji, przy rozwiązaniu zagadnień optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji, położone nacisk na bezpieczeństwo i ekonomiczność jako wymagania projektowania.

Repatrując bezpieczeństwo konstrukcji bierze się pod uwagę zarówno ograniczenia dla naprężeń jak i dla przemieszczeń.

W każdym zagadnieniu optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji obciążonej dynamicznie występują następujące podstawowe elementy:

- Matematyczny model konstrukcyjnego obiektu.
- Kryteria optymalizacji.
- Typy oddziaływań.
- Układ dopuszczalnych ograniczeń.

Badanie problemu optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji obciążonej dynamicznie obejmuje szereg szczegółowych problemów, wśród których można wyróżnić następujące: Teoretyczną analizę, techniczne modelowanie i ich zastosowania.

Analiza teoretyczna ma przede wszystkim charakter prognozy a jej wyniki umożliwiają wykonanie modelowych badań problemu. Te zaś pozwalają zastosować techniczne opracowanie rozwiązania do sterowania ruchem w konstrukcji. W teoretycznej analizie występują również opracowania metod opisowych, które są dzielone na dwa typy. Jeden z nich zajmuje się analizą wpływu zmian fizycznych na matematyczne opisywanie problemu a drugi charakteryzuje się modelowaniem matematycznym i wymiarowym, przez które są wyrażone równania problemu. Drugi typ zadań występują-

cych w teoretycznej analizie, te są opracowania metod rozwiązań równań problemów. Patrz na tablicę 1.

Druga grupa zadań optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji poddanej dynamicznemu obciążeniu zawiera techniczne modelowanie problemu, tworzenia technicznego wyposażenia i urządzenia dla badań eksperymentalnych, opracowania programów konstrukcyjnych układów sterowanych.

Trzecia grupa zadań zajmuje się wyborami kryteriów najefektywniejszych dla projektowań konstrukcji z układem sterującym.

Przy rozwiązaniach problemów optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji obciążonej dynamicznie spotykamy wiele trudności, które wynikają z następujących przyczyn:

- Stan obiektu konstrukcyjnego opisywany jest przez wieloparametrowe funkcje zmiennych.
- Ruch obiektu opisywany jest równaniem różniczkowym cząstkowym lub całkowo różniczkowym, przy czym mogą one być liniowe bądź nieliniowe a na ich rozwiązania mogą być nałożone pewne założone ograniczenia, które mogą być również liniowe lub nieliniowe, wyrażone w postaci równości bądź w postaci nierówności.

- Typy oddziaływań zewnętrznych na konstrukcję mogą być funkcjami zależącymi od czasu i współrzędnych przestrzennych, mogą one być celowe lub przypadkowe.

- Techniczna realizacja układów sterujących jest związana z wielkimi trudnościami przy rozwiązaniu problemów technologicznych i ekonomicznych.

Należy zauważyć, że aktywne sterowanie ruchem w konstrukcji może być rozpatrywane jako:

- Sterowanie ruchem, kiedy optymalne oddziaływanie zależy od typu minimalizującego funkcjonału, ograniczenia zaś dodatkowe działanie sterujące zachodzi według opracowanego programu i nie zależy od zmiennego stanu obiektu. W ten sposób sterowanie ruchem jest czynne z nie zamkniętym cyklem. Sterujące oddziaływania mają charakter siłowego, akustycznego, kinematycznego lub innego wymuszenia.

- Regulowanie ruchu, kiedy sterujące oddziaływanie jest określone zmiennym stanem deformowanego obiektu z uwzględnieniem minimalizującego funkcjonału.



Dokonyuje się ono w zamkniętym cyklu. Takie układy Automatematycznego Regulowania UAR charakteryzują się czujnikami, które po otrzymaniu sygnału o reakcji obiektu na zewnętrzne oddziaływanie przekazują go przez sieć sterowania na sterujące elementy

SE. Typy SE zależą od ustalonego Układu Automatematycznego Regulowania UAR. Jeśli zadanie powstaje w celu zmniejszenia obciążenia w podporach konstrukcji lub maszyn, wtedy SE przyjmują postać elektromagnesów lub wibratorów regulujących hydrauliczne opory. W przypadkach kiedy mamy zmniejszyć stopień wibracji konstrukcji, to SE będą sterującymi wibratorami.

- Tworzenie Układu Amortyzacji, którego parametry nie są stałymi, lecz są określone w procesie ruchu obiektu i zależą od charakteru jego deformacji.

Należy zwracać następujące uwagi:

1. W ostatnich latach istnieje dość dużo sformułowań i ujęć zagadnień zachowania się drgań wiele ciekawych wyników można znaleźć w publikacjach sympozjum IUTAM. Na Uniwersytecie Waterloo, Kanada 1980 oraz Międzynarodowa Konferencja przy tym Uniwersytecie 1984. Podstawowe sposoby ich rozwiązań można wyróżnić następująco:

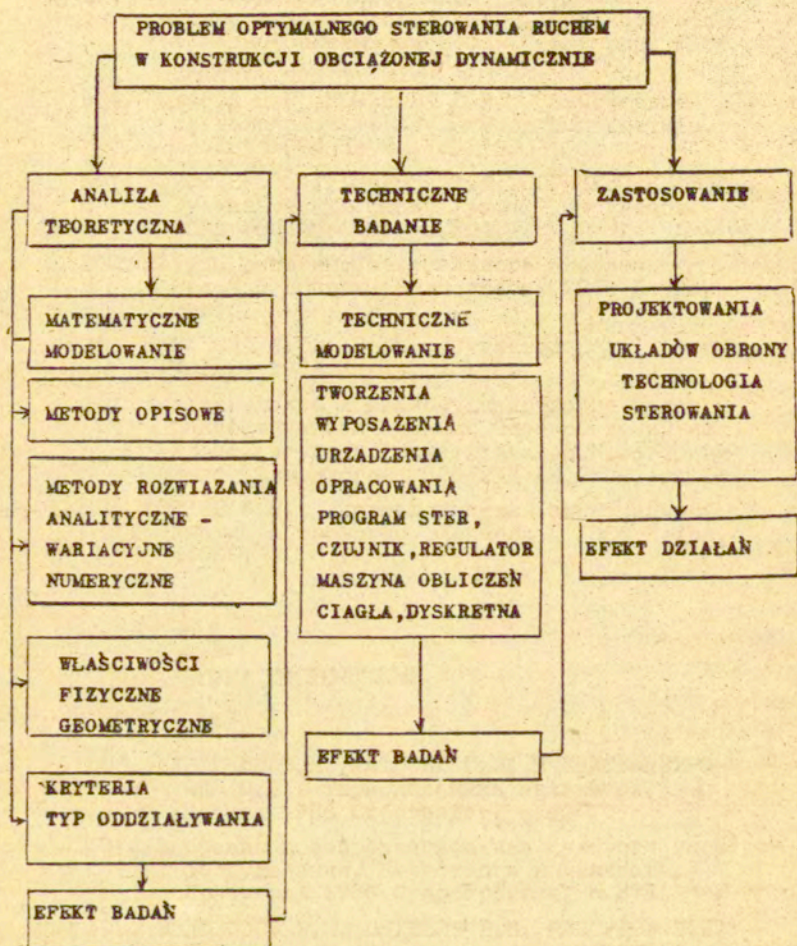
- Zwiększenie wibroaktywności źródła, która zmniejsza stopień energii,
- zmniejszenie intensywności drgania mechanicznego układów ze sposobem ich rozdzielania,
- zmniejszenia wibroaktywności powiązanych elementów.

2. W technice nowoczesnej obok tradycyjnych pasywnych metod i metod aktywnego sterowania pojawił się nowy problem aktywnego sterowania i optymalizacji konstrukcji. Jest to pojęcie bardzo rozmyte, które jeszcze nie nabrało sprecyzowanej treści merytorycznej. Jednak gdy mówi się o aktywnym sterowaniu i optymalizacji konstrukcji rozumie się przez to, że na różnych etapach konstruowania obiektu wybór jego elementów jest uwarunkowany względem optymalizacji formy lub ciężaru oraz zabezpieczony układem aktywnego sterowania optymalnego.

3. I wreszcie koniecznie należy również zauważyć, że nowy kierunek naukowych badań powstaje na podstawie różnych niejednocelowych kryteriów przy jednoczesnym pojawieniu się różnych terminologii. Na przykład oddzielone węzły układu

tłumienia wibracji mają różne nazwy: Wibrokompensator, aktywne wibrotłumienia, aktywibratory..., a cały układ nosi nazwy: i układ aktywnej kompensacji, aktywnej wibroizolacji, aktywnej wibroobrony...

Tablica 1





## II. PRZEGLĄD BADAŃ, KONCEPCJA I CEL PRACY

### 1. PRZEGLĄD BADAŃ

W ostatnich latach obserwuje się wzrost zainteresowania zastosowaniem problemu optymalnego sterowania do rozwiązywania zagadnień w teorii odkształcalnych ciał. Wiele ciekawych wyników można znaleźć w pracach wielu autorów między innymi: [1-10] ; [13-16] , [12-24] ; [28] ; [32] ; [34-37] ; [42] [43] ; [47] ; [63-66] ; [75-76] . Z wyników tych badań można wyróżnić następujące:

Pasywne sterowanie i optymalizacja, która zajmuje się konstrukcyjną budową obiektu, przy czym wyboru jej parametrów należy dokonać w taki sposób, aby energia drgania lokalizowała się w określonym obszarze bez rozprzestrzeniania, ciekawe wyniki w tym kierunku przedstawiono w pracach wielu badaczy wśród nich: Z.MRÓZ [42] , [44] , M.KBIIYT [37] , SOONG [46] i innych [62][64] ; [28] ...

W pracy [42] przedstawiono ogólne sformułowanie teorii optymalizacji oddziaływań i reakcji działających na ciało odkształcalne nieliniowe sprężyste. Wyniki otrzymane można zastosować w zagadnieniach aktywnego sterowania. W pracy [37] proponowane metodę dla zaniejszenia ruchu oporów maszyn przy pomocy dodatkowej budowy kolumny. W pracy [46] , rozpatrywano zagadnienia optymalnego sterowania konfiguracji na podstawie kryteriów optymalność energii, a w pracach [9] , [11] . Przedstawiona jest metoda zachowania się ruchu latających konstrukcji obciążonej powierzchniowym ciśnieniem. W pracy [40] wprowadzone analizę wpływu właściwości materiału na parametr sterowania dla przypadku belki z materiału lepkiego nieliniowego poddanej impulsowemu ciśnieniu.

Inny typ zadań optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji opartych na idei aktywnych oddziaływań, których rozwiązanie polega na budowie układu dodatkowego sterującego oddziaływania, który działa na daną konstrukcję. Dzięki temu można zmniejszyć aktywną energię drgań w konstrukcji. Zagadnienia takiego typu rozpatrywano w pracach [2] , [3] , [6] , [4] , [15] , [65] , [66] . Ciekawe wyniki przedstawiono w pracy [2] , [3] dla belki podanej ruchomej sile. Sterujące oddzia-

ływanie jest zadane wcześniej w postaci zginającego momentu z niewiadomymi współczynnikami, które muszą określić w taki sposób, aby funkcjonał Bolzy osiągnął minimum.

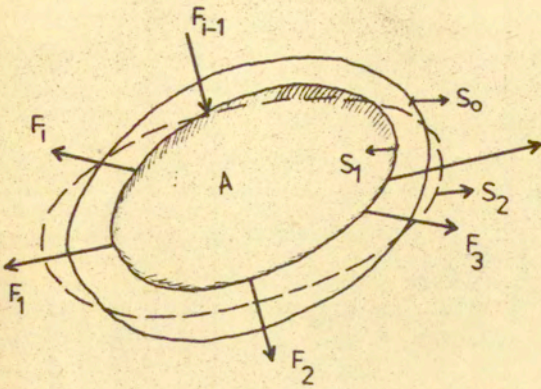
Wiele ciekawych wyników otrzymane przy analizie procesów nagrzewania układu z rozdzielonymi parametrami przedstawione są w [6].

Należy koniecznie zauważyć, że przy rozwiązaniach zagadnień optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji obciążonej zewnętrznymi oddziaływaniami z uwzględnieniami zmian geometrycznych i fizycznych mamy do czynienia z równaniami różniczkowymi cząstkowymi nieliniowymi [6], [15]. W tych przypadkach metoda linearyzacji nabiera większego znaczenia i na jej podstawie można stworzyć metody budowy teorii syntezy będące w pewnym sensie alternatywą schematu badań.

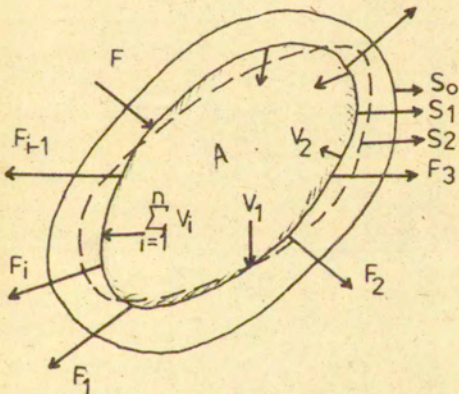
## 2. KONCEPCJA I CEL PRACY

Analizując detychczasowe osiągnięcie w zakresie optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji wynika, że tradycyjne pasywne metody zwalczania wibracji są efektywne tylko dla wąskich spektrów częstotliwości. Budowa takiego sterującego układu jest kosztowna. Z tego względu trzeba opracować zasadniczo nowe wysokie efektywne metody tłumienia ruchu w konstrukcji na podstawie sterowania procesami generacji i rozprzestrzeniania fal w konstrukcji. Aby zabezpieczyć konstrukcję od zniszczenia. Koncepcja tej idei może być wyjaśniona geometryczną interpretacją, która jest przedstawiona na rys. 1a,b. Na konstrukcję A mającą początkową konfigurację  $S_1$ , działają zewnętrznie siły  $F_i$   $i=1,2,\dots$  pod wpływem których konstrukcja A przekształciła się w stan posiadający odpowiednią konfigurację  $S_2$ , która jest większa niż dopuszczalny obszar  $S_0$  na rys. 1a tzn.  $S_2 > S_0$  w tym przypadku konstrukcja nie może spełniać swoich funkcji. Celem sterowania jest poszukiwanie potrzebnych odpowiednich, dodatkowych typów oddziaływań  $V_1$  na konstrukcję A w taki sposób, aby zmiana formy konstrukcji  $S_2$  nie przekroczyła granicy dopuszczalnego obszaru  $S_0$ , który jest przedstawiony na rys. 1b.





Rys. 1a . Konstrukcja jest w stanie zniszczenia  
 $s_2 > s_0$



Rys. 1b. Konstrukcja jest zabezpieczona sterującymi oddziaływaniami  $V_1$   $s_2 < s_0$

Celem niniejszej pracy jest:

1. Zastosowanie teorii optymalnego i aktywnego sterowania ruchem w rozpatrywaniu zagadnień teorii konstrukcji obciążonej dynamicznie. Konstrukcyjne obiekty rozpatrywane są tu jako belki, pręty, płyty, powłoki.
2. Uogólnienie i przedstawienie odpowiednich metod dla rozwiązywania rozpatrywanych zadań.
3. Analiza wpływu zmian geometrycznych i fizycznych na parametry sterowania.
4. Analiza wpływu typów zewnętrznych obciążeń oraz wpływu warunków brzegowych na sterujące oddziaływanie.
5. Przedstawienie sposobów zbudowania konstrukcyjnego, matematycznego modelowania układu stabilizacji ruchu w konstrukcji.

Poszczególne rozdziały od III do IX opracowane są jako integralne elementy pracy. W rozdziale III przedstawiono ogólne sformułowanie zagadnienia optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji obciążonej dynamicznie z podaniem klasyfikacji zadań. W rozdziale IV omówione są przybliżone metody, metoda linearyzacji nieliniowych równań, metodą L momentów, metodą praktyczną oraz metodą matematycznego programowania.

W rozdziale V przedstawiono analizę wpływu typów zewnętrznych oddziaływań na parametry sterowania, rozwiązano kilka reprezentatywnych zadań belki, powłoki obciążonych impulsowymi ciśnieniami. Rozpatrywano wpływ siły tłumienia na parametry sterowania. W rozdziale VI rozpatrywano analizę wpływu zmian geometrycznych oraz fizycznych na parametry sterowania. Przedstawiono ogólne sformułowanie zagadnienia optymalnego sterowania ruchem w teorii nieliniowej dynamice konstrukcji, rozwiązano kilka zagadnień plastycznej powłoki przygotowanej z materiału Treski poddanej impulsowemu ciśnieniu.

W rozdziale VI zastosowano metodę praktyczną w rozwiązaniu zadań belki obciążonej stałą siłą poruszającą się harmonicznie wokół ustalonego punktu oraz belki plastycznej obciążonej impulsowym ciśnieniem. W rozdziale VIII rozpatrywano zadania optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji metodą matematycznego programowania.



Przedstawione rozwiązania zadania belki obciążonej ruchomą siłą ze stałą prędkością oraz rozwiązanie zadania płyty prostokątnej. W ostatnim rozdziale IX przedstawione sposoby modelowania systemów stabilizacji ruchu w konstrukcji. Zbudowano konstrukcyjnie schemat systemów stabilizacji ruchu poprzecznego w belce i w płycie.

Zakres pracy: Rozwiązanie problemów optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji obciążonej dynamicznie przeprowadza się w dwóch etapach.

Pierwszy etap: nazywa się syntezą wstępną czyli modelowanie matematyczne, opracowania funkcjonalnego schematu blokowego schematu ideowego oraz wykonania niezbędnych obliczeń w zakresie wymaganych obciążeń, ciśnień, przemieszczeń...

Drugi etap: przeprowadzenie eksperymentów i projektowanie.

W niniejszej pracy zajmujemy się problemami dotyczącymi pierwszego etapu.

### III. PROBLEM OPTIMALNEGO STEROWANIA RUCHEM W KONSTRUKCJI

Jednym z podstawowych elementów zagadnienia optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji jest wybór modelu, który może mieć charakter koncepcyjny, fizyczny lub matematyczny. Model koncepcyjny to taki model, który reprezentuje pewną logiczną propozycję uporządkowania istotnych cech procesu, model fizyczny nadaje cechom interpretację, zgodnie z naturą fizyczną procesu. Wreszcie model matematyczny reprezentuje cechy modelu w postaci relacji matematycznych. Model może mieć również charakter strukturalny, jeśli są w nim wyodrębnione modele elementów systemu i powiązań między nimi, lub też charakter zaproponowany jeśli dotyczy systemu jako całości. Model może być dynamiczny bądź statyczny, liniowy lub nieliniowy, deterministyczny bądź stochastyczny. Nie zależnie od szczegółowej klasyfikacji ważne jest dopasowanie postaci modelu do zadania któremu ma służyć.

W obecnej pracy przyjmujemy model matematyczny mający charakter dynamiczny liniowy lub nieliniowy, który służy do analizy i syntezy konstrukcyjnych obiektów, które rozpatrujemy jako pręty, belki, płyty i powłoki, przez które rozumie się zarówno obiekt sterowania. Czyli system lub proces podlegający

sterowaniu jak urządzenia sterujące a więc zespół urządzeń umożliwiających i realizujących oddziaływanie na procesy przebiegające w konstrukcji np. przemieszczeń, prędkości przemieszczenia, naprężenia, .... W celu zapewnienia ich pożądanego przebiegu przez syntezę obiektu sterowania rozumiemy określenie sposobu działania urządzeń sterujących /zwanego też algorytmem ich działania lub prawem sterowania/ z uwzględnieniem własności konstrukcji oraz celu czy zadania.

Rozdział ten obejmuje ogólne sformułowania zagadnienia optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji z uwzględnieniem wpływu zmian geometrycznych i fizycznych, które będą rozpatrywane w dalszych rozdziałach oraz wyjaśnienie technicznego sensu zagadnienia optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji.

1. Ogólne sformułowanie zagadnienia optymalnego sterowania ruchem w teorii konstrukcji.

Rozważmy ciało deformowalne mające w początkowej konfiguracji objętość  $V_0$ , gęstość  $\rho$  oraz regularną powierzchnię  $S_0$  składającą się z dwóch części. Na część  $S_{0a}$  działają siły powierzchniowe  $T_x(x_i, t)$ ; zaś na części  $S_{0b}$  zadane są prędkości  $\dot{U}^S(x_i, t) = 0$  lub przemieszczenia  $U^S(x_i, t) = 0$ . Na ciało działają ponadto siły sterujące  $V_1$ .

W dość ogólnej postaci zagadnienia optymalnego sterowania może być sformułowane w następujący sposób:

Znaleźć funkcję wektorową  $\underline{w}(t) \in R^n$  oraz  $\underline{v} \in R^m$  dla  $t \in [t_0, t_f]$  minimalizującą funkcjonal  $J(w, v)$

$$III_1 \quad J = J(w, v)$$

oraz spełniającą następujące zależności:

1. Równania ruchu

$$III.2 \quad [(\delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha,\beta})\delta_{\gamma,\beta}]_{,\gamma} = \rho_0 \ddot{U}_\alpha$$

- Warunki brzegowe:

$$III.3 \quad [(\delta_{\alpha\beta} - U_{\alpha,\beta})\delta_{\gamma\beta}] \cdot N_\gamma = T_\alpha - V_\alpha \delta(x_i - \eta_i)$$



w którym odpowiednie wielkości oznaczają:

$\delta_{\alpha\beta}$  - funkcja delta Diraca,  $N_\nu$  wektor normalny do  $S_{0a}$

$U_x$  - przemieszczenie

$\sigma_{\alpha\beta}$  - tensor naprężenia

2 - warunek plastyczności

$$\text{III.4} \quad \phi(\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}) = 0$$

3.- Stowarzyszone prawo płynięcia plastycznego

$$\text{III.5} \quad \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \lambda \langle \phi \rangle \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{\alpha\beta}}$$

Przy czym  $\langle \phi \rangle = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \phi = 0 \\ 0 & \text{jeśli } \phi < 0 \end{cases}$     lub  $\phi = 0$     lub  $\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \cdot \sigma_{\alpha\beta} < 0$

4.- związki odkształceniowo przemieszczeniowe

$$\text{III.6} \quad \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\dot{U}_{\alpha,\beta} + \dot{U}_{\beta,\alpha} + \dot{U}_{\alpha,\gamma} U_{\gamma,\beta} + U_{\alpha,\gamma} \dot{U}_{\gamma,\beta}]$$

5.- Warunki początkowe

$$\text{III.7} \quad U_\alpha(x_i, t_0) = U_\alpha^0 \quad ; \quad \dot{U}_\alpha(x, t) = \dot{U}_\alpha^0$$

6.- Warunki końcowe

$$\text{III.8} \quad U_\alpha(x_i, t_f) = \tilde{U}_{t_f} \quad (\text{lub.} = 0)$$

$$\dot{U}_\alpha(x_i, t_f) = \tilde{\dot{U}}_{t_f} \quad (\text{lub.} = 0)$$

7.- Warunki ograniczenia

$$\text{III.9} \quad V_{max} \leq [V_{dop}]$$

8.- Oraz warunki brzegowe, które dla konkretnego zadania będą odpowiednio zadane.

Z konkretyzacji wyrażeń III<sub>1</sub> wynikają różne typy zadań optymalnego sterowania. Poniżej przyjęta klasyfikacja zadań optymalnego sterowania jest dość umowna i przedstawiona jest

celem wyjaśnienia typu rozpatrywanego zagadnienia w tej pracy.

Typy zagadnień można podzielić na trzy grupy. Każda z nich charakteryzuje się sposobem w jaki określa się odpowiednio funkcjonał  $III_1$ . Warunki ograniczeń na trajektorii  $III_8$  oraz warunki  $III_3$ - $III_7$ .

W praktyce często spotykamy następujące typy zagadnień:

a. Zagadnienie Lagrange'a. Funkcjonałem całkowym będziemy nazywali zależność postaci:

$$III.10 \quad J(\underline{W}, \underline{V}) = \int_{t_0}^{t_f} \Lambda(\underline{W}, \underline{V}, P, t) dt$$

Gdzie  $\Lambda$  funkcja różniczkowalna względem swoich zmiennych. W przypadku braku warunków ograniczenia  $III_8$  znajdowanie minimum funkcjonału  $III_9$  z zachowaniem warunków  $III_6$ ,  $III_7$  nazywa się zagadnieniem Lagrange'a. Jest to klasyczne zadanie rachunku wariacyjnego.

b. Zagadnienie Mayera: W tym przypadku mamy do czynienia z minimalizacją funkcjonału typu

$$III.11 \quad J(\underline{W}, U) = M(\underline{W}(t_f), t_f)$$

formalnie zagadnienie Mayera  $III.11$  jest ogólniejsze niż zagadnienie Lagrange'a  $III_9$ , dowolne zagadnienie Lagrange'a  $III_9$  - można rozpatrywać jako szczególny przypadek zagadnienia Mayera.

c. Zagadnienie Bolzy: Zagadnienie Bolzy może być sformułowane następująco: należy określić funkcje  $\underline{W}$  i  $\underline{V}$  w taki sposób, aby był minimalizowany następujący funkcjonał:

$$III.12 \quad J(\underline{W}, \underline{V}) = \int_{t_0}^{t_f} \Lambda[\underline{W}, \underline{V}, P, t] dt + M[\underline{W}(t_0), \underline{W}(t_f), t_0, t_f]$$

i spełniające ograniczenia warunki początkowe i końcowe oraz warunki ograniczenia  $III_8$ . Zauważmy, że zagadnienie Bolzy może być sprowadzone do zagadnienia Mayera  $III_{10}$ .



Jednym z ważnych dla techniki i ekonomii jest zadanie czasooptymalne. Termin czasooptymalny obejmuje zadanie, w którym funkcjonal /obiektem minimalizacji/ jest czas.

2. Techniczny sens zadania optymalnego sterowania ruchem w dynamice konstrukcji.

Dla wykorzystania dalszego wyjaśnienia problemu, zagadnienia III<sub>1</sub>-III<sub>8</sub> będziemy przedstawiać w następującej postaci matematycznej /to sprawdzenie będzie rozpatrywane w rozdziale VI/.

$$\text{III.13} \quad J(w,v) = \int_{t_0}^{t_f} \Lambda[w,v,p,t] dt + G(w,t_0,t_f)$$

$$\text{III.14} \quad \ddot{w} = f(w,v,p,t) ; t \in [t_0, t_f]$$

$$\text{III.15} \quad w(t_0) = w_0 ; \dot{w}(t_0) = \dot{w}_0$$

$$\text{III.16} \quad w(t_f) = w_{tf} \text{ (lub } = 0 \text{)} ; \tilde{w}(t_f) = \tilde{w}_{tf} \text{ /lub } = 0 \text{/}$$

$$\text{III.17} \quad v_{\max} \ll [v_{\text{dop}}]$$

W szczególności przy  $\Lambda \equiv 1$ .  $G=0$  wówczas mamy następującą całkę

$$\text{III.18} \quad J(w,v) = \int_{t_0}^{t_f} 1 \cdot dt = t_f - t_0$$

Zadanie III<sub>15</sub> nosi nazwę zadania najszybszego sterowania.

Przy rozpatrywaniu zadania optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji będziemy przyjmowali następujący funkcjonal:

$$\text{III.19} \quad J(w,v) = \left( \int_{t_0}^{t_f} [v(t)]^p dt \right)^{1/p}$$

jako kryterium optymalizacji. Przy czym w zależności III.20

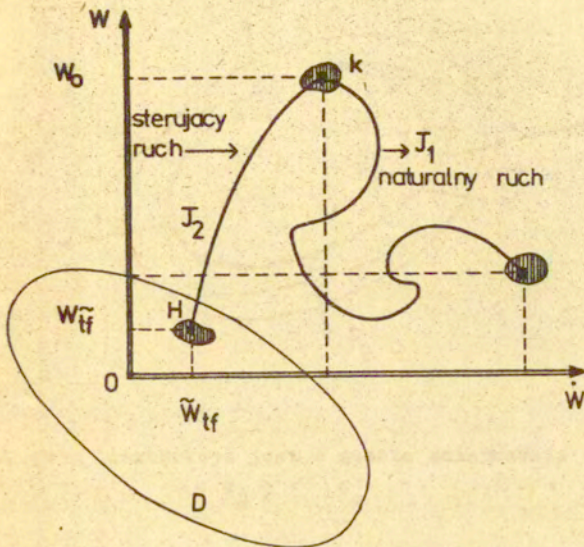
indeks  $P$  określa wielkość fizyczną podlegającą procesowi sterowania. Na przykład jeżeli przyjmujemy  $P=1$  wówczas funkcjonał  $III_{18}$  może być interpretowany jako ilość ciepła wprowadzonego do układu. Jeśli przyjmujemy  $P=2$  wtedy mamy do czynienia z optymalizacją energii która jest tracona w czasie przeprowadzenia obiektu od stanu początkowego do ustalonego końcowego.

