

5.3.14. — techniki doświadczalne

L. Dietrich, T. Lekszycki, K. Turski

IDENTYFIKACJA CHARAKTERYSTYKI
MECHANICZNEJ
MATERIAŁÓW SPRĘŻYSTOLEPKICH
NA PODSTAWIE DANYCH DOŚWIADCZALNYCH

13/1995

P. 269



WARSZAWA 1995

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 marca 1995 r.



56596

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 3,0 Ark. druk. 3,75
Oddano do drukarni w marcu 1995 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul. Jasna 1

<http://rcin.org.pl>

Lech Dietrich

Tomasz Lekszycki

Karol Turski

Identyfikacja charakterystyki mechanicznej materiałów sprężystolepkich na podstawie danych doświadczalnych

Streszczenie

Praca dotyczy identyfikacji właściwości mechanicznych materiałów sprężystolepkich na podstawie danych doświadczalnych uzyskanych przy cyklicznym obciążaniu w zakresie częstotliwości od 0.01 do 50 Hz. Badania doświadczalne wykonano na walcowych próbkach z betonu asfaltowego utrzymując stałą amplitudę odkształceń osiowych o wartości $\pm 5 \cdot 10^{-3}$ dla kilku różnych, rosnących i malejących sekwencji częstotliwości w rozpatrywanym zakresie. Zrealizowany program badań doświadczalnych umożliwił ocenę wpływu sposobu przeprowadzenia pomiaru na uzyskiwane wyniki i stanowił podstawę różnych procedur obliczeniowych umożliwiających rozseparowanie zmiennych i określenie wartości stałych materiałowych związanych z danym typem modelu materiału.

Obliczenia stałych materiałowych przeprowadzono przy pomocy zmodyfikowanej metody Blanda i Lee [3], dla przypadku założonego z góry czteroparametrowego modelu Burgersa oraz przy pomocy procedury wieloparametrowej optymalizacji, na podstawie której możliwe jest określenie zarówno postaci operatorów funkcyjnych opisujących zachowanie się rozpatrywanego materiału w realizowanym programie obciążeń jak i wartości współczynników tych operatorów.

Przeprowadzona w pracy analiza umożliwia ocenę zastosowanej techniki pomiarowej i różnych schematów do obliczeń wartości stałych współczynników materiałowych oraz do określenia rodzaju modelu materiału na podstawie danych doświadczalnych uzyskanych przy cyklicznych obciążeniach.

1. Wstęp.

Identyfikacja właściwości mechanicznych materiałów umożliwia w ogólności określenie postaci operatora funkcyjnego opisującego poprawnie zachowanie się materiału rzeczywistego pod obciążeniem oraz wyznaczenie wartości liczbowych stałych materiałowych występujących w wyznaczonej postaci równania konstytutywnego. Rozwiązanie tak ogólnie postawionego problemu jest jednak trudne i zwykle w praktyce inżynierskiej stosuje się podejście uproszczone, w którym postać operatora funkcyjnego w równaniu konstytutywnym jest z góry założona. Podejście takie stosuje się zwłaszcza wtedy, gdy opis zachowania się materiału zależy od kilku parametrów, jak ma to miejsce w przypadku materiałów sprężystolepkich, dla których odkształcenie zależy od przyłożonego naprężenia i czasu.

W praktyce inżynierskiej zachodzi często konieczność określenia opisu zachowania się materiału przy założeniu liniowego równania konstytutywnego, np. dla liniowego zakresu materiału sprężystolepkiego. Wyznaczane są wówczas stałe materiałowe, występujące w modelu materiału, na podstawie danych doświadczalnych. Program takich badań doświadczalnych musi być tak zaplanowany, aby możliwe było rozprężenie równania różniczkowego opisującego zachowanie się rozpatrywanego materiału pod danym obciążeniem i wyznaczenie w ten sposób wszystkich stałych materiałowych. Dodatkową trudnością interpretacji uzyskanych wyników są rozrzuty danych pomiarowych i konieczność określenia zakresu w jakim zachowanie się materiału może być jeszcze opisane zależnościami liniowymi. Czynniki te w połączeniu z numerycznymi trudnościami rozprężenia równań opisujących zachowanie się materiału sprawiają poważne trudności poprawnego rozwiązania problemu identyfikacji zachowania się rzeczywistych materiałów, a uzyskane wyniki zależą często od rodzaju przeprowadzonych badań doświadczalnych i zastosowanej techniki obliczeniowej [1].

Do wyznaczenia charakterystyk materiałów sprężystolepkich stosuje się kilka schematów badań doświadczalnych [1, 2], takich jak pełzanie, relaksacja, obciążanie ze stałą prędkością odkształcania, czy obciążanie cykliczne. Obejmują one różne zakresy prędkości odkształcania i wymagają zwykle różnych metod obliczeniowych do

wyznaczenia liczbowych wartości stałych materiałowych, a uzyskane wyniki dotyczą tylko wąskiego zakresu czasowego i nawet jeśli dobrze opisują przebieg danego doświadczenia, to nie mogą być przenoszone na inny schemat obciążenia.

W pracy przedstawiono analizę możliwości rozwiązania problemu identyfikacji dla konkretnego przykładu materiału sprężystolepkiego jakim jest beton asfaltowy. Analiza ta obejmuje trzy wyszczególnione wyżej podstawowe elementy problemu identyfikacji: ocenę zastosowanego schematu doświadczalnego; ocenę schematu obliczeniowego umożliwiającego rozprzęgnięcie równań i obliczenie stałych materiałowych; oraz ocenę możliwości wykorzystania technik optymalizacyjnych umożliwiających nie tylko obliczenie stałych materiałowych do wybranego modelu materiału, ale również określenie modelu materiału na podstawie danych doświadczalnych.

2. Model materiału.

Zachowanie się materiału liniowego, sprężystolepkiego może być opisane w postaci różniczkowej [3, 4]:

$$1. \quad P(D)\sigma(t) = Q(D)\varepsilon(t)$$

gdzie D , $P(D)$ i $Q(D)$ są następującymi operatorami różniczkowymi:

$$2. \quad D = \frac{d}{dt}, \quad P(D) = \sum_{n=0}^N p_n D^n, \quad Q(D) = \sum_{n=0}^M q_n D^n,$$

a p_n i q_n są stałymi materiałowymi.

Liczba wyrazów wielomianów P i Q określa stopień konstytutywnego równania różniczkowego materiału i tym samym określa matematyczny i fizyczny model materiału. Im niższy jest stopień tych wielomianów tym łatwiejsza jest analiza zachowania się modelu i łatwiej jest też wyznaczyć współczynniki równania p_n i q_n na podstawie stosunkowo prostych doświadczeń.

Jednym z często stosowanych w praktyce modeli mechanicznych materiałów sprężystolepkich jest czteroparametrowy model Burgersa [2, 3], stanowiący szeregowe połączenie modeli Maxwella i Kelvina i zawierający odpowiednio dwa moduły sprężyste o

współczynnikach E_M , E_K i dwa moduły lepkości o współczynnikach lepkości kinematycznej, odpowiednio η_M , η_K (rys.1a). Ogólne równanie konstytutywne (1), wyprowadzane zwykle z sumy odkształceń czterech elementów modelu pod wpływem naprężenia σ , sprowadza się wówczas do równania drugiego stopnia w postaci:

$$3. \quad \sigma + A\dot{\sigma} + B\ddot{\sigma} = C\dot{\epsilon} + D\ddot{\epsilon},$$

gdzie oznaczono :

$$p_0 = 1, p_1 = A, p_2 = B, q_0 = 0, q_1 = C, q_2 = D,$$

a współczynniki równania można wyrazić w następującej postaci jako funkcje współczynników modelu mechanicznego:

$$4. \quad A = \frac{\eta_M}{E_M} + \frac{\eta_M}{E_K} + \frac{\eta_K}{E_K},$$

$$5. \quad B = \frac{\eta_K \eta_M}{E_K E_M},$$

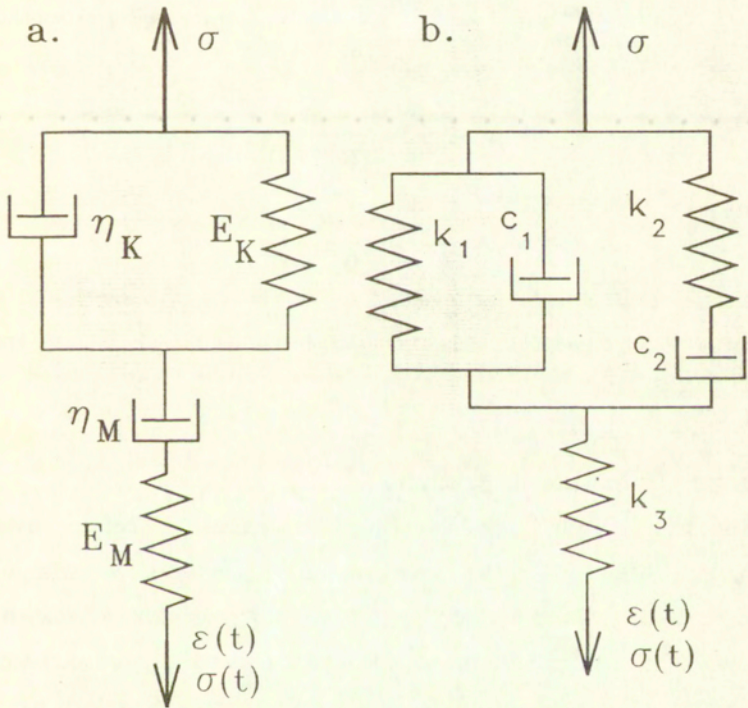
$$6. \quad C = \eta_M,$$

$$7. \quad D = \frac{\eta_K \eta_M}{E_K}.$$

3. Procedura doświadczalna.

Identyfikację właściwości mechanicznych rozpatrywanego w pracy materiału przeprowadzono na podstawie doświadczalnych przebiegów harmonicznym drgań wymuszonych przy jednoosiowym stanie naprężenia. Szczegółowy opis procedury badań i stanowiska badawczego przedstawiono w pracy [1]. Walcowa próbka była poddawana cyklom dwukierunkowego obciążenia (rozciąganie - ściskanie) o stałej amplitudzie odkształcenia przy różnych częstotliwościach drgań f.

Wartość amplitudy odkształcenia była stała dla całego zakresu częstotliwości i wynosiła $5 \cdot 10^{-5}$. W trakcie doświadczenia rejestrowano sinusoidalnie zmienne w czasie



rys.1 a) Model Burgersa,

b) Szczególny przypadek modelu pięcioelementowego.

odkształcenia osiowe próbki przy zachowaniu stałej amplitudy odkształcenia ε_* dla różnych prędkości drgań ω . Po upływie pewnego czasu otrzymujemy ustalony cykl naprężenia w odpowiedzi na ustalony cykl odkształcenia. Zmiany odkształcenia i naprężenia możemy opisać następującymi zależnościami [1]:

$$8. \quad \varepsilon = \varepsilon_* \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

$$9. \quad \sigma = \varepsilon_* [E' \cdot \sin(\omega \cdot t) + E'' \cos(\omega \cdot t)],$$

gdzie moduł zachowawczy E' i moduł rozproszenia E'' wyrażają się skomplikowanymi zależnościami od współczynników równania (4),

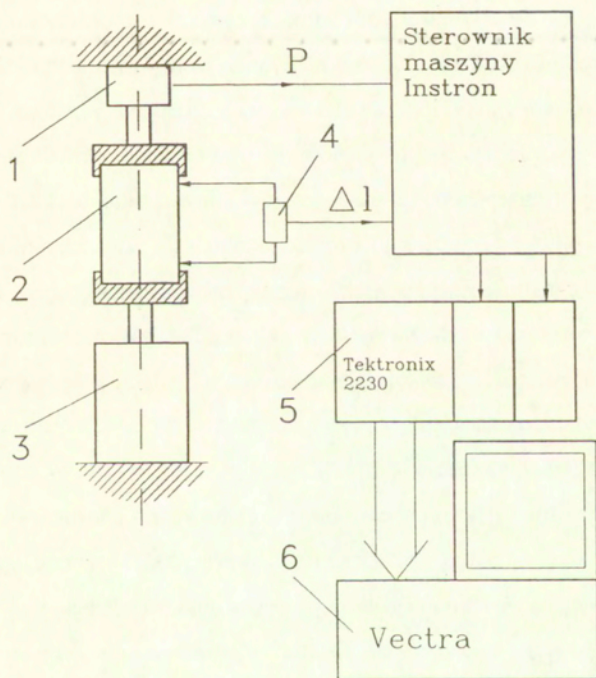
$$10. \quad E' = \omega^2 \cdot \frac{AC - D + BD\omega^2}{A^2\omega^2 + (B\omega^2 - 1)^2},$$

$$11. \quad E'' = \omega \cdot \frac{C + (AD - BC) \cdot \omega^2}{A^2\omega^2 + (B\omega^2 - 1)^2},$$

a ich wyrażenie przez współczynniki modelu mechanicznego E_M, E_K, η_M, η_K komplikuje się jeszcze bardziej.

4. Omówienie danych doświadczalnych.

Badania doświadczalne wykonano dla próbek z betonu asfaltowego zawierającego asfalt D100 z 15% dodatkiem mączki gumowej [5] w kształcie walców kołowych o średnicy 71 mm i długości 110 mm. Do powierzchni czołowych próbek przyklejono stalowe uchwyty za pomocą kleju epidianowego. Tarcze uchwytów miały kołowe wytoczenia odpowiadające średnicy próbki i głębokość około 8 mm. Proces utwardzania kleju przebiegał również w specjalnym uchwycie, który zapewniał utrzymanie osiowości obu przyklejonych tarczek stalowych. Końce stalowych tarcz dostosowane były do układu zamocowania próbki w maszynie wytrzymałościowej, zapewniającego osiowe i bezluzowe mocowanie próbki bez wprowadzania siły wstępnej. Po zamontowaniu próbek mocowano ekstensometr o specjalnie wydłużonej bazie pomiarowej przy pomocy pręta ceowego ze stopu aluminium. Ostrza ekstensometru opierały się na stalowych tarczach



rys.2 Schemat aparatury do badania odkształceń asfaltu przy cyklicznych obciążeniach.

przyklejonych do próbki. Mierzono w ten sposób odkształcenia na całej swobodnej długości próbki.

Badania przeprowadzono przy użyciu hydraulicznej maszyny wytrzymałościowej Instron 1251 sterowanej w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego. Odkształcenia mierzono ekstensometrem indukcyjnym firmy Denison. Schemat układu pomiarowego przedstawiono na rys. 2. Próbka (2) zamocowana była w uchwytach maszyny wytrzymałościowej Instron 1251 za pośrednictwem dodatkowych elementów stalowych przyklejonych do czołowych powierzchni próbki. Cella (1) do pomiaru obciążenia próbki zamocowana była na górnej trawersie maszyny. Natomiast dolny element mocujący próbkę połączony był z siłownikiem hydraulicznym (3) wymuszającym drgania próbki o określonej amplitudzie i częstotliwości. Sygnał elektryczny z czujnika indukcyjnego przemieszczeń liniowych (4) i sygnał elektryczny z czujnika siły osiowej (1) przesyłano za pośrednictwem elektronicznego układu sterowania maszyny Instron na wejście dwukanałowego oscyloskopu cyfrowego (5) firmy Tektronix 2230. Przebiegi siły wywieranej na próbkę i odkształcenia próbki jako funkcje czasu obserwowano na ekranie oscyloskopu i rejestrowano je w elektronicznej pamięci oscyloskopu. Utrwalone w ten sposób zależności siły i odkształcenia w czasie, obejmujące co najmniej jeden pełny okres obu rejestrowanych wielkości, przekazywano następnie, po zakończeniu pomiaru dla danej częstotliwości, do pamięci komputera (6) HP Vectra sprzęgniętego z oscyloskopem za pomocą łącza IEEE 488.

