7.71 — mechanika ogólna i analityczna, ogólna teoria układów mechanicznych

Jerzy Szadkowski

DO PROBLEMU STRUKTURY TRÓJWYMIAROWEJ PRZESTRZENI ROZWIĄZAŃ OPTYMALNYCH

40/1990

WARSZAWA 1990

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 kwietnia 1990 r.

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Technika PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd.0,8 Ark.druk 1,0
Oddano do drukarni w listopadzie 1990 r.
Nr zamówienia 371/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Jerzy Szadkowski
SPMUD

DO PROBLEMU STRUKTURY TRÓJWYMIAROWEJ PRZESTRZENI ROZWIĄZAŃ OPTYMALNYCH

Streszczenie. W pracy sformułowano warunki konieczne optymalności rozwiązań liniowego równania różniczkowego, zaczynających się w pewnych obszarach przestrzeni stanu R^3. Podano sposób dekompozycji przestrzeni i uzyskania tych obszarów.

1. Niech będzie równanie różniczkowe

(1) $$\dot{x} = Ax + Bu\ , \qquad x \in R^3, \qquad u \in U \subset R^2\ ,$$

gdzie A jest macierzą stałą 3×3 o wartościach własnych rzeczywistych ujemnych, B - macierzą stałą 3×2 , $u = (u_1, u_2)^T$, $U = \{u:\ c_l^1 \leq u \leq c_l^2\}$, $c_l^1 < 0$, $c_l^2 > 0$, $l = 1,2$.

O równaniu (1) wiadomo, że:

1°- obszar sterowalności pokrywa się z R^3, [1] ;

2°- sterowanie optymalne u jest funkcją odcinkami stałą, przyjmującą wartości (c_1^j, c_2^k), $j,k \in (1,2)$, taką, że każda jej współrzędna ma w przedziale $\langle t_0, t_\theta \rangle$ nie więcej niż dwa przełączenia, [1] . Niech a,b,c,d będą wartościami funkcji u i $\mathcal{A}$ ich zbiorem;

3°- jeśli $T^{(i)}$ $(T^{(i)} = T^{(i)}\langle \theta, I^- \rangle)$ jest półtrajektorią ujemną równania (1), odpowiadającą sterowaniu i $(i \in \mathcal{A})$ (krawędzią) i jeśli $x(x^\circ, t)$, $x^\circ \in R^3 \setminus \theta$, jest rozwiązaniem optymalnym równania (1), to

(2) $$\exists\, i \in \mathcal{A}\ \ \exists\, \bar{t} \geq 0 \qquad \forall\, t \in \langle \bar{t}, t_\theta \rangle\ , \qquad x(x^\circ, t) \in T^{(i)}\ ;$$

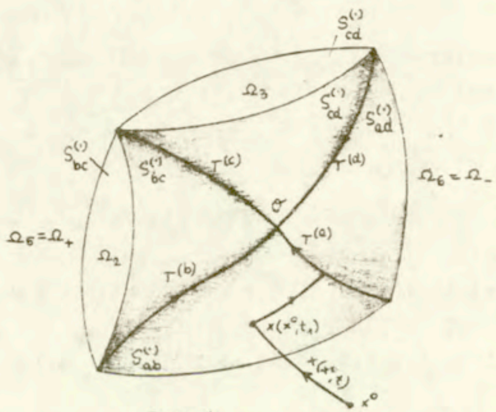
4°- jeśli S_{ij} jest dwuwymiarową rozmaitością różniczkową:

$$S_{ij} = T^{(j)}(T^{(i)}(\theta, I^-), I^-) = \{x:\ x \in \{T^{(j)}(x^\circ, I^-):\ x^\circ \in T^{(i)}(\theta, I^-)\}\},$$

$(i, j \in \mathcal{A}$, $j \neq i$, i, j są sterowaniami sąsiadujących ze sobą wierzchołków prostokąta sterowań U, [2] , podzbiorem R^3 półtrajektorii ujemnych równania (1) generowanych przez krawędź $T^{(i)}$ i zwanym dalej ścianą, i jeśli $x(x^0,t)$, $x^0 \in R^3 \setminus \{T^{(i)}\}$, jest rozwiązaniem optymalnym równania (1), to

$$(3)\quad \exists\, i,j \in \mathcal{U}\ ,\ j \neq i \quad \exists\, t_1 \geqslant 0 \quad \exists\, t_2 > t_1$$
$$\left(\forall\, t \in \langle t_1, t_2),\ x(x^0,t) \in S_{ij} \ \text{ i } \ \forall\, t \in \langle t_2, t_\theta),\ x(x^0,t) \in T^{(i)}\right).$$

Punkty 3^0 i 4^0 można interpretować następująco: niech K będzie figurą geometryczną miary 0 w R^3 złożoną z następujących elementów: punktu $\mathcal{O}$, czterech krawędzi $T^{(i)}$ (i = a,b,c,d) i ośmiu ścian S_{ij} (i,j = a,b,c,d , $i \neq j$, i,j są sterowaniami sąsiednich wierzchołków U) i zwaną dalej szkieletem podstawowym, rys.1. Wtedy, jeśli $x(x^0,t)$ jest rozwiązaniem optymalnym równania (1) zaczynającym się poza szkieletem podstawowym, $x^0 \in R^3 \setminus K$, to w



Rys.1

skończonym czasie osiąga ono jedną ze ścian szkieletu K, biegnie następnie wzdłuż tej ściany do osiągnięcia generującej tę ścianę krawędzi, dalej wzdłuż niej aż do osiągnięcia w czasie t_θ początku układu (rys.1).