Zagadnienie  $III_{12} - III_{15}$  może być wyjaśnione geometryczną interpretacją, która przedstawiona jest na rys. 2 gdzie początkowy stan obiektu charakteryzowany parametrami  $W, W_0$  oznaczono punktem  $K$ . Ruch obiektu odbywający się bez udziału sterującego oddziaływania  $V(t)$  nosi nazwę ruchu naturalnego. Załóżmy, że na skutek ruchu naturalnego przez pewien czas obiekt jest sprowadzony do stanu oznaczonego punktem  $T$ . Funkcjonał odpowiadający ruchowi naturalnemu oznaczamy przez  $J_1$ . Natomiast ruchem sterującym /lub programowym ruchem/ nazywa się ruch odbywający się z udziałem sterującego oddziaływania  $V$ . Pod jego wpływem obiekt przez pewien czas jest przeprowadzony od początkowego stanu w założony stan oznaczonego punktem  $H$ . Funkcjonał odpowiadający ruchowi sterującemu oznaczamy przez  $J_2$ .

Sterowanie nazywamy optymalnym jeśli istnieje następująca nierówność

$$J_2 < J_1 .$$





Rys. 2. Interpretacja geometryczna technicznego sensu zadania optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji obciążonej dynamicznie.  
- krzywa KT odpowiadająca naturalnemu ruchowi  
- krzywa KH sterujący ruch /lub ruch programowy/

#### IV. METODY ROZWIĄZANIA PROBLEMU

##### 1. Wstęp

Zagadnienia w teorii optymalnego sterowania mogą być rozwiązane różnymi metodami. Między nimi są metody wariacyjne, matematyczne programowanie lub metody numeryczne ... Do nieklasycznych metod należy także Zasada Maksimum L.S. PONTRAGINA [55] i inne metody eksperymentalne. Każda z omówionych metod wariacyjnych składa się z trzech podstawowych operacji:

- a - Wyznaczenie krzywych ekstremalnych
- b - Wybranie z nich krzywych spełniających warunki brzegowe

### 1 początkowe

- c - Wyznaczenie takiej krzywej która spełnia kryterium minimum funkcjonału.

Zauważmy, że przy rozwiązywaniu zadań optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji, częste spotykamy trudności w wyznaczeniu niektórych lokalnych globalnego minimum oraz w kontroli następnego warunku, Jeżeli rozwiązanie otrzymane było na granicy dopuszczalnego obszaru. Jednak wariacyjne metody pozwalają pokonać te trudności w wielu konkretnych zadaniach. Chociaż praktyczne ich zastosowanie w rozwiązaniu zadań z ograniczeniem obszaru jest bardzo trudne. Natomiast przy zastosowaniu dynamicznego programowania spotykamy trudność z automatycznym zabezpieczeniem najmniejszego lokalnego minimum możliwych rozwiązań leżących na granicy zamkniętego obszaru. Zasada Maksimum wymaga sprowadzenia wariacyjnego zadania do równania Hamiltona Jakobjego z odpowiednimi granicznymi warunkami pozwoli zachować wszystkie właściwości dynamicznego programowania z bezpośrednim zastosowaniem klasycznego warunku wariacyjnego.

Dowolny szeroki kurs zadań można rozwiązywać za pomocą zasady maksimum L.S. PONTAGINA. Jednak główna trudność przy tym powstaje w zastosowaniu zasady maksimum do problemów niejawnie sformułowanych względem końcowych stanów systemów. Jedy-  
nym sposobem na pokonanie tych trudności jest sprowadzenie przyjęcia chwilowego optymalnego sterowania, które zmniejsza energię w każdym momencie czasu z maksymalną możliwą prędkością. Dzięki temu określeniu wydaje się możliwe sformułować zasadę maksimum dla systemu z rozdzielonymi parametrami.

W związku z metodami rozwiązywania zagadnienia aktywnego zachowania ruchu konstrukcji można twierdzić, że uniwersalnych metod, które mogą być zastosowane w rozwiązaniu szerokiej klasy zagadnień nie ma. Z tego względu wynika potrzeba wyboru odpowiedniego matematycznego aparatu, aby ani typy sterującego konstrukcyjnego obiektu /pręt, belki, płyty, powłoki/ ani liczba sterujących oddziaływań, ani ograniczenia nie przeszkadzały w rozpatrywaniu zagadnień.

W rozwiązaniu zadania optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji często mamy do czynienia z nieliniowym równaniem różniczkowym cząstkowym. Dlatego też w tym rozdziale najpierw



będzie przedstawiona metoda linearyzacji, a następnie metoda L momentów [6]., metoda praktyczna i na koniec omówiona zostanie metoda matematycznego programowania.

## 2. Metoda linearyzacji równania różniczkowego nieliniowego.

W rozpatrywaniu zagadnienia optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji obciążonej dynamicznie spotykamy nieliniowe równania różniczkowe cząstkowe /było przedstawione w poprzednim rozdziale II/, które można sprowadzić do równania nieliniowego różniczkowego w postaci: /konkretnie będzie rozpatrywane w rozdziale VI/.

$$IV_1 \quad \ddot{W}(t) + K[W(t)] = Q(t)$$

gdzie:  $W(t)$  funkcja fazowa zależy od czasu  
 $Q(t)$  wymuszenia  
 $K[W(t)]$  nieliniowa funkcja zmiennej  $W(t)$ .

Zgodnie z ideą metody linearyzacji sprowadzimy rozpatrywane równanie  $IV_1$  do analizy równań o pewnych specjalnych właściwościach, które powodują, że rozwiązywanie rozpatrywanych zadań staje się znacznie łatwiejsze. A więc zastępując w równaniu  $IV_1$  nieliniową funkcją  $K[W(t)]$  zastępczą funkcją liniową

$$IV_2 \quad K[W(t)] = \lambda^2 W(t)$$

Otrzymamy liniowe równanie różniczkowe

$$IV_3 \quad \ddot{W}(t) + \lambda^2 W(t) = Q(t)$$

Dokonując linearyzacji funkcji  $K[W(t)]$  występującej w równaniu  $IV_1$  zgodnie z zależnością  $IV_2$  należy dobrać współczynnik  $\lambda^2$  w taki sposób, aby minimalizował następujący funkcjonal:

$$IV_4 \quad I = \int_{-a}^a \{ K[W(t)] - \lambda^2 W(t) \}^2 dW(t)$$

tnz. żądamy spełnienia następującego warunku

$$IV_5 \quad \frac{\partial I}{\partial \lambda^2} = 0$$

Dokładność aproksymacji nieliniowej funkcji  $I[W(t)]$  zwiększamy mnożąc funkcję podcałkową w funkcjonał  $IV_4$  przez wagę  $W^3(t)$ , wówczas parametr linearyzacji  $\lambda^2$  jest określony zależnością

$$IV_6 \quad \lambda^2 = \frac{5}{2a^5} \cdot \int_{-a}^a K[W(t)] W^3(t) dW(t)$$

gdzie  $-a, a$  są granicami całkowania.

### 3. Metoda L momentów

Metodę L momentów rozpatrywano w pracy Krejina M.G. pt: "Problem momentów Markowa i ekstremalnego zadania" i zastosowano ją dla rozwiązania zagadnienia sterowania systemami przy rozdzielonych parametrach pod wpływem temperatury [6]. Główny sens tej metody przedstawia się następująco.

Jeśli funkcje  $g_i(s)$ ,  $V_1(s)$  są określone w wielowymiarowej przestrzeni  $E$ , wówczas odpowiednie równości momentowe mogą być zapisane zależnościami

$$IV_{.7} \quad \int_S g_i(s) \cdot V_1(s) dS = a_i \quad i = 1, 2, \dots$$

Całkę  $IV_7$  można rozpatrywać jako funkcjonał L określony funkcją  $V_1(s)$ , natomiast zbiór  $g_i(s)$  traktujemy jako zbiór elementów na których funkcjonał L jest wyznaczony.

Możemy zatem zapisać wzór  $IV_7$  w następującej postaci

$$IV_8 \quad L(g_i(s)) = (g_i, V_1) = a_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

a/ Opis metody: Metoda L momentów polega na wyznaczeniu funkcjonału  $IV_{.8}$ , który na założonym zbiorze  $g_i(s) \in E$  przyjmuje wartość  $a_i$  tzn.

$$IV_9 \quad L(g_i(s)) = a_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$



przy czym

$$IV_{10} \quad \|L\| \leq \ell$$

zaś  $\ell$  jest zadana liczbą dodatnią.

Warto zauważyć, że często spotykamy przypadek, w którym sformułowanie problemu  $L$  momentów nie posiada jedynego rozwiązania, tzn. istnieje wiele funkcjonałów, które rozwiązują problem  $L$  momentów. IV.8. W związku z tym spełniony musi być warunek ograniczający IV.10.

Problem  $L$  momentów sprowadza się do poszukiwania koniecznych i dostatecznych warunków istnienia funkcjonału IV.8, który posiada normę  $\|L\|$  nie większą od liczby  $\ell$ . Aby rozwiązać ten problem rozważamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1

Koniecznym i dostatecznym warunkiem istnienia funkcjonału  $L(g_i)$  określonego z elementów  $g_i \in E$  przy czym  $i=1,2,\dots$

$$IV_{11} \quad L(g_i) = a_i$$

oraz

$$IV_{12} \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0, \quad \|L\| < \ell, \quad \ell > 0$$

jest

$$IV_{13} \quad \lambda_n = \max \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \leq \ell$$

przy czym

$$IV_{14} \quad \sum_{i=1}^n g_i \xi_i = 1$$

lub

$$IV_{15} \quad \frac{1}{\lambda_n} = \min_{\xi_i} \sum_{i=1}^n g_i \xi_i$$

przy czym

$$IV_{16} \quad \sum_{i=1}^n a_i \xi_i = 1$$

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w pracy [6].

Twierdzenie 2

Warunkiem koniecznym i dostatecznym tego, aby element  $g_i = \sum_{i=1}^n g_i \xi_i$ , gdzie  $\sum_{k=1}^n a_k \xi_k = 1$  był minimalizującym elementem zadania IV.13, IV.14 lub IV.15, IV.16 jest, aby był on jednocześnie ekstremalnym elementem dowolnego minimalnego względem normy funkcjonału L, który daje rozwiązanie zadania przez znalezienie funkcjonału L w ten sposób aby:

$$IV_{17} \quad L(g_i) = a_i \quad i = 1.2 \dots n$$

oraz

$$IV_{18} \quad \|L\| = \lambda_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Jeżeli element g pewnego liniowego funkcjonału L spełnia zależność

$$IV_{19} \quad \|L(g)\| = \|L\| \|g\|$$

to mówimy, że jest on ekstremalnym elementem.

Twierdzenie 3

Jeżeli są spełnione warunki twierdzenia 2 oraz g element



jest unormowanym elementem funkcjonału  $L$ , wtedy układ IV.17 posiada jedyne rozwiązanie.

Możemy sformułować problem  $L$  momentów dla funkcjonałów należących do przestrzeni  $L_p$  i  $M_p$ ,

Niech dany będzie dowolny skończony lub nieskończony zbiór funkcji wektorowych  $g_i \in L_p$ ,  $i=1,2,\dots,n$  dane są również liczby  $a_1, a_2, \dots, a_n$  oraz  $\ell > 0$ .

Należy znaleźć taką wektorową funkcję  $v_1 \in M_p$ , gdzie  $\int_{D'} v_1 + \int_D v_1 = 1$ , która spełnia warunki

$$IV_{20} \quad \int_D g_i(t) v_1(t) dt = a_i \quad i=1,2,\dots$$

$$IV_{21} \quad \|v_1\|_{M_p} \leq \ell \quad 1 < p < \infty$$

Całka IV.20 nosi nazwę momentu funkcji  $v_1(t)$  odpowiadającej elementowi  $g_i$   $i=1,2,\dots,n$ .

Z twierdzenia pierwszego sformułowanego w przestrzeni  $E$  wynika następujące twierdzenie.

#### Twierdzenie 4

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to aby w przestrzeni  $M_p$ ,  $1 < p < \infty$  istniała wektorowa funkcja  $v_1(t) = [v_{11} v_{12} \dots v_{1r}]$  z normą, która nie przewyższa liczby  $\ell > 0$  t.z.n.

$\|v_1\| < \ell$  przy zadanym zbiorze momentów  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  odpowiadających wektorowej funkcji  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in L_p$ , jest spełnienie nierówności

$$IV_{22} \quad \lambda_n < \ell$$

Rozwiązaniem  $\lambda_n$  określamy w ten sposób, aby

$$IV_{23} \quad \lambda_n = \max \sum_{k=1}^n a_k \xi_k$$

przy czym

$$IV_{24} \quad \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i g_i \right\| = 1$$

lub

$$IV_{25} \quad \frac{1}{\lambda_u} = \min_{\xi_i} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i g_i \right\|$$

Przy czym

$$IV_{26} \quad \sum_{i=1}^n a_i \xi_i = 1$$

Twierdzenie 5

Jeżeli istnieje rozwiązanie  $V(t)$  w skończonej  $n$  wymiarowej przestrzeni  $M_p$ , gdzie  $1 < p < \infty$ , zadania IV.20 z warunkiem IV.21, to można je przedstawić w następujący sposób

$$IV_{26} \quad V(t) = \lambda_u P' \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i g_i^k \right\|^{p-1} \text{Sign} \sum_{i=1}^n \xi_i g_i^k$$

$k = 1, \dots, r$

ekstremalne punkty funkcjonału IV.23.

b/ Sprowadzenie zagadnienia optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji obciążonej dynamicznie do problemu L momentów.

Rozważmy zagadnienie opisane w ogólnej postaci III<sub>1</sub> - III.8 w rozdziale III.

Przystępując do dalszych rozważań przyjmujemy założenie o rozdzieleniu zmiennych niezależnych  $X, t$  w funkcji przemieszczenia  $U_\alpha$  i w funkcji zmuszenia  $T_\alpha$ ,  $V_\alpha$  w postaci

$$IV_{27} \quad U_\alpha = W(t) \cdot U_c(x_j) \quad j=1,2,3.$$

$$U_\alpha = W(t) \cdot U_c(x_j)$$

$$U_x = W(t) \cdot U_c(x_j)$$

$$V_x = V(t) \cdot T_c(x_j)$$

$$T_\alpha = P(t) \cdot T_c(x_j)$$



Podstawiając IV.27 do III.2 i wykorzystując zasadę mocy wirtualnych otrzymujemy następującą postać równania problemu

$$IV.28 \quad \int_V \rho_0 \ddot{u}_\alpha \dot{u}_\alpha dv + \int_V \sigma_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} dv - \int_S (T_\alpha - V_\alpha) \dot{u}_\alpha ds = 0$$

lub

$$IV.29 \quad \ddot{W}(t) = A_0 [P(t) - V(t) - K[W(t)]]$$

gdzie przez  $A_0$ ,  $K[W]$  występują w równaniu IV.29 oznaczamy

$$A_0 = \frac{1}{\mu^2} \int_S T_c(x_j) U_c(x_j) ds$$

$$M^2 = \int_S \rho_0 U_c^2(x_j) ds$$

$$K[W(t)] = \left\{ \int_V \sigma_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} dv \right\} \left\{ \int_S T_c(x_j) U_c(x_j) ds \right\}^{-1}$$

Wykorzystując metodę linearyzacji omówioną w poprzednim punkcie można przedstawić równanie IV.29 w postaci

$$IV.30 \quad \ddot{W}(t) = A_0 \lambda^2 W(t) + A_0 [P(t) - V(t)]$$

gdzie  $\lambda^2$  jest parametrem linearyzacji, który można określić przy pomocy wzoru IV.6  $A_0$  można wyznaczyć przy rozwiązaniu własnego zadania.

Wykorzystując warunki początkowe i końcowe III.3. III.4 można sprowadzić zadanie III.1 - III.8 czyli zadanie III.1. IV.30 oraz z III.3 - III.8 do zagadnienia, którego rozwiązanie można otrzymać metodą L momentów.

$$IV.31 \quad \int_{t_0}^{t_f} g_i(\tau) V(\tau) d\tau = a_i$$

$$g_1 = A_0 \sin \lambda A_0 (t - \tau) t_f$$

$$a_1 = \tilde{W}(t) + \int_{t_0}^{t_f} A_0 P(\tau) \cdot \sin A (t - \tau) d\tau$$

W(t) rozwiązanie jednorodnego równania

#### 4. Metoda praktyczna

W większości przypadków zadania optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji wygodnie rozwiązujemy metodą praktyczną gdyby wcześniej były znane typy zewnętrznych oddziaływań na konstrukcję czyli bezpośrednio były znane deformowalne formy konstrukcji, wówczas funkcja sterująca może być wyrażona zależnością identycznego podobnego typu oddziaływania zewnętrznego z niewiadomymi współczynnikami, które należy wyznaczyć w taki sposób, aby był spełniony warunek minimum funkcjonału III.16.

#### 5. Metoda dynamicznego programowania

Zagadnienie optymalnego sterowania ruchu w konstrukcji obciążonej dynamicznie można rozpatrywać jako zagadnienie matematycznego programowania.

Rozważamy konstrukcję obciążoną dynamicznie, której ruch sterujący jest opisany równaniem w następującej postaci:

$$IV.32 \quad W(t) = f(W, V, Q, t)$$

W równaniu IV.32 poszczególne wielkości oznaczają:

- $\underline{W}$  .n. - wymiarowa wektorowa funkcja prędkości
- $\underline{W}$  - n - wymiarowa wektorowa funkcja stanu
- $V$  - m - wymiarowa wektorowa funkcja od  $W, \underline{W}, P, t$

Będziemy rozwiązywać równanie IV.32 w przedziale czasu  $[t_0, t_f]$ , to początkowy czas,  $t_f$  końcowy czas.

Załóżmy, że w chwili początkowej  $t_0$  konstrukcja znajduje się w stanie scharakteryzowanym zależnościami, które są wyrażone następująco:

$$IV.39 \quad W(t_0) = \underline{W}_0, \quad \dot{W}(t_0) = \dot{\underline{W}}_0$$



i w chwili  $t = t_f$  konstrukcja znajduje się w ustalonym stanie, który jest określony zależnościami

$$IV.34 \quad W(t_f) = W_{t_f} \quad \text{lub} = e \quad ; \quad \dot{W}(t_f) = \dot{W}_{t_f}$$

Zagadnienie optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji można sformułować w następujący sposób:

Należy znaleźć funkcję  $\underline{W}$  oraz  $\underline{V}$  w taki sposób, aby były spełnione następujące zależności

$$a/ \quad J = \int_{t_0}^{t_f} \Lambda(W, V, Q, t) dt \Rightarrow \min$$

IV.35

$$b/ \quad \underline{W} = f(\underline{W}, V, Q, t)$$

$$c/ \quad W(t_0) = W_0 \quad , \quad \dot{W}(t_0) = \dot{W}_0$$

$$d/ \quad W(t_f) = W_{t_f} \quad , \quad \dot{W}(t_f) = \dot{W}_{t_f}$$

$$e/ \quad V_{\max} \leq [V_0]_{\text{dop}} \quad ,$$

Aby wyjaśnić związki między zadaniem optymalnego sterowania ruchem konstrukcji a zagadnieniem matematycznego programowania-przekształcimy zależność IV.35 a) ÷ e) w następujący sposób:

Czas trwania procesu sterowania  $(t_0, t_f)$  podzielimy na  $j$  części

$$IV.36 \quad (t_0, t_f) = \{(t_1 - t_0), (t_2 - t_1); \dots (t_j - t_{j-1})\}$$

zaś w granicach każdego podprzedziału  $t_j - t_{j-1}$  określimy dowolny czas  $t_N \in [t_j - t_{j-1}]$ . Natomiast funkcjonal IV.35a zapiszemy w postaci

$$IV.37 \quad J = \int_{t_0}^{t_f} \Lambda[W, v; q, t] dt = \lim \sum_{j=1}^n \Lambda[\cdot] [t_j - t_{j-1}]$$

Równanie ruchu IV.35.b jest przedstawione zależnością

$$IV.38 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [W(t_j) - W(t_{j-1})] = f[W(t_N), V(t_N), Q, t_N]$$

gdzie  $h = t_j - t_{j-1}$ ;  $j = 1, 2, \dots, K$

Warunki początkowe i końcowe mogą być wyrażone w postaciach

$$IV.39 \quad \begin{aligned} W(t_0) &= W_0 ; \quad \dot{W}(t_0) = \frac{W^{j+1} - W^{j-1}}{2 t_N} ; & j &= 0 \\ W(t_f) &= \tilde{W}_{t_f} ; \quad \dot{W}(t_f) = \frac{W^{j+1} - W^{j-1}}{2 t_N} ; & j &= N \end{aligned}$$

warunki ograniczenia są

$$V^j_{\max} - [V^j] \leq 0$$

w ten sposób zagadnienie optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji obciążonej dynamicznie sprowadzone zostało do zadania matematycznego programowania.

## V. ANALIZA WPŁYWU TYPÓW ODDZIAŁYWAŃ NA PARAMETRY STEROWANIA

Zagadnienia optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji obciążonej dynamicznie są związane z oddziaływaniami zewnętrznymi. Z tego względu jednym z celów tej pracy jest analiza wpływu typów zewnętrznych oddziaływań na parametry sterowania V. W tym rozdziale rozpatrywane będą również wpływy tłumienia oraz warunki brzegowe na sterujące oddziaływania. Obiekty konstrukcyjne rozpatrywane są jako pręty.

### 1. Pręt obciążony impulsowym ciśnieniem

#### a. Sformułowanie zadania

Rozpatrzmy pręt o długości  $L$ , gęstości  $\rho$ , obciążony ciśnieniem z gęstością  $g(x, t)$ , polu poprzecznego przekroju  $F$



patrz na rys. 3.

Zadanie optymalnego sterowania ruchem w pręcie może być sformułowane następującym układem podstawowych równań

a - kryteria optymalizacji

$$V.1 \quad J_{\text{opt}} = \left( \int_{t_0}^{t_f} [V]^2 dt \right)^{1/2}, t_0 = 0, \Rightarrow \min$$

b - Równanie sterującego ruchu elementu pręta

$$V.2 \quad \ddot{U} = -2k_x \dot{U} + a^2 U_{,xx} + \beta [\eta - v \delta(x - \xi_1)]$$

gdzie  $k_x$ ,  $a^2$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ , występujące w równaniu V.2 oznaczają

$k_x$  - współczynnik tłumienia

$a^2 = \frac{E}{\rho}$  - prędkość rozprzestrzeniania

$E$  - moduł sprężystości materiału pręta

$\delta$  - funkcja delta,  $x = \xi_1$  punkt, na który działa sterowanie  $V$

$$\beta = \frac{1}{EF}$$

c - warunki początkowe

$$U(x, t_0) = U_0(x), \quad \dot{U}(x, t_0) = \dot{U}_0(x), \quad t_0 = 0$$

d - Warunki końcowe

$$U(x, t_f) = U(x, t_f) = 0$$

e - Warunki ograniczenia

$$V_{\max} \leq [V_{\text{dop}}],$$

Zagadnienie to będzie rozpatrywane dla następujących przypadków:

- 1.1. Pręt utwierdzony obustronnie dokenany swobodnym drganiem bez udziału tłumienia.
- 1.2. Pręt utwierdzony obustronnie obciążony stałym

impulsem

1.3 Pręt utwierdzony obustronnie obciążony harmoniczną falą.

1.4 Pręt utwierdzony obustronnie obciążony impulsowym ciśnieniem z uwzględnieniem udziału siły tłumienia.

Rozważmy teraz kolejno te przypadki:

1.1. Optymalne sterowanie ruchem w pręcie utwierdzonym obustronnie i wykonującym swobodne drgania bez tłumienia.

W tym przypadku mamy do czynienia z układem podstawowych równań, które są wyrażone następująco:

$$J = \left( \int_{t_0}^{t_f} [V]^2 dt \right)^{1/2}, \quad t_0 = 0; \Rightarrow \min$$

$$\ddot{U}(x,t) = a^2 U_{,XX}(x,t) - V \delta(x - \xi t)$$

$$U(x,0) = U_0, \quad \dot{U}(x,0) = \dot{U}_0$$

$$U(x, t_f) = \dot{U}(x, t_f) = 0$$

$$V_{\max} \ll [V_{\text{dop}}]$$

$$U(0,t) = U(L,t) = 0$$

W celu wykorzystania metody L momentów dla rozwiązywania zadania przedstawiamy przemieszczenia  $U(x,t)$  w postaci

$$V.6 \quad U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot X_n(x)$$

gdzie  $T_n(t)$  są funkcjami zależnymi od czasu spełniają warunki początkowe i końcowe, a  $X_n(x)$  są funkcjami własnymi, które spełniają warunki brzegowe.

Ortogonalizując szereg V.6, czyli mnożąc V.6 przez  $X_m(x)$  i całkując w przedziale  $(0,1)$  otrzymujemy

$$T_n(t) = \frac{1}{M_m^2} \int_0^1 U(x,t) X_m(x) dx$$

gdzie

$$M_m^2 = \int_0^1 X_m^2(x) dx$$



Dla wyznaczenia współczynników  $T_n(t)$  pomnożymy równanie V.6 stronami przez  $X_m(x)$  i całkujemy w przedziale  $[0,1]$  wówczas znajdujemy

$$V.7 \quad \ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{\beta}{\mu_m^2} \int_0^1 V X_n(x) dx$$

oraz

$$V.8 \quad X_n''(x) + k_n^2 X_n(x) = 0$$

gdzie

$$\omega_n^2 = a^2 \cdot k_n^2$$

w tym przypadku wykorzystując warunki brzegowe do rozwiązania równania V.8 otrzymujemy

$$V.9 \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} ; \quad k_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

Dla przypadku zerowych początkowych warunków funkcje  $T_n(t)$  mogą być wyrażone następującymi zależnościami

$$V.10 \quad T_n(t) = \frac{2\beta(1-(-1)^n)}{\omega_n \pi \cdot n} \int_{t_0}^t V(\tau) \cdot \sin \omega_n (t-\tau) d\tau$$

$$\text{gdzie} \quad v_n = \frac{1}{\mu_m^2} \int_0^1 V(x,t) \cdot X_m(x) dx$$

W ten sposób sterujące przemieszczenie  $U(x,t)$  i naprężenie w poprzecznym przekroju pręta można wyznaczyć wzorami

$$V.11 \quad U(x,t) = \frac{2\beta L^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{n^3} I_n^V(t) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$V.12 \quad \sigma(x,t) = E \cdot U_{,x} = \frac{2\beta L}{\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{n^2} I_n^V(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\text{gdzie} \quad I_n^V(t) = \int_{t_0}^t V(\tau) \cdot \sin (t-\tau) \cdot d\tau$$

Wykorzystując warunki początkowe V.3 do rozwiązania równania

V.7 znajdujemy

$$V.13 \quad T_n(t) = U_0 \omega_n t + \frac{\dot{U}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t - \frac{2\beta(1-(-1)^n)}{\omega_n \pi n} \cdot I_n^V(t)$$

Podstawiając wyrażenie V.13 do warunków V.4 po kilku przekształceniach otrzymujemy następujący układ równań:

$$Ax - By = -U_0 W_n B - U_0 A$$

$$V.14 \quad BX + Ay = U_0 W_n A - U_0 B$$

w układzie V.14 występują następujące oznaczenia

$$V.15 \quad X = \int_{t_0}^{t_f} V(t) \cos \omega_n t dt ; \quad A = \sin \omega_n t_f$$

$$Y = \int_{t_0}^{t_f} V(t) \sin \omega_n t dt ; \quad B = \cos \omega_n t_f$$

Rozwiązując V.14 względem x,y znajdujemy

$$V.16 \quad \int_{t_0}^{t_f} V(t) \cos \omega_n t dt = -\dot{U}_0$$

$$\int_{t_0}^{t_f} V(t) \sin \omega_n t dt = \omega_n U_0$$

W ten sposób sprowadziliśmy zagadnienie K.1.1 do zadania którego rozwiązanie można otrzymać metodą L momentów, przedstawioną w poprzednim rozdziale IV.