Realizowano cykliczne obciążanie z częstotliwością f w zakresie od 0,1 do 50 Hz i stałą wartością amplitudy odkształcenia równą $5 \cdot 10^{-5}$. Przebieg pomiarów dla określonej częstotliwości drgań cyklicznego obciążania był następujący:

- generator funkcji sinusoidalnej układu sterowania maszyny Instron sterujący przemieszczeniem siłownika (3) maszyny Instron uruchamiano dla danej częstotliwości przy zerowej wartości amplitudy i średniego poziomu,
- stopniowo powiększano amplitudę przemieszczenia siłownika (3) aż do osiągnięcia wartości odkształcenia równego $5 \cdot 10^{-5}$ obserwując zmianę siły i odkształcenia na ekranie dwukanałowego oscyloskopu cyfrowego Tektronix 2230,

- przebieg ustalonych drgań odkształcenia o amplitudzie około $5 \cdot 10^{-5}$ i odpowiadający mu przebieg siły rejestrowano w cyfrowej pamięci oscyloskopu.
- wyniki badań zapisywano na dysku komputera celem dalszego przetwarzania.
- przebieg siły i odkształcenia jako funkcje czasu opisywano za pomocą dwóch sinusoid (rys.3), z których obliczano następujące parametry:

1. częstotliwość drgań f ,
2. amplitudę naprężenia σ_* ,
3. amplitudę odkształcenia ε_* ,
4. kąt przesunięcia fazowego δ obu sinusoid.

Równania dla przebiegów naprężeń i odkształceń można przedstawić w postaci:

$$12. \quad \sigma = \sigma_* \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) = A_N \sin(\omega \cdot t) + B_N \cos(\omega \cdot t),$$

$$13. \quad \varepsilon = \varepsilon_* \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta) = A_0 \sin(\omega \cdot t) + B_0 \cos(\omega \cdot t),$$

gdzie:

$$14. \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{B_N}{A_N}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{B_0}{A_0}.$$

Prędkość kątowna $\omega = 2\pi \cdot f$ jest wielkością zależną od częstotliwości drgań f [Hz].

Częstotliwość zarejestrowanych przebiegów doświadczalnych oraz amplitudy naprężenia i odkształcenia wyznaczano z analizy Fouriera dobierając współczynniki A_N, B_N, A_0, B_0 powyższych równań za pomocą metody najmniejszych kwadratów, w ramach specjalnie opracowanego do tego celu programu komputerowego Oscy-Calcul włączonego w postaci procedury do oprogramowania DADiSP, firmy DSP Development Corporation. Wspomniane oprogramowanie wykorzystywano zarówno do odczytywania rejestru pamięci oscyloskopu jak i przetwarzania sygnałów pomiarowych jak wyżej opisano.

Znając współczynniki równań obliczono następnie:

- kąt opóźnienia fazowego δ ze wzoru:

$$15. \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{A_0 B_N - A_N B_0}{A_N A_0 - B_N B_0},$$

- wartość bezwzględną modułu zespolonego $|E^*|$ ze wzoru:

$$16. \quad |E^*| = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s},$$

- część rzeczywistą modułu zespolonego E' ze wzoru:

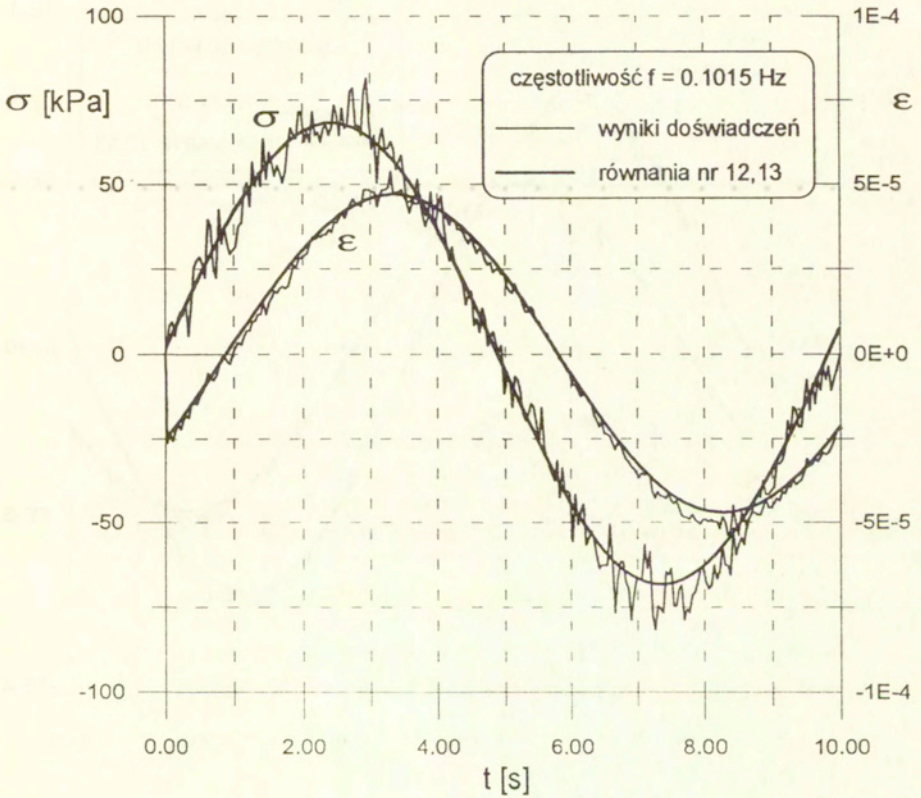
$$17. \quad E' = |E^*| \cos \delta,$$

- część urojoną modułu zespolonego E'' ze wzoru:

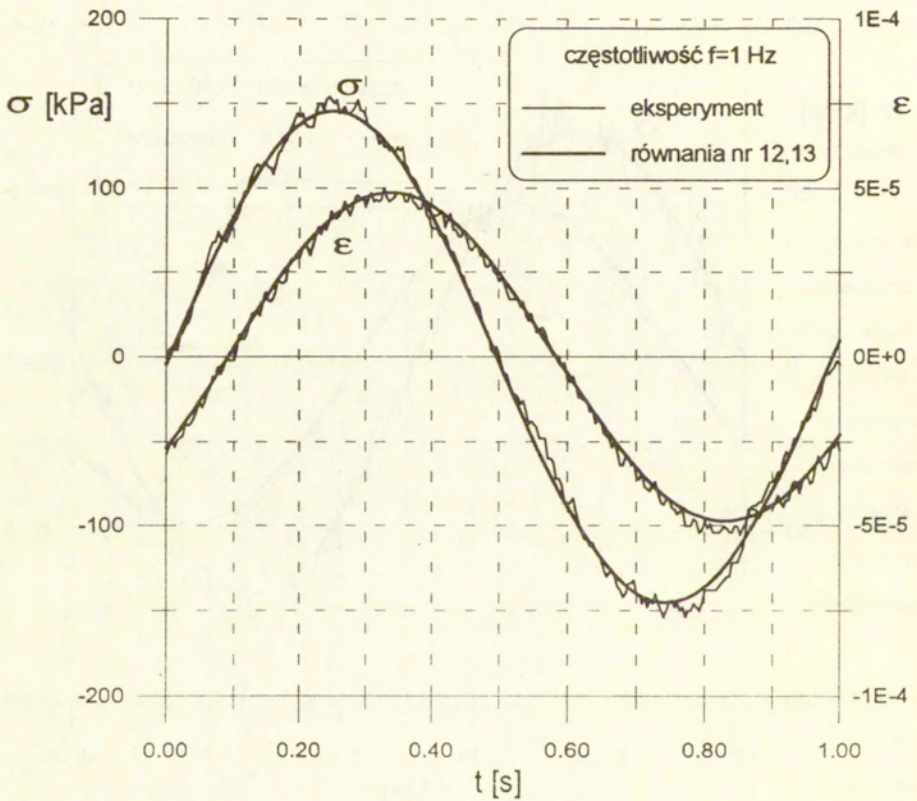
$$18. \quad E'' = |E^*| \sin \delta.$$

Przykładowe wyniki doświadczeń dla czterech wartości częstotliwości wymuszonych drgań osiowych próbki przedstawiono na kolejnych rysunkach 3, 4, 5 i 6. Przebiegi doświadczalne charakteryzują się nieregularnymi oscylacjami wynikającymi z zaburzeń i cyfrowej struktury danych pomiarowych. Liniami grubymi zaznaczono uśrednione przebiegi doświadczalne według przedstawionej wyżej procedury, które stanowiły podstawę dalszej identyfikacji właściwości mechanicznych badanego materiału. Przy częstotliwościach większych od 40Hz obserwuje się zniekształcenia przebiegu sinusoidalnego związane z bezwładnością układu hydraulicznego i powiększaniem się błędów pomiędzy sygnałem sterowania i realizacją. Występują wówczas większe różnice pomiędzy przebiegiem doświadczalnym i uśrednionym, jak ma to miejsce na rys.6 przy częstotliwości 50Hz. Powoduje to większe rozrzuty pomiarowe, zwłaszcza w odniesieniu do kąta przesunięcia fazowego δ .

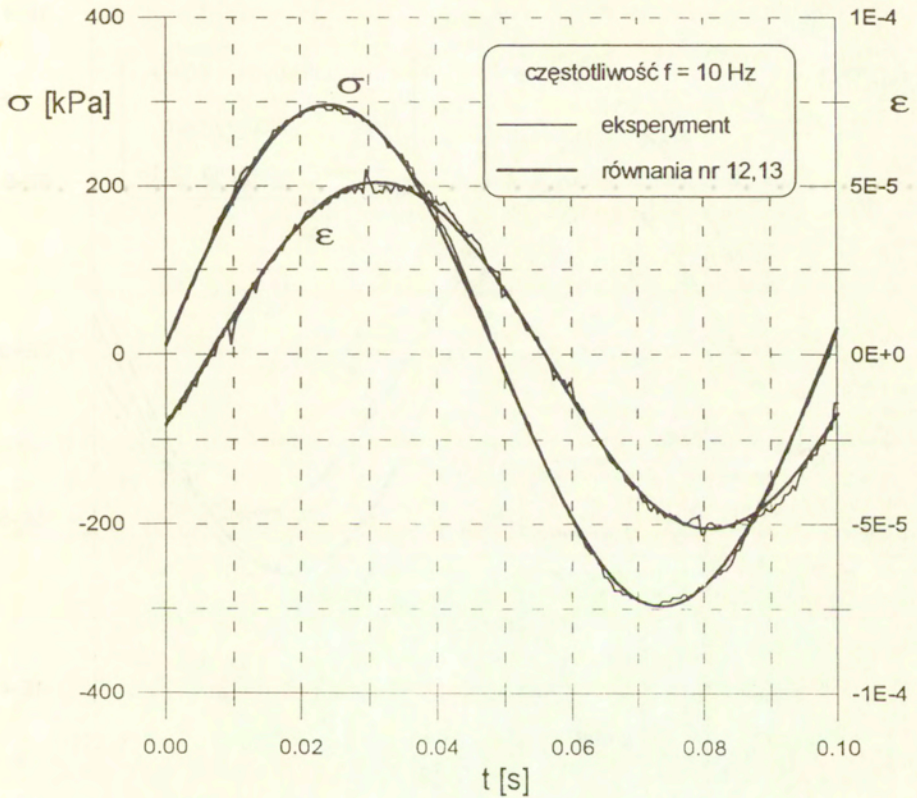
Pomiary przeprowadzono w temperaturze pokojowej równej $19^{\circ}C$ przy różnych częstotliwościach drgań wymuszonych w zakresie od 0,1Hz do 50Hz. Dla oceny wpływu historii obciążenia przeprowadzono pomiary dla jednej próbki w bezpośrednio następujących po sobie sekwencjach częstotliwości w czterech seriach obciążania, według kolejności podanej w tabeli 1. W pierwszej serii pomiary rozpoczęto od częstotliwości najwyższej (51,2Hz) i w kolejnych pomiarach zmniejszano częstotliwość do wartości około 0,1Hz. Z kolei w serii drugiej stopniowo zwiększano częstotliwości drgań. W trzeciej serii pomiarów zaczynało się od częstotliwości 0,2Hz i wykonano dziewięć pomiarów przy zwiększaniu częstotliwości. W czwartej serii wykonano dziesięć pomiarów



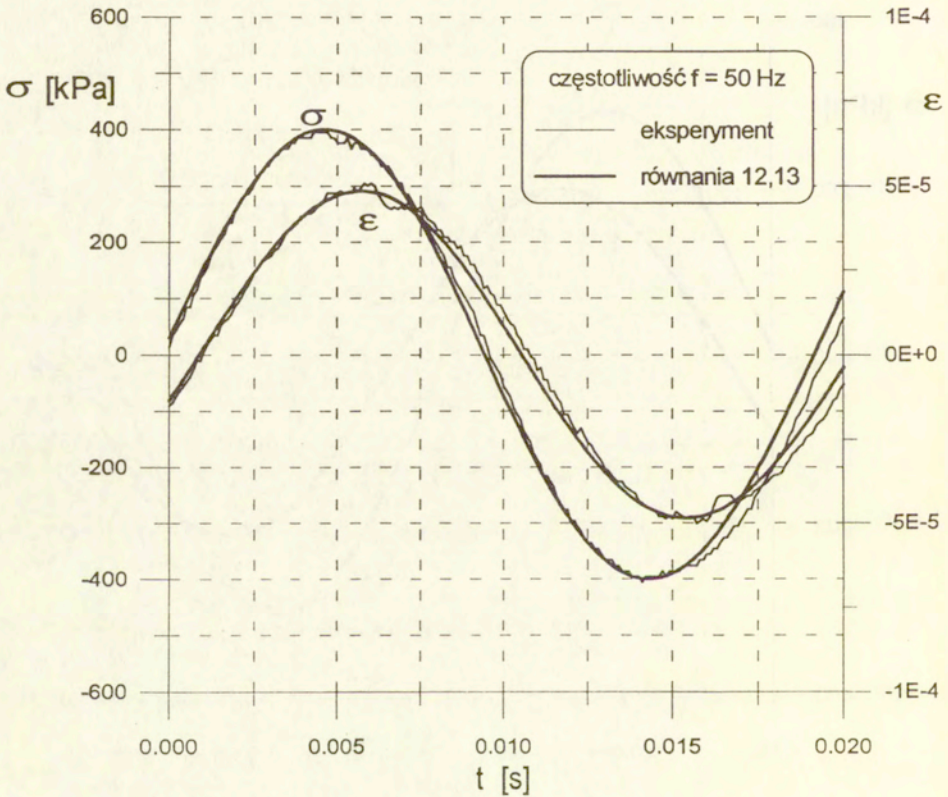
rys.3 Porównanie doświadczalnych wykresów $\sigma(t)$ i $\epsilon(t)$ z ich uśrednieniem przez sinusoidy (równania 12,13) dla częstotliwości drgań 0.1015Hz.



rys.4 Porównanie doświadczalnych wykresów $\sigma(t)$ i $\epsilon(t)$ z ich uśrednieniem przez sinusoidy (równania 12,13) dla częstotliwości drgań 1Hz.



rys.5 Porównanie doświadczalnych wykresów $\sigma(t)$ i $\varepsilon(t)$ z ich uśrednieniem przez sinusoidy (równania 12,13) dla częstotliwości drgań 10Hz.



rys.6 Porównanie doświadczalnych wykresów $\sigma(t)$ i $\epsilon(t)$ z ich uśrednieniem przez sinusoidy (równania 12,13) dla częstotliwości drgań 50Hz.

przy malejących częstotliwościach.

Tabela 1.

Nr obciążania	seria I obciążania	seria II obciążania	seria III obciążania	seria IV obciążania
	częstotliwość obciążania f [Hz]			
1	51.2	0.102	0.202	51.20
2	51.6	0.604	0.806	48.3
3	40.6	1.01	2.045	39.3
4	31.2	6.06	8.425	28.9
5	20.4	10.15	15.1	18.95
6	10.15	20.2	25.85	12.1725
7	6.04	30.5	37.4	5.15
8	1.012	40.4	44.3	1.205
9	0.606	51.2	51.2	0.511
10	0.1017	51		0.1015

Uzyskane wartości pomiarowe dla tych czterech serii obciążania przedstawiono jako funkcje częstotliwości f dla wartości bezwzględnej modułu zespolonego $|E^*|$ (rys.7) oraz dla wartości kąta przesunięcia fazowego δ (rys.8). Regularne ułożenie punktów doświadczalnych na rys.7 wzdłuż jednej linii wskazuje na brak wpływu przyjętej sekwencji pomiarów na uzyskane wyniki. Natomiast widoczne na rys.8 większe rozrzuty pomiarowe są związane z większymi błędami pomiaru kąta przesunięcia fazowego.

