7.77 — termodynamika, przewodzenie ciepła, wpływ temperatury na materiały, naprężenia cieplne

Jan Woźniak

# ZASADY WARIACYJNE WYMIANY CIEPŁA I ICH ZASTOSOWANIA W FIZYCE BUDOWLI CZĘŚĆ II

19/1991



WARSZAWA 1991

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 maja 1991



IPPT PAN

N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd.0,75 Ark.druk 1,0
Oddano do drukarni w czerwcu 1991 r.
Nr zamówienia 200/91

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Jan Woźniak
Pracownia problemów energooszczędnego budownictwa ORT

# ZASADY WARIACYJNE WYMIANY CIEPŁA I ICH ZASTOSOWANIA W FIZYCE BUDOWLI

## Część 2

## Agregacja zasad wariacyjnych przewodnictwa cieplnego lagranża w ciałach stałych. Kierunki zastosowań w zakresie sterowania polem temperatury i metod numerycznych.*

**Streszczenie.**

W niniejszej pracy wyprowadzono lagranżowski model przewodnictwa cieplnego w ujęciu metody elementów skończonych z uwzględnieniem zagadnień sterowania. Wykorzystano ten model do obliczenia wydajności źródeł ciepła utrzymujących stałą temperaturę w pomieszczeniu, na zewnątrz którego temperatura zmienia się w czasie.

**Wstęp.**

Niniejsza praca ma na celu wyprowadzenie lagranżowskiego modelu przewodnictwa cieplnego w ujęciu metody elementów skończonych z uwzględnieniem zagadnień sterowania.

Metoda elementów skończonych umożliwia analizę zjawiska przewodnictwa cieplnego w ciągłych układach przestrzennych, izotropowych i anizotropowych o dowolnych kształtach. Postępując według tej metody otrzymuje się dyskretny rozkład temperatury w punktach nazywanych węzłami.

Rozdział pierwszy niniejszej pracy poświęcony jest lagranżowskiemu sformułowaniu przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem zagadnień sterowania. Przedstawione w nim zależności zostały wyprowadzone w pracy [1].

W rozdziale drugim przedstawiłem przejście od ogólnego, lagranżowskiego modelu przewodnictwa cieplnego do ujęcia

* Praca została wykonana w ramach tematu 1.36 "Energoaktywne elementy strukturalne budynku i jego środowiska" CPBP 02.21

macierzowego odpowiadającego metodzie elementów skończonych. Uwzględnienie zagadnień sterowania poszerza to ujęcie o dwie nierówności charakteryzujące źródła ciepła realizujące sterowanie.

W rozdziale trzecim przedstawiłem rozwiązanie prostego zagadnienia wykorzystując do tego zaproponowany model.

**1. Lagranżowskie sformułowanie przewodnictwa cieplnego.**

W pierwszej części pracy "Zasady wariacyjne wymiany ciepła i ich zastosowania w fizyce budowli" [1] przedstawiłem lagranżowskie sformułowanie przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem zagadnień sterowania. W sformułowaniu tym zakłada się, że pole temperatury $\theta(\cdot,t)$, (gdzie t jest współrzędną czasową) określone na $\Omega$ (obszarze zajmowanym przez ciało) jest poszukiwane w klasie funkcji $\Pi$ postaci:

$$\theta(\cdot,t) \in \mathbb{T} \quad \Leftrightarrow \quad \theta(x,t) = \Phi(x,q(t)) \qquad x \in \Omega\,, \tag{1.1}$$

gdzie $q(t)=(q_1(t),q_2(t),\ldots q_n(t))$ nazywam za [2] uogólnionymi (lagranżowskimi) współrzędnymi temperaturowymi, a $\Phi(\cdot,\cdot)$ jest znaną, różniczkowalną funkcją współrzędnych $x=(x_1,x_2,x_3)$ i zmiennych parametrów $q(t)$. Założenie to umożliwia przejście do dyskretyzowanego ( lagranżowskiego [2] ) opisu przewodnictwa cieplnego, w którym pole temperatury jest jednoznacznie wyznaczone przez parametry $q(t)$. Zakładam ,że parametry te spełniają warunek:

$$q(t) \in \mathbb{U} \qquad\qquad \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^N\,, \tag{1.2}$$

gdzie $\mathbb{U}$ jest danym, domkniętym i wypukłym zbiorem w $\mathbb{R}^N$. W każdym danym zagadnieniu $\Phi$ i $\mathbb{U}$ dobiera się zgodnie z jego fizycznym charakterem.

Dla każdej n-tki lagranżowskich współrzędnych należących do $\mathbb{U}$ przez $\mathbb{U}'(q)$ oznaczam zbiór dopuszczalnych n-tek prędkości lagranżowskich współrzędnych temperaturowych. Lagranżowskie równanie przewodnictwa cieplnego wyprowadzone w

[1] jest postaci:

$$\frac{\partial V(q(t))}{\partial q_a} + \frac{\partial D(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_a} = L_a(q(t)) + Q_a^L(t) +$$

$$+ Q_a^o(t) + R_a(t) \quad \text{gdzie} \quad t \in \langle t_o, t_F \rangle, \tag{1.3}$$

gdzie:

- $V(q(t))$ za Biotem [2] nazwałem potencjałem termicznym:

$$V(q(t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega\setminus\Xi} K_{ij}(x, \Phi(x, q(t))) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \, dx \tag{1.4}$$

gdzie $K_{ij}(x,\theta)$ są składowymi tensora przewodnictwa cieplnego (zależą od położenia x i temperatury $\theta$), przez $\Omega$ oznaczyłem obszar zajmowany przez ciało, a przez $\Xi$ powierzchnię osobliwą na której występują powierzchniowe źródła ciepła;

- $D(q(t),\dot{q}(t))$ za Biotem [2] nazwałem funkcją dyssypatywną:

$$D(q(t),\dot{q}(t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega\setminus\Xi} \rho(x) c(x) \frac{\partial \Phi}{\partial q_b} \frac{\partial \Phi}{\partial q_a} \, dx \, \dot{q}_a(t) \dot{q}_b(t), \tag{1.5}$$

gdzie $\rho(x)$ jest gęstością masy a $c(x)$ pojemnością cieplną;

- $L_a$ jest wielkością, która uwzględnia nieliniowe, termiczne własności materiału:

$$L_a(q(t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega\setminus\Xi} \frac{\partial K_{ij}}{\partial q_a} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \, dx; \tag{1.6}$$

- wielkości $Q_a^L$ opisują fizyczne źródła ciepła i nazwałem je uogólnionymi fizycznymi źródłami ciepła; wyrażają się one wzorem:

$$Q_a^L(t) = \int_{\partial\Omega\cup\Xi} \sigma^L \frac{\partial\Phi}{\partial q_a}\, da + \int_{\Omega\setminus\Xi} \rho\alpha^L \frac{\partial\Phi}{\partial q_a}\, dx, \tag{1.7}$$

gdzie $\sigma^L$ są powierzchniowymi, fizycznymi źródłami ciepła, a $\alpha^L$ są objętościowymi, fizycznymi źródłami ciepła;

- wielkości $Q_a^o$ opisują źródła ciepła, wydajnością których można sterować; źródła te nazwałem w [1] źródłami ograniczonymi, a realizowane przez nie sterowanie - sterowaniem ograniczonym. Uogólnione (lagrażowskie) źródła ciepła realizujące sterowanie ograniczone dane są zależnością:

$$Q_a^o(t) = \int_{\partial\Omega\cup\Xi} \sigma^o \frac{\partial\Phi}{\partial q_a}\, da + \int_{\Omega\setminus\Xi} \rho\alpha^o \frac{\partial\Phi}{\partial q_a}\, dx, \tag{1.8}$$

gdzie $\sigma^o$ i $\alpha^o$ są odpowiednio powierzchniowymi i objętościowymi źródłami ciepła, realizującymi sterowanie ograniczone.