Aby budować pomocnicze zadanie będziemy przyjmowali następujące wielkości za jego podstawione parametry

$$\xi_1 = \cos \omega_n t \quad , \quad \xi_2 = \sin \omega_n t$$

$$a_1 = -\dot{U}_0 \quad , \quad a_2 = \omega_n U_0$$

Stąd mamy pomocnicze zadanie, które jest zapisane następującymi zależnościami:



$$V_{17} \quad J = \left( \int_{t_0}^{t_f} [\xi_1 \cos \omega_n t + \xi_2 \sin \omega_n t]^2 dt \right)^{1/2}, t_0 = 0 \Rightarrow \min$$

przy czym współczynniki  $\xi_i \quad i=1,2$  muszą spełniać następujące warunki ograniczenia

$$V_{18} \quad -\xi_1 \dot{U}_0 + \xi_2 \omega_n U_0 = 1$$

Rozwiązując zadania V.17, V.18 otrzymujemy

$$\xi_1 = \frac{\omega_n U_0 A_2 - 2 \dot{U}_0 A_3}{2 [A_1 \omega_n^2 U_0^2 + \dot{U}_0 U_0 A_2 + \dot{U}_0^2 A_3]}$$

$$\xi_2 = \frac{1 + \dot{U}_0 \xi_1}{\omega_n U_0}$$

V.19

$$A_1 = \frac{1}{\omega_n A} \left[ \sin 2\omega_n t_f + \frac{t_f}{2} \right]$$

$$A_2 = \frac{1}{2\omega_n} [1 + \cos 2\omega_n t_f]$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \left[ t_f - \frac{1}{2\omega_n} \sin 2\omega_n t_f \right]$$

W przypadku, gdy warunki początkowe przyjmują wartości  $U_0 = 0, \dot{U}_0 \neq 0$  wówczas mamy

$$V_{20} \quad \xi_1 = -\frac{1}{U_0} \quad ; \quad \xi_2 = \frac{\omega_n - \cos 2\omega_n t_f}{\dot{U}_0 [2\omega_n t_f - \sin 2\omega_n t_f]}$$

Wykorzystując warunek minimalizacji czasu trwania procesu sterowania otrzymujemy

$$V_{21} \quad l^2 = \dot{U}_0^2 B^*(t_f)$$

$$\text{gdzie:} \quad B^*(t_f) = \frac{4\omega_n (2\omega_n t_f - \sin 2\omega_n t_f)}{(2\omega_n t_f)^2 - 2[1 - \cos 2\omega_n t_f]}$$

Optymalne sterujące oddziaływania  $V(t)$  na pręt utwierdzony obustronnie wykerzystujący swobodne drganie bez tłumienia może być przedstawione następującym wzorem

$$V.22 \quad V(t) = \dot{U}_0 B^*(t_f) \cdot \left( \frac{1 - \cos 2\omega_n t_f}{2\omega_n t_f - \sin 2\omega_n t_f} \cdot \sin \omega_n t - \cos \omega_n t \right)$$

Jeżeli przyjmujemy dodatkowy warunek  $U(x,0) = U(x,t_f)$  t.z.n. pod wpływem sterowania  $V(t)$ , pręt przekształci początkowy stan. Z tego względu zakładamy  $\omega_n t_f = n\pi$   $n=1,2,\dots$  wówczas sterowanie  $V(t)$  będzie wyznaczone zależnością

$$V.23 \quad V(t) = - \frac{2 \omega_n \dot{U}_0 \cos \omega_n t}{n\pi}$$

Natomiast sterujący ruch określony jest wzorem

$$V.24a \quad T_n(t) = \frac{\dot{U}_0}{\omega_n} \left( 1 - \frac{\omega_n t}{n\pi} \right) \sin \omega_n t$$

oraz jego prędkość jest wyznaczona zależnością

$$V.24.b \quad \dot{T}_n(t) = - \frac{\dot{U}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \dot{U}_0 \left( 1 - \frac{\omega_n t}{n\pi} \right) \cos \omega_n t$$

przemieszczenie sterujące oraz naprężenie sterujące w dowolnym poprzecznym przekroju są określone zależnościami:

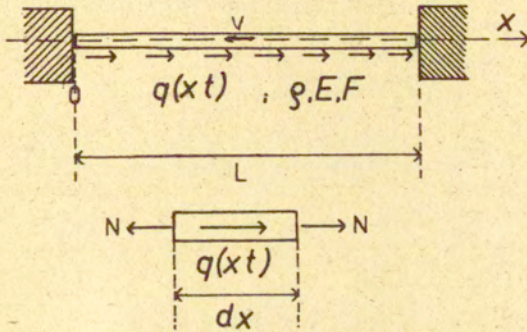
$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{U}_0}{\omega_n} \left( 1 - \frac{\omega_n t}{n\pi} \right) \sin \omega_n t \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\sigma(x,t) = E \cdot U_{,x} = E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{U}_0}{\omega_n} \left( \frac{n\pi}{L} \right) \left( 1 - \frac{\omega_n t}{n\pi} \right) \sin \omega_n t \cdot \cos \frac{n\pi}{L} x$$



Na rys. 4 pokazane zależności:

- a - Naturalnego ruchu
  - b - Sterującego oddziaływania  $V(t)$
  - c - Sterującego ruchu
  - d - Prędkość  $\dot{T}(t)$
- od czasu  $t$ , przy  $n=2$



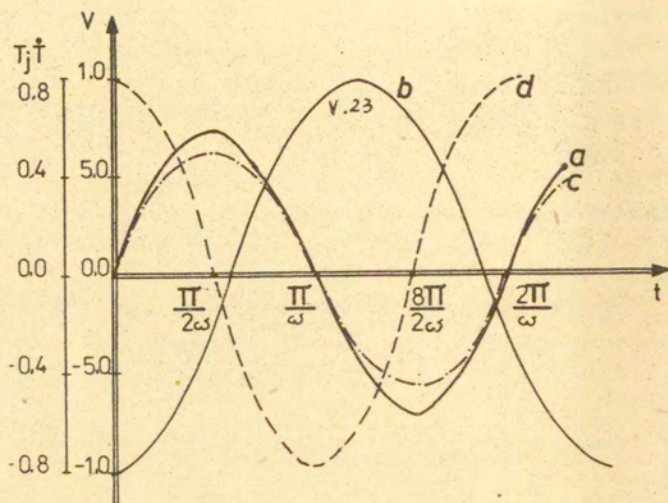
Rys. 3

W przypadku gdy pręt posiada początkowe przemieszczenie  $U_0 \neq 0$ , natomiast prędkość początkowa  $\dot{U}_0$  jest równa zero, wówczas stacjonarne punkty funkcjonu  $V.17$  charakteryzują się parametrami następującymi:

$$\xi_1 = \frac{\cos 2\omega_n t_f - 1}{\omega_n U_0 (\sin 2\omega_n t_f - 2\omega_n t_f)} ; \quad \xi_2 = \frac{1}{\omega_n U_0}$$

w tym przypadku optymalne sterowanie  $V(t)$  jest wyznaczone wzorem

$$V(t) = \omega_n U_0 B^*(t_f) (\xi_1 \cos 2\omega_n t + \xi_2 \sin \omega_n t)$$



Rys. 4

gdzie 
$$B^*(t_f) = \frac{4\omega_n \cdot \sin 2\omega_n t_f + 2\omega_n t_f}{(2\omega_n t_f)^2 + 2\cos^2 2\omega_n t_f - \cos 2\omega_n t_f}$$

przyjmując warunek  $U(x,0) = U(x,t_f)$  t.z.n. wymagany od sterowania  $V$ , aby pod jego wpływem pręt przekształcił się w początkowy stan  $U(x,0)$ .

Przyjmując  $\omega_n t_f = n\pi$   $n=1,2,\dots$  wówczas mamy

v.25 
$$V(t) = -\frac{2\omega_n^2 U_0}{n\pi} \cdot \sin \omega_n t, \quad t \in [0, \frac{n\pi}{\omega_n}]$$

w tym przypadku sterujący ruch  $T_n$  oraz prędkość  $\dot{T}_n$  będą określone zależnościami



$$a/ \quad T_n(t) = U_0 \cos \omega_n t + \frac{2\beta}{n\pi} (\sin \omega_n t - \omega_n t \cos \omega_n t)$$

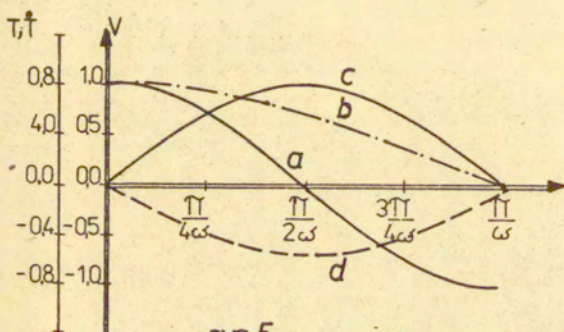
V.26

$$b/ \quad \dot{T}_n t = (-U_0 \omega_n + \frac{2\beta}{n\pi} \omega_n^2 t) \sin \omega_n t$$

Na rys.5 przedstawione zależności

- a - Naturalnego ruchu
- b - Sterującego ruchu
- c - Sterującego oddziaływania
- d - Prędkości  $\dot{T}_n$

od czasu przy  $n=1$  według wzorów V.25, V.26 a,b.



rys.5

Rys. 5.

1.2. Pręt utwierdzony obustronnie obciążony stałym impulsem.

W celu analizy wpływu zmiany typów obciążeń na parametry sterującego oddziaływania, rozważmy teraz przypadek kiedy na pręt utwierdzony z obu stron Rys.3 działa stały impuls z intensywnością  $g = P_0 = \text{const}$ . Zadanie optymalnego sterowania ruchem w tym przypadku można sformułować w następujący

sposób.

Należy znaleźć oddziaływanie sterujące  $V$  oraz przemieszczenie  $U(x,t)$  takie, aby funkcjonal  $V_1$  osiągnął minimum przy spełnieniu następujących warunków:

$$V_{.27} \quad \ddot{U} = a^2 U_{,xx} + \beta (P_0 - V \delta(x - \xi_i))$$

$$V_{.28} \quad U(x, 0) = U_0; \quad \dot{U}(x, 0) = \dot{U}_0$$

$$V_{.29} \quad U(x, t_f) = \dot{U}(x, t_f) = 0$$

$$V_{.30} \quad U(0, t) = U(l, t) = 0$$

$$V_{.31} \quad \dot{V}_{\max} \leq [V_{\text{dop}}]$$

W tym przypadku z uwzględnieniem szeregu  $V_{.6}$  oraz warunków  $V_{.28}$ ,  $V_{.30}$  rozwiązując równanie  $V_{.27}$  znajdujemy

$$V_{.32} \quad T_n(t) = U_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{U}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{2\beta}{\omega_n^2 n} (I_n^P - I_n^V)$$

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Przy czym  $I_n^P$ ,  $I_n^V$  oznaczają

$$V_{.33} \quad I_n^P = \int_{t_0}^{t_f} P_0 \sin \omega_n (t - \tau) d\tau, \quad t_0 = 0$$

$$V_{.34} \quad I_n^V = \int_{t_0}^{t_f} V \sin \omega_n (t - \tau) d\tau, \quad t_0 = 0$$

Wykorzystując warunki  $V_{.29}$  do rozwiązania  $V_{.32}$  z uwzględnieniem całki  $V_{.33}$  i  $V_{.34}$  otrzymujemy układ równań, który jest opisany w sposób

$$B_x - A_y = M_1$$

$$V_{.35} \quad A_x + B_y = M_2$$

Gdzie  $x, y, A, B, M_1, M_2$  występujące w równaniach  $V_{.35}$  są oznaczone następującymi zależnościami



$$x = \int_{t_0}^{t_f} V \cos \omega_n \tau d\tau ; \quad y = \int_{t_0}^{t_f} V \sin \omega_n \tau d\tau$$

$$A = \cos \omega_n t_f ; \quad B = \sin \omega_n t_f$$

V.36

$$M_1 = U_0 B + \frac{\dot{U}_0}{\omega_n} A + \alpha (1-B)$$

$$M_2 = -U_0 A + \frac{\dot{U}_0}{\omega_n} B + \alpha A$$

$$\alpha = \frac{2\beta P_0}{\omega_n^2}$$

Rozwiązując układ równań V.35 otrzymujemy następującą zależność:

$$V.37 \quad \int_{t_0}^{t_f} V(\tau) \cos \omega_n \tau d\tau = \frac{\dot{U}_0}{\omega_n} + \alpha (1-B) A$$

$$\int_{t_0}^{t_f} V(\tau) \sin \omega_n \tau d\tau = U_0 - \alpha (1-B) + \frac{2\dot{U}_0 A B}{\omega_n}$$

W ten sposób sprowadziliśmy zagadnienie V.1, V.27 - V.31 do zadania, którego rozwiązanie mogą być otrzymane metodą L momentów. W tym przypadku mamy do czynienia z następującym zadaniem pomocniczym, które jest opisane w postaci:

$$V.38 \quad J = \left( \int_{t_0}^{t_f} (\xi_1 \cos \omega_n t + \xi_2 \sin \omega_n t)^2 dt \right)^{1/2} \Big|_{t_0=0} \rightarrow \min$$

Przy spełnieniu warunku

$$V.39 \quad \left[ \frac{\dot{U}}{\omega_n} + \alpha (1-B) A \right] \xi_1 + \left[ U_0 - \alpha (1-B) + \frac{2\dot{U}_0 A B}{\omega_n} \right] \xi_2 = 1$$

Rozwiązując V.38, V.39 z uwzględnieniem dodatkowego warunku  $U(x, e) = U(x, t_f)$  t.z.n. przyjmując  $\omega_n t_f = n\pi$  otrzymujemy optymalne sterowanie  $V$  w sposób

$$V.40 \quad V(t) = \frac{4 \cdot \beta \cdot P_0}{L \omega_n \pi^2 \cdot n^2} \cdot \cos \omega_n t \quad t \in [0, \frac{n\pi}{\omega_n}]$$

oraz sterujący ruch i jego prędkość wyrażone w postaci

$$V.40 \quad T_n(t) = \frac{2\beta}{L\omega_n \pi n} \left( P_0 (1 - \cos \omega_n t) + \frac{\sin^3 \omega_n t}{2} + \right. \\ \left. (\omega_n t_f + \sin 2\omega_n t_f) \cdot \frac{\cos \omega_n t}{2} \right)$$

$$V.41 \quad \dot{T}_n(t) = \frac{\beta}{L\pi n} \cdot \left( 2P_0 \sin \omega_n t + 3 \cos \omega_n t \sin^2 \omega_n t + \right. \\ \left. - (\omega_n t_f + \sin 2\omega_n t_f) \sin \omega_n t \right)$$

1.3. Pręt utwierdzony obustronnie obciążony harmoniczną falą

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy zewnętrzna oddziaływanie  $q(x,t)$  mają postać harmoniczną wyrażoną

$$V.42 \quad q = P_0 \sin \lambda t$$

W tym przypadku szczególne rozwiązanie  $T_n(t)$  równania V.27 można przedstawić w postaci

$$V.43 \quad T_n(t) = \frac{2\beta P_0}{\omega_n^2 - \lambda^2} \cdot \sin \lambda t + I_{st}(t)$$

gdzie  $I_{st}(t)$  jest rozwiązanie szczególne względem sterującego oddziaływaniami  $V(t)$  i wyraża się

$$V.44 \quad I_{st} = \int_{t_0}^{t_f} V(\tau) \sin P_n(t - \tau) d\tau$$

$$\text{gdzie} \quad P_n = (\omega_n^2 - \lambda^2)^{1/2}, \quad \omega_n = \frac{n\pi\sqrt{E}}{L}$$

Naturalne przemieszczenie pręta w tym przypadku jest określone postacią

$$V.45 \quad U(x,t) = \frac{2P}{E\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega_n^2 - \lambda^2} \cdot \sin \frac{2n+1}{2L} \pi x \cdot \sin \lambda t$$



Naprężenie w dowolnym przekroju poprzecznym pręta jest wyznaczone wzorem

$$V_{46} \quad \sigma(x,t) = \frac{2P_0 E I}{F \rho L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{\omega_n^2 - \lambda^2} \frac{1}{L} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2L} x \cdot \sin \lambda t$$

Wykorzystując warunki końcowe V.4 do rozwiązania V.43 znajdujemy następujący układ równań

$$V_{47} \quad \begin{aligned} Ax - BY &= \alpha \lambda B \\ Bx + AY &= e \end{aligned}$$

Gdzie A, B, X, Y występujące w układzie równań V.47 są oznaczone

$$A = \sin \omega_n t_f, \quad B = \cos \omega_n t_f, \quad \alpha = \frac{2 \beta P_0}{\omega_n^2 - \lambda^2}$$

$$X = \int_{t_0}^{t_f} V(t) \cos \omega_n t \, dt, \quad y = \int_{t_0}^{t_f} V(t) \sin \omega_n t \, dt$$

Rozwiązując układ równań V.47 znajdujemy następujące zależności momentowe

$$V_{49} \quad \begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} V(t) \cos \omega_n t \, dt &= -\alpha \lambda A \cdot B \\ \int_{t_0}^{t_f} V(t) \sin \omega_n t \, dt &= \alpha \lambda B^2 \end{aligned}$$

w ten sposób sprowadziliśmy zadanie V.1, V.27-31 oraz V.42 do zadania, którego rozwiązanie można otrzymać metodą L momentów. Podobnie jak poprzednio rozwiązując pomocnicze zadanie otrzymujemy sterujące oddziaływanie w postaci

$$V_{50} \quad v = \frac{4P_0 B^2 \lambda (A^2 \sin \omega_n t + (\omega_n t_f + B) \cos \omega_n t)}{F \rho (A^3 + 2(\omega_n t_f + A \cdot B) \cdot B) (\omega_n^2 - \lambda^2)}$$

oraz sterujące przemieszczenie  $U_{st}(x,t)$  i naprężenia w dowolnym poprzecznym przekroju pręta określone są

V.51

$$U(x,t) = \frac{2P_0}{F\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega_n^2 - \lambda^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2L} x (\sin \lambda t - B(t) I_{St})$$

$$\sigma_{St}(x,t) = \frac{2P_0 E}{F\beta L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{\omega_n^2 - \lambda^2} \omega_n \frac{(2n+1)\pi}{2L} x (\sin \lambda t - B(t) I_{St})$$

gdzie

$$B(t) = \frac{2 B^2}{A^2 + (\omega_n t_f + AB) B}$$

podobnie jak poprzednio przyjmując  $\omega_n t_f = n\pi$   $n=1,2,\dots$   
wtedy mamy

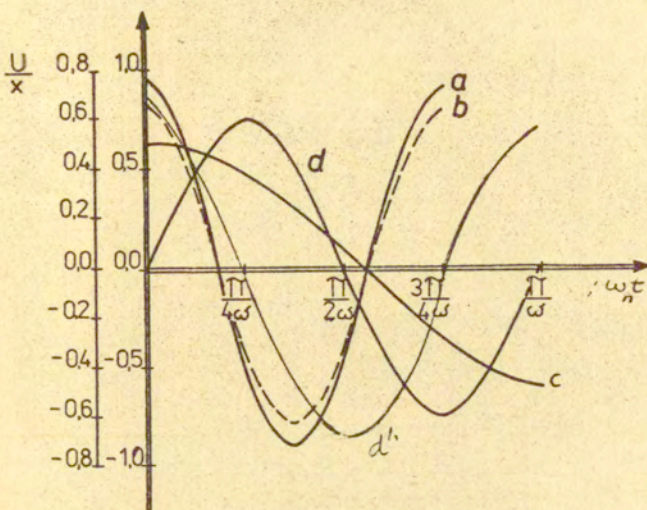
V.52

$$I_{St} = \frac{\omega_n \cdot \sin P_n t + 2 \sin (P_n - \omega_n) t_f \cos B_n t}{P_n^2 + \omega_n^2}$$

Na rys. 6 przedstawione są zależności przemieszczenia  $U(x,t)$  oraz sterującego oddziaływania  $V(t)$  od czasu poszczególnych oznaczenia wyrażają:

- a - naturalne przemieszczenie według wzoru V.42
- b - sterujące przemieszczenie według wzoru V.51
- c - sterujące przemieszczenie według wzoru V.24 jest rozwiązaniem w przypadku swobodnego drgania
- d - sterujące oddziaływanie według czasu V.50, które jest otrzymalne dla przypadku, kiedy pręt obciążony harmoniczną falą z częstością
- d' - sterujące oddziaływanie według wzoru V.40 dla przypadku kiedy na pręt działa stały impuls.





Rys. 6.

1.4. Pręt poddany drganiom wymuszonym z uwzględnieniem tłumienia.

W niniejszym punkcie rozpatrywano wpływ siły tłumienia na parametr sterowania dla pręta utwierdzonego obustronnie obciążonego harmonicznym ciśnieniem.

Zadanie sterowane ruchem w tym przypadku można sformułować następującym sposobem.

Należy znaleźć takie funkcje  $V$  oraz przemieszczenie  $U(x,t)$ , aby następujący funkcjonał osiągnął minimum

$$V.53 \quad J = \left( \int_{t_0}^{t_f} [V]^2 dt \right)^{1/2}, \quad t_0=0$$

i były spełnione następujące warunki

$$V.54 \quad \ddot{U}(x,t) + 2K \dot{U}(x,t) - a^2 U_{,xx}(x,t) = \beta (q - V \delta(x-\xi_i))$$

$$V.55 \quad U(x,0) = U_0, \quad \dot{U}(x,0) = \dot{U}_0$$

$$V.56 \quad U(x, t_f) = \dot{U}(x, t_f) = 0$$

$$V.57 \quad U(0, t) = U(L, t) = 0$$

$$V.58 \quad v_{\max} \ll [v_{\text{top}}]$$

Podstawiając funkcje przemieszczeń przedstawione w szeregu V.6 do równania V.54 po przekształceniu znajdujemy następujący układ różniczkowych równań

$$V.59 \quad \ddot{T}_n(t) + 2kT_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t)$$

$$V.60 \quad X_{n,xx}(x) + \alpha_n^2 X_n(x) = 0$$

gdzie

$k$  - współczynnik tłumienia jest znany

$\omega_n^2 = a^2 \alpha_n^2$  częstotliwość swobodnego drgania

$\alpha_n^2$  - współczynnik stały otrzymany przy rozwiązaniu brzegowego zadania

oraz

$$f_n(t) = \frac{\beta}{\mu_n^2} \int_0^L (q-v) X_n(x) dx$$

w tym przypadku mamy

$$V.61 \quad X_n = \sin \frac{n\pi}{L} x \quad n=1,2,3,\dots$$

$$V.62 \quad f_n(t) = 2\beta \cdot \frac{n\pi}{L} (q-v) \quad \alpha_n^2 = \frac{n\pi}{L}$$

Całkując równanie 59 otrzymujemy szczególne rozwiązanie, które jest opisane następującą zależnością:

$$V.63 \quad T_n(t) = \frac{1}{P_n} \int_0^t \exp(-k(t-\tau)) \cdot f_n(\tau) \sin P_n(t-\tau) d\tau$$

gdzie  $P_n = (\omega_n^2 - \lambda^2)^{1/2}$



Wykorzystując warunki końcowe V.56 do wyrażenia V.68 otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{aligned} Ax + By &= M_1 \\ V.64 \quad -Bx + Ay &= M_2 \end{aligned}$$

Pszczególne symbole  $A, B, M_1, M_2, x, y$ , które występują w równaniach V.64 są oznaczone następującymi zależnościami:

$$x = \int_{t_0}^{t_f} v(\tau) e^{-k\tau} \sin p_n \tau d\tau, \quad y = \int_{t_0}^{t_f} v(\tau) \cos p_n \tau d\tau$$

$$A = \sin p_n t_f \quad B = \cos p_n t_f$$

$$M_1 = \frac{P_0 (1 - e^{-kt_f})(A+B+1)}{P_n^2 + k}$$

$$M_2 = \frac{1 - (1+k) e^{-kt_f} (A+B+1) + (P_n^2 - k^2) (1 - e^{-kt_f}) (A+B)}{P_n^2 + k}$$

Rozwiązując układ równań V.64 otrzymujemy następujące zależności momentowe :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} v(\tau) e^{-k\tau} \sin p_n \tau d\tau &= \Delta_1 \quad t_0 = 0 \\ V.66 \quad \int_{t_0}^{t_f} v(\tau) e^{-k\tau} \cos p_n \tau d\tau &= \Delta_2 \end{aligned}$$

gdzie  $\Delta_1, \Delta_2$  oznaczamy

$$\Delta_1 = \frac{(A+B+1)(A_0 P_0 P_n + (A_0 P_0 P_n - B(1+k))e^{-kt_f} + P_n^2(1 - e^{-kt_f}))(A+B)}{P_n^2 + k}$$

$$\Delta_2 = \frac{(A+B+1)(A(1 - (k+1)e^{-kt_f}) + B P_0(1 - e^{-kt_f}) + P_n(1 - e^{-kt_f}))(A+B)}{P_n^2 + k}$$

W ten sposób sprowadziliśmy zadanie V.54 - 58 do problemu L momentów, którego rozwiązanie można otrzymać przy pomocy pomocniczego zadania sformułowanego następująco:

Należy znaleźć parametry  $\xi_i$   $i=1,2$  w taki sposób, aby następujący funkcjonal osiągnął minimum

$$V.67 \quad J = \left( \int_{t_0}^{t_f} e^{-2kt} (\xi_1 \sin P_n t + \xi_2 \cos P_n t)^2 dt \right)^{1/2} \Rightarrow \min_{t_0=0}$$

przy jednoczesnym spełnieniu warunku

$$V.68 \quad \Delta_1 \xi_1 + \Delta_2 \xi_2 = 1$$

Analogicznie jak poprzednio rozwiązując zadanie V.67, V.68 otrzymujemy

$$V.69 \quad V(t) = \frac{\Delta_2}{M_4} (\cos P_n t + M_3 \sin P_n t)$$

gdzie przez  $M_3, M_4$  występujące w zależności V.69 oznaczamy

$$V.70 \quad M_3 = 2A\Delta_2 M_1 - \Delta_1 M_2 - \frac{2P_n}{K} e^{-2kt_f} - \frac{2\Delta_1 P_n}{K}$$

$$M_4 = 2AM_1 - \Delta_2 \Delta_1 M_2 - \frac{2P_n}{K} (1 + e^{-Kt_f})$$

Naturalny ruch jest określony następującym wzorem

$$V.71 \quad U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_0 \sin \frac{n\pi x}{L}}{\omega_n^2 - \lambda^2} \int_0^t \exp(-K(t-\tau)) \frac{\sin \lambda \tau}{\sin P_n(t-\tau)} d\tau$$

Natomiast sterujący ruch jest wyznaczony z zależności

$$V.72 \quad U_{st}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{L}}{\omega_n^2 - \lambda^2} (I_n^p(t) - I_n^i(t))$$



gdzie

$$I_n^p = \int_0^t P_0 \exp(-\kappa(t-\tau)) \sin \lambda t \cdot \sin P_n(t-\tau) d\tau$$

V.73

$$I_n^v = \int_0^t \exp(-\kappa(t-\tau)) v(\tau) \sin P_n(t-\tau) d\tau$$

Na rys. 7 przedstawiono zależności przemieszczenia  $U(x,t)$  i funkcje sterowania  $V(t)$ , które otrzymano z uwzględnieniem wpływu siły tłumienia dla przypadku pręta obciążonego harmonicznym ciśnieniem, przy czym  $n=1$ , sterowanie  $V$  t działa w środku pręta przy  $x = \xi_1 = \frac{1}{2}$ .

Na rys. 7 poszczególne oznaczenia wyrażają:

a - naturalny ruch, który występuje w chwili kiedy

$$\omega_n^2 = \lambda^2$$

b - naturalny ruch

c - sterujący ruch, który otrzymane dla  $n=1$

d - sterujący ruch dla  $n=2$

e - sterujące oddziaływanie dla przypadku, gdy  $n$  przyjmuje wartość 1,2.

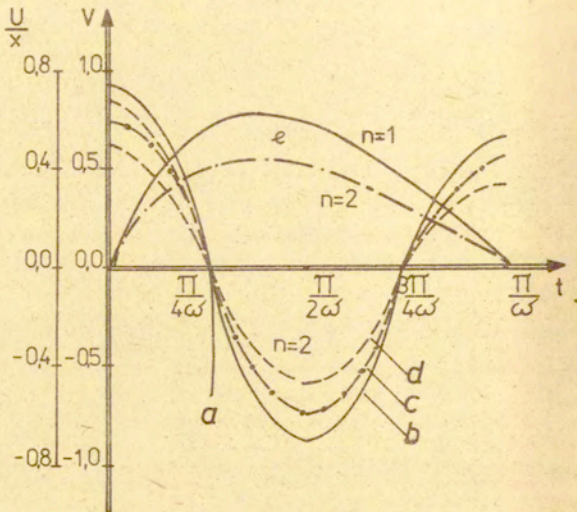
## 2. Zadanie optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji obciążonej sejsmicznym ciśnieniem.

Zjawisko trzęsienia ziemi wyraźnie wpływa na warunki pracy konstrukcji. Jest ono bardzo niebezpieczne, szczególnie dla konstrukcji leżących pod ziemią. W wyniku drgań spowodowanych falą sejsmiczną ulegają one zniszczeniu. Istnieje zatem potrzeba opracowania metod sterowania umożliwiających, skrócenie czasu trwania ruchu w konstrukcjach.