Pomiary powtórzone na tej samej próbce po kilku dniach. Badania wykonano w temperaturze pokojowej, która wynosiła 296K i była wyższa o cztery stopnie od temperatury w jakiej przeprowadzono cztery serie pomiarów opisanych poprzednio. Pomiary wykonano dla kolejnych częstotliwości o wzrastających wartościach, a ich wyniki zaznaczono kółeczkami na rys.7 i 8. Widoczny jest wyraźny wpływ temperatury, ale zachowany jest taki sam charakter przebiegu obu wielkości doświadczalnych potwierdzający poprawność przyjętego sposobu pomiaru wartości bezwzględnej modułu zespolonego i wartości kąta przesunięcia fazowego przy harmonicznym drganiu wymuszonym o zadanej, małej amplitudzie odkształceń. Doświadczalne zależności obu tych wielkości porównano jeszcze z wcześniej uzyskanymi wynikami pomiarów przeprowadzonych w różnych temperaturach (313 i 273K) dla innych próbek wykonanych

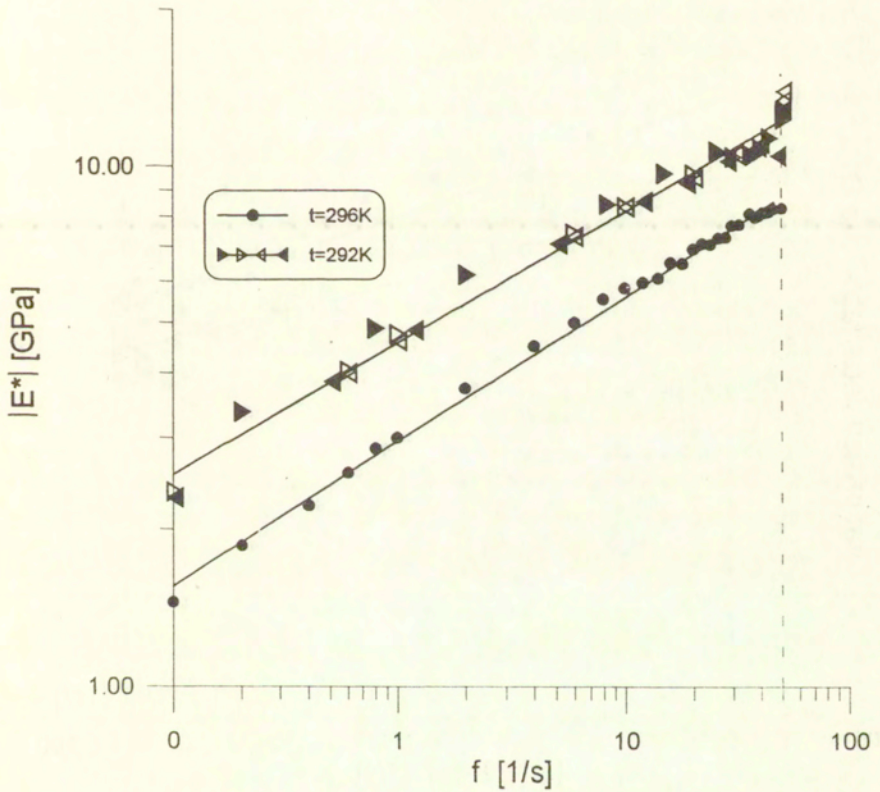
z tego samego materiału, przedstawiając je wspólnie na rys.9 dla modułu zespolonego i na rys.10 dla kąta przesunięcia fazowego. Charakter obu tych wykresów, uwidaczniający silny wpływ temperatury badań na właściwości mechaniczne rozpatrywanego materiału, potwierdza wiarygodność przeprowadzonych pomiarów mimo znacznych rozrzutów, zwłaszcza w odniesieniu do pomiarów kąta przesunięcia fazowego (rys.10). Regularność ułożenia punktów doświadczalnych potwierdza się również w odniesieniu do części rzeczywistej i urojonej modułu zespolonego, przeliczonych dla wszystkich punktów doświadczalnych i przedstawionych odpowiednio na rys.11 i 12.

5. Identyfikacja właściwości mechanicznych

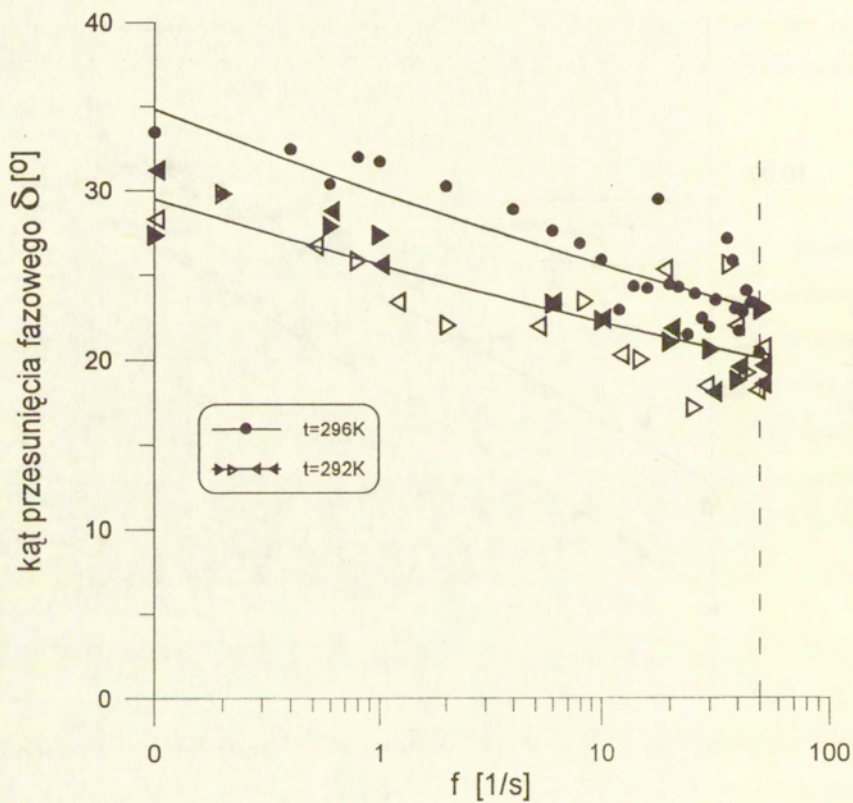
Identyfikację właściwości mechanicznych rozpatrywanego materiału sprężystolepkiego w zakresie liniowym przeprowadzono dla danych doświadczalnych uzyskanych w temperaturze otoczenia równej 296K. Rozpatrywano dalej dwa różne podejścia rozwiązania problemu identyfikacji. Pierwszy z nich stanowi rozwinięcie sposobu zaproponowanego w pracy [3], w której dla założonego z góry modelu Burgersa przedstawiono procedurę rozprzęgnięcia równań i obliczenia wartości czterech współczynników równania (3). W podejściu drugim wykorzystano techniki optymalizacyjne do określenia typu modelu materiału i obliczenia stałych materiałowych.

5.1. Identyfikacja dla modelu Burgersa

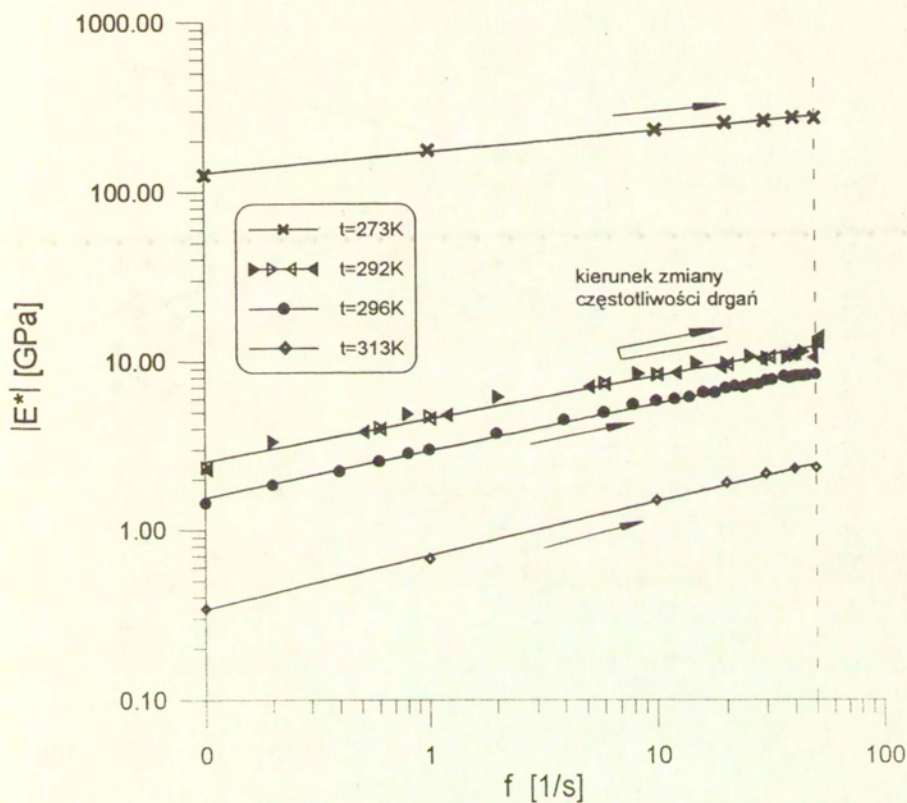
Obliczenie stałych materiałowych wymaga rozprzęgnięcia równań opisujących zachowanie się materiału przy danym obciążeniu. W przypadku czteroparametrowego modelu Burgersa wielkości zmierzone doświadczalnie można wyrazić w uwiklanej postaci (10) i (11) poprzez współczynniki równania (3) czy też stałe modelowe. Jeden ze sposobów obliczenia tych stałych na podstawie pomiarów odpowiedzi materiału przy drganiach harmonicznym zaproponował Bland i Lee [3]. Sposób ten oparto na spostrzeżeniu, że zachowanie się modelu Burgersa jest opisane liniową zależnością $J' = f(\omega, J'')$, gdzie J' i J'' oznaczają odpowiednio część rzeczywistą i urojoną podatności wyrażonych związkami:



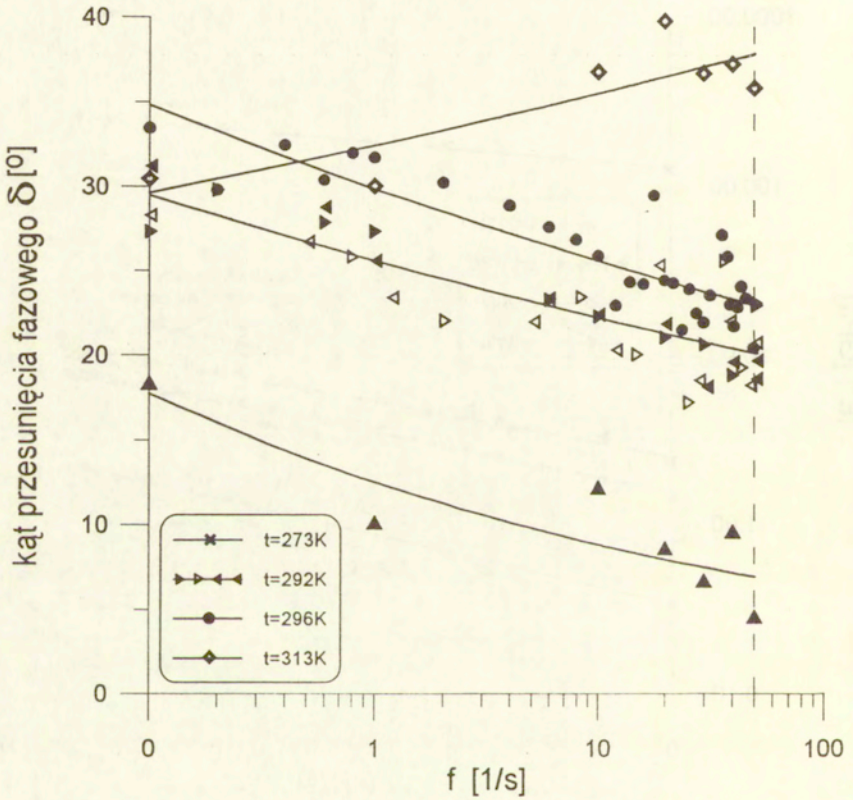
rys.7 Wartość bezwzględna modułu zespolonego w temperaturze 292K dla czterech serii o kolejno malejącej i rosnącej częstotliwości drgań oraz w temperaturze 296K dla kolejno rosnącej i malejącej częstotliwości drgań.



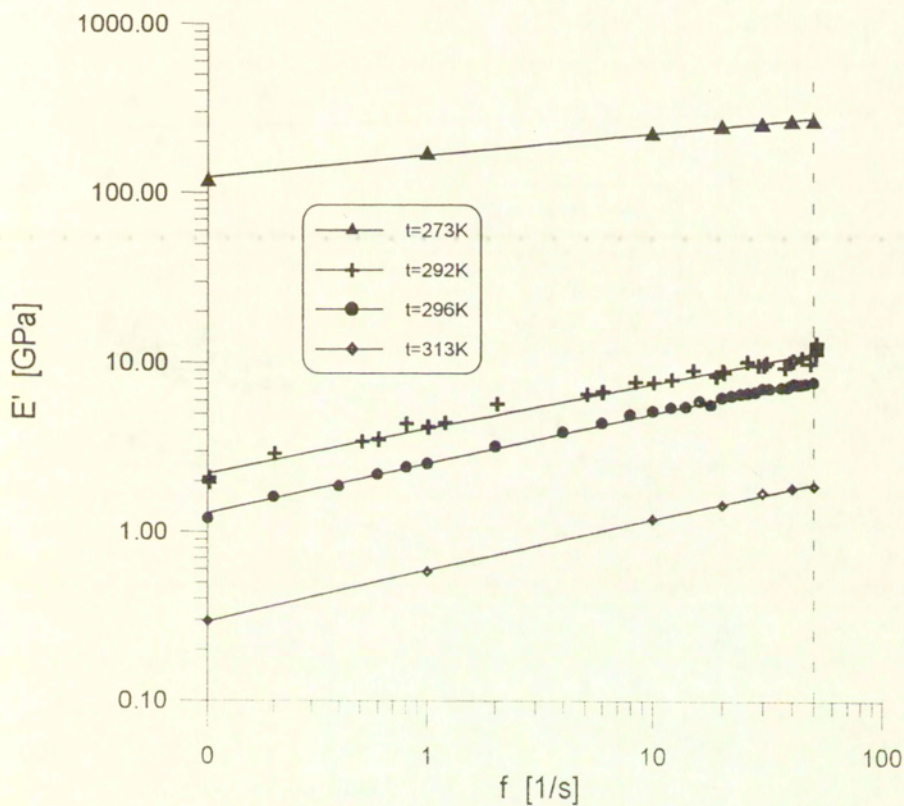
rys.8 Kąt przesunięcia fazowego dla badań jak na rys.7