W wielu zagadnieniach technicznych i problemach modelowania wprowadza się pewne ograniczenia na pola temperatury. Pola temperatury spełniające te ograniczenia nazywać będę dopuszczalnymi polami temperatury. Aby szukane pola temperatury były polami dopuszczalnymi muszą istnieć pewne dodatkowe źródła ciepła - nazwane w [1] źródłami doskonałymi. Wielkości $\mathbb{R}_a$ we wzorze (1.3) nazwałem uogólnionymi (lagranżowskimi), doskonałymi źródłami ciepła. Muszą one spełniać warunek wprowadzony w [1] i nazwany pierwszą zasadą minimum prędkości produkcji entropii. Zasada ta postuluje, że spośród wszystkich przyrostów produkcji entropii wywołanych źródłami ciepła realizującymi sterowanie doskonałe ten jest najmniejszy, który odpowiada zachodzącemu polu prędkości temperatury. Zasadę tą opisuje nierówność:

$$R_a(t)\delta q_a \geq 0 \qquad \forall \delta q_a \in \mathbb{W}(q(t),\dot{q}(t)), \tag{1.9}$$

gdzie $\mathbb{W}(\cdot,\cdot)$ jest zbiorem uogólnionych wirtualnych współrzędnych temperaturowych. Współrzędne te dane są przez:

$$\delta q_\alpha = \beta(\bar{q}_\alpha - \dot{q}_\alpha(t)), \tag{1.10}$$

gdzie $\beta$ jest dowolną, nieujemną liczbą rzeczywistą, a $\bar{q}_\alpha$ jest dowolnym elementem $\mathbb{U}'(q(t))$.

Drugą zasadą minimum prędkości produkcji entropii, wprowadzoną w [1] jest postulat, że w procesie występują te źródła ciepła realizujące sterowanie ograniczone, dla których prędkość produkcji entropii jest najmniejsza. Zasada ta w ujęciu lagranżowskim przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} Q^o_\alpha(t)\dot{q}_\alpha(t) &\le \bar{Q}_\alpha\dot{q}_\alpha(t), \\ \forall\ \bar{Q}_\alpha &\in \mathbb{S}(q(t)) \quad , \\ Q^o_\alpha &\in \mathbb{S}(q(t)) \quad , \end{aligned} \tag{1.11}$$

gdzie $\mathbb{S}(q(t))$ jest zbiorem wszystkich dopuszczalnych, uogólnionych źródeł ciepła realizujących sterowanie ograniczone, określonym dla każdego $q(t) \in \mathbb{U}$.

Lagranżowskie sformułowanie przewodnictwa cieplnego jest opisywane przez: lagranżowskie równanie przewodnictwa cieplnego (1.3), warunki ograniczające lagranżowskie współrzędne temperaturowe (1.2), warunki doskonałej realizacji tych ograniczeń (1.9) i przez drugą lagranżowską zasadę minimum prędkości produkcji entropii (1.11).

Do powyższych relacji dochodzą jeszcze warunki początkowe dla współrzędnych lagranżowskich. W każdym zagadnieniu wartości $q_\alpha(t_o)$ są dane.

**2. Przewodnictwo cieplne z uwzględnieniem sterowania w ujęciu metody elementów skończonych.**

Metoda elementów skończonych polega na dyskretyzacji continuum na zbiór podobszarów (elementów) z których wyodrębnia się określoną, skończoną liczbę stopni swobody

[3].