W niniejszej części będzie rozpatrywane zadanie optymalnego sterowania ruchem walcowej powłoki leżącej pod ziemią poddanej sejsmicznemu ciśnieniu.

### 2.1. Sformułowanie zadania

Rozważmy powłokę walcową leżącą pod ziemią patrz na rys.8. Długość powłoki  $2l$ , promień  $R$ , grubość  $2H$  powłoka cienka.



Rys. 7

Założmy, że kierunek oddziaływania fal sejsmicznych pokrywa się także z kierunkiem osi powłoki. Ponadto przyjmujemy założenie o istnieniu zasady płaskich przekrojów. Założmy również, że styczne obciążenie wzdłuż powłoki falą sejsmiczną jest liniową funkcją przemieszczenia  $U(x,t)$ .

Zadanie optymalnego sterowania ruchem w tym przypadku może być sformułowane następująco:

Należy znaleźć funkcje sterowania  $U$  i przemieszczenie  $U(x,t)$  takie, aby funkcjonał osiągnął minimum

$$V_{.74} \quad J = \left( \int_{t_0}^{t_f} [V]^2 dt \right)^{1/2}, \quad t_0 = 0 \rightarrow \min$$

przy jednoczesnym spełnieniu następujących warunków

$$V_{.75} \quad \ddot{U}(x,t) + w_z^2 U_{,xx}(x,t) + \alpha^2 \dot{U}(x,t) = \ddot{U}_0 - V \delta(x-\eta_i)$$



gdzie  $w_s^2$ ,  $\alpha^2$ ,  $\ddot{U}_0$ ,  $\delta(x-\eta_i)$  występujące w równaniu V.75 oznaczamy

$$w_z^2 = \frac{E_{gp} F_{gp}}{m_{gp}}, \quad m_{gp} = \rho_{gp} F_{gp}, \quad \alpha^2 = \frac{R T \delta_x}{m_{gp}}$$

przy czym  $\delta_x$  jest współczynnikiem proporcjonalności,  $\rho_{gp}$  jest gęstością materiału gruntu-powłoki,  $F_{gp}$  jest polem powierzchni jej przekroju poprzecznego;  $E_{gp}$  moduł sprężystości materiału gruntu-powłoki,  $\ddot{U}_0$  przyspieszenie sejsmiczne,  $\delta(x-\eta_i)$  funkcja delta,  $x = \eta_i$  punkt na który działa sterowanie  $V(t)$ .

Początkowe warunki:

$$V.76 \quad U(x,0) = U^0, \quad \dot{U}(x,0) = \dot{U}^0$$

Końcowe warunki

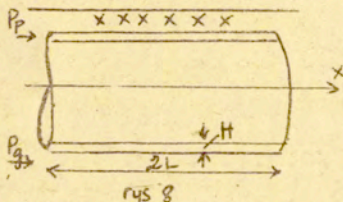
$$V.77 \quad U(x,t_f) = \dot{U}(x,t_f) = 0$$

Warunki brzegowe

$$V.78 \quad U(\pm L,t) = 0, \quad U_{,xx}(\pm L,t) = 0 \text{ lub } M(\pm L,t) = 0$$

Warunki ograniczenia

$$V.79 \quad \bar{v}_{max} \leq [\bar{v}_{dep}],$$



## 2.2. Sprawdzenie modułu sprężystości gruntu-powłoki

Dla wykorzystania dalszego rozpatrywania zadania V.74 - V.79 sprawdzamy moduł sprężystości powłoki-gruntu  $E_{gp}$ . Wykorzystując zasadę płaskich przekrojów mamy następującą zależność

$$E_g = E_p = E_{gp}$$

przy czym

$$\varepsilon_g = \frac{P_g}{E_g F_g} \quad , \quad \varepsilon_p = \frac{P_p}{E_p F_p}$$

gdzie  $E_p$  - odkształcenie powłoki

$E_g$  - odkształcenie gruntu otoczonego powłoką

$E_g E_p$  - moduł sprężystości gruntu, moduł sprężystości powłoki

$F_g F_p$  - pole przekroju poprzecznego gruntu otoczonego powłoką  
pola poprzecznego przekroju powłoki

$P_g, P_p$  - siły działające równoległe z osią x na grunt i na powłokę

$\varepsilon_{gp}$  - odkształcenie ośrodka gruntu-powłoki, która jest wyznaczone wzorem

$$\varepsilon_{gp} = \frac{P_{gp}}{E_{gp} F_{gp}}$$

gdzie  $E_{gp}$  moduł sprężystości gruntu-powłoki

$F_{gp}$  pole poprzecznego przekroju gruntu-powłoki

$P_{gp}$  siła działająca na pole  $F_{gp}$  gdzie  $P_{gp}$  i  $F_{gp}$  są określone zależnościami

$$P_{gp} = P_g + P_p \quad ; \quad F_{gp} = F_g + F_p$$

Wykorzystując powyższe zależności po kilku przekształceniach otrzymujemy

$$E_{gp} = \frac{E_p + \alpha E_g}{1 + \alpha}$$

gdzie przez  $\alpha$  oznaczamy stosunek między polami przekrojów poprzecznych gruntu i powłoki

$$\alpha = \frac{F_g}{F_p}$$

### 2.3. Rozwiązanie zagadnienia

Dla dalszego rozwiązania zadania V<sub>74</sub> - V<sub>79</sub> będziemy



rozkładali funkcję przemieszczenia  $U(x,t)$  w szereg według funkcji własnych  $X_n(x)$

$$V_{80} \quad U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) X_n(x)$$

przy czym funkcje  $X_n(x)$  spełniają warunki brzegowe, natomiast funkcja  $\varphi_n(t)$  spełnia warunki początkowe.

Podstawiając  $V_{80}$  do równania  $V_{75}$  otrzymujemy następujące równanie sterującego ruchu w postaci

$$V_{81} \quad \ddot{\varphi}_n(t) + (\omega_n^2 P_n + \alpha^2) \varphi_n(t) = f_n(t)$$

w którym  $P_n$  zależy od warunków brzegowych. Rozwiązanie równania  $V_{81}$  może być przedstawione w postaci

$$V_{82} \quad \varphi_n(t) = I_n^0(t) + I_n^P(t) + I_n^V(t)$$

przez  $I_n^0$ ,  $I_n^P$ ,  $I_n^V$  występujące w zależności  $V_{82}$  oznaczamy rozwiązania jednorodnego równania  $V_{81}$ ; oraz poszczególne rozwiązania z uwzględnieniem zewnętrznego oddziaływania i sterującego oddziaływania, które są przedstawione w następujących postaciach

$$V_{83} \quad \begin{aligned} I_n^0 &= U_0^0 \cos \alpha_n t + \frac{\dot{U}_0^0}{\alpha_n} \sin \alpha_n t \\ I_n^P &= \int_{t_0}^{t_f} \ddot{U}_0 \sin \alpha_n (t-\tau) d\tau \\ I_n^V &= - \int_{t_0}^{t_f} V(\tau) \sin \alpha_n (t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

Przyjmując początkowy stan powłoki za spoczynkowy tzn.  $U^0 = \dot{U}^0 = 0$  wówczas mamy  $I_n^0 = 0$ , wtedy przemieszczenie  $U(x,t)$  może być przedstawione w następującej postaci

$$V_{84} \quad U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta X_n(x)}{\omega_n^2 P_n + \alpha^2} (I_n^P(t) + I_n^V(t))$$

gdzie  $\theta$  oznaczony

$$V_{85} \quad \theta = \frac{1}{M_m^2} \int_0^1 X_n(x) dx, \quad M_m^2 = \int_0^1 X_n^2(x) dx$$

Naprężenie w dowolnym przekroju powłoki wyznaczamy z zależności

$$V.86 \quad \sigma = E_{gp} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta X_{n\alpha}(x)}{\omega_n^2 \rho_n + \alpha_f^2} (I_n^P(t) + I_n^V(t))$$

gdzie 
$$E_{gp} = \frac{E_p + \alpha E_g}{1 + \alpha}$$

Wykorzystując warunki końcowe V.77 do wyrażenia V.82 otrzymujemy następujący układ równań

$$Ax + By = M_1$$

$$V.87 \quad Bx - Ay = M_2$$

gdzie przez  $A, B, M_1, M_2, X, Y$  oznaczamy

$$\begin{aligned} A &= \cos \alpha_n t_f ; & B &= \sin \alpha_n t_f \\ X &= \int_{t_0}^{t_f} (\ddot{U}_0 - V) \sin \alpha_n \tau \, d\tau \\ Y &= \int_{t_0}^{t_f} (\ddot{U}_0 - V) \cos \alpha_n \tau \, d\tau \\ M_1 &= \alpha_n (AU^0 + \frac{\dot{U}^0}{\alpha_n} \cdot B) ; & M_2 &= -B\alpha_n U^0 + \dot{U}^0 \cdot A \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań V.87 otrzymujemy następujące zależności

$$V.89 \quad \begin{aligned} X &= -\alpha_n U^0 \\ Y &= \dot{U}^0 \end{aligned}$$

Rozpatrujemy zadanie V.74-V.79 w dwóch przypadkach:

- a - Powłoka obciążona stałym sejsmicznym ciśnieniem
- b - Powłoka obciążona harmoniczną falą.

a - Powłoka obciążona stałym sejsmicznym ciśnieniem

$$U_0 = P_0 = \text{Const}$$



W tym przypadku układ równań V.89 można zastąpić następują-  
cym

$$V.89 \quad \int_{t_0}^{t_f} V(\tau) \sin \alpha_n \tau d\tau = a_1$$

$$\int_{t_0}^{t_f} V(\tau) \cos \alpha_n \tau d\tau = a_2$$

gdzie przez  $a_1, a_2$  oznaczamy

$$a_1 = -\alpha_n U^0 + \frac{P_0 (1 - \cos \alpha_n t_f)}{\alpha_n}$$

$$a_2 = \dot{U}^0 + \frac{P_0 \sin \alpha_n t_f}{\alpha_n}$$

Dokładnie tak samo jak poprzednie możemy uzyskać rozwiązania zadania V.74-V.79 przy pomocy metody L momentów, która jest przedstawiona w następującej postaci:

$$V.91 \quad V(t) = \lambda_n (1 - 2 \cos \alpha_n t_f) (2 \cos^2 \alpha_n t + \sin 2 \alpha_n t)$$

gdzie

$$\lambda_n = a_1 (2a_2^2 \alpha_n t_f - 2a_2) (\alpha_n (1-t_f) t_f^2 + 2a_2 \alpha_n t_f - 2a_2 t_f) + \alpha_n^2 (1-t_f) t_f \cdot (2a_2 \alpha_n t_f^2 - t_f - a_1) + a_1 (2a_2 \alpha_n t_f^2 - t_f - a_1)^{-1}$$

Aby powłoka przekształciła się w początkowy stan tzn. żądamy spełnienia dodatkowego warunku  $U(x,0) = U(x,t_f)$  wówczas przyjmując  $\alpha_n t_f = n\pi$  wtedy mamy

$$V.91.a \quad V(t) = -2\lambda_n \cos 2\alpha_n t$$

Sterujący ruch  $U(x,t)$  jest określony zależnością

$$V.91.b. \quad U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta X_n(x)}{\omega_n^2 \rho_n - \alpha_n^2} (I_n^p(t) + I_n^v(t))$$

gdzie

$I_n^P(t)$  jest rozwiązaniem otrzymanym względem wymuszenia  $\ddot{U}_0 = P_0$ , które jest wyznaczone następującym wzorem

$$I_n^P(t) = P_0 (M_1 \sin \alpha_n t - B \cos \alpha_n t)$$

Natomiast  $I_n^V(t)$  jest rozwiązaniem otrzymanym względem sterującego oddziaływania V.91a, które jest wyznaczone zależnością:

$$I_n^V(t) = -\frac{1}{\alpha_n^2} (4\alpha_n^2 M_1 \sin \alpha_n t - M_2 \cos \alpha_n t)$$

gdzie przez  $M_1, M_2$  oznaczamy

$$M_1 = \cos \alpha_n t_f - 1, \quad M_2 = \alpha_n t_f + \sin 2\alpha_n t_f$$

$$\alpha_n^2 = \omega_z^2 P_n + \alpha_n^2, \quad P_n = \frac{n\pi}{2L}, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{2l}$$

b. Powłoka obciążona harmoniczną falą

Rozważmy teraz sytuację kiedy na powłokę działa harmoniczna fala, której postać jest:

$$V.92a \quad \ddot{U}_0 = P_0 \sin \omega_0 t$$

Dokładnie tak samo jak w poprzednich zadaniach w tym przypadku po przekształceniach wyrażeń V.89 z uwzględnieniem V.92 otrzymujemy następujący układ równań:

$$V.93 \quad \int_{t_0}^{t_f} V(t) \sin \alpha_n^* t dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_f} V(t) \cos \alpha_n^* t dt = a$$

gdzie przez  $a, \alpha_n^*$  oznaczamy

$$a = \dot{U}_0 + 2P_0 (\omega_0^2 - \alpha_n^2), \quad \alpha_n^* = (\omega_0^2 - \alpha_n^2)^{1/2}$$

$$\alpha_n = \omega_2 P_n - \alpha_n^2,$$

$$\alpha_n^2 = \frac{RJI \delta x}{m \epsilon P}$$



Rezywiązując pomocnicze zadania dla V.93 znajdujemy następującą zależność:

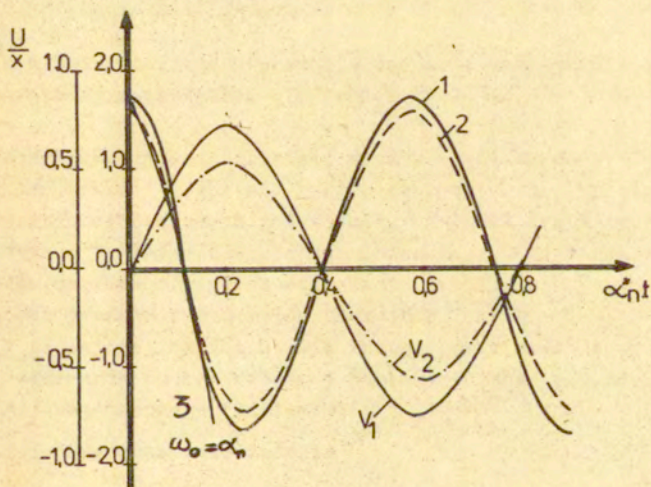
$$v(t) = \lambda^{-1} \left( \frac{1}{2\alpha_n^*} B(t_f) \sin \alpha_n^* t + \cos \alpha_n^* t \right)$$

V.94

gdzie  $\lambda = \frac{1}{\ddot{u}_0 + 2P_0 \alpha_n^*}$  ;  $B(t_f) = \frac{1 + \cos \alpha_n^* t_f}{\alpha_n^* t_f - \sin \alpha_n^* t_f}$

Na rys.9 przedstawiono funkcje sterowania V oraz sterującego przemieszczenia  $U(x,t)$  , które zależą od czasu względem wzorów V.84, V.91.b, V.94 przy czym  $n=1$ . Sterujące oddziaływanie V nałożone jest w środku powłoki  $x = \eta_i = 0$ . Szczególne krzywe oznaczają:

1. Rezywiązane otrzymane w przypadku gdy  $P_0 = \text{const}$
2. Rezywiązanie dla przypadku gdy  $U_0 = F_0 \cdot \sin \omega_0 t$
3. Wykres  $U(x,t)$  dla przypadku kiedy  $\omega_0 = \alpha_n$



Rys. 9.

## VI. ANALIZA WPŁYWU ZMIAN GEOMETRYCZNYCH I FIZYCZNYCH NA PARAMETRY STERUJĄCEGO ODDZIAŁYWANIA

Wyniki badań dynamiki konstrukcji wykazały, że zmiana geometrii w konstrukcji ma istotny wpływ na proces dynamicznej deformacji i na czas trwania ruchu w konstrukcji. Zagadnienie optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji poddanej dynamicznym ciśnieniom jest ściśle związane z zagadnieniem dynamiki konstrukcji. Podstawowe równania problemu dynamiki konstrukcji występują w zadaniu optymalnego sterowania ruchem jako warunki ograniczenia, których typy zależą od zmian geometrycznych i fizycznych. Z tego względu niezwykle potrzebną stała się analiza wpływu zmian geometrycznych w konstrukcji na proces sterowania jej ruchem.

W niniejszym rozdziale będziemy rozpatrywali zadanie optymalnego sterowania ruchem w konstrukcyjnym obiekcie, który rozpatrywano jako walcową powłokę. Przedstawiamy ogólne sformułowania zadania optymalnego sterowania ruchem plastycznej powłoki i rozwiązanie problemu otrzymano przy pomocy metody linearyzacji i metody L momentów dla dwóch przypadków

- Błonowy stan naprężenia
- Błonowo-momentowy stan naprężenia.

### 1. Sformułowanie zadania

Rozpatrzmy zachowanie się walcowej skończonej powłoki "Powłoka jest cienka, przy czym przemieszczenie w kierunku radialnym jest rzędu grubości  $H$ , a przemieszczenie w kierunku osi  $x$  jest małe w porównaniu z ugięciem  $W$ . Siły normalne do powierzchni środkowej będziemy pomijać i przyjmujemy ponadto założenie  $m_\varphi = 0$ , patrz na rys. 10.

Zadanie optymalnego sterowania ruchem w powłoce można sformułować następująco:

Należy znaleźć funkcje  $V$  oraz ugięcie  $W$  takie, aby osiągnął minimum następujący funkcjonal

$$VI.1 \quad J = \left( \int_{t_0}^{t_f} [V]^2 dt \right)^{1/2}, \quad t_0 = 0$$



Przy jednoczesnym spełnieniu następujących warunków:

$$\text{VI.2} \quad m_{x,xx} - 2Rn_x W_{,xx} + 2\beta(n_\varphi - V\delta(x-\eta_i)) = a^2 \ddot{w}$$

$$n_{x,x} = 0$$

Gdzie  $m_x$ ,  $n_\varphi$ ,  $n_x$ ,  $R$ ,  $\beta$ ,  $W$ , bezwymiarowe wielkości występujące w równaniu ruchu VI.2 oznaczają:

$$x = \frac{X}{L}, \quad W = \frac{W}{A}, \quad R = \frac{A}{H}, \quad \tau = \frac{t}{t_f};$$

$$m_x = \frac{M_x}{M_0}, \quad n_x = \frac{N_x}{N_0}, \quad n_\varphi = \frac{N_\varphi}{N_0}, \quad V = \frac{V}{2\sigma_0 H}$$

$$\beta = \frac{L^2}{AH}, \quad a^2 = \frac{\rho_0 AH}{2\sigma_0 H}; \quad M_0 = \sigma_0 H^2, \quad N_0 = 2\sigma_0 H$$

gdzie:

$A$  - promień powłoki

$L$  - długość powłoki

$H$  - grubość

$\rho$  - gęstość,  $\delta(x-\eta_i)$  funkcja delta

$x=\eta_i$  punkt na który działa sterowanie  $V$

$W$  - przemieszczenie w kierunku poprzecznym

$N_x, N$  - składowa siły podłużnej

$\sigma_0$  - granica plastyczności

Warunek plastyczności opisany jest zależnością /patrz na rys.11/.  $f(n_x, n_\varphi, m_x) = 0$

$$\text{VI.3} \quad n_\varphi = 1$$

$$m_x \pm (1-n_x)^2 = 0$$

Wykorzystując prawo plastycznego płynięcia do VI.3 otrzymujemy

$$\text{VI.4} \quad \lambda'_x = 2\mu' n_x$$

$$K'_x = \mu' \quad ; \quad \mu' > 0$$

$$K'_\varphi = 0$$

Wykorzystamy związki geometryczne opisane następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \left(\frac{A}{L}\right)^2 \dot{W}_{,x} W_{,x} \\ \text{VI.5} \quad \lambda_\varphi &= \dot{W} \\ K_x &= \frac{1}{2\beta} W_{,xx} \quad ; \quad K_\varphi = 0 \end{aligned}$$

V Warunki początkowe są zadane

$$\text{VI.6} \quad W(x, \tau_0) = W^0 \quad , \quad \dot{W}(x, \tau_0) = \dot{W}^0$$

Warunki początkowe przyjmują postać

$$\text{VI.7} \quad W(x, t_f) = \dot{W}(x, t_f) = 0$$

Warunki ograniczenia dla V będą

$$\text{VI.8} \quad W_{\max} \leq [W_{\text{dop}}]$$

oraz warunki brzegowe są

$$\text{VI.9} \quad W(\pm 1, t) = W_{,xx}(\pm 1, t) = 0 \quad \text{lub} \quad m_x(\pm 1, t) = 0$$

Rozpatrujemy zadanie VI.1 - VI.9 w dwóch przypadkach:

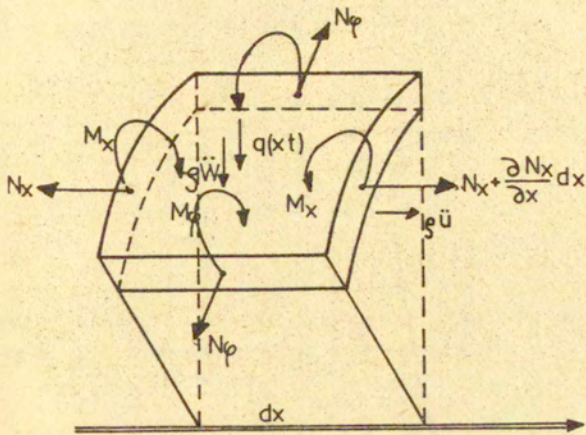
- Błonowy stan naprężenia
- Błonowo-momentowy stan naprężenia

## 2. Błonowy stan naprężenia

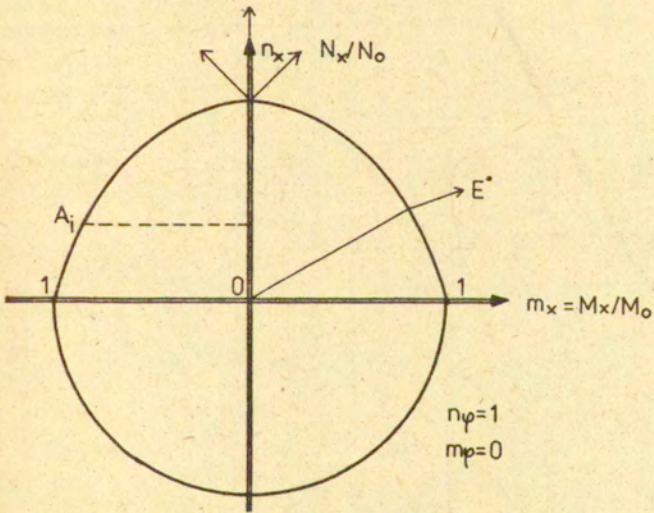
Zadanie optymalnego sterowania ruchem w powłoce, która znajduje się w stanie błonowym naprężenia oznaczono punktem E na rys. 11, można sformułować następującymi podstawowymi zależnościami

$$\text{VI.10} \quad J = \left( \int_{\tau_0}^{\tau_f} [VJ^2 d\tau] \right)^{1/2} \Big|_{\tau_0} = 0 \rightarrow \min$$





Rys. 10



Rys. 11

$$\text{VI.11} \quad \ddot{W}(x, \tau) - \alpha_1^2 W_{,xx}(x, \tau) = \alpha_2 (1 - \nu) \delta(x - \eta_i)$$

gdzie

$$\alpha_1^2 = \frac{2R}{a^2}, \quad \alpha_2 = \frac{2\beta}{a^2}, \quad \beta = \frac{L^2}{AH}; \quad a^2 = \frac{S_0 AH}{2G_0 \tau_0}$$

$$\text{VI.12} \quad W(\pm l, \tau) = W_{,xx}(\pm l, \tau) = 0$$

$$\text{VI.13} \quad v_{\max} \leq [v_{\text{dop}}]$$

$$\text{VI.14} \quad W(x, \tau_0) = W^0, \quad \dot{W}(x, \tau_0) = \dot{W}^0$$

$$\text{VI.15} \quad W(x, \tau_f) = \dot{W}(x, \tau_f) = 0$$

Aby sprowadzić zadanie VI.10 - VI.15 do zagadnienia rozwiązane metodą L momentów, poszukujemy ugięcia  $W(x, \tau)$  w postaci szeregu z rozdzielonymi funkcjami

$$\text{VI.16} \quad W(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\tau) X_n(x)$$

przy czym  $X_n(x)$  jest układem funkcji ortogonalnych spełniających warunki brzegowego zadania, zaś funkcje  $\varphi_n(t)$  zależą tylko od czasu i spełniają warunki początkowe i końcowe.