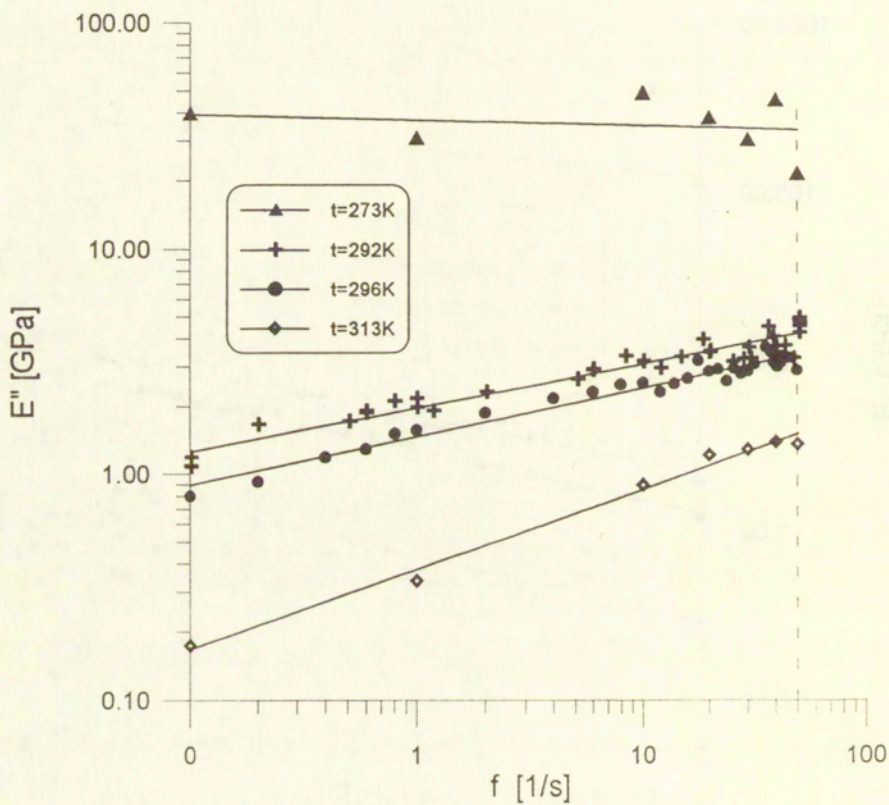
rys.9 Porównanie wyników badań wartości modułu zespolonego dla czterech temperatur.



rys.10 Porównanie wyników badań kąta przesunięcia fazowego dla czterech temperatur.



rys.11 Część rzeczywista modułu zespolonego dla czterech temperatur badania.



rys.12 Część urojona modułu zespolonego dla czterech temperatur badania.

$$19. \quad J' = \frac{E'}{|E^*|^2} = \frac{1}{E_M} + \frac{h}{E_K},$$

$$20. \quad \omega \cdot J'' = \omega \cdot \frac{E''}{|E^*|^2} = \frac{1}{\eta_M} + \frac{1}{\eta_K} - \frac{h}{\eta_K},$$

gdzie:

$$21. \quad h = \frac{1}{1 + (\omega^2 \cdot \tau^2)},$$

$$22. \quad \tau = \frac{\eta_K}{E_K}.$$

Wielkość τ nazywana czasem relaksacji, może być wyznaczona z wykresu $J'(\omega \cdot J'')$, ponieważ z powyższych równań otrzymujemy:

$$23. \quad J' + \tau \cdot (\omega \cdot J'') = J'_0,$$

gdzie:

$$24. \quad J'_0 = \frac{1}{E_M} + \frac{\tau}{\eta_M} + \frac{1}{E_K}.$$

Liczbową wartość dla J'_0 możemy znaleźć z równania (23) np. dla $(\omega \cdot J'') = 0$. Ponadto z równania (23) wynika:

$$25. \quad \tau = - \frac{dJ'}{d(\omega \cdot J'')}.$$

Metoda Blanda i Lee polega na znalezieniu takich zakresów częstotliwości drgań, w których punkty doświadczalne na wykresie $J'(\omega \cdot J'')$ są opisywane w przybliżeniu liniami prostymi dającymi zależność (23). Następnie postulowano, że w tych zakresach punkty doświadczalne są opisywane przez linie proste $J'(h)$ dane równaniem (19). Dla każdego zakresu częstotliwości drgań z wykresów linii prostych [równania (19), (23)] mamy dwa pochylenia linii i dwie rzędne J' , np. dla $(\omega \cdot J'') = 0$ oraz dla $h = 0$, które pozwalają wyznaczyć cztery poszukiwane wielkości E_M , E_K , η_M , η_K .

Jeżeli przyjmiemy lokalną wartość czasu opóźnienia τ otrzymaną z pochylenia prostej stycznej do wykresu $J'(\omega \cdot J'')$ dla badań w temperaturze 296K (rys.13) w zakresie częstotliwości od 0,1 do 50Hz, to przeliczając punkty doświadczalne według równania (19) i łącząc je otrzymamy ciągły wykres $J'(h)$ obejmujący całe spektrum czasu opóźnienia τ . Taki wykres pokazano na rys.14 w porównaniu z czterema liniami odpowiadającymi prostoliniowym przybliżeniom wykresu $J'(\omega \cdot J'')$ (rys.13). Wykres pokazano we współrzędnych logarytmicznych aby uwypuklić zakres przy małych częstotliwościach drgań.

Charakter wykresu $J'(h)$ uniemożliwia zastosowanie metody Blanda i Lee do obliczenia stałych materiałowych w przypadku rozpatrywanego materiału i w rozważanym zakresie częstotliwości. Również w przypadku przybliżenia liniowego punktów doświadczalnych w zawężonym zakresie częstotliwości (linie 2,3,4) zaproponowany sposób obliczeń Blanda i Lee prowadzi do ujemnych wartości pewnych stałych modelowych wskazując na ograniczoną przydatność do obliczeń praktycznych.

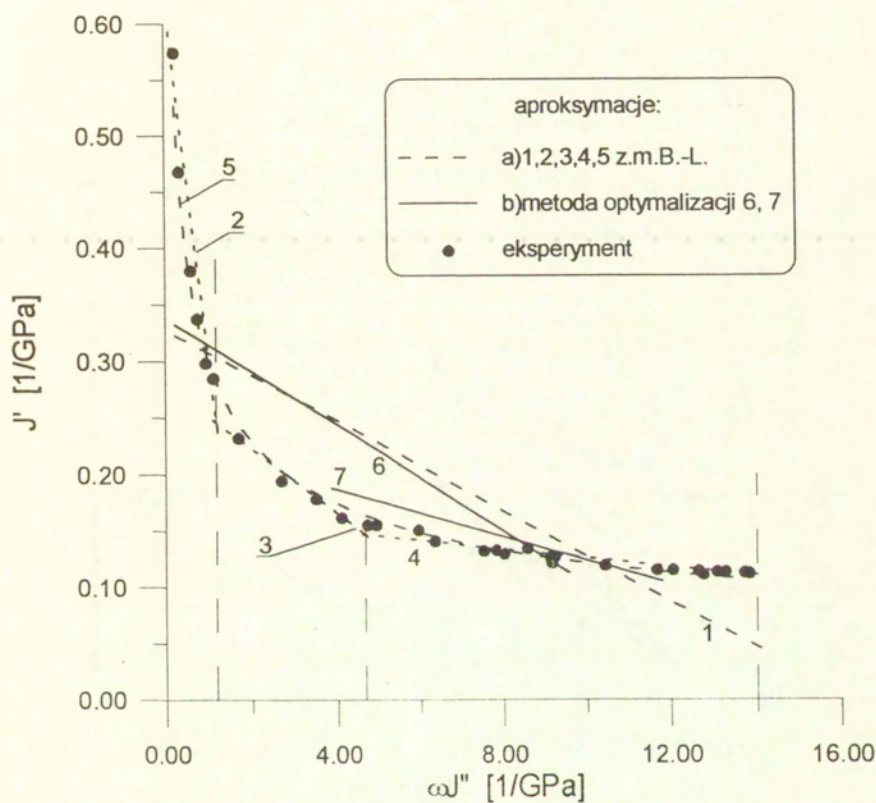
Wybór poprawnego sposobu rozprężnięcia układu równań i obliczenia wartości stałych modelowych uzależniony jest od charakterystyki materiału i rozpatrywanego zakresu częstotliwości. Możliwe są modyfikacje propozycji Blanda i Lee. Jeśli podstawimy E_K z równania (22) do równania (19) to otrzymamy:

$$26. \quad J' = \frac{1}{E_M} + \frac{h \cdot \tau}{\eta_K},$$

i współczynnik kierunkowy oraz rzędna dla $h\tau = 0$ pozwalają obliczyć wielkości E_M, η_K . Ponieważ znamy już τ , możemy znaleźć z równań (22), (24):

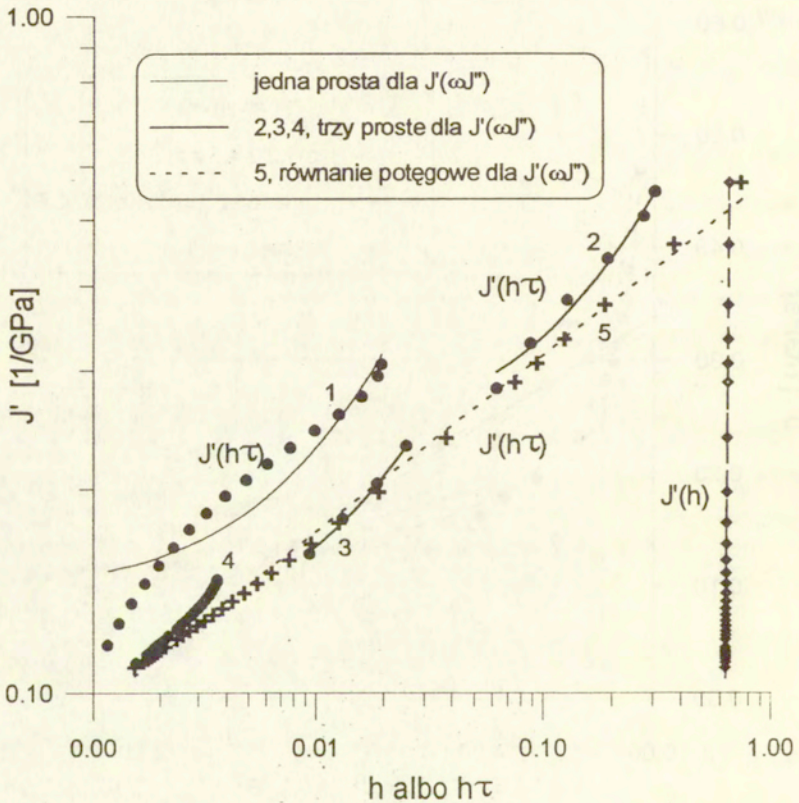
$$27. \quad E_K = \frac{\eta_K}{\tau},$$

$$28. \quad \eta_M = \left(\frac{J'_0}{\tau} - \frac{1}{\tau \cdot E_M} - \frac{1}{\eta_K} \right)^{-1}.$$



rys.13 Wykres części rzeczywistej podatności J' w funkcji iloczynu $\omega \cdot J''$:

- a) aproksymacje wyjściowe do zmodyfikowanej metody Blanda i Lee,
 b) aproksymacje wynikowe z metody optymalizacji.



rys.14 Porównanie wykresów $J'(h)$ służących do wyznaczenia E_M i E_K (metoda Blanda i Lee) oraz wykresów $J'(h\tau)$ dających E_M i η_M dla zmodyfikowanej metody Blanda i Lee.

Dla liniowych przybliżeń przebiegu $J'(\omega J'')$ (rys.13) otrzymujemy zbiór punktów we współrzędnych $J'(\hbar\tau)$, które układają się wzdłuż linii krzywych (rys.14). Widać więc, że sposób aproksymacji liniowej i wybrany zakres częstotliwości wpływają na wielkość obliczonych stałych materiałowych.

Możliwe są również dalsze modyfikacje obliczania stałych modelowych na podstawie wyników doświadczalnych. Na przykład z równań (19) i (20) otrzymujemy:

$$29. \quad \tau \cdot \omega^2 \cdot J' - \omega \cdot J'' = \frac{\tau \cdot \omega^2}{E_M} - \frac{1}{\eta_M}.$$

Oznaczmy przez R różnicę stojącą po lewej stronie równania (29):

$$30. \quad R = \tau \cdot \omega^2 \cdot J' - \omega \cdot J''.$$

Wielkość R możemy obliczyć z danych doświadczalnych i przedstawić na wykresie w funkcji wyrażenia:

$$31. \quad p = \tau \cdot \omega^2,$$

znajdującego się po prawej stronie równania (29). Wstępne analizy takich wykresów pokazały, że dla rozważanego przypadku punkty doświadczalne układają się wzdłuż łatwej do określenia linii geometrycznej umożliwiając wyznaczenie dwóch parametrów: E_M, η_M . Równanie tej linii otrzymujemy ze wzorów (29) i (30):

$$32. \quad R = \frac{\tau \cdot \omega^2}{E_M} - \frac{1}{\eta_M}.$$

Pozostałe niewiadome parametry wyznaczamy z równań (22) i (24).

$$33. \quad E_K = \left(J'_0 - \frac{1}{E_M} - \frac{\tau}{\eta_M} \right)^{-1},$$

$$34. \quad \eta_K = \tau \cdot E_K \dots$$

Omawiana metoda pozwala znaleźć najpierw dwa parametry E_M, η_M stanowiące część modelu Maxwella w modelu Burgersa.

Wybór sposobu obliczenia stałych modelowych powinien być przeprowadzony indywidualnie w zależności od rodzaju materiału i zakresu częstotliwości. Wyniki obliczeń takich metod zależą bowiem od przyjętych aproksymacji danych doświadczalnych i wynikających z nich wartości granicznych.

5.2. Identyfikacja przy pomocy technik optymalizacyjnych

Jedną z trudności wynikających z zastosowania klasycznych modeli różniczkowych materiałów sprężystolepkich do opisu zachowania się materiałów rzeczywistych jest stosunkowo duża liczba członów ze stałymi niezależnymi od częstotliwości w równaniu konstytutywnym (1). Powstaje więc problem jak wiele powinno być członów i jaki mają one wpływ na opis zachowania się materiału. Do rozwiązania tego problemu zastosowano sposób identyfikacji wykorzystujący techniki optymalizacyjne i analizę wrażliwości [4, 6, 7], co przy współczesnych możliwościach komputerowych nie stwarza specjalnych trudności, nawet dla znacznej liczby nieznanymi parametrów materiałowych.

Problem identyfikacji oparty jest na założeniu możliwości opisanego zachowania się materiałów rzeczywistych z wystarczającą dokładnością dla danego zakresu częstotliwości za pomocą modelu różniczkowego ze stałymi parametrami niezależnymi od częstotliwości drgań, o ile przyjmie się wystarczającą ilość członów w równaniu (1). Problem sprowadza się więc do wyboru stosownych wartości M i N w równaniu (2) i określenia wartości stałych parametrów p_n i q_n optymalnych względem pewnej funkcji celu, która przedstawia zwykle miarę różnicy pomiędzy obliczoną teoretycznie i określoną doświadczalnie odpowiedzią materiału przy obciążeniu dynamicznym. W pracy zastosowano wymuszone drgania harmoniczne, z których określano amplitudy sygnału wymuszającego i sygnału odpowiedzi materiału oraz przesunięcie fazowe pomiędzy tymi sygnałami w szerokim zakresie częstotliwości. Pomiary powinny być przeprowadzone dla kompletu wartości częstotliwości ω_n pokrywającego cały wymagany zakres w jakim

chcemy modelować zachowanie się materiału, gdzie $n = 1, \dots, N_{\text{exp}}$, a N_{exp} oznacza liczbę pomiarów. Dla założonego ruchu harmonicznego o częstotliwości ω_n sztywność zespolona może być wyrażona jako:

$$35. \quad |E^*|(\omega_n) = \frac{\sum_{k=0}^N q_k (i\omega_n)^k}{\sum_{k=0}^M p_k (i\omega_n)^k} = E'_n + iE''_n,$$

gdzie E' oznacza część rzeczywistą, a E'' część urojoną sztywności.