Podzielmy obszar $\Omega$ na m podobszarów, które będziemy nazywać elementami. Zakładamy, że elementy są parami rozłączne. Poszczególne elementy będziemy oznaczać przez $E_e$ gdzie e=1,2...m. Zachodzi:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{m} \bar{E}_e$$

Na powierzchniach dzielących obszar $\Omega$ na elementy wyróżniamy zbiór punktów nazywanych węzłami [3]. Węzły będziemy numerować indeksem a, gdzie a=1,2...n.

Załóżmy, że pole temperatury w danym elemencie można opisać następującą funkcją:

$$\theta(x,t) = \Phi(x,q(t)) = \sum_{a=1}^{n} \bar{N}_a^e(x) q_a(t) \qquad (2.1)$$

gdzie:

$$\bar{N}_a^e(x) = \begin{cases} 0 \text{ gdy węzeł "a" nie należy do } \bar{E}_e \\ 0 \text{ gdy } x \notin E \\ N_a^e \text{ gdy } x \in E_e \text{ i "a" należy do } \bar{E}_e \end{cases}$$

gdzie $q_a(t)$ sa temperaturami w węzłach, a $N_a^e(x)$ są funkcjami położenia, nazywanymi funkcjami kształtu. Funkcje kształtu charakteryzują rozkład pola wewnątrz elementu. Dla tak określonej klasy $\Pi$ funkcji, do której należy pole temperatury, można znaleść wielkości charakterystyczne dla lagranżowskiego sformułowania przewodnictwa cieplnego.

Potencjał termiczny dla danego elementu jest dany wzorem:

$$V_e(q(t)) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n} q_a q_b \int_{E_e} K_{ij} \frac{\partial \bar{N}_a^e}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{N}_a^e}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n} H_{ab}^e q_a q_b; \qquad (2.2)$$

gdzie:

$$H^{e}_{ab}(x,q(t)) = \int_{E_e} K_{ij} \frac{\partial \bar{N}^{e}_{a}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{N}^{e}_{b}}{\partial x_i}\, dx \;. \tag{2.3}$$

Funkcja dyssypatywna wyraża się następującym równaniem:

$$D_e(q(t),\dot{q}(t)) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n} I^{e}_{ab}\dot{q}_a\dot{q}_b , \tag{2.4}$$

gdzie:

$$I^{e}_{ab}(x) = \int_{E_e} \rho(x)c(x)\bar{N}^{e}_{a}\bar{N}^{e}_{b}\,dx \;. \tag{2.5}$$

Wyrażenie uwzględniające nieliniowe własności materiału ma postać:

$$L_{ce}(q(t)) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n} J^{e}_{abc} q_a q_b . \tag{2.6}$$

gdzie:

$$J^{e}_{abc}(x,q(t)) = \int_{E_e} \frac{\partial K_{ij}}{\partial q_c} \frac{\partial \bar{N}^{e}_{a}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{N}^{e}_{b}}{\partial x_i} dx \;. \tag{2.7}$$

Uogólnione, fizyczne źródła ciepła mają postać :

$$Q^{L}_{ec}(q(t)) = \int_{\partial E_e \cap (\partial\Omega \cup \Xi)} \sigma^{L}\bar{N}^{e}_{c}\,da + \int_{E_e} \rho\alpha^{L}\bar{N}^{e}_{c}\,dx \;. \tag{2.8}$$

Uogólnione, ograniczone źródła ciepła mają postać:

$$Q^{O}_{ec}(q(t)) = \int_{\partial E_e \cap (\partial\Omega \cup \Xi)} \sigma^{O} \bar{N}^{e}_{c} da + \int_{E_e} \rho\alpha^{O} \bar{N}^{e}_{c} dx \qquad (2.9)$$