Podstawiając wyrażenie VI.16 do równania VI.11 po kilku przekształceniach znajdujemy

$$\text{VI.17} \quad \ddot{\varphi}_n(\tau) + \lambda_n^2 \varphi_n(\tau) = f_n(\tau)$$

$$\text{VI.18} \quad X_{n,xx}(x) + \alpha_1^2 \lambda_n^2 X_n(x) = 0$$

jest stałym współczynnikiem zaś

$$f_n(\tau) = \frac{2}{M^2} \int_0^l (v-1) X_n(x) dx$$

$$M^2 = \int_0^l x_n^2(x) dx$$



Rozwiązanie równania VI.17 można przedstawić w postaci:

$$\text{VI.19} \quad \varphi_n(\tau) = I_n^0(\tau) + I_n^p(\tau) + I_n^v(\tau)$$

gdzie przez  $I_n^0(\tau)$ ,  $I_n^p(\tau)$ ,  $I_n^v(\tau)$  oznaczamy:

$I_n^0(\tau)$  rozwiązanie jednorodnego równania VI.17

$I_n^p(\tau)$  szczególne rozwiązanie równania VI.17 względem zewnętrznego wymuszenia

$I_n^v(\tau)$  szczególne rozwiązanie równania VI.17 względem sterującego oddziaływania, przy czym  $I_n^0(\tau)$ ,  $I_n^p(\tau)$ ,

$I_n^v(\tau)$  , są określone następującymi wzorami:

$$\text{VI.20} \quad I_n^0(\tau) = W^0 \cos \lambda_n \tau + \frac{\dot{W}^0}{\lambda_n} \sin \lambda_n \tau$$

$$\text{VI.21} \quad I_n^p(\tau) = \frac{2}{M^2 \lambda_n} \int_0^{\tau} \left( \int_0^1 1 \cdot X_n(x) dx \right) \sin \lambda_n (\tau^* - \tau) d\tau$$

$$\text{VI.22} \quad I_n^v(\tau) = \frac{\alpha_2}{M^2 \lambda_n} \int_0^{\tau} \left( \int_0^1 v X_n(x) dx \right) \sin \lambda_n (\tau^* - \tau) d\tau$$

Wykorzystując warunki końcowe z uwzględnieniem wzorów VI.20, VI.21, VI.22 sprowadzamy wyrażenie VI.19 do następującego układu równań

$$Ax + BY = A \lambda_n W^0 + B \dot{W}^0$$

VI.23

$$Bx - AY = -\beta \lambda_n W^0 - \dot{W}^0 A$$

gdzie przez A, B, X, Y występujące w układzie równań VI.23 oznaczamy

$$A = \cos \lambda_n \tau_f, \quad B = \sin \lambda_n \tau_f$$

$$X = \int_{\tau_0}^{\tau_f} v \cdot \sin \lambda_n \tau d\tau, \quad Y = \int_{\tau_0}^{\tau_f} v \cdot \cos \lambda_n \tau d\tau$$

w tym przypadku funkcja  $X_n(x)$  przyjmuje postać

$$\text{VI.24} \quad X_n(x) = \sin \frac{\pi \cdot x}{2L}$$

Rozwiązując układ równań VI.23 otrzymujemy

$$\text{VI}_{25} \quad \int_{\tau_0}^{\tau_f} V(\tau) \sin \lambda_n \tau \, d\tau = \frac{\pi}{4} \alpha_2 \dot{W}^0$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau_f} V(\tau) \cos \lambda_n \tau \, d\tau = -\frac{\pi}{4} \alpha_2 \lambda_n W^0$$

w ten sposób sprowadziliśmy zadanie VI<sub>10</sub> - VI<sub>15</sub> do problemu L momentów. Podobnie jak poprzednie rozwiązanie pomocniczego zadania znajdujemy sterujące oddziaływanie:

$$\text{VI}_{26} \quad V(\tau) = \frac{1}{\alpha_3} (\beta_1 \sin \lambda_n \tau + \beta_2 \cos \lambda_n \tau)$$

gdzie  $\alpha_3$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  występujące w zależności VI<sub>26</sub> oznaczamy

$$\alpha_3 = 2a_2 (16a_2 \lambda_n^2 \tau_f - 1)$$

$$\beta_1 = 2 (16a_2 \lambda_n \tau_f - 1) - a_1 (4a_2 \lambda_n \tau_f - 1)$$

$$\beta_2 = a_1 (4a_2 \lambda_n \tau_f - 1), \quad a_1 = \frac{\pi}{4} \alpha_2 \dot{W}^0 + \frac{2}{\lambda_n}$$

$$a_2 = \lambda_n \tau_f - \frac{\pi}{4} \alpha_2 \lambda_n W^0$$

przyjmując początkowy stan powłoki za spoczynkowy, wówczas mamy sterujące ugięcie wyrażone w następującej postaci:

$$\text{VI}_{27} \quad W(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B(n) \sin \frac{\pi x}{2L} (I_n^P(\tau) + M_1 I_n^V(\tau))$$

przez  $B(n)$ ,  $I_n^P$ ,  $I_n^V$ ,  $M_1$  występujące w zależności VI<sub>27</sub> oznaczamy

$$B(n) = \frac{L}{2\lambda_n^2 \pi n} ; \quad M_1 = \frac{2\alpha_2}{\alpha_3}$$

$$I_n^P(\tau) = (1-A) \cos \lambda_n \tau + B \sin \lambda_n \tau$$

$$I_n^V(\tau) = M_2 \sin \lambda_n \tau - M_3 \cos \lambda_n \tau$$

$$M_2 = (A-1) \beta_1 + \frac{\beta_2}{2} (\lambda_n \tau_f + A \cdot B)$$

$$M_3 = (A-1) \beta_2 + \frac{\beta_1}{2} (\lambda_n \tau_f - AB)$$



### 3. Błonowo-momentowy stan naprężenia

Rozważmy teraz zadanie optymalnego sterowania ruchem w powłoce znajdującej się w błonowo-momentowym stanie naprężenia, odpowiadającemu punktowi  $A_1$  na powierzchni granicznej przedstawionej na rys.11 w tym przypadku zadanie to może być sformułowane w następujący sposób:

Należy znaleźć funkcję  $V$  i  $W$  takie, aby następujący funkcjonał  $VI_{28}$  osiągnął minimum, przy jednoczesnym spełnieniu następujących warunków:

$$VI_{28} \quad \ddot{W}(x, \tau) - \alpha_1 \frac{\dot{W}_{,x}(x, \tau) \cdot W_{,x}(x, \tau) \cdot W_{,xx}(x, \tau)}{W_{,xx}} = \alpha_2 \sqrt{V} \delta(x - \eta_i - 1)$$

gdzie przez  $\alpha_1, \alpha_2, \delta(x - \eta_i)$  występujące w równaniu  $VI_{28}$  oznaczamy

$$\alpha_1 = \frac{2R}{a^2}, \quad \alpha_2 = \frac{2\beta}{a^2}; \quad a^2 = \frac{SAH}{2\sigma_0 \tau_0}, \quad \beta = \frac{1^2}{AH}$$

$$VI_{29} \quad W(\pm 1, \tau) = W_{,xx}(\pm 1, \tau) = 0$$

$$VI_{30} \quad W(x, \tau_0) = W^0, \quad \dot{W}(x, \tau_0) = \dot{W}^0$$

$$VI_{31} \quad W_{\max} \leq [W_{\text{dop}}]$$

$$VI_{32} \quad W(x, \tau_f) = \dot{W}(x, \tau_f) = 0$$

Podstawiając wyrażenie  $VI_{16}$  do równania  $VI_{28}$  po przekształceniu otrzymujemy następujące równanie różniczkowe nieliniowe

$$VI_{33} \quad \varphi_n(\tau) + \lambda_n^2 \varphi_n^2(\tau) = f_n(\tau)$$

$$\lambda_n^2 = \alpha_1 \frac{X_n^2}{X_n^1}, x$$

gdzie

$$f_n(\tau) = \frac{\alpha_2}{M_2^2} \int_0^1 (V-1) X_n(x) dx, \quad M_2^2 = \int_0^1 X_n^2(x) dx$$

w celu wykorzystania metody L momentów zlinearyzujemy równanie VI.33 metodą zaproponowaną w rozdziale III. Po przekształceniach sprowadzimy VI.33 do następującego równania

$$VI.34 \quad \ddot{\varphi}_n(\tau) + \gamma_n^2 \varphi_n(\tau) = f_n(\tau)$$

gdzie  $\gamma_n^2$  jest stałym współczynnikiem linearyzacji określony wzorem

$$\gamma_n^2 = \frac{10}{6} \alpha_n \left( \frac{x_n^2}{x_n} \right)$$

Rozwiązanie równania VI.34 można przedstawić w następującej postaci

$$VI.35 \quad \varphi_n(\tau) = I_n^0(\tau) + I_n^p(\tau) + I_n^v(\tau)$$

przy czym przez  $I_n^0(\tau)$ ,  $I_n^p(\tau)$ ,  $I_n^v(\tau)$  oznaczamy rozwiązanie jednorodnego równania VI.34 oraz rozwiązania szczególne względem zewnętrznego oddziaływania oraz sterującego działania V, które są określone zależnościami:

$$I_n^0(\tau) = W^0 \cos \gamma_n \tau + \frac{\dot{W}^0}{\gamma_n} \sin \gamma_n \tau$$

VI.36

$$I_n^p(\tau) = \frac{\alpha_n}{\mu_n^2 \gamma_n} \int_{\tau_0}^{\tau_f} \left( \int_0^1 x_n(x) dx \right) \sin \gamma_n (\tau^* - \tau) d\tau$$

$$I_n^v(\tau) = \frac{\alpha_n}{\mu_n^2 \gamma_n} \int_{\tau_0}^{\tau_f} \left( \int_0^1 x_n(x) dx \right) v(\tau) \sin \gamma_n (\tau^* - \tau) d\tau$$

Wykorzystując warunki końcowe VI.33 do rozwiązania VI.35 z uwzględnieniem VI.36 otrzymujemy następujący układ równań

$$Ax - BY = -\gamma_n W^0 B - W_0 A$$

VI.37

$$Bx - AY = -\gamma_n W A + W_0 B$$

przez A, B, X, Y występujące w układzie równań VI.37 oznaczamy

$$A = \cos \gamma_n \tau_f, \quad B = \sin \gamma_n \tau_f$$

$$x = \int_{\tau_0}^{\tau_f} v(\tau) \cos \gamma_n \tau d\tau, \quad y = \int_{\tau_0}^{\tau_f} v(\tau) \sin \gamma_n \tau d\tau$$



W tym przypadku przyjmując funkcje  $X$  w postaci  
 $X(x) = (x^2 - 1)^2$  i rozwiązując układ równań VI.37 znajdujemy

$$\text{VI.38} \quad \int_{t_0}^{t_f} V(\tau) \cos \delta_n \tau d\tau = M_1$$

$$\int_{t_0}^{t_f} V(\tau) \sin \delta_n \tau d\tau = M_2$$

gdzie  $M_1, M_2$  oznaczone

$$M_1 = \frac{15}{16} \alpha_1 \dot{W}^0 + \frac{1}{\delta_n} \sin \delta_n t_f$$

$$M_2 = \frac{15}{16} \alpha_1 \gamma_n \dot{W}^0 + \frac{1}{\delta_n} (1 - \cos \delta_n t_f)$$

w ten sposób sprowadziliśmy zadania optymalnego sterowania ruchem w powłoce walcowej znajdującej się w bionowo-momentowym stanie naprężenia do zadania, którego rozwiązanie można otrzymać metodą L momentów.

W tym przypadku sformułowane zadanie pomocnicze jest określone zależnościami:

$$\text{VI.39} \quad \left( \int_{t_0}^{t_f} (\xi_1 \cos \delta_n \tau + \xi_2 \sin \delta_n \tau) d\tau \right)^{1/2}, t_0 = 0 \Rightarrow \min$$

przy czym parametry  $\xi_1, \xi_2$  występujące w funkcjonale VI.39 spełniają następujący warunek

$$\text{VI.40} \quad M_1 \xi_1 + M_2 \xi_2 = 1$$

Podobnie jak poprzednio rozwiązując VI.39 - VI.40 znajdujemy następujące sterujące działanie:

$$\text{VI.41} \quad V(\tau) = \frac{16\alpha_1 - (\dot{W}^0 + 16\delta_n t_f)}{\delta_n \dot{W}^0 \left( \frac{15}{16} \alpha_1 \dot{W}^0 + t_f \right)} \left( \left( 1 - \frac{15}{16} \alpha_1 \gamma_n \dot{W}^0 \right) (16\delta_n - (\dot{W}^0 + 16\alpha_1 t_f))^{-1} \cos \delta_n \tau + \sin \delta_n \tau \right)$$

oraz funkcję ugięcia sterującego powłoki

$$VI.42 \quad W(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (I_n^0(\tau) + I_n^p(\tau) + I_n^v(\tau))(x^2 - 1)^2$$

przy czym przez  $I_n^0$ ,  $I_n^p$ ,  $I_n^v$  występujące w zależności VI.42 oznaczamy

$$I_n^0(\tau) = w^0 \cos \gamma_n \tau + \frac{w^0}{\gamma_n} \sin \gamma_n \tau$$

$$I_n^p(\tau) = \frac{39}{41} \frac{\alpha_2}{\gamma_n^2} (M_1 \sin \gamma_n \tau - M_2 \cos \gamma_n \tau)$$

$$I_n^v(\tau) = \frac{39}{41} \frac{\alpha_2}{\gamma_n^2} ((\cos \gamma_n \tau_f - 1) \sin \gamma_n \tau + \sin \gamma_n \tau_f \cos \gamma_n \tau)$$

gdzie przez  $M_1$ ,  $M_2$  występujące w  $I_n^v(\tau)$  oznaczamy

$$M_2 = (A-1) \beta_1 + \frac{\beta_2}{2} (\gamma_n \tau_f + AB)$$

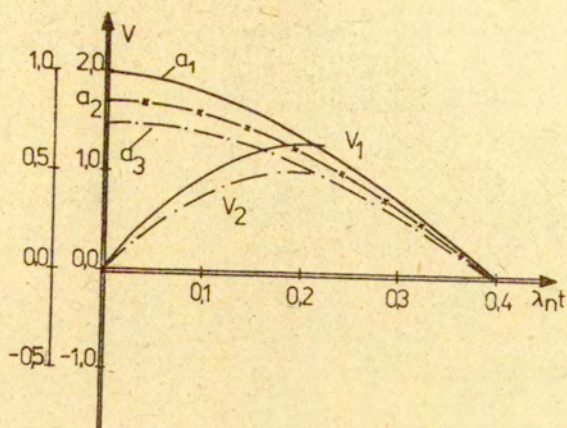
$$M_3 = (A-1) \beta_2 + \frac{\beta_1}{2} (\gamma_n \tau_f - AB)$$

Na rysunku 12 przedstawiono zależności funkcji sterowania  $V(\tau)$  oraz sterującego ugięcia od czasu.

Poszczególne oznaczenia:

- $a_1$   $a_2$  - sterujący ruch otrzymany według teorii błonowo-momentowego stanu naprężenia, dla  $n = 1, 2$
- $a_3$  - sterujący ruch otrzymany według teorii błonowego stanu naprężenia
- $V_1$   $V_2$  - odpowiednie funkcje sterującego oddziaływania otrzymane wyniki wykazują, iż zmiana geometrii w konstrukcji ma istotny wpływ na postać sterującego oddziaływania oraz na postać sterującego ugięcia  $W(x, \tau)$ .





Rys. 12

#### 4. Analiza wpływu zmian fizycznych na parametry sterowania

W niniejszym punkcie rozważamy wpływ zmian fizycznych materiału, z którego przygotowana jest konstrukcja na postać funkcji sterowania  $V$  oraz ugięcia  $W(x, \tau)$ .

W ilustrowanym reprezentatywnym przykładzie rozpatrywaliśmy powłokę z materiału Hubera-Misesa.

##### 4.a. Sformułowanie zadania

Rozważmy powłokę przygotowaną z materiału Hubera-Misesa który podlega warunkowi plastyczności opisaną postacią

$$VI.43 \quad f(m_x, n_x, n_\varphi) = n_\varphi^2 - n_x n_\varphi + n_\varphi^2 + \frac{3}{4} m_x - 1 = 0$$

Związki geometryczne są przyjmowane w dalszym rozpatrywaniu z następującymi zależnościami

$$VI.44 \quad \dot{\lambda}_x = \left(\frac{A}{L}\right)^2 \dot{w}_{,x} w_{,x} ; \quad \dot{\lambda}_\varphi = \dot{w}$$

$$\dot{k}_x = \frac{\dot{w}_{,xx}}{2\beta} \quad \dot{k}_\varphi = 0$$

Wykorzystując prawo plastycznego płynięcia do zależności VI.43 znajdujemy:

$$VI.45 \quad \dot{\lambda}_x = \mu' (2n_x - n_\varphi) , \quad \dot{\lambda}_\varphi = \mu' (2n_\varphi - n_x)$$

$$K'_x = \frac{3}{2} \mu' m_x , \quad K'_\varphi = 0$$

Zadanie optymalnego sterowania ruchem w tym przypadku można sformułować następująco:

Należy znaleźć sterujące oddziaływanie  $V$  oraz ugięcie  $w(x,t)$  takie, aby następujący funkcjonał VI.1 osiągnął minimum, przy jednoczesnym spełnieniu następujących warunków

$$VI.46 \quad 4Z^{5/2} C_{,xx} - 4Z^{3/2} C_{,x} - 2Z_{,xxx} Z^{3/2} C - 4RAZ^{5/2} w_{,xx}$$

$$2BZ^{5/2} + 2Z^3 V \delta(x-\eta_i) + a^2 z^3 \ddot{w} = 0$$

przy czym przez  $A, B, c, z$  występujące w równaniu VI.46 oznaczamy:

$$Z = A_1^2 - A_1 B + B^2 + \frac{1}{4} c^2$$

$$A_1 = 2 \left(\frac{A}{L}\right)^2 \dot{w}_{,x} w_{,x} + \dot{w}$$

$$VI.47 \quad B = \left(\frac{A}{L}\right)^2 \dot{w}_{,x} w_{,x} + 2 \dot{w}$$

$$C = \beta^{-1} \dot{w}_{,xx}$$

oraz warunki brzegowe

$$VI.48 \quad w(\pm L, \tau) = w_{,xx}(\pm L, \tau) = 0$$



Warunki początkowe

$$VI.49 \quad W(x, \tau_0) = W^0, \quad \dot{W}(x, \tau_0) = \dot{W}^0$$

Warunki ograniczenia na V

$$VI.50 \quad V_{\max} \leq [V_{\text{dop}}]$$

Warunki końcowe

$$VI.51 \quad W(x, \tau_f) = \dot{W}(x, \tau_f) = 0$$

#### 4.b. Rozwiązanie zadania

Należy zauważyć, że równanie VI.46 problemu opisane z uwzględnieniem wpływu zmian geometrycznych i fizycznych jest skomplikowane. W celu analizy wpływu zmian fizycznych na parametr sterowania V ugięcie będziemy przyjmowali w następującej postaci

$$VI.52 \quad W(x, \tau) = \varphi(\tau) \cdot (1 - x^2)^2$$

Podstawiając VI.52 do równania VI.46 po przekształceniu otrzymujemy następujące równanie sterującego ruchu w środku powłoki  $x=0$  w postaci:

$$VI.53 \quad \ddot{\varphi}(t) + \alpha_1^2 \varphi(t) = \alpha_3 (v - f(\beta))$$

przez  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $f(\beta)$  występujące w równaniu VI.53 oznaczamy

$$\alpha_1 = 8 \left(\frac{1}{H}\right)^2 \left(3 + \frac{4}{\beta^2}\right) + 24 \left(\frac{A}{L}\right)^2 \left(\frac{a^2}{\beta} (3\beta + 4)\right)^{-3/2}$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 \left(3 + \frac{4}{\beta^2}\right)^{-3/2}; \quad \alpha_2 = \frac{2\beta}{a^2}$$

$$f(\beta) = 2 \left(1 - \frac{24}{\beta}\right) \left(3 + \frac{26}{\beta^2} \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right)\right)$$

Rozwiązania równania VI.53 może być opisane zależnością

$$VI.54 \quad \varphi(\tau) = I^0(\tau) + I^P(\tau) + I^V(\tau)$$

przez  $I^0(\tau)$ ,  $I^P(\tau)$ ,  $I^V(\tau)$  oznaczamy rozwiązanie jednorodnego równania oraz rozwiązania nie jednorodnego równania względem zewnętrznego oddziaływania i sterującego oddziaływania. Przy czym są one określone wzorami:

$$I^0(\tau) = W^0 \cos \alpha_1 \tau + \frac{\dot{W}}{\alpha_1} \sin \alpha_1 \tau$$

$$I^P(\tau) = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \int_{\tau_0}^{\tau_4} f(\beta) \sin \alpha_1 (\tau^* - \tau) d\tau$$

$$I^V(\tau) = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \int_{\tau_0}^{\tau_4} v(\tau) \sin \alpha_1 (\tau^* - \tau) d\tau$$

Wykorzystując warunki końcowe VI.51 do wyrażenia VI.54 i po rozwiązaniu otrzymanego układu równań znajdujemy następujące zależności momentowe

$$VI.55 \quad \int_{\tau_0}^{\tau_4} v(\tau) \cos \alpha_1 \tau d\tau = a_1$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau_4} v(\tau) \sin \alpha_1 \tau d\tau = a_2$$

gdzie przez  $a_1$ ,  $a_2$  oznaczamy

$$a_1 = -\alpha_1 W^0 + \alpha_3 f(\beta) (\cos \alpha_1 \tau_4 - 1)$$

$$a_2 = \dot{W} + \alpha_3 f(\beta) \sin \alpha_1 \tau_4$$

W ten sposób sprowadziliśmy zadanie optymalnego sterowania ruchem w powłoce przygotowanej z materiału Hubera-Misesa do zagadnienia, którego rozwiązanie można poszukiwać metodą L momentów, a jego pomocnicze zadanie można sformułować następującymi zależnościami:

$$VI.56 \quad J = \left( \int_{\tau_0}^{\tau_4+n} \sum_{i=1}^n (q_i \dot{\epsilon}_i)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \tau_0 = 0 \Rightarrow \min$$



przy jednoczesnym spełnieniu warunków

$$\text{VI.57} \quad \sum_{i=1}^n a_i \xi_i = 1$$

w tym przypadku współczynniki  $a_1, g_1$  występujące w zależnościach VI.56 i VI.57 są określone wzorami

$$\begin{aligned} \text{VI.58} \quad a_1 &= -\alpha_1 W^0 + \alpha_3 f(\beta) (\cos \alpha_1 \tau_f - 1) \\ a_2 &= \dot{W}^0 + \alpha_3 f(\beta) \sin \alpha_1 \tau_f \\ g_1 &= \sin \alpha_1 \tau_f, \quad g_2 = \cos \alpha_1 \tau_f \end{aligned}$$

Dokładnie jak poprzednio rozwiązując zadanie VI.56 i VI.57 z uwzględnieniem VI.58 otrzymujemy

$$\text{VI.59} \quad V(\tau) = \frac{M_3}{M_1} \left( \frac{M_2}{M_3} \cdot \cos \alpha_1 \tau + \sin \alpha_1 \tau \right)$$

gdzie przez  $M_1, M_2, M_3$  występujące w wzorze VI.59 oznaczamy

$$\begin{aligned} \text{VI.60} \quad M_1 &= \frac{a_1}{\alpha_1 a_2} (2\alpha_1^2 \tau_f - \sin 2\alpha_1 \tau_f) - \frac{a_2}{\alpha_1 a_1} (\cos 2\alpha_1 \tau_f + \tau_f + \frac{\sin \alpha_1 \tau_f}{2}) \\ M_2 &= \alpha_1 a_2 \left( \frac{2a_1}{a_2} (\alpha_1 \tau_f - \frac{\sin \alpha_1 \tau_f}{2\alpha_1}) - \frac{a_2 \cos 2\alpha_1 \tau_f + 2\alpha_1 \tau_f + a_2^2 (2\alpha_1 \tau_f + \cos 2\alpha_1 \tau_f)}{2\alpha_1 \alpha_1} \right) \\ M_3 &= a_2 (2\alpha_1 \tau_f + \cos 2\alpha_1 \tau_f) \end{aligned}$$

zaś sterujące ugięcie w środku ugięcia można wyznaczyć następującym wzorem

$$\text{VI.61} \quad W_{ST}(0, \tau) = I_0(\tau) + I_p(\tau) + I_v(\tau)$$

gdzie przez  $I_0(\tau), I_p(\tau), I_v(\tau)$  oznaczamy

$$\begin{aligned} I_0(\tau) &= W^0 \cos \alpha_1 \tau + \frac{\dot{W}^0}{\alpha_1} \sin \alpha_1 \tau \\ I_p(\tau) &= \frac{1}{\alpha_1} f(\beta) (\cos \alpha_1 \tau - 1) \\ I_v(\tau) &= \frac{\alpha_3 M_2}{\alpha_1 M_1} (M_4 \sin \alpha_1 \tau + M_5 \cos \alpha_1 \tau) \end{aligned}$$

gdzie

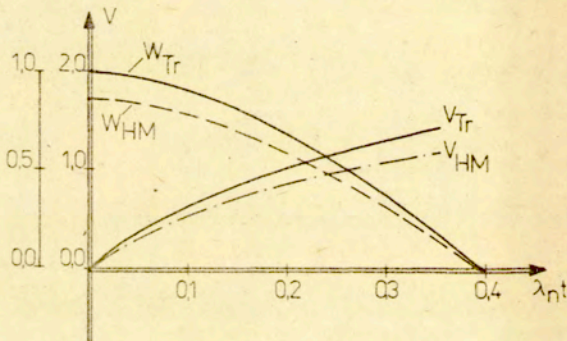
$$M_4 = \frac{M_2}{2M_3} (\cos 2\alpha_1 \tau_f - 1) + \frac{1}{2} (\alpha_1 \tau_f - \frac{A}{2})$$

$$M_5 = (\cos 2\alpha_1 \tau_f - 1) + \frac{M_2}{2\alpha_1 M_3} (\alpha_1 \tau_f + \frac{A}{2})$$

Na rys. 13 są przedstawione funkcje sterującego oddziaływania  $V$  oraz ugięcia w środku powłoki walcowej, wykonanej z materiału podlegającemu warunkowi plastyczności Hubera-Misesa w porównaniu z rozwiązaniem otrzymanym w przypadku powłoki walcowej wykonanej z materiału Treski. Poszczególne oznaczenia wyrażają następująco:

$W_{H-M}, W_{Tr}$  Ugięcia otrzymane według teorii Hubera-Misesa oraz według teorii Treski.

$V_{H-M}, V_{Tr}$  Sterujące oddziaływania odpowiednio otrzymane według teorii Hubera-Misesa i Treski.



Rys. 13



## UWAGI

Po uzyskaniu powyższych wyników można sformułować kilka uwag.

- Metoda L momentów jest bardzo dobrym narzędziem do rozwiązywania zagadnień optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji z zerowymi warunkami końcowymi, bowiem w tym przypadku istnieje możliwość otrzymania rozwiązania problemu w analitycznej zamkniętej postaci. Dzięki niej można szybciej uzyskać cel badań, którym jest na przykład analiza wpływu zmian geometrycznych i fizycznych lub różnych typów zewnętrznych oddziaływań na parametry sterowania, na sterujące ugięcie lub sterujące przemieszczenie .

- Wyniki otrzymane przy analizie wpływu zmian geometrycznych i fizycznych oraz różnych typów oddziaływań zewnętrznych wykazały, że zmiany geometryczne i fizyczne oraz typy zewnętrznych oddziaływań mają istotny wpływ na parametry sterowania.

- Przy analizie wpływu zmian geometrycznych i fizycznych mamy do czynienia z równaniami różniczkowymi cząstkowymi nieliniowymi w tych przypadkach metoda linearyzacji pozwala sprowadzić zadanie do postaci umożliwiającej rozwiązanie metodą L momentów.

- I wreszcie należy zauważyć, że metoda L momentów w przypadku gdy warunki końcowe nie są zerowe, bardzo trudno otrzymać rozwiązanie w zamkniętej postaci.

Rezwiązując zadanie optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji metodą L momentów należy postępować w następującej kolejności:

1. Sformułować zadanie dla ustalonego modelu konstrukcyjnego obiektu obciążonego dynamicznym ciśnieniem, ustalając cel sterowania.
2. Opisać podstawowe matematyczne zależności, przyjmując warunki początkowe i końcowe,
3. Sprowadzić zadanie do zagadnienia L momentów z wykorzystaniem metody rozdzielenia zmiennych i wyznaczyć współczynniki dla pomocniczego zadania.
4. Sformułować pomocnicze zadanie.
5. Rozwiązywać pomocnicze zadanie, znaleźć parametry, przy których funkcjonal w pomocniczym zadaniu osiągnął minimum.

6. Zbudować zależność sterującego oddziaływania.

7. Podstawić otrzymane sterujące oddziaływanie w zależność przemieszczenia lub ugięcia, znaleźć sterujące przemieszczenie lub sterujące ugięcie.

## VII. ZASTOSOWANIE METODY PRAKTYCZNEJ DLA WYZNACZENIA FUNKCJI STEROWANIA

Rezwiazanie zagadnienia optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji metoda L momentow wymaga sformulowania oraz rozwiazania pomocniczego zadania.

W praktyce istnieje mozliwosc okreslenia funkcji sterowania prostym sposobem, jezeli wczesniej dowiedzieliśmy się o typach oddziaływania zewnetrznego, która dziala na obiekt, tzn. bezposrednio mamy postac ugięcia powstała na skutek zewnetrznego oddziaływania. Wówczas sterujące oddziaływanie mozna podać wczesniej jako podobne do postaci ugięcia lub przemieszczenia z niewiadomymi współczynnikiemami, które trzeba znaleźć. W tym rozdziale rozpatrujemy kilka reprezentatywnych zadań celem wyjaśnienia idei tej metody.

### 1. Belka obciążona ruchomą siłą ze stałą prędkością

Rozważmy belkę o długości  $L$ , gęstości  $\rho$  na którą dziala ruchoma siła  $P$  z stałą prędkością  $a$  jak przedstawiono na rys. 14 i jest wolno podparta.

Zadanie optymalnego sterowania ruchem w belce w tym przypadku mozna sformulować w ten sposób.

Należy znaleźć funkcje sterowania  $V$  i ugięcia  $Y(x, t)$  takie, aby następujący funkcjonał osiągnął minimum

$$\text{VII.1} \quad J = \left( \int_{t_0}^{t_f} [V]^2 dt \right)^{1/2}, t_0 = 0 \Rightarrow \min$$

przy jednoczesnym spełnieniu następujących warunków  
- Równanie sterującego ruchu

$$\text{VII.2} \quad (EJY_{,xx}(x, t))_{,xx} + \rho FY(x, t) = P_0 \delta(x-at) - V\delta(x-\eta)$$



gdzie:

$Y(x, t)$  - ugięcie belki,

$EJ$  - sztywność belki

$\delta(x - \eta_i)$  - funkcja delta.