Równanie konstytutywne sprowadza się do postaci:

$$36. \quad \sigma_n^* = E_n^*(\omega_n) \varepsilon_n^*$$

Amplitudy naprężenia i odkształcenia wyrażają się jako:

$$37. \quad \sigma_n^* = \sqrt{(\sigma'_n)^2 + (\sigma''_n)^2}, \quad \varepsilon_n^* = \sqrt{(\varepsilon'_n)^2 + (\varepsilon''_n)^2}$$

Jeśli przeprowadzono szereg pomiarów N_{exp} dla różnych częstotliwości drgań ω_n ($n=1, \dots, N_{\text{exp}}$), to znane są składowe amplitud naprężenia $(\sigma'_n)_{\text{exp}}, (\sigma''_n)_{\text{exp}}$ i odkształcenia $(\varepsilon'_n)_{\text{exp}}, (\varepsilon''_n)_{\text{exp}}$. Następnie należy zdefiniować funkcję celu, która będzie wykorzystana do identyfikacji materiału. Można tu wykorzystać różne definicje. W pracy sprawdzono i zastosowano jako funkcję celu globalną miarę odległości pomiędzy składowymi zespolonej sztywności dynamicznej zmierzonymi doświadczalnie $(E'_n)_{\text{exp}}, (E''_n)_{\text{exp}}$ i obliczonymi E'_n, E''_n :

$$38. \quad F = \sum_{n=1}^{N_{\text{exp}}} \left\{ [E'_n - (E'_n)_{\text{exp}}]^2 + [E''_n - (E''_n)_{\text{exp}}]^2 \right\}$$

Składowe E'_n, E''_n można wyrazić jako:

$$39. \quad E'_n = \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2}{B_1 B_1 + B_2 B_2}, \quad E''_n = \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{B_1 B_1 + B_2 B_2}$$

gdzie:

$$A_1 = \sum_{k=0}^{N'-1} (-1)^k \omega_n^{2k} q_{(2k)} \quad , \quad A_2 = \sum_{k=1}^{N-N'+1} (-1)^{k-1} \omega_n^{2k-1} q_{(2k-1)} \quad ,$$

40.

$$B_1 = \sum_{k=0}^{M'-1} (-1)^k \omega_n^{2k} p_{(2k)} \quad , \quad B_2 = \sum_{k=1}^{M-M'+1} (-1)^{k-1} \omega_n^{2k-1} p_{(2k-1)} \quad ,$$

zaś składowe $(E'_n)_{\text{exp}}, (E''_n)_{\text{exp}}$ określone są jako:

41.

$$(E'_n)_{\text{exp}} = \frac{(\sigma'_n)_{\text{exp}} (\varepsilon'_n)_{\text{exp}} + (\sigma''_n)_{\text{exp}} (\varepsilon''_n)_{\text{exp}}}{|(\varepsilon_n)_{\text{exp}}|^2} \quad ,$$

$$(E''_n)_{\text{exp}} = \frac{(\sigma''_n)_{\text{exp}} (\varepsilon'_n)_{\text{exp}} - (\sigma'_n)_{\text{exp}} (\varepsilon''_n)_{\text{exp}}}{|(\varepsilon_n)_{\text{exp}}|^2} \quad .$$

Optymalne wartości parametrów p_k, q_k otrzymujemy z warunku stacjonarności funkcji celu F , $\delta F = 0$:

$$42. \quad \delta F = \sum_{k=0}^M \frac{\partial F}{\partial p_k} \delta p_k + \sum_{k=0}^N \frac{\partial F}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad .$$

W celu sprawdzenia udziału wybranych członów w równaniu konstytutywnym powinna być przeprowadzona analiza wrażliwości F względem parametrów p_k, q_k . Związki dla wrażliwości można wyprowadzić po uwzględnieniu równań (36 - 39) i są one określone jako:

$$43. \quad \delta_{p_k} F = \frac{\partial F}{\partial p_k} \delta p_k = \left\{ 2 \frac{\partial E'_n}{\partial p_k} \sum_{n=1}^{N_{\text{exp}}} [E'_n - (E'_n)_{\text{exp}}] + 2 \frac{\partial E''_n}{\partial p_k} \sum_{n=1}^{N_{\text{exp}}} [E''_n - (E''_n)_{\text{exp}}] \right\} \delta p_k \quad ,$$

oraz

$$44. \quad \delta_{q_k} F = \frac{\partial F}{\partial q_k} \delta q_k = \left\{ 2 \frac{\partial E'_n}{\partial q_k} \sum_{n=1}^{N_{\text{exp}}} [E'_n - (E'_n)_{\text{exp}}] + 2 \frac{\partial E''_n}{\partial q_k} \sum_{n=1}^{N_{\text{exp}}} [E''_n - (E''_n)_{\text{exp}}] \right\} \delta q_k \quad .$$

Związki powyższe można zastosować w następującej prostej procedurze [8]:

1. Przyjęcie dowolnych, dostatecznie dużych wartości M i N.
2. Obliczenia wartości p_k i q_k za pomocą minimalizacji funkcji celu, rów. (38).
3. Znalazienie modelu mechanicznego związanego z przyjętym związkiem konstytutywnym i obliczenie odpowiadających wartości sztywności k_j i współczynników tłumienia c_j .
4. Zastosowanie analizy wrażliwości i oszacowanie wpływu poszczególnych składowych modelu mechanicznego dla obliczonych w etapie 3 wartości k_j i c_j na wartość funkcji celu i jej zmiany:

$$45. \delta_{k_j} F = \left[\sum_{k=0}^M \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial k_j} + \sum_{k=0}^N \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial k_j} \right] \delta k_j, \quad \delta_{c_j} F = \left[\sum_{k=0}^M \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial c_j} + \sum_{k=0}^N \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial c_j} \right] \delta c_j.$$

Analiza taka daje informacje pomocne w ustaleniu jakie składowe można zaniedbać w rozważaniach bez utraty dokładności całego modelu materiału.

5. Mając uproszczony model mechaniczny materiału można wówczas uzyskać wynikające z niego równanie konstytutywne i dokonać korekty parametrów p_k i q_k za pomocą minimalizacji funkcji celu.

Przedstawiona procedura została zastosowana w obliczeniach numerycznych do modelu i identyfikacji sprężystolepkich właściwości badanego w pracy betonu asfaltowego.

6. Wyniki identyfikacji

Identyfikację właściwości sprężystolepkich rozpatrywanego betonu asfaltowego przeprowadzono na podstawie serii pomiarów przebiegów naprężeń i odkształceń przy wymuszonych drganiach harmonicznym przy temperaturze 296K, których przykładowe wyniki dla czterech wartości częstotliwości przedstawiono na rys.3 - 6. Pomiar przeprowadzono przy 30 różnych wartościach częstotliwości drgań w zakresie 0,1 do 50Hz.

Obliczenia współczynników równania różniczkowego (1) i stałych modelu

mechanicznego materiału przeprowadzono przy zastosowaniu opisanych wcześniej sposobów określonych jako zmodyfikowana metoda Blanda - Lee i metoda optymalizacji. W obu tych sposobach wykonano obliczenia dla kilku różnych zakresów częstotliwości.

Obliczenia przy pomocy zmodyfikowanej metody Blanda - Lee, której podstawą jest liniowa aproksymacja punktów doświadczalnych przedstawionych w układzie współrzędnych $J' - h\tau$ wykonano dla następujących przypadków:

1. Dla liniowej aproksymacji punktów doświadczalnych przedstawionych w układzie $J'(\omega \cdot J'')$ (rys.13) w całym zakresie częstotliwości drgań w przedziale 0,1 do 50Hz. Liniową aproksymację i uzyskane na jej podstawie wyniki oznaczono liczbą 1.
2. Dla liniowej aproksymacji punktów doświadczalnych przedstawionych w układzie $J'(\omega \cdot J'')$ (rys.13) w zakresie częstotliwości drgań w przedziale $0,1 < f < 1,165$ Hz. Liniową aproksymację i uzyskane na jej podstawie wyniki oznaczono liczbą 2.
3. Dla liniowej aproksymacji punktów doświadczalnych przedstawionych w układzie $J'(\omega \cdot J'')$ (rys.13) w zakresie częstotliwości drgań w przedziale $1,165 < f < 9,403$ Hz. Liniową aproksymację i uzyskane na jej podstawie wyniki oznaczono liczbą 3.
4. Dla liniowej aproksymacji punktów doświadczalnych przedstawionych w układzie $J'(\omega \cdot J'')$ (rys.13) w zakresie częstotliwości drgań w przedziale $9,403 < f < 50$ Hz. Liniową aproksymację i uzyskane na jej podstawie wyniki oznaczono liczbą 4.
5. Dla liniowych aproksymacji określonych jako styczne w poszczególnych punktach doświadczalnych do paraboli określonej metodą najmniejszych kwadratów, dla wszystkich punktów doświadczalnych przedstawionych w układzie $J'(\omega \cdot J'')$ (rys.13), w całym zakresie częstotliwości drgań w przedziale 0,1 do 50Hz. W ten sposób dobiera się stałe mechanicznego modelu materiałowego w wąskich zakresach częstotliwości w otoczeniu poszczególnych punktów doświadczalnych. Uzyskaną w ten sposób ciągłą aproksymację przebiegu punktów doświadczalnych i otrzymane na jej podstawie wyniki oznaczono liczbą 5.

Obliczenia przy pomocy opisanej wyżej procedury z wykorzystaniem technik optymalizacyjnych wykonano dla dwóch zakresów częstotliwości:

1. Z uwzględnieniem wszystkich punktów doświadczalnych w całym zakresie

częstotliwości od 0,1 do 50Hz. W pierwszym kroku procedury obliczeniowej przyjęto $M=2$ i $N=2$. Model mechaniczny związany z określonym w ten sposób równaniem konstytutywnym drugiego stopnia, z uwzględnieniem wszystkich wyrazów w równaniu (1), przedstawiono na rys.1b. Zależności pomiędzy parametrami p_k i q_k oraz stałymi modelu mechanicznego k_j i c_j określone są następującymi wzorami:

$$p_0 = k_2(k_1 + k_3), \quad q_0 = k_1 k_2 k_3,$$

$$46. \quad p_1 = c_2(k_1 + k_2 + k_3) + c_1 k_2, \quad q_1 = k_3[c_2(k_1 + k_2) + c_1 k_2],$$

$$p_2 = c_1 c_2, \quad q_2 = k_3 c_1 c_2.$$

W wyniku minimalizacji funkcji celu określonej równaniem (38) i przy nałożeniu dodatkowych ograniczeń na $p_k \geq 0$ i $q_k \geq 0$ stwierdzono, że dla podobszaru częstotliwości $f \geq 10\text{Hz}$ współczynnik $q_0=0$ co oznacza, że sztywność k_1 elementu z rys.1b równa się zero. Tak więc pięcioelementowy model redukuje się do czteroparametrowego modelu Burgersa.

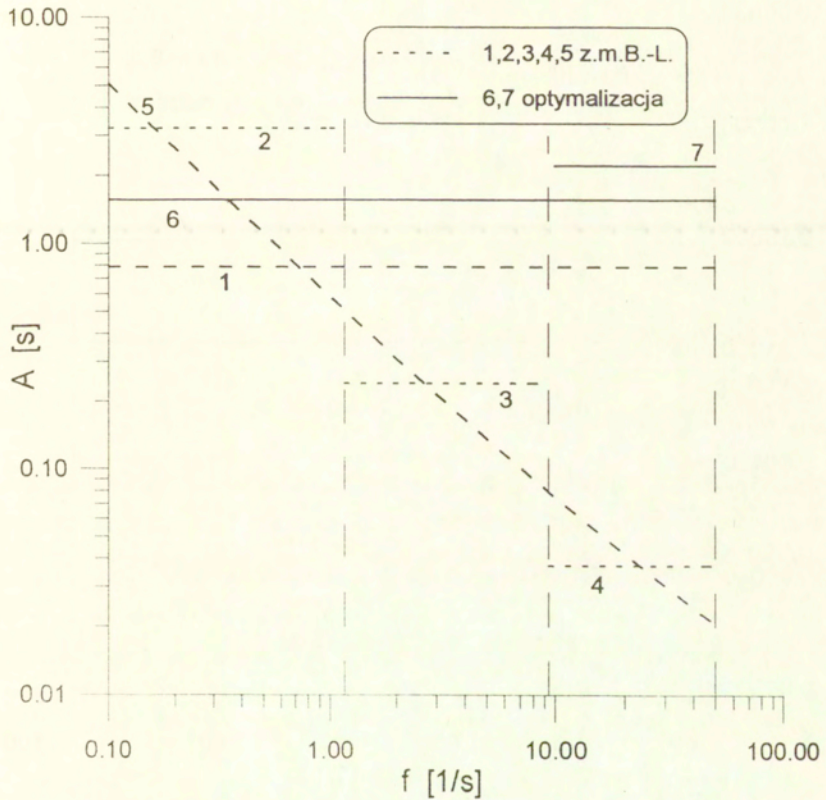
Opisane wyniki potwierdzają przydatność zastosowanej metody, wykorzystującej techniki optymalizacyjne, do identyfikacji modeli materiałów z tłumieniem, w przypadku gdy trudno założyć a priori postać związku konstytutywnego. Można wtedy, ograniczając się do założonej z góry klasy modeli, np. liniowych modeli różniczkowych ze stałymi współczynnikami, przyjąć do wstępnych obliczeń dowolnie ogólny związek konstytutywny. Po przeprowadzeniu minimalizacji funkcji będącej miarą różnicy pomiędzy wynikami teoretycznymi i eksperymentalnymi oraz wykorzystując wyniki analizy wrażliwości, można wyeliminować te wyrazy w równaniu konstytutywnym, które nie mają istotnego wpływu na jakość modelu, a następnie dla tak zredukowanego modelu wyznaczyć optymalne wartości stałych materiałowych. Tak więc wykorzystując opisaną metodę można nie tylko wyznaczyć stałe materiałowe, lecz również określić optymalny, w ramach rozpatrywanej klasy i przyjętej funkcji jakości, model materiału

Obliczone w ten sposób wartości współczynników równania (1) jak i stałe modelu

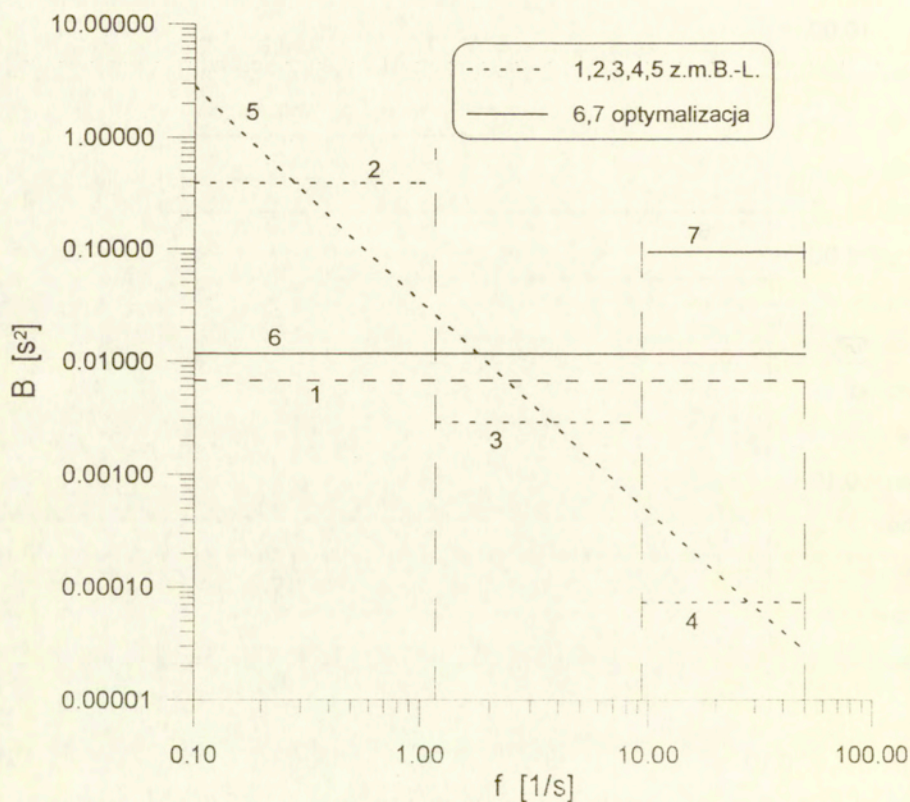
mechanicznego materiału oraz obliczone na ich podstawie aproksymacje punktów doświadczalnych na poszczególnych wykresach oznaczono liczbą 6.

2. Z uwzględnieniem punktów doświadczalnych w zakresie częstotliwości od 10 do 50Hz. Obliczone dla tego zakresu wartości współczynników równania (1) jak i stałe modelu mechanicznego materiału oraz obliczone na ich podstawie aproksymacje punktów doświadczalnych na poszczególnych wykresach oznaczono liczbą 7.