Wykorzystując wielkości dane wzorami od (2.2) do (2.9) w lagranżowskim równaniu przewodnictwa cieplnego (1.3) i sumując stronami po wszystkich elementach otrzymujemy:

$$\sum_{a=1}^{n}\sum_{e=1}^{m} H^{e}_{ab} q_b + \sum_{a=1}^{n}\sum_{e=1}^{m} I^{e}_{ab} \dot{q}_b = R_a +$$

$$\sum_{e=1}^{m} \int_{\partial E_e \cap (\partial\Omega \cup \Xi)} \sigma^{L} \bar{N}^{e}_{c} da + \sum_{e=1}^{m} \int_{\partial E_e \cap (\partial\Omega \cup \Xi)} \sigma^{O} \bar{N}^{e}_{c} da + \qquad (2.10)$$

$$\sum_{e=1}^{m} \int_{E_e} \rho\alpha^{L} \bar{N}^{e}_{c} dx + \sum_{e=1}^{m} \int_{E_e} \rho\alpha^{O} \bar{N}^{e}_{c} dx \, .$$

Aby przedstawić równanie (2.10) w postaci macierzowej wprowadzam następujące wielkości:

- macierz przewodnictwa cieplnego **H** daną następującym wzorem:

$$\mathbf{H} = [H_{ab}] \qquad \text{gdzie } a,b=1,2...n$$

$$H_{ab} = \sum_{e=1}^{m} H^{e}_{ab} \qquad \text{gdzie} \qquad (2.11)$$

$$H^{e}_{ab}(x,q(t)) = \int_{E_e} K_{ij} \frac{\partial \bar{N}^{e}_{a}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{N}^{e}_{b}}{\partial x_i} dx \, .$$

- macierz pojemności cieplnej **I** daną wzorem:

$$I = [I_{ab}] \qquad \text{gdzie } a,b=1,2\ldots n$$

$$I_{ab} = \sum_{e=1}^{m} I^e_{ab} \qquad \text{gdzie} \qquad (2.12)$$

$$I^e_{ab}(x) = \int_{E_e} \rho(x)c(x)\bar{N}^e_a \bar{N}^e_b dx,$$

- wektor temperatur w węzłach $\{T\}$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \\ q_n \end{Bmatrix}, \qquad (2.13)$$

- wektor prędkości temperatur w węzłach $\{\dot{T}\}$

$$\{\dot{T}\} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix}, \qquad (2.14)$$

- wektor fizycznych źródeł ciepła $\{Q^L\}$

$$\{Q^L\} = \begin{Bmatrix} Q^L_1 \\ Q^L_2 \\ Q^L_n \end{Bmatrix}, \qquad (2.15)$$

gdzie:

$$Q^L_a = \sum_{e=1}^{m} \int_{\partial E_e \cap (\partial\Omega \setminus E)} \sigma^L \bar{N}^e_a(x)da + \sum_{e=1}^{m} \int_{E_e} \rho\alpha^L \bar{N}^e_a(x)dx, \qquad (2.16)$$

-wektor ograniczonych źródeł ciepła $\{Q^{o}\}$

$$\{Q^{o}\} = \begin{Bmatrix} Q^{o}_{1} \\ Q^{o}_{2} \\ Q^{o}_{n} \end{Bmatrix} , \tag{2.17}$$

gdzie:

$$Q^{o}_{a} = \sum_{e=1}^{m} \int_{\partial E_e \cap (\partial\Omega\setminus\Xi)} \sigma^{o}\bar{N}^{e}_{a}(x)da + \sum_{e=1}^{m} \int_{E_e} \rho\alpha^{o}\bar{N}^{e}_{a}(x)dx, \tag{2.18}$$

- wektor doskonałych źródeł ciepła $\{R\}$

$$\{R\}=\begin{Bmatrix} R_{1} \\ R_{2} \\ R_{n} \end{Bmatrix}. \tag{2.19}$$

Równanie (2.10) w postaci macierzowej wyraża się formułą:

$$\mathbf{H}\{T\} + \mathbf{I}\{\dot{T}\} = \{Q^{L}\} + \{Q^{o}\} + \{R\}. \tag{2.20}$$

Warunki doskonałej realizacji ograniczeń pola temperatury (1.8) przedstawia nierówność:

$$\beta\{R\}^{T}(\{\dot{T}\} - \{\bar{T}\}) \le 0 \quad \forall\ \{\bar{T}\} \in \mathbb{U}'(\{T(t)\}) \subset \mathbb{R}^{N} , \tag{2.21}$$

gdzie $\beta \in \mathbb{R}^{+}$.