- Warunki brzegowe

$$\text{VII.3} \quad Y(0, t) = Y(L, t) = 0, \quad Y_{,xx}(0, t) = Y_{,xx}(L, t) = 0$$

- Warunki ograniczenia

$$\text{VII.4} \quad Y_{\max} \leq [Y_{\text{dep}}]$$

- Warunki początkowe

$$\text{VII.5} \quad Y(x, t_0) = Y^0, \quad \dot{Y}(x, t_0) = \dot{Y}^0$$

- Warunki końcowe

$$\text{VII.6} \quad Y(x, t_f) = \dot{Y}(x, t_f) = 0$$

Dla dalszego rozpatrywania zadania przedstawiamy funkcję ugięcia  $Y(x, t)$  w postaci:

$$\text{VII.7} \quad Y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) \cdot \text{Sin} \frac{i\pi}{L} x$$

Podstawiając VII.7 do równania VII.2 otrzymujemy

$$\text{VII.8} \quad \ddot{\varphi}_i(t) + \alpha_i^2 \varphi_i(t) = 2\beta P_0 X_i(at) + V X_i(\eta)$$

przy czym przez  $\alpha_i^2$ ,  $\beta$ , występujące w równaniu VII.8 oznaczamy

$$\text{VII.9} \quad \alpha_i^2 = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \frac{EJ}{\rho F}, \quad X_i(at) = \text{Sin} \frac{i\pi}{L} at$$

$$\beta = \frac{1}{FL^2}; \quad X_i(\eta) = \text{Sin} \frac{i\pi}{L} \eta$$

$x = \eta$  położenie punktu, na który działa sterowanie  $V$ .  
 Całkując równanie VII.8 w przedziale czasu  $0 \leq t \leq t_f = \frac{L}{a}$  znajdujemy sterujący ruch belki, który może być przedstawiony następującą zależnością:

$$\text{VII.10} \quad y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} (I_i^0(t) + I_i^P(t) + I_i^V(t)) \sin \frac{i\pi}{L} x$$

gdzie  $I_i^0(t)$  jest wyrażonym ruchem swobodnego układu;  $I_i^P(t)$  jest rozwiązaniem otrzymanym z uwzględnieniem wymuszenia oraz  $I_i^V(t)$  jest rozwiązaniem otrzymanym z uwzględnieniem sterującego działania  $V$ . Poszczególne oznaczenia wyrażają:

$$I_i^0(t) = \left( (y^0)^2 + \left(\frac{y^0}{\alpha_i}\right)^2 \right)^{1/2} \sin(\alpha_i t + \psi_0)$$

$$I_i^P(t) = \frac{2\beta P_0 \frac{aL}{i\pi}}{\omega_i^2 - \alpha_i^2} \cdot \cos \alpha_n t$$

VII.11

$$I_i^V(t) = \frac{2\beta}{\alpha_n t_0} \int_{t_0}^{t_f} V(\tau) \sin \alpha_n(t-\tau) d\tau$$

$$\omega_i = (2i-1) \frac{\pi a}{L}$$

$$\alpha_n^2 = \omega_i^2 - \alpha_i^2, \quad \alpha_i^2 = \left(\frac{i\pi}{L}\right) \frac{EJ}{\rho F}$$

przy czym przez  $\psi_0$  oznaczamy początkową fazę, która jest wyznaczona z zależności:

$$\text{VII.12} \quad \psi_0 = \arctg \frac{\alpha_i y^0}{y^0}$$

Wykorzystując warunki końcowe VII.6 do wyrażenia VII.10 rozwiązując otrzymany układ równań znajdujemy następującą zależność

$$\text{VII.13} \quad \begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} V(\tau) \sin \alpha_n \tau d\tau &= AM_1 + BM_2 \\ \int_{t_0}^{t_f} V(\tau) \cos \alpha_n \tau d\tau &= AM_2 - BM_1 \end{aligned}$$



gdzie przez  $M_1, M_2, A, B$  oznaczamy:

$$\begin{aligned}
 & A = \sin \alpha_n t_f, \quad B = \cos \alpha_n t_f \\
 \text{VII.14} \quad & M_1 = \frac{1}{2\beta} (I_i^{\circ}(t_f) + I_i^p(t_f)) \\
 & M_2 = \frac{1}{2\beta} (\dot{I}_i^{\circ}(t_f) + \dot{I}_i^p(t_f))
 \end{aligned}$$

Zgodnie z ideą metody praktycznej poszukamy sterującego oddziaływania  $V$  w następujący sposób:

$$\text{VII.15} \quad V = a_1 \sin \alpha t + a_2 \cos \alpha t$$

gdzie  $a_1, a_2$  stałe współczynniki, które można wyznaczyć z warunków VII.13; natomiast  $\alpha$  jest częstością sterującego oddziaływania  $V$ , którą należy znaleźć w taki sposób, aby funkcjonał VII.1 osiągnął minimum.

Podstawiając VII.15 do wyrażeń VII.13. Uwzględniając z rozszerzeniem funkcji trygonometrycznych w szeregu Taylora Maclaurina dla pierwszego przybliżenia, znajdujemy

$$\text{VII.16} \quad V = \frac{\omega_i}{(\alpha_n^2 - \alpha^2)} \Delta_2 \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \sin \alpha t + \cos \alpha t \right)$$

przez  $\Delta_1, \Delta_2$  oznaczamy

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= M_2 t_f - M_1 \omega_i (2(\alpha_n^2 - \alpha^2))^{-1} \\
 \Delta_2 &= M_2 \omega_i (2(\alpha_n^2 - \alpha^2))^{-1}
 \end{aligned}$$

Z warunku minimalizacji funkcjonału VII.1 znajdujemy

$$\text{VII.17} \quad \alpha = \frac{2\beta \omega_i}{t_f (I_i^{\circ}(t_f) + I_i^p(t_f) + \dot{I}_i^{\circ}(t_f) + \dot{I}_i^p(t_f))}$$

gdzie  $I_i^{\circ}, I_i^p, \dot{I}_i^{\circ}, \dot{I}_i^p$  i występujące w zależności VII.17 oznaczamy

$$I_i^{\circ}(t_f) = \left( (y^0)^2 + \left( \frac{\dot{y}^0}{\alpha_i} \right)^2 \right)^{1/2} \sin(\alpha_i t_f + \psi_0)$$

$$I_i^p(t_f) = \frac{2P_0\beta}{\omega_i^2 - \alpha_i^2} \cos \alpha_n t_f$$

$$I_i^o(t_f) = \left( (y^o)^2 + \left| \frac{\dot{y}^o}{\alpha_i} \right|^2 \right)^{1/2} \alpha_i \cos(\alpha_i t_f + \psi_0)$$

$$I_i^p(t_f) = \frac{2P_0\beta}{(\omega_i^2 - \alpha_i^2)^{1/2}} \sin \alpha_n t_f$$

$$\alpha_i^2 = \left( \frac{iJ}{L} \right) \frac{EJ}{SFL} ; \quad \beta = \frac{1}{SFL} ; \quad \omega_i = \frac{i\pi a}{L}$$

$$\psi_0 = \arctg \frac{\alpha_i y^o}{\dot{y}^o} ; \quad \alpha_n^2 = \omega_i^2 - \alpha_i^2$$

gdzie  $a$  jest prędkością stałej ruchomej siły  $P_0$ .

Podstawiając sterujące oddziaływanie VII.16 do wyrażenia VII.11 - całkując i potem podstawiając otrzymane wyniki do wyrażenia VII.10 znajdujemy sterujące ugięcie:

$$VII.18 \quad y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} (I_i^o(t) + I_i^p(t) + I_i^v(t)) \sin \frac{iJ}{L} x$$

gdzie przez  $I_i^o(t)$ ,  $I_i^p(t)$ ,  $I_i^v(t)$  oznaczamy

$$I_i^o(t) = \left( (y^o)^2 + \left| \frac{\dot{y}^o}{\alpha_i} \right|^2 \right)^{1/2} \sin(\alpha_i t + \psi_0)$$

$$VII.19 \quad I_i^p(t) = 2P_0\beta \cdot (\omega_i^2 - \alpha_i^2)^{-1} \cos \alpha_n t$$

$$I_i^v(t) = 2\beta \Delta_4 \cdot (\alpha_n^2 - \alpha_i^2)^{-1} \cdot (\Delta_3 \Delta_4^{-1} \sin \alpha t + \cos \alpha t)$$

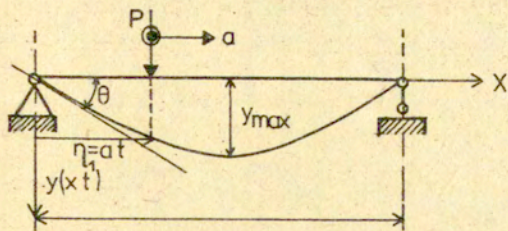
gdzie  $\Delta_3 = \Delta_1 (2\alpha_n \Delta_2)^{-1} (\cos 2\alpha_n t_f - 1) + \frac{1}{4} (2\alpha_n t_f - A)$

$$\Delta_4 = \Delta_1 (2\alpha_n \Delta_2)^{-1} (\alpha_n t_f - \frac{A}{2}) + (\cos \alpha_n t_f - 1)$$

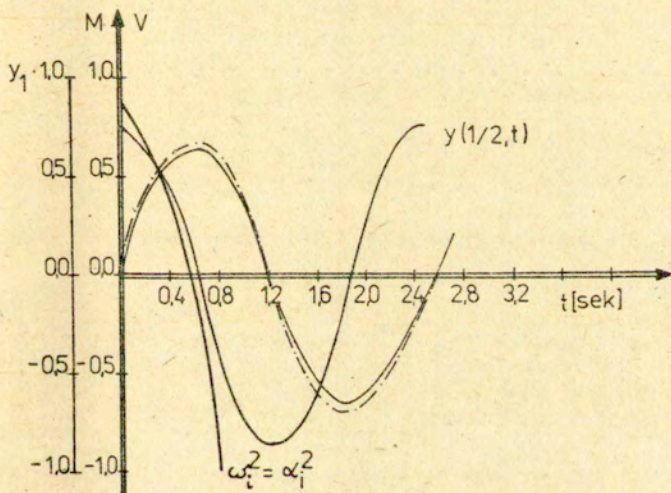
Na rys. 15 przedstawiono zależności sterującego oddziaływania  $V$  t oraz funkcji sterującego ugięcia według wzoru VII.18 z uwzględnieniem wzorów VII.19 dla przypadku kiedy sterujące oddziaływanie działa w środku belki  $x = \eta_i = \frac{1}{2} L$ . Poszczególne oznaczenia oznaczają:

- Wykres z liniami ciągłymi przedstawiano wynik otrzymany ze wzoru VII.18.
- Liniami przerywanymi oznaczono wynik otrzymany w pracy [2]





Rys. 14



Rys. 15

2. Belka obciążona stałą siłą poruszającą się harmonicznie wokół ustalonego punktu.

Rozważmy teraz sterujący ruch w belce wolno podpartej obciążonej stałą siłą poruszającą się harmonicznie wokół ustalonego punktu A jak pokazano na rys. 16.

Zadanie optymalnego sterowania ruchem w belce w tym przypadku może być sformułowane w następujący sposób:

Należy znaleźć funkcje sterowania  $V$  oraz ugięcia  $Y(x,t)$  takie, aby następujący funkcjonał osiągnął minimum

$$\text{VII.20} \quad J = \left( \int_{t_0}^{t_f} [VJ]^2 dt \right)^{1/2} t_0 = 0 \Rightarrow \min$$

przy jednoczesnym spełnieniu następujących warunków  
- Równanie ruchu sterowanego

$$\text{VII.21} \quad \ddot{y}(x,t) + \alpha^2 y_{,xxxx}(x,t) = P_0 \delta(x - \eta_0 - \eta(t)) - V \delta(x - \eta_1)$$

- Warunki ograniczenia

$$\text{VII.22} \quad V_{\max} \leq [V_{\text{dop}}]$$

- Warunki brzegowe

$$\text{VII.23} \quad Y(0,t) = Y(L,t) = 0 \\ Y_{,xx}(0,t) = Y_{,xx}(L,t) = 0$$

- Warunki początkowe

$$\text{VII.24} \quad Y(x,t_0) = y_0, \quad \dot{Y}(x,t_0) = \dot{y}_0$$

- Warunki końcowe

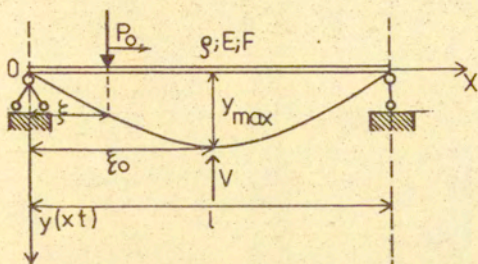
$$\text{VII.25} \quad W(x,t_f) = \dot{W}(x,t_f) = 0$$

gdzie w równaniu VII.21 przez  $x$  oznaczamy

$$\alpha^2 = \frac{EJ}{\rho F}; \quad EJ - \text{szttywność belki,}$$

$\rho$  - gęstość ;  $F$  - pole poprzecznego przekroju belki  
funkcja delta .  $x = \eta_1$  - położenie na które działa sterowanie  $V$ ,  $\eta(t) = a \cdot \sin \pi t$  - położenie siły  $P_0$  ;  
średnie położenie siły  $P_0$  , patrz na rys. 16.





Rys. 16

Podstawiając wyrażenia VII.7 do równania VII.21 znajdujemy:

$$\text{VII.26} \quad \ddot{\varphi}_i(t) + \omega_i^2 \varphi_i(t) = 2\beta P_0 \left( \sin \frac{i\pi}{L} \eta_0 \cdot \cos \left( \frac{i\pi}{L} a \sin pt \right) + \cos \frac{i\pi}{L} \eta_0 \cdot \sin pt \right) - 2\beta V(t) \sin \frac{i\pi}{L} \eta_i$$

Uwzględniając z następującymi rozkładami

$$\cos \left( a \frac{i\pi}{L} \cdot \sin pt \right) = B_0 \left( \frac{a i \pi}{L} \right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \left( \frac{a i \pi}{L} \right) \cos 2kpt$$

$$\sin \left( \frac{a i \pi}{L} \sin pt \right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \left( \frac{a i \pi}{L} \right) \sin (2k+1)pt$$

gdzie  $B_{2k} \left( \frac{a i \pi}{L} \right)$  jest funkcją Bessela otrzymujemy

$$\text{VII.27} \quad \ddot{\varphi}_i(t) + \omega_i^2 \varphi_i(t) = 2\beta \left( P_0 \left( \sin \frac{i\pi}{L} \eta_0 \right) B_0 \left( \frac{i\pi a}{L} \right) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \left( \frac{i\pi a}{L} \right) \cos (2kpt) + 2 \cos \frac{i\pi}{L} \eta_0 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k+1} \left( \frac{i\pi a}{L} \right) \cdot \sin (2k+1)pt \right) + V(t) \sin \frac{i\pi}{L} \eta_i$$

gdzie  $\beta = \frac{1}{\rho FL}$  jest stałym współczynnikiem.

Rozwiązując równanie VII.27 z uwzględnieniem warunków początkowych, podstawiając otrzymane wyrażenie do zależności VII.7 znajdujemy

$$\text{VII.28 } Y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} (I_i^0(t) + I_i^p(t) + I_i^v(t)) \sin \frac{i\pi}{L} x$$

gdzie przez  $I_i^0(t)$ ,  $I_i^p(t)$ ,  $I_i^v(t)$  oznaczamy

$$I_i^0(t) = ((y)^2 + (\dot{y}/\omega_i)^2)^{1/2} \sin(\omega_i t + \psi_0)$$

gdzie  $\psi_0$  jest początkową fazą określoną zależnością

$$\psi_0 = \text{arc ctg } \frac{\omega_i y_0}{\dot{y}_0}$$

$$I_i^p(t) = 2\beta P_0 \left( \frac{1}{\omega_i^2} \sin \frac{i\pi}{L} \eta_0 \right) \cdot B_0 \left( \frac{i\pi a}{L} \right) +$$

$$\text{VII.29 } 2 \sin \frac{i\pi}{L} \eta_0 \sum_{k=1}^n B_{2k} \left( \frac{i\pi a}{L} \right) \frac{\cos 2kpt}{\omega_i^2 - 4k^2 p^2} +$$

$$2 \cos \frac{i\pi}{L} \eta_0 \sum_{k=1}^n B_{2k+1} \left( \frac{i\pi a}{L} \right) \frac{\sin (2k+1)pt}{\omega_i^2 - (2k+1)^2 p^2}$$

$$I_i^v(t) = -2\beta \cdot \sin \frac{i\pi}{L} \eta_0 \int_{t_0}^{t_f} V(\tau) \sin \omega_i (t-\tau) d\tau$$

Zwraca uwagę możliwość zjawiska rezonansu w przypadku jeżeli występują następujące wartości dla częstości wymuszonej siły.

$$p^2 = \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \frac{EJ}{4k^2 F\beta} \quad \text{lub} \quad p^2 = \left( \frac{i\pi}{L} \sqrt{\frac{1}{2k+1}} \right)^2 \frac{EJ}{F\beta}$$

Jak poprzednio będziemy szukali sterujących funkcji  $V$  w postaci



VII.30

$$V = a \sin \alpha t + b \cos \alpha t$$

gdzie  $a, b$  wyznaczone przy pomocy warunków końcowych, natomiast częstość siły sterującej będzie określona z warunku minimalizacji funkcjonu VII.20.

Analogicznie jak poprzednio rozwiązując układ równań otrzymanych z warunków końcowych z uwzględnieniem VII.30 znajdujemy

$$\text{VII.31} \quad V = \frac{\Delta_2}{\Delta} \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \sin \alpha t + \cos \alpha t \right)$$

przy czym przez  $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$  oznaczamy

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0, & \frac{\omega_i}{2[\alpha^2 - \omega_i^2]} \\ \frac{1}{\alpha^2 - \omega_i^2} & ; \quad \frac{t_f}{2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} M_3; \frac{\omega_i}{2[\alpha^2 - \omega_i^2]} \\ M_4; \quad \frac{t_f}{2} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0, & M_3 \\ \frac{1}{\alpha^2 - \omega_i^2}, & M_4 \end{vmatrix}$$

$$M_3 = A M_1 + B M_2 \quad ; \quad M_4 = - B M_1 + A M_2$$

gdzie  $M_1 = (I_i^0(t_f) + I_i^P(t_f))(2\beta)^{-1}$ ,  $M_2 = (I_i^0(t_f) - I_i^P(t_f))(2\beta)^{-1}$  wyrażają w postaci VII.29; natomiast przez  $A, B$  oznaczamy

$$A = \sin \omega_1 t_f \quad , \quad B = \cos \omega_1 t_f$$

Wykorzystując warunek VII.20 znajdujemy

$$\text{VII.32} \quad \alpha^0 = \frac{2\beta \omega_i}{t_f [I_i^0 [t_f, \omega_i] + I_i^P [t_f, \omega_i P] + I_i^0 [t_f, \omega_i] + I_i^P [t_f, \omega_i P] ]}$$

gdzie przez  $I_i^0, I_i^P, \dot{I}_i^0, \dot{I}_i^P$  oznaczamy:

$$I_i^0(t_f) = (y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_i}\right)^2)^{1/2} \sin(\omega_i t_f + \psi_0)$$

$$I_i^P(t_f) = 2\beta P_0 \left(\frac{1}{\omega_i^2} \sin \frac{i\pi}{L} \eta_0 \cdot B_0 \left(\frac{i\pi a}{L}\right) + \right. \\ \left. 2 \sin \frac{i\pi}{L} \eta_0 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k} \left(\frac{i\pi a}{L}\right) \cos 2k\pi t_f}{\omega_i^2 - 4k^2 p^2} + \right. \\ \left. 2 \cos \frac{i\pi}{L} \eta_0 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k+1} \left(\frac{i\pi a}{L}\right) \sin (2k+1)\pi t_f}{\omega_i^2 - (2k+1)^2 p^2} \right)$$

$$\dot{I}_i^0(t_f) = \omega_i \left( y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_i}\right)^2 \right)^{1/2} \cos(\omega_i t_f + \psi_0)$$

$$\dot{I}_i^P(t_f) = -2 \sin \frac{i\pi}{L} \eta_0 \cdot \sum_{k=1}^n B_{2k} \left(\frac{i\pi a}{L}\right) \frac{2k\pi \sin 2k\pi t_f}{\omega_i^2 - 4k^2 p^2} + \\ 2 \cos \frac{i\pi}{L} \eta_0 \cdot \sum_{k=1}^n B_{2k+1} \left(\frac{i\pi a}{L}\right) \frac{(2k+1)\pi \cos (2k+1)\pi t_f}{\omega_i^2 - (2k+1)^2 p^2}$$

Sterujące ugięcie w tym przypadku może być określone następującym wzorem

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^n \left( \left( y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_i}\right)^2 \right)^{1/2} \sin(\omega_i t + \psi_0) + \right.$$

$$2\beta P_0 \left(\frac{1}{\omega_i^2} \sin \frac{i\pi}{L} \eta_0 \cdot B_0 \left(\frac{i\pi a}{L}\right) + \right.$$

$$2 \sin \frac{i\pi}{L} \eta_0 \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k} \left(\frac{i\pi a}{L}\right) \cos 2k\pi t}{\omega_i^2 - 4k^2 p^2} +$$

$$2 \cos \frac{i\pi}{L} \eta_0 \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k+1} \left(\frac{i\pi a}{L}\right) \sin (2k+1)\pi t}{\omega_i^2 - (2k+1)^2 p^2} =$$

$$\frac{2\beta}{\omega_i^2 - \alpha^2} \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \Delta_3 + \Delta_4 \right) \sin \omega_i t + \left( \Delta_3 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \Delta_4 \right) \cos \omega_i t \\ \sin \frac{i\pi}{L} x$$

VII.33



gdzie przez  $\Delta_3$ ,  $\Delta_4$  występujące w zależności VII.33 oznaczamy:

$$\Delta_3 = (\alpha + w_1) \sin(w_1 - \alpha) t_f - (\omega_i - \alpha) \sin(w_1 + \alpha) t_f$$

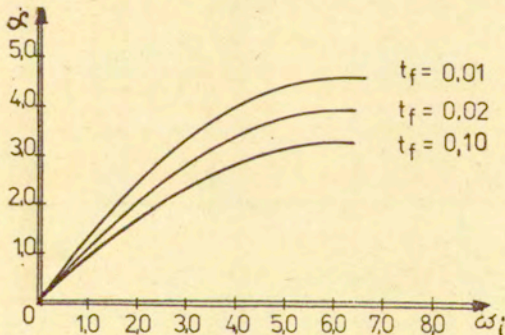
$$\Delta_4 = w_1 - (\alpha + w_1) \cos(\omega_i - \alpha) t_f + (w_1 - \alpha) \cos(\alpha + w_1) t_f$$

Na rys. 17 przedstawiono zależność  $\alpha$  od  $w_1$  według wzoru VII.32, dla zadanego końcowego czasu 0,01, oraz 0,02 według wzoru VII.17 dla przypadku belki obciążonej ruchomą siłą z stałą prędkością.  $\omega$

Z otrzymanych powyżej wyników możemy sformułować następujące uwagi.

- Przedstawiona metoda pozwala uzyskać sterujące oddziaływania dowolnej struktury dla konstrukcyjnego obiektu dokonanego swobodnym lub wymuszonym drganiem bezpośrednio. Jednak przy zastosowaniu tej metody po uzyskaniu współczynników  $a_1$  występujących w zależności funkcji sterowania należy określić częstość sterującego wymuszenia  $V$  w taki sposób, aby funkcjonal VII.20 osiągnął minimum.

- Ruch sterujący w konstrukcji zależy od wyboru typu sterującego wymuszenia i inaczej mówiąc bezpośrednio zależy od współczynników stałych  $a_1$  oraz od częstości wymuszenia



Rys.17

VIII. ZAGADNIENIE OPTIMALNEGO STEROWANIA RUCHEM W  
KONSTRUKCJI OBCIĄŻONEJ DYNAMICZNIE JAKO ZADANIE  
MATEMATYCZNEGO PROGRAMOWANIA.

Rozważamy w tym rozdziale kilka reprezentatywnych zadań optymalnego sterowania przy pomocy metody matematycznego programowania, która była przedstawiona w rozdziale III. Zgodnie z ideą tej metody optymalne sterowanie od danej chwili  $t_0$  do ustalonej chwili  $t_f$  zależy tylko od aktualnego rozszerzonego stanu procesu, a nie zależy od poprzednich stanów  $W(\tau)$  dla  $\tau > t$  czyli od sposobu w jaki proces dotarł do stanu aktualnego. Istotnie aktualny stan procesu może być zgodnie z tą metodą traktowany jako początkowe zadania optymalizacji.

1. Belka obciążona ruchem ciężarem

Rozważamy belkę o długości  $L$ , gęstości  $\rho$ , na którą działa ruchomy ciężar  $P$  z masą  $M$  i ze stałą prędkością  $a$  na rys. 18.

Zadanie optymalnego sterowania ruchem w belce można sformułować jak niżej:

Należy znaleźć funkcję  $V_i(t)$  oraz funkcję  $\varphi_i(t)$  tak aby minimalizował następujący funkcjonal

$$\text{VIII.1} \quad J = \left( \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n (v_i)^2 dt \right)^{1/2}, \quad t = 0, \Rightarrow \min$$

przy jednoczesnym spełnieniu następujących warunków

- Równanie sterującego ruchu [15]

$$\text{VIII.2} \quad \ddot{\varphi}_i(t) + 2\psi(t)\dot{\varphi}_i(t) + \gamma^2\phi(t)\varphi(t) = \beta_1 f(t) \sin \frac{\pi a t}{L} + v_i \delta(x-1)$$

- współczynniki  $\psi(t)$ ,  $\phi(t)$ ,  $f(t)$ ,  $\gamma$ ,  $\beta_1$ , występujące w równaniu VIII.2 są oznaczone:

$$f(t) = (1 + 2\beta \sin \frac{\pi a t}{L})^{-1}$$

$$\phi(t) = (1 - 2\beta \alpha^2 \sin \frac{\pi a t}{L}) f(t)$$

$$\text{VIII.3} \quad \psi(t) = \frac{\beta \pi a}{L} \sin \frac{\pi a t}{L} f(t), \quad \beta = \frac{M}{mL}; \quad \alpha = \frac{a}{a_k}$$

$$a_k = \frac{L\gamma}{\pi}, \quad \gamma = \frac{iJ}{aL^2} \left( \frac{EJ}{m} \right)^{1/2}, \quad \beta_1 = \frac{2P_0}{mL}$$



gdzie  $m$  - masa belki,  $M$  - masa ruchomego ciężaru,  $EJ$  - sztywność belki

- Warunki ograniczenia

$$\text{VIII.4} \quad v_{\max} \leq [v_{\text{dop}}] ;$$

- Warunki początkowe

$$\text{VIII.5} \quad \varphi(t_0) = \varphi_0 ; \quad \dot{\varphi}(t_0) = 0$$

- Warunki końcowe

$$\text{VIII.6} \quad \varphi(t_f) = \tilde{\varphi} , \quad \dot{\varphi}(t_f) = \tilde{\dot{\varphi}}$$

Aby sprowadzić to zadanie do zadania matematycznego programowania wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\text{VIII.7} \quad \Delta t = \tau \cdot t_j = j , \quad j = 0, 1, 2 \dots N$$

$$N = t_f = \tau^{-1} P_k^j ; V_k^j$$

$$\{t_0 - t_f\} = \{ (t - t_0) ; (t_2 - t_1) \dots (t_k - t_{k-1}) \}$$

$$\varphi_k^j = \{ \varphi_1^j, \varphi_2^j, \dots, \varphi_k^j \}$$

Ponadto wykorzystujemy następujące operacje różnicowe dla pochodnych względem czasu, które są opisane zależnościami:

$$\text{VIII.8} \quad \dot{\varphi}_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = \frac{\varphi_k^{j+1} - \varphi_k^{j-1}}{2\tau}$$

$$\ddot{\varphi}_k = \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2} = \frac{\varphi_k^{j+1} - 2\varphi_k^j + \varphi_k^{j-1}}{\tau^2}$$

Wykorzystując warunki początkowe VIII.5 możemy przedstawić równanie VIII.2 w następującej postaci:

$$\text{VIII.9} \quad \varphi_k^1 - 2\varphi_k^0 + \varphi_k^{-1} - 2\tau(\psi^0(\varphi_k^1 - \varphi_k^0)) + 2\tau^2 \psi^0 \psi^0 \varphi_k^0 =$$

$$(2\beta_1 f^0 \sin \frac{\pi a}{L} \tau_0 - W_k^0) \tau^2$$

Dla dowolnego punktu  $k$  oraz  $j=1$  otrzymujemy następujące równanie:

$$\varphi_k^2 - 2\varphi_k^1 + \varphi_k^0 - 2\tau\psi^1(\varphi_k^2 - \varphi_k^1) + 2\tau^2\psi^2\phi^1\varphi_k^1 =$$

VIII.10  $2\left(\beta_1^1 + \sin\frac{\pi a}{L} + v_k^1\right)\tau^2$

funkcjonał VIII.1 można przekształcić w postaci

$$\text{VIII.11 } J = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^r (v_k^j)^2 (t_k - t_{k-1}) \Rightarrow \min$$

w ten sposób możemy teraz sformułować powyższe zadanie w postaci matematycznego programowania, które jest opisane następującymi zależnościami:

$$J = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^r (v_k^j)^2 (t_k - t_{k-1}) \Rightarrow \min$$

$$\text{VIII.12 } \varphi_k^{j+1} = B$$

$$(\varphi_k^{j+1} - \varphi_k^{j-1})(2\tau)^{-1} \leq 0$$

$$\varphi_k^0 = \varphi_0$$

$$\varphi_k^N = \tilde{\varphi}_N, \quad \dot{\varphi}_k^N = \tilde{\dot{\varphi}}_N$$

$$v_{k\max}^j - [v_{dop}] \leq 0$$

w powyższym układzie równań oznaczono  $\varphi_k^{j+1}$  wektorowo funkcja fazowa  $\varphi$  określona w punkcie  $K$  i  $W$  chwili  $j+1$

$$\text{VIII.13 } B = b_k^j, \quad \text{zaś dla } j=0 \text{ mamy}$$

$$b_k^0 = \varphi_k^2 = A_1 \varphi_k^1 - \varphi_k^0 - A_2$$

gdzie przez  $A_1, A_2$  oznaczamy

$$A_1 = 2(\tau^2\psi^2\phi^0 - 1)(1 - 2\psi^0\tau)^{-1}$$

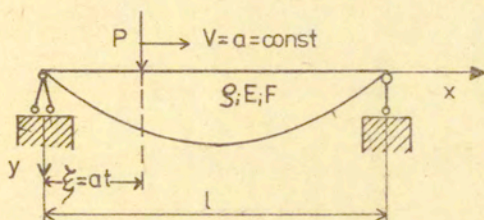
$$A_2 = 2\tau^2\left(\beta_1^0 + \sin\frac{\pi a}{L} + v_k^1\right)$$



funkcja sterowania określona w chwili  $j=1$  w punkcie  $k$  wyznaczamy z zależności

$$\text{VIII.14} \quad V_k^1 = \left\{ - \left( 2\beta_1 f^1 \sin \frac{\pi a}{L} + (1 - 2\psi^1 (\varphi_k^2 - \varphi_k^1) + 2(\tau^2 \psi^2 \phi^1 - 1) \varphi_k^1 \right) \tau^{-2} \right.$$

Na rys. 19 przedstawiono wykres funkcji  $\varphi(t)$  oraz funkcji sterowania otrzymane dla przypadku  $m = 180 \text{ kg}$ ,  $l = 12,5 \text{ m}$ ,  $M = 16 \text{ kg}$ ,  $L = 2,0 \text{ m}$ ,  $t_f = 0,026 \text{ s}$ ,  $P = P_0 \sin \theta \tau$ ,  $P_0 = 10,0 \text{ kg}$ ,  $\theta = 1,75$ ,  $t_0 = 0$ ;  $E = 2,63 \cdot 10^{12} \text{ Nm}^{-2}$ ,  $a = 10 \text{ m/s}$ .  $x = \eta_1 = \frac{1}{2} L$ .