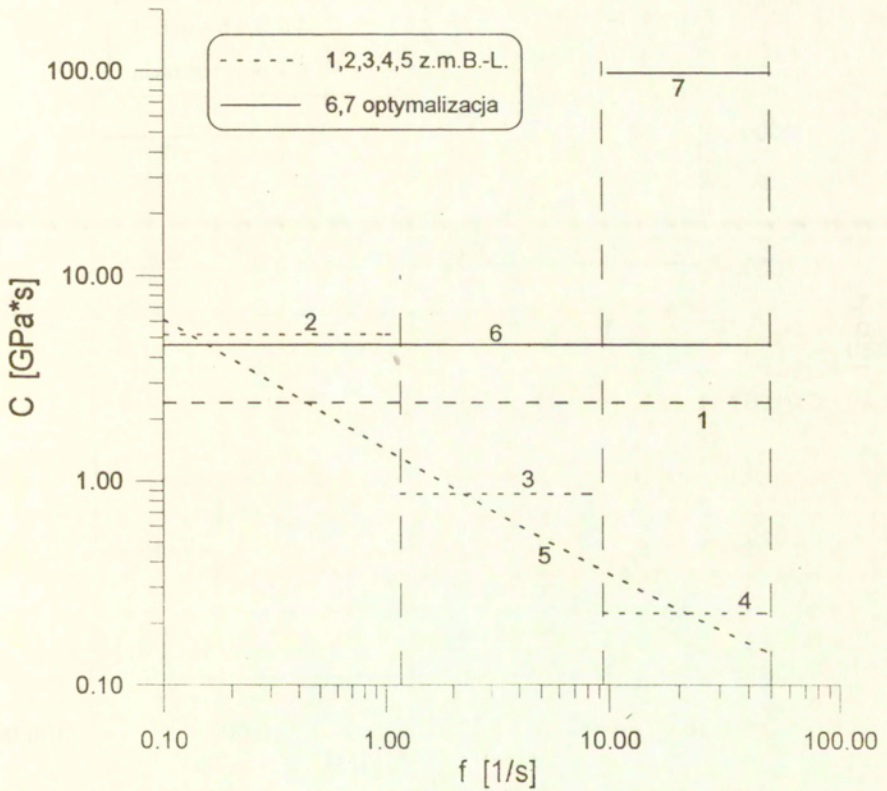
Wyniki obliczeń dla wyszczególnionych wyżej dwóch sposobów w różnych zakresach częstotliwości przedstawiono w postaci graficznej na kolejnych rysunkach 15, 16, 17 i 18 dla czterech współczynników A, B, C i D równania różniczkowego (3) opisującego zachowanie się modelu mechanicznego Burgersa, a na rysunkach 19, 20, 21 i 22 przedstawiono odpowiadające tym współczynnikom wartości współczynników E_M , E_K , η_M i η_K elementów składowych tego modelu jako funkcje częstotliwości f . Wartości liczbowe zaznaczono liniami prostymi z odnośnikami liczbowymi odpowiadającymi siedmiu opisanym wyżej wariantom obliczeniowym. Linia 5 przedstawia na wszystkich tych rysunkach wartości liczbowe odpowiadające wąskiemu przedziałom częstotliwości w otoczeniu każdego punktu doświadczalnego. Uzyskano w ten sposób monotoniczną zmianę współczynników modelu mechanicznego Burgersa w zależności od częstotliwości. Wartości poszczególnych współczynników zaznaczone liniami poziomymi odpowiadają przyjęciu aproksymacji liniowej dla większych zakresów częstotliwości. Zakresy te w przypadku linii 1 i 6 obejmowały cały przedział częstotliwości w jakim przeprowadzono badania doświadczalne, a więc od 0,1 do 50Hz.



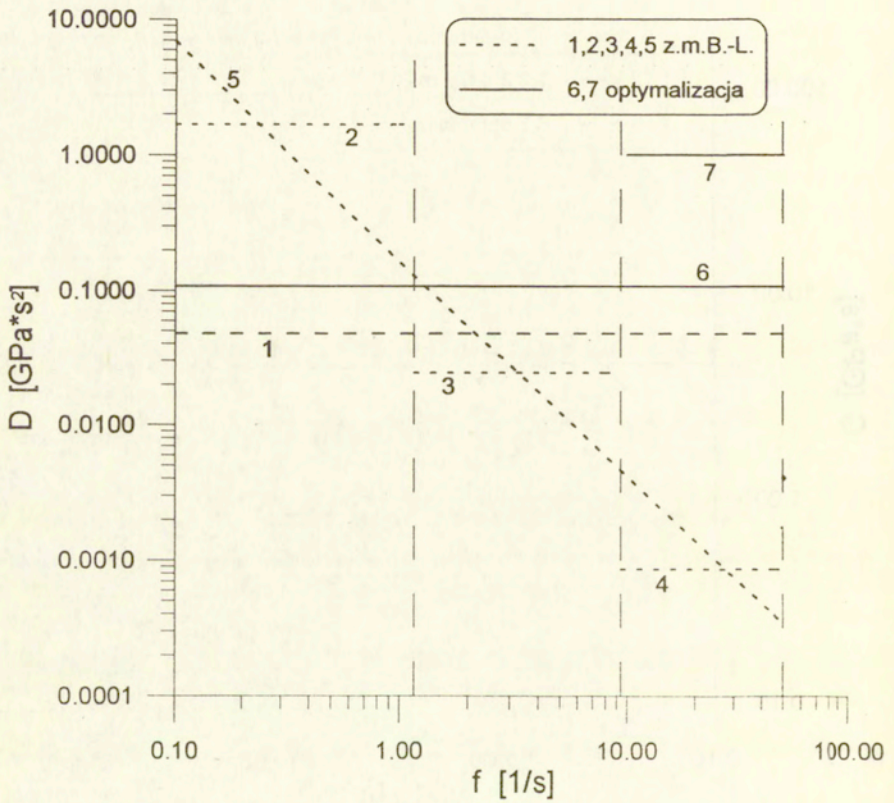
rys.15 Współczynnik A równania konstytutywnego (3) wyznaczony dwiema metodami w różnych zakresach częstotliwości drgań dla badań asfaltu w temperaturze 296K.



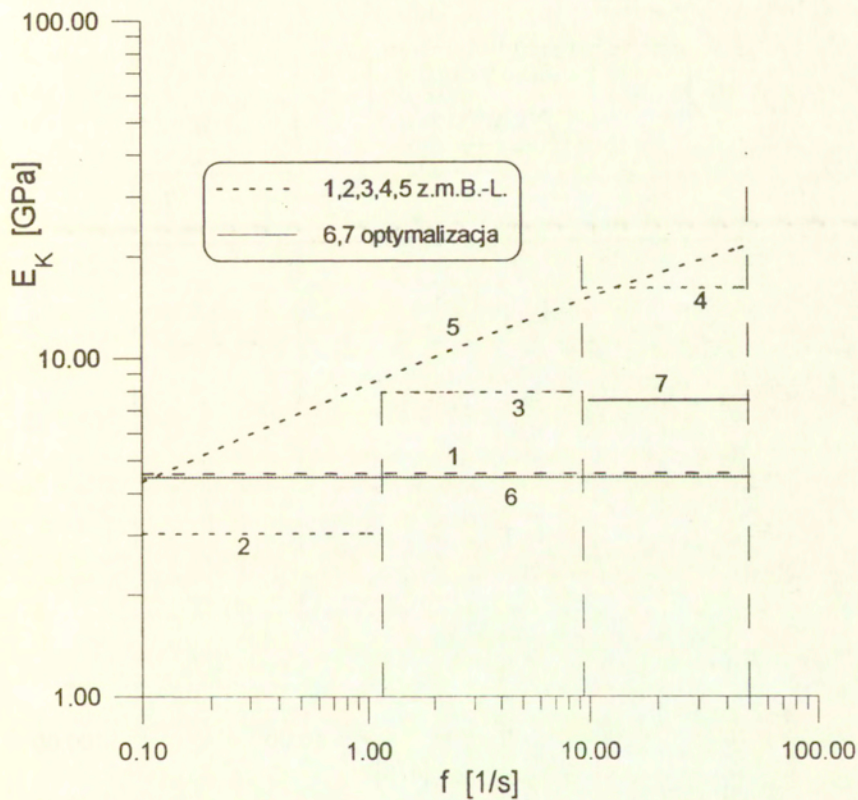
rys.16 Współczynnik B równania konstytutywnego (3) wyznaczony dwiema metodami w różnych zakresach częstotliwości drgań dla badań asfaltu w temperaturze 296K.



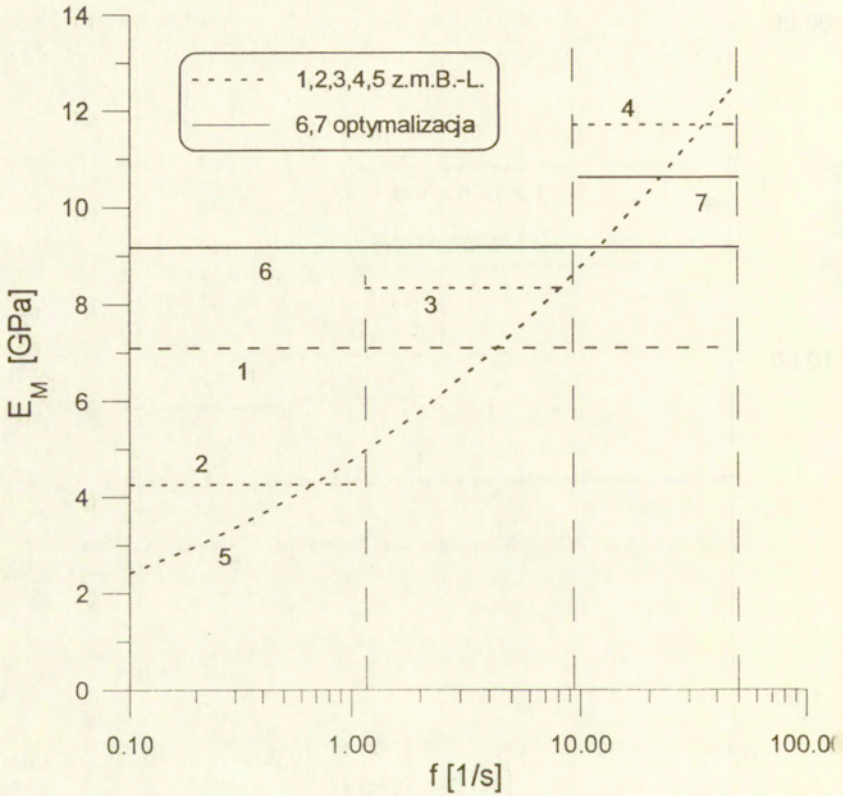
rys.17 Współczynnik C równania konstytutywnego (3) wyznaczony dwiema metodami w różnych zakresach częstotliwości drgań dla badań asfaltu w temperaturze 296K.



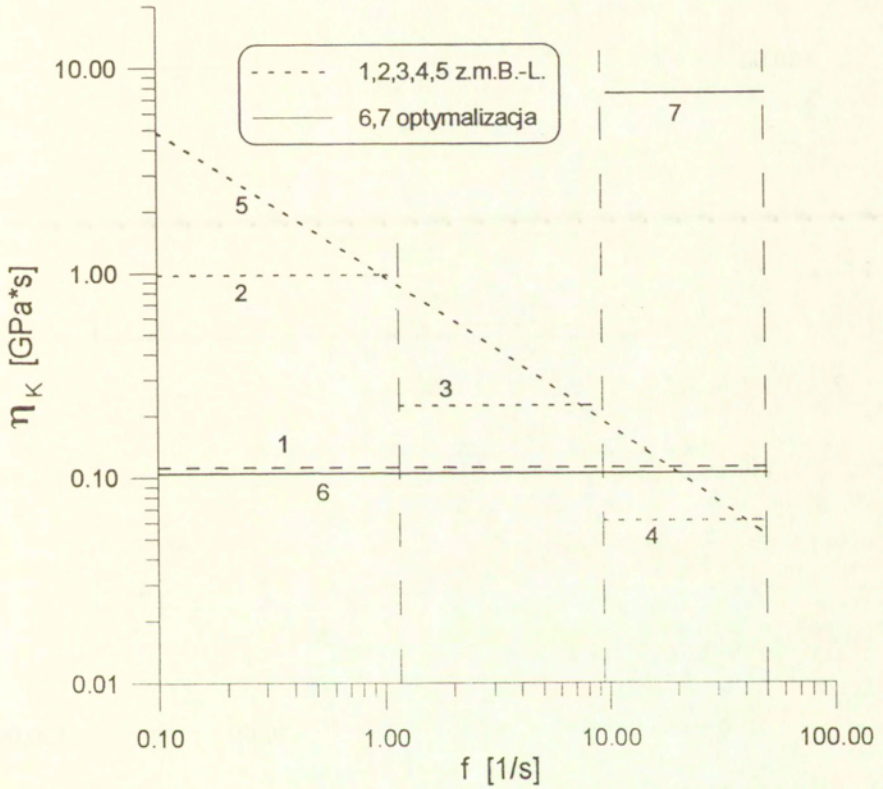
rys.18 Współczynnik D równania konstytutywnego (3) wyznaczony dwiema metodami w różnych zakresach częstotliwości drgań dla badań asfaltu w temperaturze 295K.



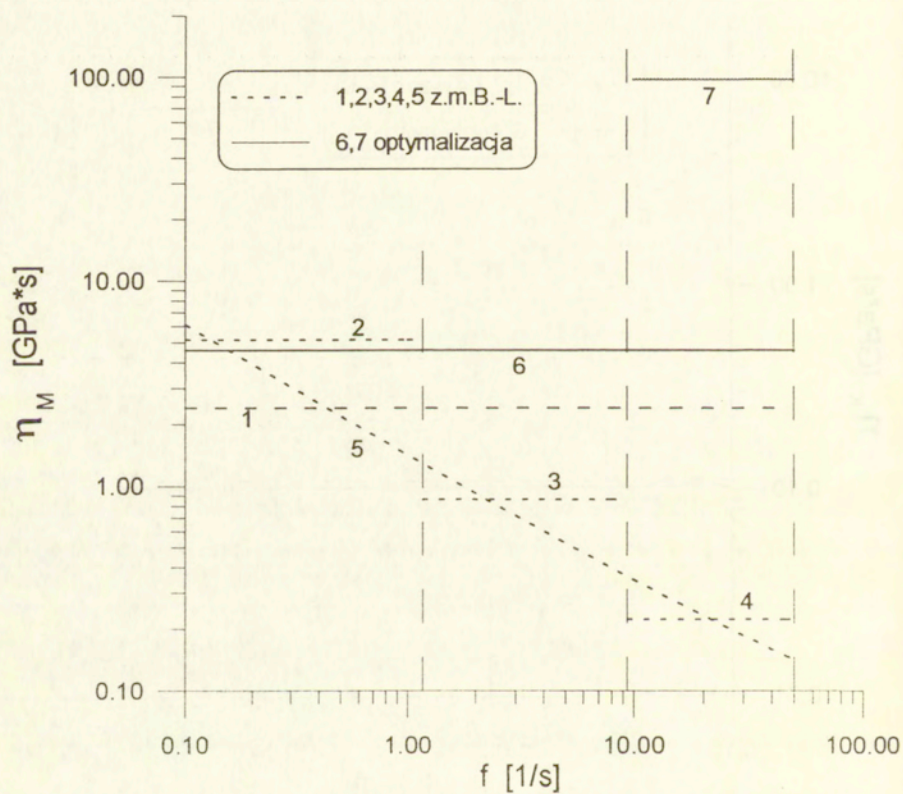
rys.19 Moduł sprężystości w elemencie modelu Kelvina obliczony dla współczynników A,B,C,D (rys.15,16,17,18).



rys.20 Moduł sprężystości w elemencie modelu Maxwella obliczony dla współczynników A,B,C,D (rys.15,16,17,18).