Druga lagranżowska zasada minimum prędkości produkcji entropii ma postać:

$$\beta\{\dot{T}\}^{T}(\{Q^{o}\} - \{\bar{Q}^{o}\}) \le 0 \quad \forall\ \{\bar{Q}^{o}\} \in \mathbf{S} \tag{2.22}$$

gdzie $\beta \in \mathbb{R}^{+}$ i gdzie:

$$\mathbb{S} \equiv \left\{ \{s\} \in \mathbb{R}^N : s_a = \sum_{e=1}^{m} \int_{\partial E_e \cap (\partial\Omega\cup\Xi)} \sigma^o \bar{N}^e_a(x)\,da + \sum_{e=1}^{m} \int_{E_e} \rho\alpha^o \bar{N}^e_a(x)\,dx \right.$$

$$\sigma^o(x,t) \in \mathbb{S}_x \left[ \sum_{a=1}^{n} \sum_{e=1}^{m} \bar{N}^e_a(x) q_a(t) \right] \quad x \in \partial\Omega\cup\Xi \qquad (2.23)$$

$$\left. \alpha^o(x,t) \in \mathbb{A}_x \left[ \sum_{a=1}^{n} \sum_{e=1}^{m} \bar{N}^e_a(x) q_a(t) \right] \quad x \in \Omega\setminus\Xi \right\}.$$

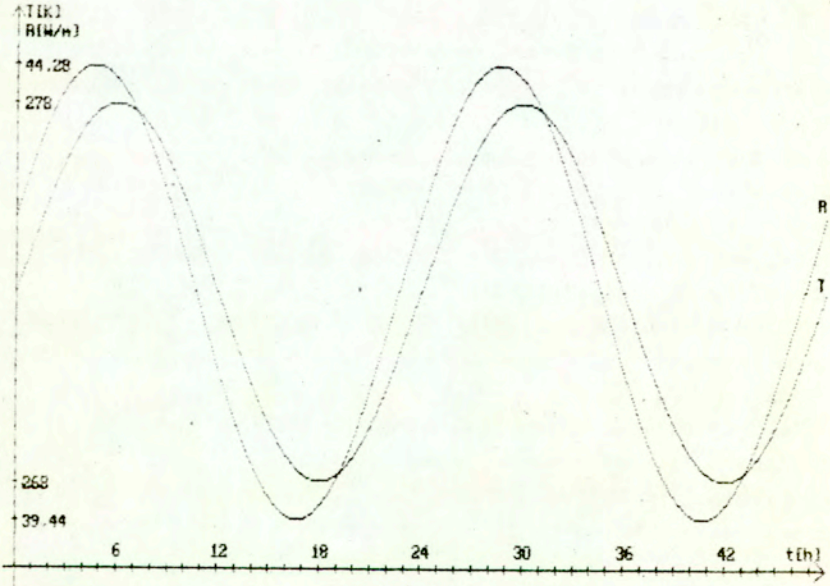
Równanie (2.20) wraz z warunkami (2.21) i (2.22) reprezentują lagranżowski model przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem sterowania w ujęciu metody elementów skończonych.