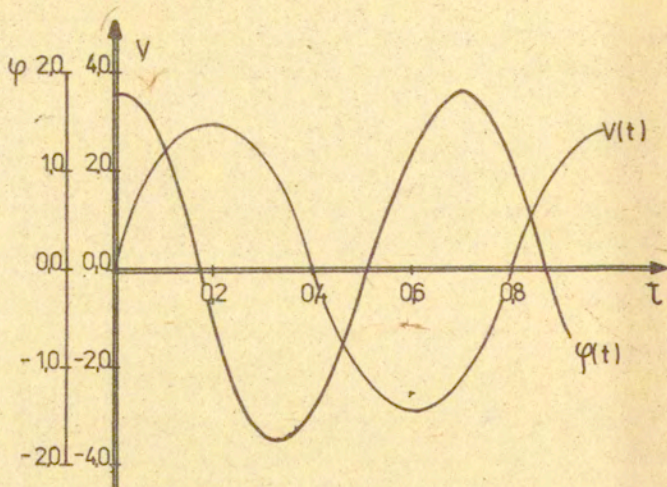
Rys. 18

## 2. Optymalne sterowanie ruchem w płycie prostokątnej obciążonej dynamicznie.

Reźważmy prostokątną płytę o rozmiarach  $a \times b$  jak przedstawiono na rys. 20, grubości  $h$ , gęstości  $\rho$  obciążoną zewnętrznymi oddziaływaniami  $P(x_j, t)$   $j = 1, 2$

Zadanie optymalnego sterowania ruchem w płycie można sformułować w ten sposób:

Należy znaleźć funkcje wektorowe  $V$  oraz  $W(x_j, t)$  takie, aby minimalizowały następujący funkcjonal



Rys. 19

VIII.15 
$$J = \left( \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^n (v_k)^2 dt \right)^{1/2}, t_0 = 0 \Rightarrow \min$$

przy jednoczesnym spełnieniu następujących warunków:

- Równanie ruchu

VIII.16 
$$D \Delta W - \rho h \ddot{W} + k \dot{W} = \sum_{i=1}^n P_i \delta(x - \xi_i) \delta(y - \eta_i) - \sum_{k=1}^r V_k \delta(x - \xi_k) \delta(y - \eta_k)$$

w równaniu VIII.16 oznaczamy:

- $W(x, y, t)$  - ugięcie płyty
- $P_i(x, y, t)$  - powierzchniowe zewnętrzne oddziaływania
- $V_i(x, y, t)$  - sterujące oddziaływanie w punkcie

$$x = \xi_k, \quad y = \eta_k$$

- $D$  - sztywność płyty przy czym  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$
- $\nu$  - współczynnik Poissona
- $k$  - współczynnik tłumienia



- Warunki brzegowe

$$M_x(0, y, t) = M_x(a, y, t) = 0$$

$$M_y(x, 0, t) = M_y(x, b, t) = 0$$

VIII.17  $Q_x(0, y, t) = Q_x(a, y, t) = 0$

$$Q_y(x, 0, t) = Q_y(x, b, t) = 0$$

lub

$$W_{,xx}(0, y, t) = W_{,xx}(a, y, t) = 0$$

$$W_{,yy}(x, 0, t) = W_{,yy}(x, b, t) = 0$$

oraz

$$W(x, y, t) = W(a, y, t) = 0$$

$$W(x, 0, t) = W(x, b, t) = 0$$

Gdzie momenty zginające  $o$  oraz siły poprzeczne w przekrojach  $X = \text{const}$ ,  $Y = \text{const}$ , są określone następującymi zależnościami:

$$M_x = D(W_{,xx} - \partial W_{,yy}) ; M_y = D(W_{,yy} - \partial W_{,xx})$$

VIII.18

$$Q_x = D(W_{,xxx} - \partial W_{,xyx}) ; Q_y = D(W_{,yyy} - \partial W_{,xyy})$$

- Warunki początkowe

VIII.19  $W(x, y, t_0) = \varphi_1(x, y) ; \dot{W}(x, y, t_0) = \varphi_2(x, y) = 0$

- Warunki ograniczenia

VIII.20  $W_{\max} \ll [W_{\text{dop}}]$

- Warunki końcowe

Aby sprowadzić zadanie VIII.15 - VIII.20 do zadania matematycznego programowania, przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$\Delta t = \tau ; a = \lambda \sqrt{n + 1} ;$$

$$b = \lambda \sqrt{m + 1} ; x \in [0, a] ;$$

$$\begin{aligned}
 x_K &= \lambda_{n_K} & ; & & y_K &= \lambda_{m_K} & ; \\
 y &\in [0, b] & ; & & x &= y = \lambda & ; \\
 t_j &= j\tau & ; & & m_K &= 1, 2, \dots, m & ; \\
 n_K &= 1, 2, \dots, n & ; & & j &= 1, 2, \dots, N & ; \\
 M &= m \cdot n & ; & & N &= t_f \cdot \tau^{-1} & ; \\
 K &= 1, 2, \dots, M & ; & & P_K^{-j} &= P_K^j & ; \\
 & & & & V_K^{-j} &= \alpha V_K^j & ; & \alpha = \lambda D^{-1} & ;
 \end{aligned}$$

gdzie oznaczono:

$x_k, y_k$  - współrzędne k-tego węzła siatki płaskiej  
 $P_K^j; V_K^j$  - wektorowa siła wymuszona i sterująca, które działają na płytę w punkcie k.

Dla dalszego wykorzystania łatwiej przyjmujemy ugięcie  $W(x, y, t)$  płyty wolno podpartej w postaci:

$$\text{VIII.22} \quad W(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_K^j(t) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

Ponadto wprowadzamy następującą operację różnicową dla pochodnych względem czasu funkcji  $W_K^j(t)$ , które wyrażają

$$\begin{aligned}
 \dot{W}_K^j &= \frac{\partial W_K^j}{\partial t} = \frac{W_K^{j+1} - W_K^{j-1}}{2\tau} \\
 \ddot{W}_K^j &= \frac{\partial^2 W_K^j}{\partial t^2} = \frac{W_K^{j+1} - 2W_K^j + W_K^{j-1}}{\tau^2}
 \end{aligned}$$

Wykorzystując VIII.21 - VIII.22 przekształcimy równanie sterującego ruchu VIII.16 do postaci:

$$\begin{aligned}
 \text{VIII.24} \quad A W_K^{j+1} &= C W_K^j + B W_K^{j-1} + P_K^j + V_K^j \\
 \text{VIII.25} \quad V_K^j &= A W_K^{j+1} - C W_K^j - B W_K^{j-1} - P_K^j
 \end{aligned}$$

przy czym przez A, B, C, występujące w zależnościach VIII.24, VIII.25 oznaczamy:

$$\begin{aligned}
 \text{VIII.26} \quad A &= D\delta h\tau + 2k \\
 B &= 2k - D\delta h\tau \\
 C &= 2\tau \left( \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right) - 2\delta D h
 \end{aligned}$$



w ten sposób możemy sformułować zadanie optymalnego sterowania w postaci matematycznego programowania przez następujące zależności:

$$J = ML \sum_{j=1}^N \sum_{K=1}^n [v_K^j]^2 \cdot [t_K - t_{K-1}] \Rightarrow \min$$

VIII,27

$$AW_{nK}^{j+1} = CW_K^j + BW_K^{j-1} + P_K^j + V_K^j$$

$$V_K^j = AW_K^{j+1} - CW_K^j - BW_K^{j-1} - P_K^j$$

$$W_{max} \leq W_{dop}$$

$$v_{max_K} \leq [v_{dop}] ;$$

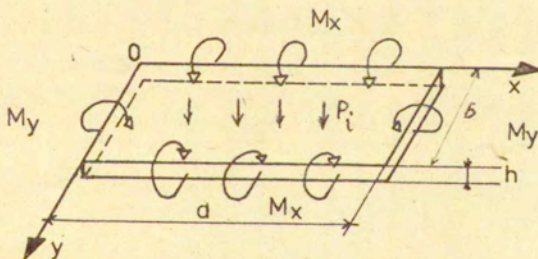
Na rys. 21 przedstawione wykresy funkcji sterowania  $V$  oraz funkcji  $W_n$  otrzymane dla następujących danych:

$$P_k = P_o \sin \Theta t, \quad P_o = 200 \text{ N}, \quad \Theta = 1,55 \text{ s}^{-1}, \quad t_f = 0,026,$$

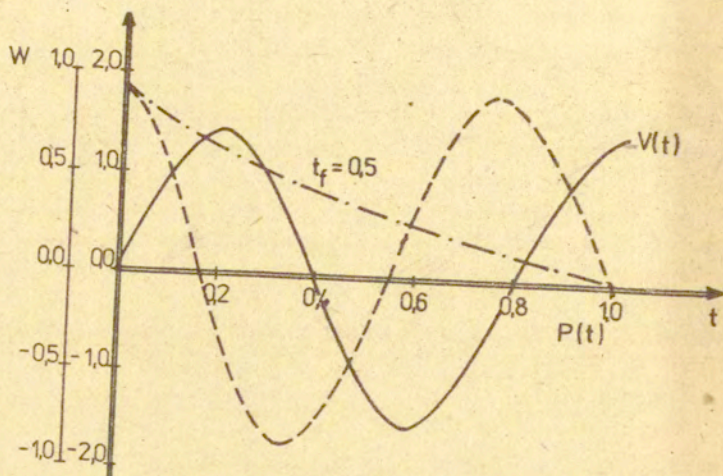
$$\rho_o = 1,8 \text{ kg/dcm}^3, \quad a = 2 \text{ m}, \quad b = 1 \text{ m}, \quad h = 0,02 \text{ m}, \quad k = 1,$$

$$\bar{V} = 0,35, \quad E = 2,0610^{11} \text{ Nm}^{-2}, \quad m = 3, \quad n = 5, \quad M = 12, \quad N = 10,$$

$$W_{dop} = 0,2710^{-3} \text{ m}, \quad v_{dop} = L = 145,8 \text{ NS}^{-\frac{1}{2}}$$



Rys. 20



Rys. 21

Rozwiązanie zadania metodą matematycznego sterowania odbywa się zgodnie z następującymi etapami:

1. Dyskretyzacji odcinka czasu  $(t_0, t_f)$  poprzez  $\mathbb{W}$  prowadzenie podziału  $\{t_0, t_f\} = \{(t_1 - t_0), (t_2 - t_1), \dots, (t_k - t_{k-1})\}$ .

2. Dyskretyzacja równania różniczkowego cząstkowego metodą matematycznej dyskretyzacji.

3. Dyskretyzacja funkcji wektorowej stanu poprzez utworzenie w każdej chwili  $t_j$  siatki punktów  $W_k^j$   $j=1, \dots, N$  gdzie  $N$  jest ustaloną liczbą węzłów w przestrzeni  $G_{\mathbb{W}}$ .

4. Wyznaczenie optymalnego sterowania  $V$  przeprowadzającego konstrukcję ze stanu  $W_k^j, t_j$  do stanu  $W_k^{j+1}, t_{j+1}$  dla w wszystkich  $k = 1, \dots, N$ , przy  $j=N, 1, N-2, \dots, 0$

5. Optymalizacja funkcjonału celu.

6. Sprowadzenia warunków ograniczenia dla  $W < V_{dep}$



IX. MATEMATYCZNE MODELOWANIE SYSTEMU STABILIZACJI RUCHU  
W KONSTRUKCJI.

Przedstawiono sposoby realizowania modelowania systemu stabilizacji ruchu w elementach konstrukcji, które są interesujące nie tylko ze względów czysto matematycznych, ale są też ciekawe dla konkretnych obliczeń o charakterze użytkowym dla projektowania schematu sterowania.

1. Realizowania modelowania systemu stabilizacji poprzecznego ruchu w belce.

1.1. Macierz dynamicznej sztywności

Rozważmy poprzeczne drganie belki, które było przedstawione w rozdziale V. Równania sterujące opisują się postaciami:

$$u_{,xx} + \alpha_1^2 \ddot{u} = P_x + V_x$$

IX<sub>1</sub>

$$W_{,xxxx} + \alpha_2^2 \ddot{W} = P_y + V_y$$

gdzie  $\alpha_1$   $\alpha_2$  występujące w równaniu X<sub>1</sub> oznaczone są

$$\alpha_1^2 = \frac{m}{EA}, \quad \alpha_2^2 = \frac{m}{EJ}; \quad EA, \text{ jest sztywnością na}$$

rozciąganie /lub ściskanie/; EJ jest sztywnością belki na zginanie.

Rozwiązując zadania własne otrzymujemy:

$$u[\xi] = u_0 \cos \beta \xi + M_0 \sin \beta \xi$$

IX<sub>2</sub>

$$W[\xi] = c_0 s_0[\lambda \xi] + c_1 s_1[\lambda \xi] + c_2 s_2[\lambda \xi] + c_3 s_3[\lambda \xi]$$

gdzie:  $\beta, \lambda, u_0, \mu_0, C_0 \dots C_3$  występujące w zależnościach oznaczają:

$$\beta^2 = \omega_m^2 L^2 / AE ; \quad \lambda^4 = \omega^2 mL^4 / EJ , \quad \xi = x/L$$

$$\mu_0 = \frac{NL}{EA} , \quad C_0 = W_0 , \quad C_1 = \frac{\varphi_0 L}{\lambda} ; \quad C_2 = \frac{M_0 L^2}{EJ \lambda^2} ;$$

$$C_3 = \frac{Q_0 L^2}{EJ \lambda^3} ;$$

przy czym  $u_0, W_0, N_0, M_0, Q_0$ , to są warunki brzegowe natomiast  $S_0[\lambda \xi] \dots S_3[\lambda \xi]$  są funkcjami Kryłowa, których wartości można znaleźć w  $[\xi] \dots$  każdy przekrój poprzeczny belki oprócz  $u[\xi], W[\xi]$ , charakteryzuje się stanem z następującymi parametrami:

$$N[\xi] = \mu_1 U, \xi ; \quad \varphi[\xi] = \mu_2 W, \xi$$

$$M[\xi] = \mu_3 W, \xi ; \quad Q[\xi] = \mu_4 W, \xi \xi \xi$$

IX<sub>3</sub>

gdzie:

$$\mu_1 = \frac{AE}{L} , \quad \mu_2 = \frac{1}{L} , \quad \mu_3 = \frac{1}{L^2} , \quad \mu_4 = EJ \mu_2^3$$

Transformacja przemieszczeń brzegowych na siły brzegowe można wyrazić ogólną postacią (patrz na rys.21 [34])

IX<sub>4</sub>

$$Q^j = K^j q^j$$

gdzie przez  $Q^j, q^j, K^j$  oznaczamy

$$q^j = \{ u_0, u_1, W_0, W_1, \varphi_0, \varphi_1 \}$$

$$Q^j = \{ N_0, N_1, M_0, M_1, Q_0, Q_1 \}$$



$$K_u^j = \begin{bmatrix} K_u^j & 0 \\ 0 & K_w^j \end{bmatrix} \quad K_u^j = \alpha_1 \begin{bmatrix} G_1[\beta] & G_2[\beta] \\ G_2[\beta] & G_1[\beta] \end{bmatrix}$$

$$K_w^j = \begin{bmatrix} \alpha_3^F F_5 & \alpha_3^F F_6 & \alpha_2^F F_3 & \alpha_2^F F_4 \\ \alpha_3^F F_6 & \alpha_3^F F_5 & \alpha_2^F F_4 & \alpha_2^F F_3 \\ \alpha_2^F F_3 & -\alpha_2^F F_4 & \alpha_1^F F_1 & \alpha_1^F F_2 \\ \alpha_2^F F_4 & -\alpha_2^F F_3 & \alpha_1^F F_2 & \alpha_1^F F_1 \end{bmatrix}$$

gdzie  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 G_1[\beta] G_2[\beta]$ ,  $F_1 F_2 \dots F_4$  występujące w macierzach  $K_w^j$ ,  $K_u^j$  oznaczają

$$\alpha_1 = \frac{E J}{L}, \quad \alpha_2 = \frac{E J}{L^2}, \quad \alpha_3 = \frac{E J}{L^3}$$

$$G_1[\beta] = \beta / \operatorname{tg} \beta, \quad G_2[\beta] = -\beta / \sin \beta$$

$$F_1 = \lambda [\sin \lambda \operatorname{sh} \lambda - \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda] / D$$

$$F_2 = \lambda [\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda] / D$$

$$F_3 = \lambda^2 \cdot \operatorname{sh} \lambda \cdot \sin \lambda / D$$

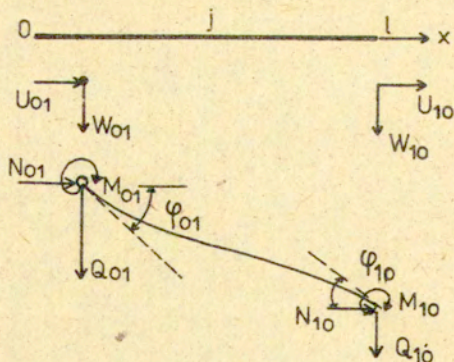
$$F_4 = \lambda^2 [\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda] / D$$

$$F_5 = \lambda^3 [\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda] / D$$

$$F_6 = \lambda^3 [\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda] / D; \quad D = 1 - \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda$$

$$[EA]^j = \left[ \frac{E J}{L^2} \cdot s^2 \right] \quad \beta^j = [\alpha^2] s^j, \quad s = L \sqrt{A/J}$$

jest smukłością prętu w płaszczyźnie drgań.



Rys. 21<sub>1a</sub>

W dalszym rozwiązywaniu problemu sterowania istnieje potrzeba ustalenia związków między wektorami stanów w dwóch przekrojach rozpatrywanej belki. Dzięki temu równanie problemu można przedstawić w postaci

$$IX_5 \quad K q = P$$

gdzie  $K$  jest globalną macierzą dynamicznej sztywności i wyraża się postacią

$$IX_6 \quad K = \sum_{j=1}^n A_j^T K^j A_j$$

### 1.2. Realizowanie modelowania układu stabilizacji ruchu w belce.

Rozważamy teraz belkę, której ruch opisuje się równaniem:

$$IX_7 \quad a^2 W_{,xxxx} + b W_{,xx} + \ddot{W} = 0$$

gdzie: przez występujące  $a^2$ ,  $b$  oznaczamy



$$a^2 = \frac{EJ}{\rho F}, \quad b = \frac{N}{\rho F}$$

$EJ$  - sztywność belki na zginanie,

$F$  - pole przekroju poprzecznego,

$N$  - siła podłużna.

Przyjmując warunki początkowe  $W[x, 0] = W_x[x, 0]$  i wykorzystując przekształcenie Laplace'a  $[\bar{W}, t] = \bar{W}[x, s]$  do równania  $X_7$  otrzymujemy

$$IX_8 \quad a^2 W_{xxxx}[x, s] + b_1 W_{xx}[x, s] + s^2 W[x, s] = 0$$

Wprowadzając wektor stanów  $\underline{W} = \text{Colon } [\bar{W}, \dot{\varphi}, m, q]$

gdzie  $\alpha = \frac{a}{EJ}$  i przyjmując oznaczenia  $m = \alpha M$ ,  $q = \alpha Q$   
 $P = \frac{S}{a}$ ,  $b_1 = \frac{b}{a^2}$ , równanie  $X_7$  można zapisać postacią

$$IX_9 \quad \underline{W}_x = A \cdot \underline{W}$$

gdzie:

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} \dot{W} \\ \dot{\varphi} \\ m \\ q \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -P & 0 & -b & 0 \end{bmatrix}$$

Zauważamy, że problem sterowania ruchem w belce może być realizowany drogą ustalenia związku między wektorami stanów w dwóch dowolnych przekrojach. Wykorzystując poprzednie podstawienie można sprowadzić  $X_7$  do postaci

$$IX_{10} \quad \underline{W}_L = A^T \underline{W}_P$$

gdzie  $\underline{W}_L$ ,  $\underline{W}_P$  są macierzami wyrażającymi stany lewego i prawego przekroju poprzecznego belki,  $A^T$  jest macierzą

transformacji i wyraża się

$$A^T = \begin{pmatrix} \mu_1 & P^{-1}\mu_2 & \mu_3 & P\mu_4 \\ -P\mu_4 & \mu_1 & P\mu_5 & \mu_3 \\ -\mu_3 & P^{-1}\mu_4 & \mu_6 & P^{-1}\mu_5 \\ -P\mu_5 & -\mu_7 & -P\mu_8 & \mu_6 \end{pmatrix}$$

przez  $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_8$  oznaczamy

$$\mu_1 = \cos \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 + 2b_1 P^{-1} \sin \varphi_1 \operatorname{Sh} \varphi_2$$

$$\mu_2 = 2^{-1} [N_1 \cos \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2 + N_2 \sin \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2]$$

$$\mu_3 = \sin \varphi_1 \operatorname{Sh} \varphi_2 ; N_1 = 1 - b_1 P^{-1} ; N_2 = 1 + b_1 P^{-1}$$

$$\mu_4 = 2^{-1} [\sin \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 - \cos \varphi_1 \operatorname{Sh} \varphi_2]$$

$$\mu_5 = 2 [\sin \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 + \cos \varphi_1 \operatorname{Sh} \varphi_2]$$

$$\mu_6 = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - b_1 / QP^{-1} \sin \varphi_1 \operatorname{Sh} \varphi_2$$

$$\mu_7 = N_1 \sin \varphi_1 \operatorname{Sh} \varphi_2 ;$$

$$\mu_8 = 2^{-1} N_2 \sin \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 - N_1 \cos \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2$$

$$\varphi_1 = \left[ \sqrt{P + \frac{b_1}{2}} \right] t_f \sqrt{2}$$

$$\varphi_2 = - \left[ \sqrt{P - \frac{b_1}{2}} \right] t_f \sqrt{2}$$

### 1.3. Dynamiczny efekt modelowania systemu stabilizacji ruchu w belce.

Dynamiczny stan belki określa się procesem rozprzestrzeniania fal i wpływem warunków brzegowych. Załóżmy, że ste-



rowanie ruchem może być wykonane przy pomocy urządzenia, które działa na belkę siłowymi i deformowanymi sposobami w każdym przekroju poprzecznym. Stąd wynika potrzeba badania efektów powiązanych z wpływem warunków brzegowych i procesem rozprzestrzeniania fal.

a/ Proces rozprzestrzeniania fal

Przez  $W_1$  oznaczamy współrzędne pomocniczego wektora  $\underline{W}$  z indeksami L dla lewego przekroju, P dla prawego przekroju. Wówczas wzór  $IX_{10}$  w tym przypadku można przedstawić w postaci

$$IX_{11} \quad \begin{bmatrix} R_L^- \\ R_P^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{LP} & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_{PL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_P^- \\ P_2^+ \end{bmatrix}$$

gdzie  $R_L^-$ ,  $R_L^+$ ,  $R_P^+$ ,  $R_P^-$ ,  $\mathcal{H}_{LP}$ ,  $\mathcal{H}_{PL}$  występujące w  $X_{11}$  oznaczają

$$R_L^- = \begin{bmatrix} W_{1L} \\ W_{2L} \end{bmatrix}; \quad R_P^+ = \begin{bmatrix} W_{3P} \\ W_{4P} \end{bmatrix}; \quad R^+ = \begin{bmatrix} W_{3L} \\ W_{3L} \end{bmatrix}; \quad R_P^- = \begin{bmatrix} W_{1P} \\ W_{2P} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{LP} = \begin{bmatrix} C/t_f P / & -S/t_f P / \\ S/t_f P / & C/t_f P / \end{bmatrix}; \quad \mathcal{H}_{PL} = \begin{bmatrix} C/t_f P / & S/t_f P / \\ -S/t_f P / & C/t_f P / \end{bmatrix}$$

$$C/t_f P / = \exp[-\bar{t}_f P /]^{1/2} \cos \bar{t}_f P /]^{1/2}$$

$$IX_{12} \quad S/t_f P / = \exp[-\bar{t}_f P /]^{1/2} \sin \bar{t}_f P /]^{1/2}$$

Praktycznie zakładamy, że wyrażenia  $IX_{12}$  są operatorami rozprzestrzeniania fal dla równania  $IX_7$ , które przedstawia matematyczny model dla belki z uwzględnieniem siły

podłużnej. Według podstawienia  $IX_{11}$  widzimy, że stan lewego przekroju określa się stanem prawego i odwrotnie.

b/ Wpływ brzegowych warunków

Przyjmując wektory  $\underline{W} = \text{colon } [\dot{w}, \dot{\varphi}, m, q]$  oraz  $\underline{U} = \text{colon } [u_i]$   $i = 1, 2, 3, 4.$ , podstawiamy je do wyrażenia  $\underline{\dot{W}} = \underline{W}^+ \underline{U}$ , które rozwiązujemy według następującego schematu.

$$IX_{13} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ R^+ \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ R^- \end{bmatrix}_P ; \begin{bmatrix} \dot{X} \\ R^- \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ R^+ \end{bmatrix}_L$$

$$\dot{X}_{L/P} = \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}_{L/P} ; F_{a/b} = \begin{bmatrix} m \\ q \end{bmatrix}_{P/L}$$

$$\lambda_{11} = \begin{bmatrix} N_1 & 2P\alpha \\ -2P\alpha & -1 \end{bmatrix} ; \lambda_{12} = \begin{bmatrix} -2PN_2 & 2P\alpha N_1 \\ -\sqrt{P}\alpha & P [2 - b_1 P^{-1}] \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{21} = \begin{bmatrix} 2P^{-1}N_1 & 2\sqrt{2}^{-3} \\ 2P^{-1}\alpha [1 - P^{-1}] & \sqrt{P}^{-5} b \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{22} = \begin{bmatrix} 1 + b_1 P^{-1} & b^2 P^{-2} ; & 2\alpha N_1 \\ \alpha b_1 P^{-1} N_2 & ; & 1 + b_1 P^{-1} - b^2 P^{-2} \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = \lambda_{11}, K_{12} = \lambda_{12}, K_{21} = \lambda_{21}, K_{22} = \lambda_{22}$$

Na podstawie  $IX_{11}$  oraz  $IX_{13}$  można budować konstrukcyjny schemat, który odpowiada zależnościom określającym proces rozpowszechniania fal i wpływu warunków brze-



wych na proces rozprzestrzeniania fal.

Wykorzystując zależności  $IX_4$  można zapisać

$$\begin{pmatrix} \dot{W} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{u} \end{pmatrix}_L = \lambda_{II} \begin{pmatrix} m \\ q \\ N \end{pmatrix}_L \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} \dot{W} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{u} \end{pmatrix}_P = K_{11} \begin{pmatrix} m \\ q \\ N \end{pmatrix}_P$$

$$IX_{14} \quad \dot{X}_L = W_L F_L \quad ; \quad \dot{X}_P = W_P F_P$$

odwrotnie otrzymujemy

$$IX_{15} \quad \begin{pmatrix} m \\ q \\ N \end{pmatrix}_L = \lambda_{II}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{W} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{u} \end{pmatrix}_L \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} m \\ q \\ N \end{pmatrix}_P = K_{11}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{W} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{u} \end{pmatrix}_P$$

$$F_L = Z_L \dot{X}_L \quad ; \quad F_P = Z_P \dot{X}_P$$

wyrażenia te przedstawiają związki między prędkościami przemieszczeń i kątów a siłowymi oddziaływaniami nałożonymi na przekrój belki według wzoru  $IX_4$ .