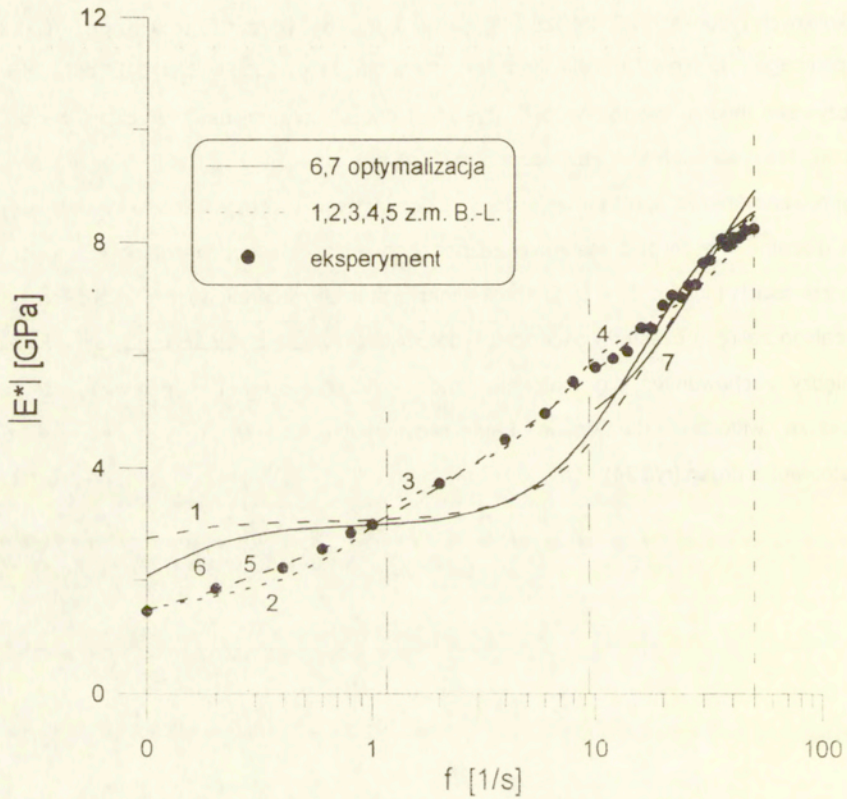


rys 21 Współczynnik lepkości w elemencie modelu Kelvina obliczony dla współczynników A,B,C,D (rys.15,16,17,18).

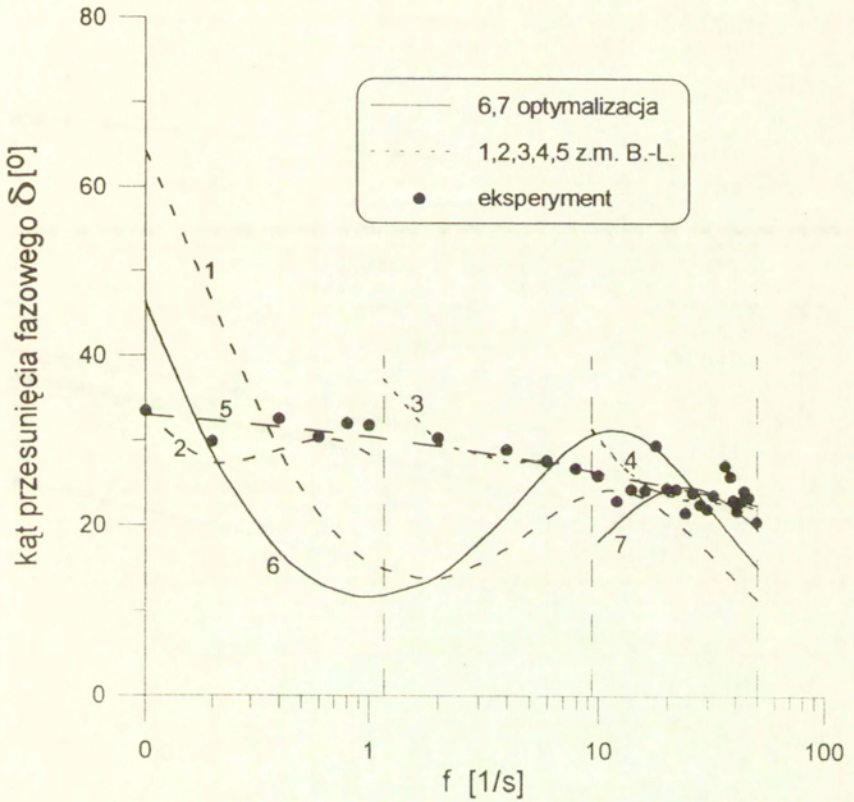


rys.22 Współczynnik lepkości w elemencie modelu Maxwella obliczony dla współczynników A,B,C,D (rys 15,16,17,18).

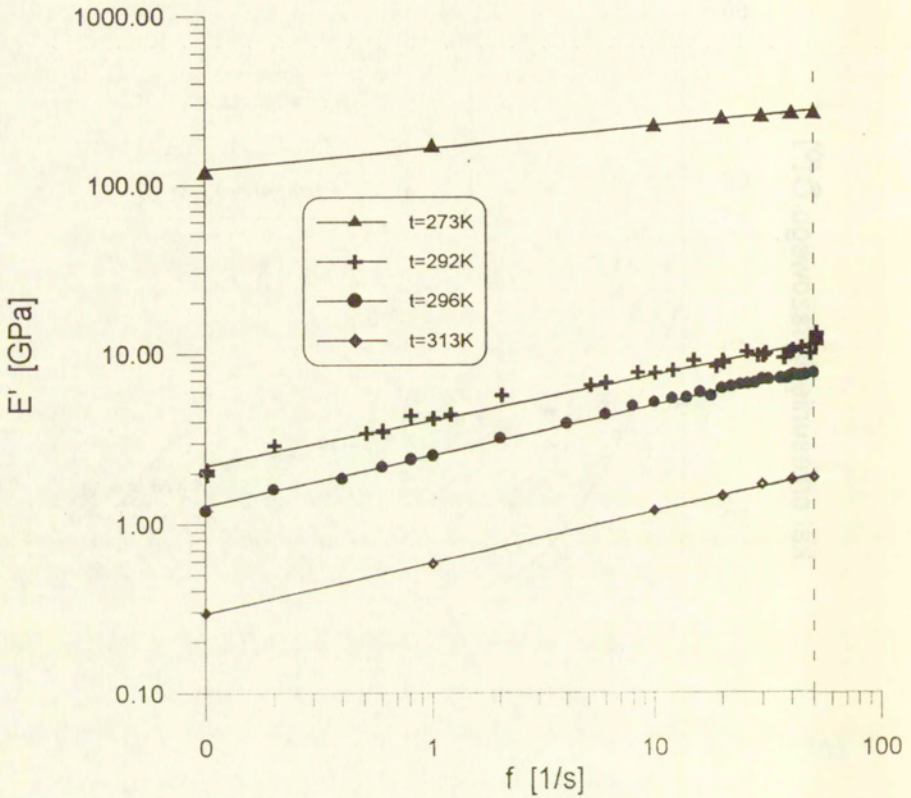
Mając obliczone współczynniki czterech elementów składowych modelu mechanicznego można określić zachowanie się modelu wyrażone globalnym, zespolonym modulem sztywności E^* i kątem przesunięcia fazowego δ w zależności od częstotliwości przyłożonych drgań. Wyniki obliczeń dla wszystkich siedmiu, wcześniej opisanych przypadków obliczeniowych przedstawiono wraz z punktami doświadczalnymi na kolejnych rysunkach 23, 24, 25 i 26 odpowiednio dla wartości bezwzględnej modułu zespolonego $|E^*|$ (rys.23), dla kąta przesunięcia fazowego δ (rys.24), dla części rzeczywistej modułu zespolonego E' (rys.25) i części urojonej modułu zespolonego E'' (rys.26). Na rysunkach tych zaznaczono również trzy przedziały częstotliwości, w których przyjmowano liniowe aproksymacje dla wąskich zakresów częstotliwości. Wynikające z nich globalne właściwości materiału zaznaczono odcinkami odpowiednich linii tylko w tych zakresach (linie 2, 3, 4 i 7). Aproksymacja stałych materiałowych przeprowadzona dla całego zakresu częstotliwości od 0,1 do 50Hz prowadzi do znacznych rozbieżności pomiędzy zachowaniem się materiału rzeczywistego i opisem modelowym, co jest zwłaszcza widoczne dla zmian kąta przesunięcia fazowego w zależności od częstotliwości drgań (rys.24).



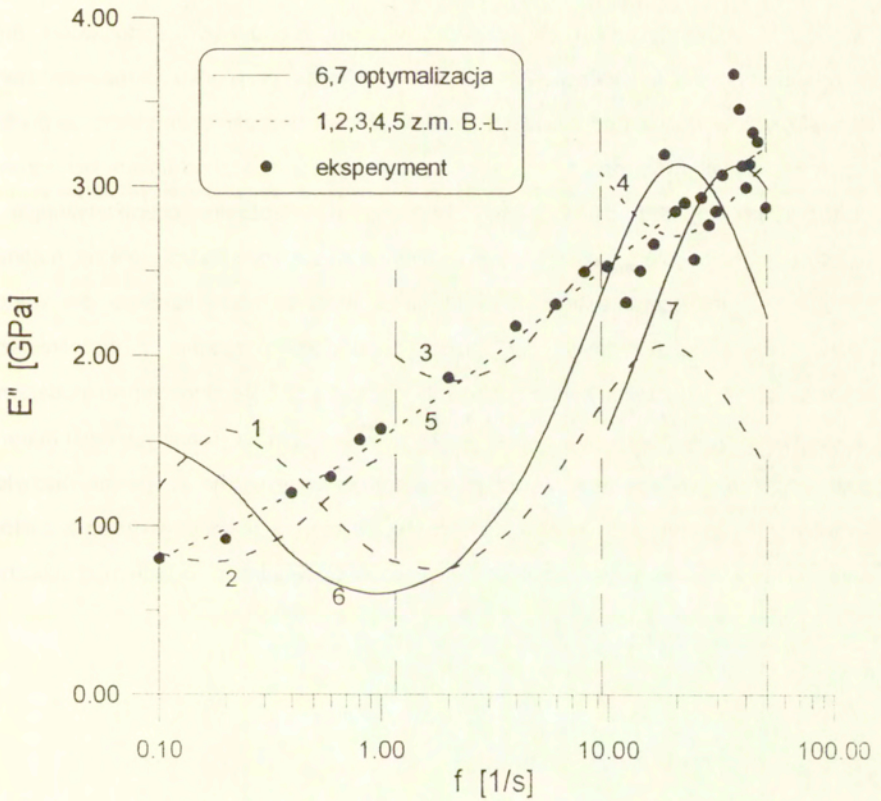
rys.23 Porównanie doświadczalnych i teoretycznych wartości bezwzględnych modułu zespolonego $|E^*|$ jako funkcji częstotliwości drgań.



rys.24 Porównanie doświadczalnych i teoretycznych wartości kąta przesunięcia fazowego jako funkcji częstotliwości drgań.

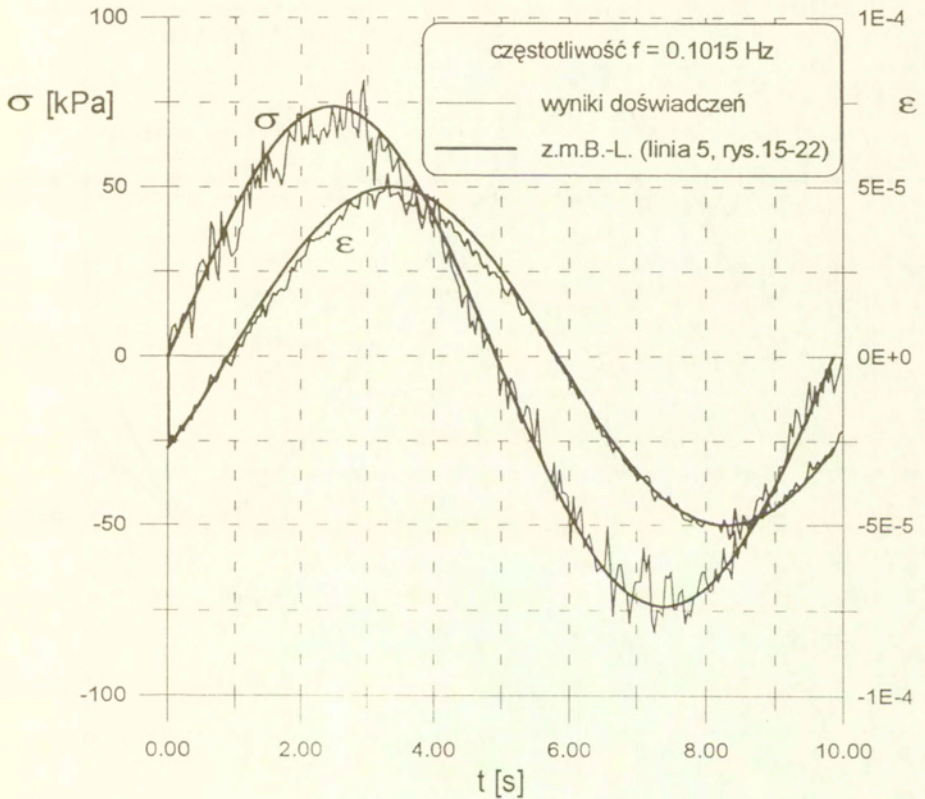


rys.25 Porównanie doświadczalnych i teoretycznych wartości części rzeczywistej modułu zespolonego jako funkcji częstotliwości drgań.

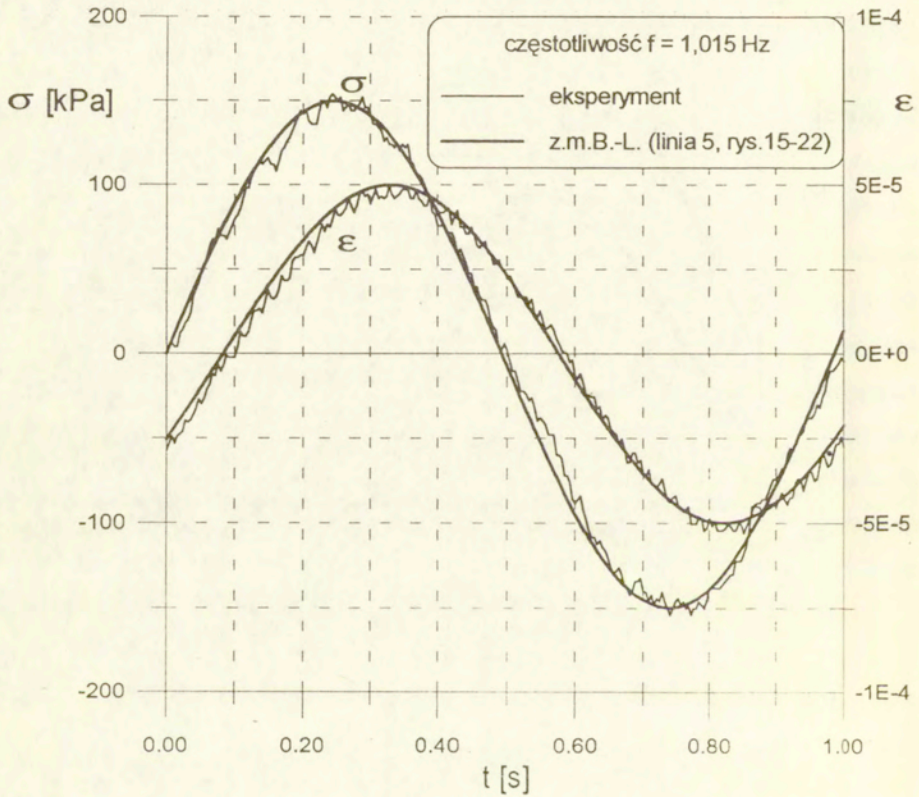


rys.26. Porównanie doświadczalnych i teoretycznych wartości części urojonej modułu zespolonego w funkcji częstotliwości drgań.