### 3. Przykład.

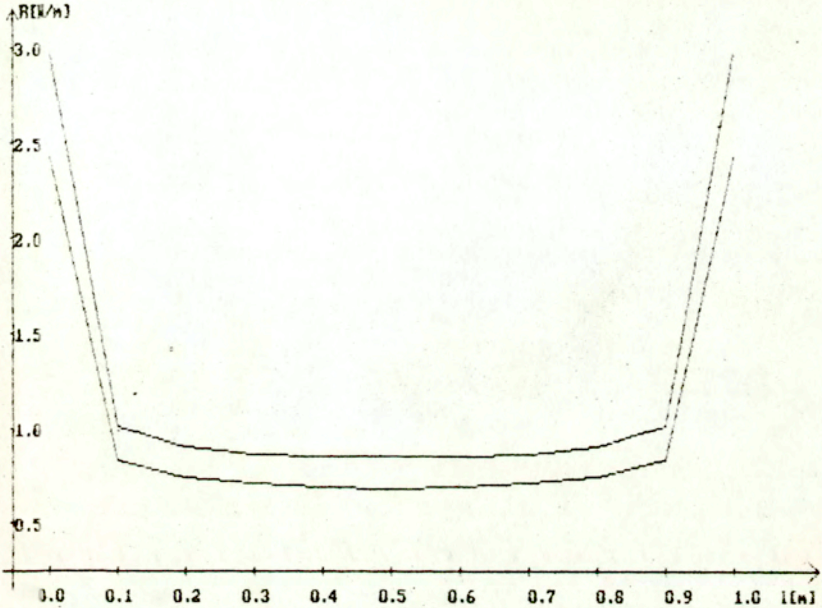
W niniejszym przykładzie obliczono wydajność źródeł ciepła utrzymujących stałą temperaturę 20°C na wewnętrznej powierzchni ścian i wewnątrz pomieszczenia, na zewnątrz którego panuje zmienna temperatura. Pomieszczenie ma wewnętrzne wymiary metr na metr. Ściany tego pomieszczenia są trójwarstwowe i składają się odpowiednio (wymieniając od zewnątrz do wewnątrz) z: warstwy betonu o grubości 18 cm., warstwy wełny mineralnej o grubości 8 cm. i warstwy cegły o grubości 12 cm. Temperatura na zewnątrz pomieszczenia zmienia się sinusoidalnie w zależności od czasu. Temperatura maksymalna wynosi +5°C a minimalna -5°C. Okres zmian wynosi 24 godziny.

Ze względu na uproszczenie obliczeń, zwiększenie ich dokładności i skrócenie czasu, wykorzystuję symetrię zagadnienia i obliczenia wykonuję dla jednej czwartej pomieszczenia. Zakładam, że mam do dyspozycji źródła ciepła o nieograniczonej mocy, umieszczone na wewnętrznej powierzchni ściany. Zakładam także, że oddziaływanie otoczenia w jakim znajduje się pomieszczenie z zewnętrzną powierzchnią ściany jest opisywane przez warunki brzegowe pierwszego rodzaju.

Ponieważ na wewnętrznej powierzchni ściany i wewnątrz pomieszczenia dopuszczalna temperatura wynosi 20°C to w tych punktach prędkość temperatury wynosi 0 i nierówność (2.21) jest tożsamościowo spełniona. Wydajność źródeł ciepła realizujących sterowanie doskonałe można bezpośrednio obliczyć z równania (2.20). Wyniki przedstawiam na wykresie 1 gdzie jedna krzywa opisuje zmiany temperatury na zewnątrz pomieszczenia, a druga zmiany sumarycznej mocy źródeł realizujących sterowanie doskonałe. Na wykresie 2 przedstawiłem rozkład mocy źródeł realizujących sterowanie doskonałe na długości ściany w momencie gdy moc ta jest największa i najmniejsza.




RYS 1



RYS. 2

## CYTOWANA LITERATURA

1. J.Woźniak. Zasady wariacyjne wymiany ciepła i ich zastosowanie w fizyce budowli. Część pierwsza Warszawa 1990.
2. M. A. Biot. Variational Principles in Heat Transfer. Oxford 1970.
3. O.C.Zienkiewicz. The Finite Element Method in Engineering Science. London 1971.

## SPIS TREŚCI