Tak więc realizując projektowanie struktury schematu systemu stabilizacji można postąpić następująco:

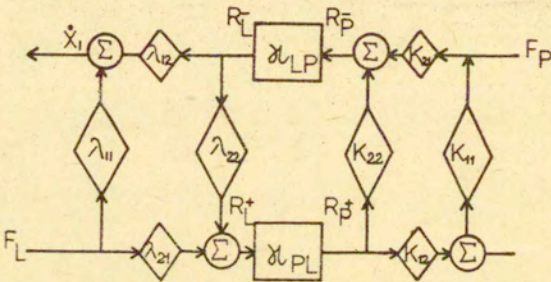
Jakość optymalnego sterowania ruchem weźmiemy taką, by przy niej nachylenie rzeczywiste prędkości  $\dot{W}$ ,  $\dot{u}$ ,  $\dot{\varphi}$  od ustalonych  $\dot{W}$ ,  $\dot{u}$ ,  $\dot{\varphi}$  były minimalne t.zn. wejściowymi oddziaływaniami sterującego urządzenia, będą różnice  $\dot{W} - W$ ,  $\dot{u} - u$ ,  $\dot{\varphi} - \varphi$ .

Sterujące urządzenie przyjmuje sygnały działające

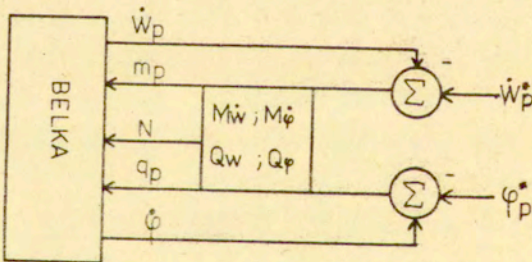
na układ parametrów m. q, N, które w kolejności zgodnie ze wzorem IX<sub>15</sub> zmieniają parametry  $\dot{w}$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{u}$ , wówczas otrzymujemy

$$IX_{16} \quad F_p = \frac{K_p^j}{\dot{X}_p} - \dot{X}_p /$$

Na rys. 23 przedstawiono schemat opisujący proces rozprzestrzeniania fal i wpływu warunków brzegowych na proces rozprzestrzeniania fal



Rys. 22.



Rys. 23.



2. Matematyczne modelowanie układu stabilizacji ruchu w płycie.

Rozpatrzmy inny sposób rozwiązywania zadania sterowania ruchem w konstrukcji, który jest oparty na podstawie metody Bubnowo-Galerkina i który dla zadania płaskiego wyraża się postacią

$$X_{17} \quad \int_0^a \int_0^b \mathcal{L}_i \cdot \Psi[x,y] \, dx dy = 0, \quad i = 1,2$$

Zadanie syntezy sprężysto deformowanej płyty jest sformułowane w następujący sposób:

Projektować układ sterowania, przy którym amplituda i częstotliwość drgania płyty wywołane dowolnymi i harmonicznymi zewnętrznymi oddziaływaniami, które znajdują się w dopuszczalnym obszarze  $G_P$ .

Rozpatrzmy płytę prostokątną, której stan opisuje się następującym układem równań

$$IX_{18} \quad \mathcal{L}_1 = \frac{P}{h} \Delta w_1 - L [w_1 + w_0, \phi] + \rho \ddot{w}_1 - \frac{g}{h} = 0$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{E} \Delta \phi + \frac{1}{2} L [w_1 + 2w_0, w] = 0$$

gdzie  $O, h$  są sztywnością i grubością płyty  $w_1[x,y,t]$ ,  $w_0$  dodane i początkowe ugięcie  $\phi[x,y,t]$  jest funkcją naprężeni;  $\rho, E$  są gęstością i modułem sprężystości materiału płyty;  $L$  nieliniowy operator w wykorzystaniu do uogólnionych funkcji  $\varphi_1, \varphi_2$  i zapisuje się zależnością

$$IX_{19} \quad L[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_{1,xx} \varphi_{2,yy} + \varphi_{1,yy} \varphi_{2,xx} - 2 \varphi_{1,xy} \varphi_{2,xy}$$

Zależności dla ugięcia i funkcji naprężenia w środkowej powierzchni płyty są przyjęte w postaci

$$w_1 = f[t] \Psi(x, t), \quad w_0 = f_0 \Psi(x, t)$$

$$- \Psi = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{b}$$

IX<sub>20</sub>

$$\Phi = \varphi[t] \Psi[x, t] - \frac{P_0 y^2}{2}$$

gdzie:  $\Psi[x, t]$  jest własną funkcją,  $P_0$  jest intensywnością styczną równomiernie rozdzieloną.

Wykorzystując IX<sub>17</sub> do IX<sub>18</sub>, IX<sub>20</sub> znajdujemy następujące równanie ruchu

IX<sub>21</sub>

$$\ddot{\eta} + 2\alpha \omega_0 \dot{\eta} + \omega_0^2 [\eta - \beta \eta^2 + \gamma \eta^3] =$$

$$\omega_{mn}^2 \eta_0 \frac{P^*}{P_B^*} + q^*$$

gdzie:  $\eta, \eta_0, \alpha, \omega_0, \omega_{mn}, P^*, P_B^*$  występujące w równaniu IX<sub>21</sub> oznaczają

$$P_B^* = \frac{2\sqrt{m - \lambda n^2}}{12/1 - \nu^2/\lambda m^2}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad P = \frac{P_0 b^2}{Eh^2}$$

$$\eta = \frac{f}{h}, \quad \eta_0 = \frac{f_0}{h}, \quad \omega_{mn}^2 = \frac{h^2 E \pi^2 m^2}{a^2 b^2 \rho} \cdot P_B^*$$



$$\omega_0^2 = / 1 - P^* P_B^* - 1 - \mu / \frac{2}{mn}$$

$$\mu = [64 \lambda^2 [ \frac{-16}{3} ] \eta \eta_0 ] / 3 \pi^2 [m + \lambda^2 n^2]^2 P_B^* ]^{-1}$$

oraz parametr  $q^*$  określony jest zależnością

$$1X_{22} \quad q^* = \frac{4}{a \cdot b p \cdot h} \int_0^a \int_0^b q[x, y, t] \Psi[x, y] dx dy$$

Przyjmując normalne ciśnienie na płytę w sposób

$$1X_{23} \quad q^* = q_B - q_V \quad , \quad q_B = q_B^0 \delta [x - x_B, y - y_B]$$

$$q_V = \sum_{K=1}^n q_V^0 \delta [x - x_V^K, y - y_V^K]$$

gdzie:  $q_B$ ,  $q_V$  wpływy zewnętrznego oddziaływania i sterującego oddziaływania,  $\delta$  - jest funkcją delta Dirac'a.

Założmy, że  $K$  - równomiernie skupione siły  $q_V^0$  spadają do płyty nie wcześniej niż przewiduje ustalony program. Na rys. 24 przedstawiono strukturę schematu stabilizacji ruchu w płycie.

oraz nieliniowe operatory  $X_i = F_i/P^{i-1} / i=1,2,\dots$   
i wykonane urządzenie

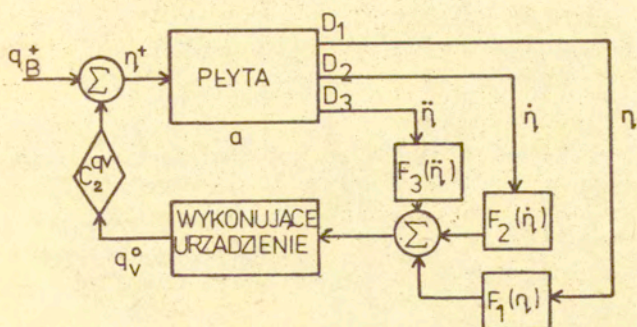
$$IX_{25} \quad L_0[P] q_V^0 = [ \mathcal{G}^2 P + \omega P + s ] q_V^0 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i X_i$$

gdzie:

$P$  - jest symbolem różniczkowania,  
 $V, \mathcal{G}, s$  - są parametrami wykonującego ogranu,  
 $\alpha_i$  - masowy współczynnik.

Zauważmy, że istnieją inne drogi, którymi można zbudować strukturę schematów systemu stabilizacji w pracy [2]. Sprowadzone zadanie optymalnego sterowania ruchem belki obciążonej ruchomą siłą ze stałą prędkością do zagadnienia Cauchy'ego, które daje możliwość tworzenia struktury schematu stabilizacji ruchu.





Rys. 24.

Ruch płyty charakteryzuje się przemieszczeniami prędkości i przyspieszeniami dowolnych punktów. Na rys. 24  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  są czułościami, które mają zadanie przyjmowania informacji wejściowej, zatem te informacje przekazane są do wykonującego urządzenie, które tworzy odpowiednie siłowe sterujące oddziaływanie,

W ten sposób rozpatrywany system stabilizacji poprzecznego ruchu płyty jest automatycznym i charakteryzuje się zależnościami.

Stan sterującego obiektu  $X_{21}$  przy czym wymuszone i sterujące oddziaływania są określone

$$q^* = q_B - q_V ; \quad q_B = q_B^o C_B^{q_B} ; \quad q_V = q_V^o C_B^{q_V}$$

$${}^{IX}_{24} \quad C_B^{q_i} = \alpha_* \sin \frac{m \pi x_i}{a} \sin \frac{n \pi y_i}{b} , \quad \alpha_* = 4 \cdot [a, b \rho h]^{-1}$$

## X. KOŃCOWE UWAGI, DYSKUSJA.

Na podstawie otrzymanych wyników można sformułować następujące uwagi natury ogólnej.

1. Problem optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji poddanej dynamicznemu ciśnieniu posiada dwa zadania: Jednym z nich jest poszukiwanie najlepszych sposobów aby zabezpieczyć konstrukcję pracującą w trudnych warunkach od zniszczenia. Drugim zadaniem jest poszukiwanie najlepszego projektowania dla nowych konstrukcji z systemem sterującym w celu obrony normalnego warunku pracy dla konstrukcji. Sposobem obrony konstrukcji zgodnie z tą ideą jest nałożenie dodatkowego oddziaływania wybranego według jakiegoś kryterium na konstrukcję. Oddziaływania te mogą być dynamiczne lub statyczne. Problem ten jest ciekawy i ważny dla nowoczesnej techniki. Szczególnie jest on niezwykle potrzebny dla ochrony konstrukcji w przemyśle energetycznym i chemicznym, dla ochrony konstrukcji wojskowych.

Jednak warto pamiętać:

- sterujące oddziaływania  $V$  muszą być tak wybrane aby nie powodowały nowych niekorzystnych zmian geometrycznych i fizycznych w konstrukcji,

- w praktyce aby zastosować teorię optymalnego sterowania ruchem w projektowaniu konstrukcji powinno się rozpatrywać dokładnie szereg zagadnień dotyczących problemów ekonomicznych, technologicznych. Szczególnie powinno się zwrócić uwagę na wybrane materiały z których zbudowane będą konstrukcje. Wyniki analizy wpływu właściwości materiałów na parametry sterowania wykazały, że dla konstrukcji przygotowanej z materiału sztywno-plastycznego, proces sterowania może być wykonany tylko powoli. Ponadto zadanie sterowania powstaje na podstawie cyklicznego oddziaływania krok za krokiem.

Sumując wszystkie poprzednie uwagi, można stwierdzić, że problem sterowania ruchem w konstrukcji znajduje się w stanie początkowego poszukiwania sposobów, którymi można rozwiązywać problem w pełnej postaci tzn. od teoretycznego badania model-



wania do projektowania rzeczywistej konstrukcji. Detychczasowe wyniki badań w tej dziedzinie można rozpatrywać jako początkowe teoretyczne. Inaczej mówiąc jako wstęp do syntezy, w której występuje szereg szczegółowych problemów.

2. W zadaniach sterowania ruchem w konstrukcji podobnie jak w zadaniach dynamiki konstrukcji, takie parametry jak obciążenie, warunki brzegowe i początkowe mają istotny wpływ na postać sterującego oddziaływania i na czas trwania procesu sterowania. Uwzględniając ten fakt, w celu zmniejszenia przemieszczenia można projektować ze sterującym systemem brzegowych warunków. Metoda ta jest oparta na podstawie pasywnych sterowań. Rozwiązanie tych zagadnień polega na budowie dodatkowego układu przy danej konstrukcji, przy czym wybór jego parametrów należy dokonać w taki sposób, aby aktywna energia najmniej działała na daną konstrukcję, lokalizując się w pewnym obszarze.

3. Wyniki analizy wykazały, że zmiany geometryczne oraz zmiany fizyczne mają wpływ nie tylko na postać matematycznego sformułowania zagadnienia, ale również na parametry sterujące.

Należy koniecznie zauważyć również przy konstruowaniu układu ze sterującym dodatkowym oddziaływaniem harmonicznym należy zadawać wcześniej częstotliwości sterujących działań oraz jego amplitudę  $W_0$ .

4. Istotnym elementem rozważonego problemu jest ustalenie celu /lub funkcji jakości/, co pozwala następnie sformułować kryteria optymalizacji i warunki ograniczenia. Funkcja celu może jednocześnie spełniać kilka wymagań np. wymaganie takiego sterowania, aby przemieszczenia, lub kątowa prędkość były najmniejsze, przy jednoczesnym wymaganiu ekonomicznym.

5. I wreszcie koniecznie należy zauważyć, że po aktywnym sterowaniu właściwość materiału może być zmieniona. Dlatego w dalszej eksploatacji konstrukcji powinno się kontrolować jej jakość. Rozwiązanie problemu technicznego sterowania ruchem w konstrukcji jest związane z tworzeniem maszyny ciągłej oraz z opracowaniem programu sterowania dla maszyn dyskretnych.

XI .. LITERATURA

1. Agragew, A.A.; Gamkerlige P.B.: Zasada optymalizacji drugiego stopnia dla zadania szybkiego oddziaływania /w języku ros./ Matem. zbiór 1976.
2. Abdel-Rohman and H.H.Leipholz: A General approach to active structural control IUTAM 1980.
3. Abdel-Rohman and H.H.Leipholz: Automatic active control of structures. IUTAM. 1980.
4. Abdel-Rohman and H.H.Leipholz: Structural control by pole Assignment method ASCE J. of the Eng-Mech. Div Vol 104 No E M5 Proc paper 14060. 1978.
5. Bryson, A.E., and Ho.Y.C.: Applied optimal Control. Blaisdell waltham 1969.
6. Butkowski, A.G.: Metody sterowania układu rozdzielonych parametrów /w jęz.ros./ Moskwa Nauka 1975.
7. Berezowski, A., Gnedin, A.B.: Zadanie najlepszego wyboru. /w jęz.ros./ Moskwa Nauka . 1984.
8. Bell, D.T. and Jacobson, D.H.: Singular optimal Control problem . Academic press New York 1975.
9. Balas, M.J. and Canavin, I.R.: An Active model Control System philosophy for a class of large space structures. Proc of the first VPI + SU/AIA Sym on Dynamics and Control large Flexible spacecraft, Blacksburg Virginia June 1977.
10. Balas, M.J.: Active control of large civil Engineering structures: Anaive Approach IUTAM. 1980.
11. Balas, M.J.: Model Control of Certain Flexible Dynamic Systems; STAM, J. Control Vol. 16. 1978.
12. Bellman, R.E., Dynamic programming princetina Univ, Princeton NJ. 1967.



13. Brogan, W.L.: Modern Control Theory, Q.P.I. Series, New York 1974.
14. Borkowski, A. i inni: Mechanika Budowli z Elementami Ujęcia Komputerowego, Tom 2. Warszawa 1984.
15. Cao Van Phuong: Optymalne sterowanie ruchem w nieliniowej dynamice konstrukcji. Prace IPPT 1. 1986.
16. Cao Van Phuong i W. Idczak: Problem optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji poddanej zewnętrznemu ciśnieniu. W druku, Biuletyn WAT 9. 1986.
17. Cao Van Phuong: Duże ugięcie sztywno-plastycznych walcowych powłok poddanych impulsowemu ciśnieniu prace IPPT 43/1984
18. Cao Van Phuong: Metoda linearyzacji w nieliniowej dynamice plastycznych ciałach. Prace IPPT 39/1985.
19. Cao Van Phuong: Sztywno-plastyczna powłoka poddana złożonym dynamicznym ciśnieniom przy dużych ugięciach. Prace IPPT 38/1985.
20. Cao Van Phuong: Drganie mostów obciążonych ruchomymi siłami /w jęz. rosyjskim/ Praca d TASZGU 6. 1967.
21. Cao Van Phuong: Belka obciążona ruchomym ciężarem Wietnam, Hanoi. Czasopismo Mech. no 1/1969.
22. Carmichael, D. and Clyde D.: Multilevel Control Concepts in Relation to the Structural Design problem proc of the IUTAM June 1979.
23. Chon, C.T., P.S. Symonds: Large dynamic deflections plates by mode method. J of Eng. Mech div proc ASCE 103. UI. 1977.
24. Dressler, W.: Control of on Elastic Aircraft Using optimal control laws. AGARD Conf proc on import of Active Control Tech. on Airplane Design. No 157 AGRD-CP.157.
25. Duszek, M.: Equation of the theory of large defections of rigid-plastic shell IFTR 13/1971.

26. Gutkowski, W., W.Nowacki; Cz.Woźniak : Dźwigary powierzchniowe 1975.
27. Girgis, S.F.: Flutter Suppression of Aircraft full Slab Tail Control Surface Proc of Euromech 107. Un of Edinburgh. 8. 1978.
28. Haldl, G., A.Lotze and O.Sensburg,: Active Flutter Suppression of Wings With External Stores AGARD. No 175
29. Hodge, P.G.: The Mises yield condition for rotation ally Symmetric shell. App. Math 18. 1961.
30. Hodge, P.G.: Impact pressur loading of rigidplastic cylindrical shell. J. of the Mech-phys of Solids. 3. 176. 1955.
31. Kleiber, M.: Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice continuum. Warszawa 1985.
32. Karnowski, I.A.: Stabilization of the motion of a cylindrical panel. Mech. New York 1974.
33. König, I.A.: Desing of elastic - plastic structures at Variable loading IPTP 13/71.
34. Klein, R. and H.Salhi: The time optimal Control of Wind induced Structural Vibrations using Active Appendages. Proc of the IUTAM Sym on struc. Control. June 1979.
35. Kolly, M. Control devices for eartquakeresistant. Structural design SM. Pub. IUTAM 1980.
36. Juang, J.N., J.N.Yang and S.Sae-Ung: Active Control of large Civil Eng struc. proc. of the IUTAM. June 1971.
37. Johnson, C.D.: Theory of Distrubance Accommodating Controllers. from control and Dynamic systems: Advances in theory and Applications /c.T. Leondes, Editor/, Vol 12 1976. Academic Press. New York.
38. Jones, N.: A Theoretical study of dynamic plastic behavior of beam and plates with finite deflection Inter. I. Sol. Struct. Vol. 7. 1971.



39. Lepik, U. and J.Lellep: Foundations of the optimal control theory /in Russian Tartu Un Press Estonia USSR 1978.
40. Lepik, U.: Optimal design of beams with minimum compliance. Int. J. Nonlinear Mech 13. 1978.
41. Lions, J.L.: Optimal Control of System Governed by Partial Differential Equations, Springer Verlag Heidelberg. New York 1971.
42. Mróz Z.: On optimal Force Action and Reaction on structures. Sym IUTAM 1980.
43. Mróz, Z. and G.I.N.Rozvany: Optimal Design of structures with Variable Support Conditions. J. opt Theory and Appl Vo 15. 1975.
44. Mróz, Z. and A.Garstecki: Optimal Design of Structures with Unspecified Loading Distribution. J. opt Theory and Appl. Vol 20 1976.
45. Meirovitch, L and H.Öz: Active Control of Structures by modal Synthesis. Sym IUTAM 1980.
46. Martin, C.R. and T.T.Soong: Model Control of multistory structures. ASCE J of the Eng Mech Div vol 104. 1976.
47. Mignot, F.: Controle dans les inequations Variationelles elliptiques. J Funct Anal Vol 22. 1976.
48. Masur, E.F. and Mróz, Z.: On no-Stationary optimality conditions in structural Design. In J. solids Struct. 1979.
49. Nowacki, W.: Dynamika Budowli. Warszawa 1961.
50. Nowacki, W.: Dynamic Problems of theomoelasticity. W-wa.1975.
51. Nowacki, W.K.: Analysis methods for nonlinear behavior off solids. 1982.
52. Nowacki, W.K.: Zagadnienia falowe w teorii plastyczności 1974.
53. Övung, B.A.: Dynamics of Frameworks by Continuous uass method. J. of Computers an structures. Vol 4. 1974.

54. Prager, W. and G.I.W. Rozvany: Plastic design of beams i optimal locations of Supports and steps in yield moment. Int. J. of Sci 17. 1975.
55. Pontragin, L.S.: Matematyczna teoria optymalnych procesów /w jęz.ros./ M.Nauka 1969.
56. Perzyna, P.: The Constitutive equations for work hardening and rate sensitive plastic materials proc. vibr. prob. 4. 1963.
57. Peterson, N.R.: Design of large scale tuned mass Dampers. proc IUTAM Sym. 1979. Canada.
58. Panagiotopoulos, P.D.: Optimal Control in the Unilateral thin plate theory. Archives of Mech Vol. 29, 1977.
59. Rockafeller, R.T.: Convex Analysis. Princeton Univer Press. Princeton 1972.
60. Roorda, J.: Active Damping structures Report Aero No 8. Crontfield Inst. of Tech. 7/1971.
61. Rooda, J.: Tendon Control in tall Structures ASCE. J. of the struc. Div vol 101. N°ST3 1975.
62. Rockwell, T.H. and J.M.Lowther: Theoretical and experimental Results on Active Vibration Dampers J.Acoust. soc. America, Vol 36. 1964.
63. Rozvany, G.I.N. and Z.Mróz: Column design Optimization of Support Conditions and Segmentation. J. struct. mech Vol 5. 1978.
64. Szelag, D. and Z.Mróz: Optimal Design of elastic beams with Unspecified Support Conditions. ZAMM, Vol 58. 1978.
65. Sea-Ung, S. and J.T.P. Yao: Active Control of Bulding Structures. ASCE, J. of the Eng Mech Div. Vol 104, 1978.
66. Sensburg, O. and H.Zimmermann: Impact of active control on structures Design Fighter Aircraft design AGARD-CP 241-10. 1977.



67. Sawczuk, A.: Large deflection of rigid-plastic plates proc  
11-th. Congress of App. Mech 1964.
68. Sawczuk, A.: On formulation of large deflection theory for  
perfectly plastic shell App.Mech Varna 1969.
69. Sawczuk, A. and P.G.Hodge: Comparison of yield Conditions  
for Circular Cylindrical Shell I Franklin Ins , 1960.
70. Sawczuk, A., M.Duszek: O związkach podstawowych teorii po-  
włok plastycznych . Rozprawa Inż. 18.4.1970.
71. Sawczuk, A., J.Rychlewski: On yield Surfaces for plastic shells  
Arch Mech stos 12 1960.
72. Wierzbicki, T: Dynamika powłok lepkoplastycznych. Rozprawa  
inż. 19.4. 667-730.
73. Wierzbicki, T.: Large deflections of strain rate sensitive  
plate loaded impulsively. Arch Mech 21.1. 1969.
74. Zienkiewicz, O.C., Valliapan, S., King I.P.: Elastopl stic  
solutions of Engineering problems initial stress finite  
element approach Int. J. Math Eng. 1. 1969.
75. Yao, J.T.P.: Concept of Structural Control ASCE, J. of the  
structural Div., Vo 98. 1972.
76. Yao, J.T.P. and J.T.Tang: Active Control of Civil Eng  
structures, Tech Report CE SIR 73-1. Purdue Univer  
1973.

SPIS TREŚCI

	str.
I. WPROWADZENIE .....	1
II. PRZEGLĄD BADAŃ.....	6
1. Przegląd Badań .....	6
2. Koncepcja i cel pracy .....	6
III. PROBLEM OPTYMALNEGO STEROWANIA RUCHEM W KONSTRUKCJI .....	10
1. Ogólne matematyczne sformułowanie zagadnień optymalnego sterowania ruchem w teorii konstrukcji .....	11
2. Techniczny sens zadania optymalnego stero- wania ruchem w dynamice konstrukcji .....	14
IV. METODY ROZWIĄZANIA PROBLEMU .....	16
1. Wstęp .....	16
2. Metoda linearyzacji równania różniczkowego nieliniowego .....	18
3. Metoda L-momentów .....	19
4. Metoda praktyczna .....	25
5. Metoda dynamiczna programowania .....	25
V. ANALIZA WPŁYWU TYPÓW ODDZIAŁYWAŃ NA PARAMETRY STEROWANIA .....	27
1. Pręt obciążony impulsowym ciśnieniem .....	27
1.1. Pręt utwierdzony obustronnie dokonany swobodnym działaniem bez udziału tłumienia .....	29
1.2. Pręt obciążony stałym impulsem .....	36
1.3. Pręt obciążony harmoniczną falą .....	39
1.4. Pręt poddany drganiom wymuszonym z uwzględnieniem tłumienia .....	42
2. Zadanie optymalnego sterowania ruchem w konstrukcji obciążonej sejsmicznym ciśnieniem	46
2.1. Sformułowanie zadania .....	46
2.2. Rozwiązanie zagadnienia .....	49
a/. Powłoka obciążona stałym sejsmicznym ciśnieniem .....	51
b/. Powłoka obciążona harmoniczną falą	53



VI. ANALIZA WPŁYWU ZMIAN GEOMETRYCZNYCH I FIZYCZNYCH NA PARAMETRY STERUJĄCEGO ODDZIAŁYWANIA .....	55
1. Sformułowanie zadania .....	55
2. Błonowy stan naprężenia .....	57
3. Błonowo-momentowy stan naprężenia .....	62
4. Analiza wpływu zmian fizycznych na parametry .. sterowania .....	66
VII. ZASTOSOWANIE METODY PRAKTYCZNEJ DLA WYZNACZE- NIA FUNKCJI STEROWANIA .....	73
1. Belka obciążona ruchomą siłą ze stałą prędkością	73
2. Belka obciążona stałą siłą poruszającą się harmonicznie wokół ustalonego punktu .....	79
VIII. ZAGADNIENIE OPTIMALNEGO STEROWANIA RUCHEM KONSTRUKCJI OBCIĄŻONEJ DYNAMICZNIE, JAKO ZADANIE MATEMATYCZNEGO PROGRAMOWANIA .....	85
1. Belka obciążona ruchomym ciężarem .....	85
2. Optymalne sterowanie ruchem w płycie prostokąt- nej obciążonej dynamicznie .....	88
IX. MATEMATYCZNE MODELOWANIE SYSTEMU STABILIZACJI RUCHU W KONSTRUKCJI .....	94
1. Realizowanie modelowania systemu stabilizacji poprzecznego ruchu w belce .....	94
1.2. Macierz dynamicznej sztywności .....	94
1.2. Realizowanie modelowania układu stabilizacji ruchu w belce .....	97
1.3. Dynamiczny efekt modelowania systemu stabili- zacji ruchu w belce .....	99
2. Matematyczne modelowanie układu stabilizacji ruchu w płycie .....	102
X. KOŃCOWE UWAGI, Dyskusja .....	109
LITERATURA .....	111

Jestem wdzięczny Prof.dr hab. ZENONOWI MROZOWI za udzielenie wielu cennych rad i uwag, za dużą pomoc w realizacji tej pracy.

Dyrektorowi Prof.dr hab. HENRYKOWI FRĄCKIEWICZOWI oraz prof.dr hab. WOJCIECHOWI NOWACKIEMU składam głębokie podziękowanie za pomoc w realizacji mojej pracy.

Wyrażam również podziękowanie kierownikowi zakładu Teorii Konstrukcji prof. dr hab. WITOLDOWI GUTKOWSKIEMU oraz wszystkim Jego pracownikom za okazanie mi dużej pomocy podczas mojego pobytu w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk.

Serdecznie dziękuję prof.dr hab. DYONIZEMU NIEPOSTYNOWI za cenne uwagi i umożliwienie mi przedyskutowania pracy na Seminarium w Wojskowej Akademii Technicznej.

Szczególną wdzięczność wyrażam prof.dr hab. ANTONIEMU SAWCZUKOWI za Jego niezwykle życzliwą i troskliwą opiekę oraz za szereg cennych rad i naukowe dyskusje.