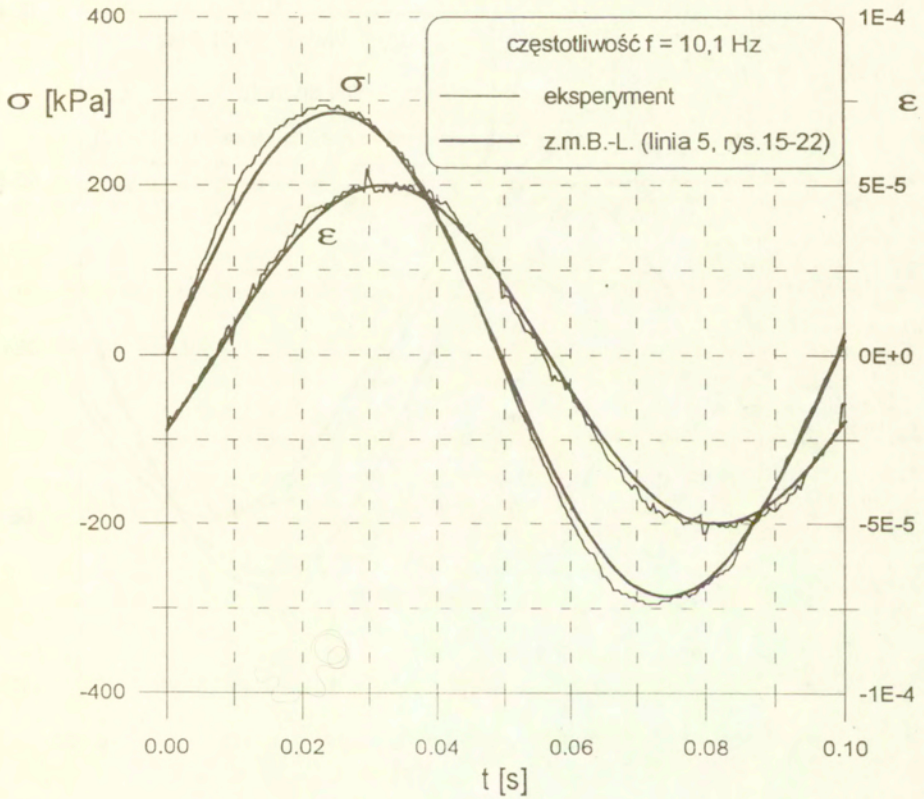
Obliczone wartości liczbowe czterech stałych dla modelu materiału umożliwiają wyznaczenie odpowiedzi materiału na wymuszone drgania harmoniczne o amplitudzie i częstotliwości zgodnej z poszczególnymi pomiarami doświadczalnymi. Możliwe jest więc bezpośrednie porównanie zarejestrowanych w doświadczeniu przebiegów naprężenia i odkształcenia osiowego próbki jako funkcji czasu z odpowiadającymi przebiegami obliczonymi dla modelu mechanicznego. Wyniki takiego porównania przewidywań modelu z doświadczeniem dla czterech wybranych wartości częstotliwości drgań przedstawiono na rysunkach 27, 28, 29 i 30 dla przypadku określania stałych modelowych w wąskich przedziałach częstotliwości w bezpośrednim otoczeniu punktów doświadczalnych. Wartości tych stałych modelowych zaznaczono liniami oznaczonymi liczbą 5 na poprzednich rysunkach. Przebiegi doświadczalne charakteryzujące się oscylacjami nałożonymi na przebiegi sinusoidalne zaznaczono liniami cienkimi, natomiast liniami grubymi przedstawiono przewidywanie modelu mechanicznego dla wartości stałych modelowych, innych dla każdej częstotliwości zgodnie z wcześniejszymi obliczeniami przedstawionymi na rysunkach 19, 20, 21 i 22. Zgodność opisu modelowego z wynikami doświadczeń jest również dobra w odniesieniu do globalnych cech materiału (rys. 23 i 24). Jedynie dla większych częstotliwości widoczne są pewne odchylenia przebiegów teoretycznych i doświadczalnych, ale różnice te mogą wynikać z zakłóceń kształtu przebiegów doświadczalnych z powodu bezwładności układu hydraulicznego maszyny wytrzymałościowej.



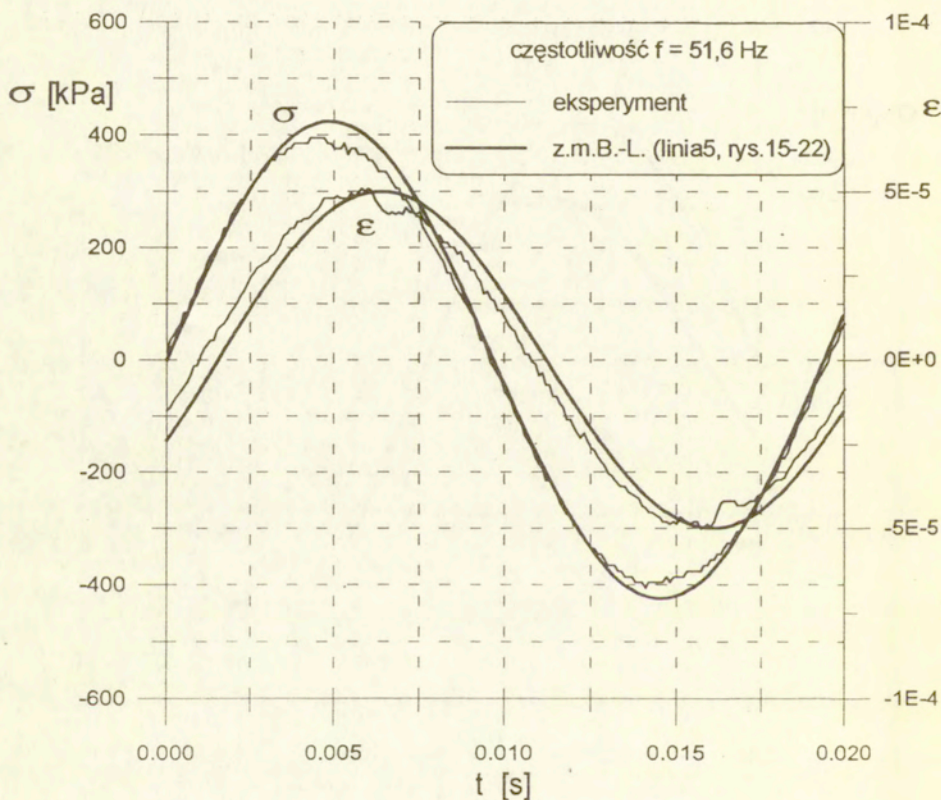
rys 27 Porównanie wykresów $\sigma(t)$ zarejestrowanych w doświadczeniu i obliczonych dla stałych modelu Burgersa wyznaczonych za pomocą zmodyfikowanej metody Blanda i Lee.



rys.28 Porównanie wykresów zarejestrowanych w doświadczeniu i obliczonych dla stałych modelu Burgersa wyznaczonych za pomocą zmodyfikowanej metody Blanda i Lee.

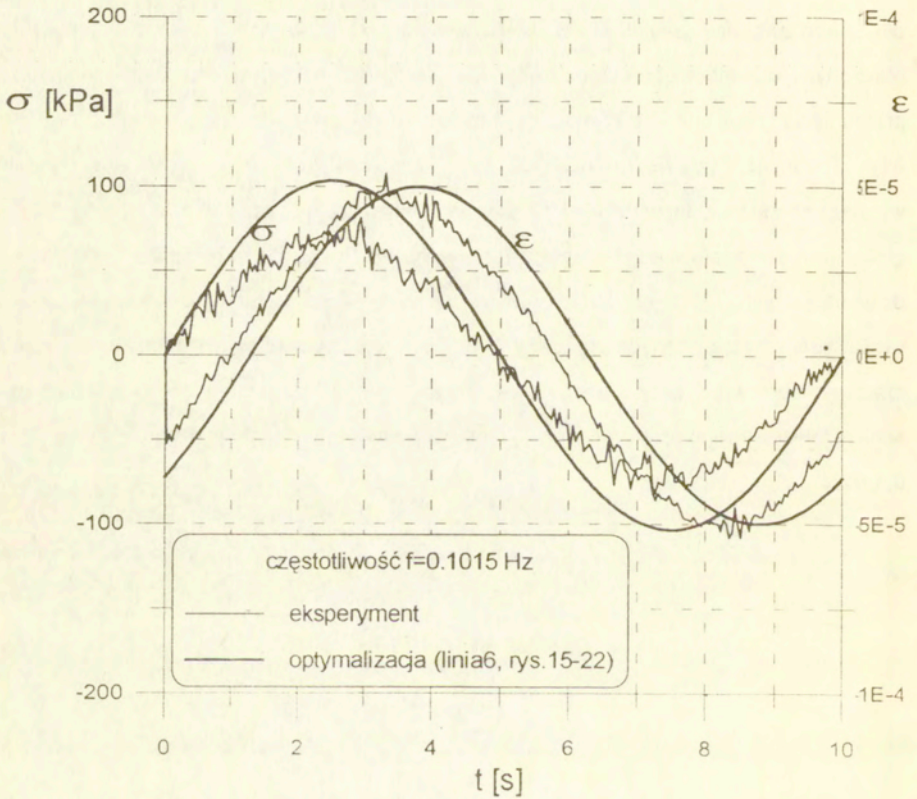


rys.29 Porównanie wykresów zarejestrowanych w doświadczeniu i obliczonych dla stałych modelu Burgersa wyznaczonych za pomocą metody Blanda i Lee.

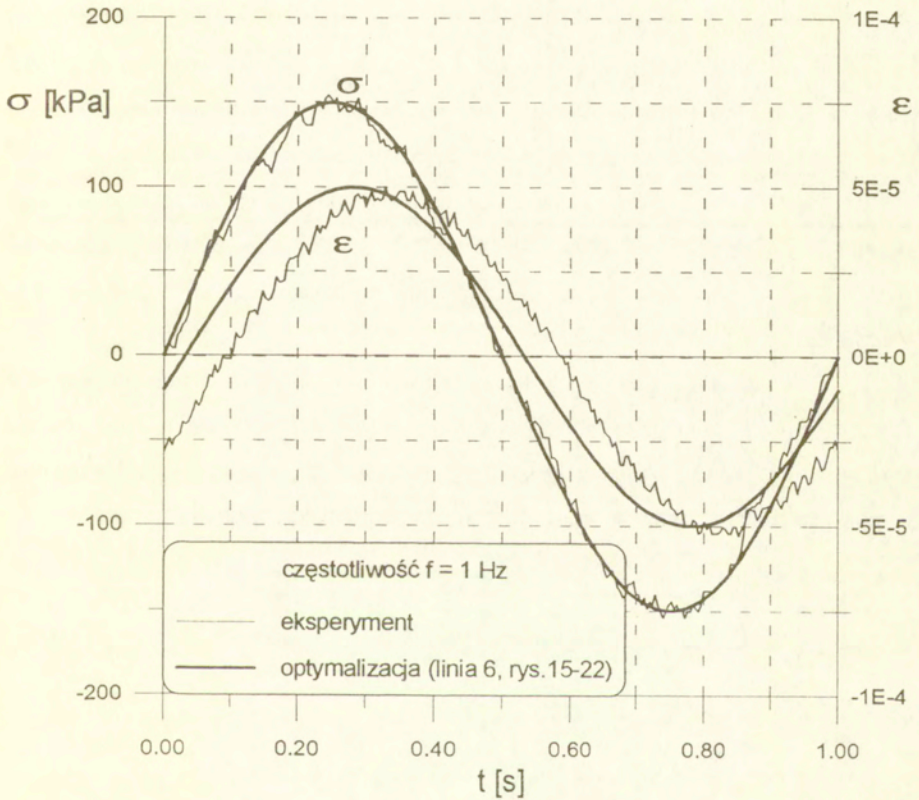


rys.30 Porównanie wykresów zarejestrowanych w doświadczeniu i obliczonych dla stałych modelu Burgersa wyznaczonych za pomocą zmodyfikowanej metody Blanda i Lee.

Podobne porównanie z doświadczeniem przedstawiono dla stałych modelu mechanicznego określonych przy zastosowaniu technik optymalizacyjnych dla przypadku aproksymacji w całym rozpatrywanym zakresie częstotliwości (0,1 do 50Hz). Przykładowe wyniki dla dwóch częstotliwości drgań przedstawiono na rys. 31 dla $f = 0,1\text{Hz}$ i na rys. 32 dla $f = 1\text{Hz}$. Stałe materiałowe modelu mechanicznego są w tym przypadku takie same dla całego zakresu częstotliwości. Różnice pomiędzy przebiegami doświadczalnymi i obliczonymi dla modelu mechanicznego są znaczne nie tylko w odniesieniu do kąta przesunięcia fazowego, ale również w odniesieniu do amplitudy cyklu naprężenia (rys. 31). Zgodność doświadczalnych i teoretycznych przebiegów obu sygnałów, wymuszającego i odpowiedzi materialu, jest zależna od położenia charakterystyki globalnej dla modelu mechanicznego (linia 6 na rys.23 i 24) w stosunku do punktów doświadczalnych. Jest jednak oczywiste, że nie można oczekiwać dobrego opisu właściwości mechanicznych rozpatrywanego betonu asfaltowego, modyfikowanego mączką gumową, przy pomocy jednego modelu mechanicznego Burgersa scharakteryzowanego czterema stałymi materiałowymi w całym zakresie częstotliwości od 0,1 do 50Hz.



rys.31 Porównanie przebiegów określonych doświadczalnie z przebiegami obliczonymi dla stałych modelu Burgersa, wyznaczonymi przy zastosowaniu technik optymalizacyjnych.



rys.32 Porównanie przebiegów określonych doświadczalnie z przebiegami obliczonymi dla stałych modelu Burgersa, wyznaczonymi przy zastosowaniu technik optymalizacyjnych.

7. Wnioski

Właściwości sprężystolepkie badanego w pracy betonu asfaltowego mogą być opisane czteroparametrowym modelem Burgersa tylko w wąskich przedziałach częstotliwości zmian obciążenia. Materiał ten cechuje się silnym wpływem prędkości odkształcenia, którego opis przy pomocy jednego modelu czteroparametrowego w całym zakresie częstotliwości prowadzi do znacznych rozbieżności z doświadczeniem.

Identyfikacja właściwości mechanicznych materiału sprężystolepkiego wymaga dobrania właściwych, dla danego materiału i zakresu częstotliwości, sposobów rozprzęgnięcia równań, nawet wówczas gdy wybieramy z góry typ modelu mechanicznego.

Zastosowanie do identyfikacji właściwości mechanicznych materiałów sprężystolepkich technik optymalizacyjnych umożliwia zarówno wybór typu modelu mechanicznego jak i określenie związanych z nim stałych materiałowych. Uwzględnić jednak trzeba uzależnienie wyników obliczeń od wyboru funkcji celu.

Literatura

1. Dietrich L., Turski K.: Analysis of identification methods for the viscoelastic properties of materials, Engng. Trans., **40**, 4, 501-523, 1992.
2. Dietrich L., Turski K.: Analiza sposobów wyznaczania stałych materiałowych dla materiałów lepkosprężystych, Prace IPPT 28/91.
3. Bland D.R., Lee E.H.: On the Determination of a Viscoelastic Model for Stress Analysis of Plastics, J. Appl. Mech., **23**, 3, 416-420, 1956.
4. Distéfano N.: On the Identification Problem in Linear Viscoelasticity, ZAMM 50, 683-690, 1970.
5. Kalabińska M., Pilat J., Dietrich L.: Ocena wybranych reologicznych właściwości betonów asfaltowych w warunkach obciążeń cyklicznych, Arch. Inż. Lądowej, **35**, 1, 95-106, 1989.
6. Lekszycki T., Olhoff N. and Pedersen J.J.: Modelling and identification of viscoelastic properties of vibrating sandwich beams, Composite Structures, **22**, 1992.
7. Lekszycki T., Pedersen J.J. and Chaika V., Optimal Modelling of Elasticity and Damping in Vibrating Viscoelastic Systems, in Modern Practice in Stress and Vibration Analysis, ed. J.L.Wearing, 1993.
8. Lekszycki T.: Optimal modelling and identification of viscoelastic properties of components of multilayered structures, in preparation.