Szkielet podstawowy K dzieli przestrzeń R^3 na 6 rozłącznych obszarów trójwymiarowych Ω_i (i = 1,...,6) zwanych dalej komórkami. Elementy K wraz z komórkami są elementami dekompozycji $\mathcal{D}$ przestrzeni R^3. Każdemu elementowi figury K, z wyjątkiem początku układu współrzędnych $\mathcal{O}$, przyporządkowane jest dokładnie jedno z praw ruchu (i):

(1*) $\dot{x} = Ax + Bi \,, \quad x \in R^3 \setminus W \,, \quad \mu W = 0 \,, \quad i = a,b,c,d \,,$

a więc określona jest surjekcja

$$\sigma : K \to (1^*);$$

W jest pewnym podzbiorem R^3, K jest figurą orientowalną. Komórki dekompozycji $\mathcal{D}$ (por.rys.1) są dwojakiego rodzaju: dwuścienne - ograniczone przez dwie ściany S_{ij}, S_{ji} $(i,j \in \mathcal{H}\,,\ i \neq j)$ - oznaczane jako Ω_{ij} i czterościenne - ograniczone przez cztery ściany: $S_{ab}^{(\cdot)}, S_{bc}^{(\cdot)}, S_{cd}^{(\cdot)}, S_{ad}^{(\cdot)}$ (wskaźniki dolne przyjęto tu w dowolnej kolejności, prawo ruchu na ścianie pokazane jest przez górny wskaźnik) - oznaczane przez Ω_-, Ω_+ w zależności od tego do której półprzestrzeni należą.

Celem pracy jest podanie warunków optymalności rozwiązań $x(x^o,t)$ równania (1), zaczynających się w komórkach czterościennych.

2. Niech Ω będzie zbiorem trójwymiarowych obszarów Ω_i $(i < +\infty)$ powstałych z podziału komórek dekompozycji $\mathcal{D}$ zbiorem L rozmaitości dwu- i jednowymiarowych (zbiory miary zero w R^3). Nową dekompozycję R^3 będziemy oznaczać przez $\mathcal{D}'$, a

$$K' = K \cup L$$

będziemy nazywać szkieletem równania (1) przy dekompozycji $\mathcal{D}'$, lub szkieletem dekompozycji $\mathcal{D}'$.

Niech będzie równanie (1*). Załóżmy, że zadane jest przyporządkowanie

(4) $\delta : \Omega \xrightarrow{inj} \mathcal{H}.$

DEFINICJA 1. Dwójkę (K', δ) nazywamy strukturą równania (1) jeśli, przy zadanym przyporządkowaniu (4), wszystkie elementy szkieletu podstawowego K są zbiorami półpoślizgów, [3], rozwiązań równania

(1**) $\dot{x} = Ax + Bi \,, \quad x \in \Omega \,, \quad i \in \mathcal{H} \,.$

Struktura nazywa się optymalna, jeśli wszystkie rozwiązania są optymalne.

Będziemy mówili o prawie ruchu $(\cdot)$ na rozmaitości różniczkowej P i oznaczali $P^{(\cdot)}$, jeśli określone jest równanie różniczkowe

$$\dot{x} = Ax + Bi\,, \quad x \in P\,, \quad i \in \mathcal{H}\,.$$

DEFINICJA 2. O dwóch strukturach (K_1', δ_1) i (K_2', δ_2) mówimy, że są równe: $(K_1', \delta_1) = (K_2', \delta_2)$, jeśli:

1°- ich szkielety K_1', K_2' są izomorficzne:

(5) $$K_1' = g(K_2'), \quad g \text{ - izomorf. } R^3 \to R^3,$$

2°- $\delta_1 = \delta_2$.

Jeśli $\{K'\}$ oznacza zbiór wszystkich szkieletów struktury równania (1), to (5) jest relacją równoważności w zbiorze $\{K'\}$. Dla danej liczby l elementów szkieletu K' relacja (5) rozbija zbiór $\{K'\}$ na skończoną liczbę klas równoważności $(K')^{(j)}$ $(j = 1,\ldots,J\,,\ J < -\infty)$. W dalszym ciągu, jeśli nie będzie to budziło wątpliwości, będziemy utożsamiali szkielet K', a więc reprezentację pewnej klasy równoważności $(K')^{(i)}$, z tą klasą. Istotnie,

$$\forall K' \in \{K'\} \quad \exists\, i \in (1,\ldots,J)\,, \quad K' \in (K')^{(i)},$$

tzn. każdy szkielet jest reprezentacją pewnej klasy.

WNIOSEK 1.

$$\forall (i,j)(i,j \in (1,\ldots,J)\,,\ i \neq j)\ \forall \bar{K}' \in (K')^{(i)}$$
$$\forall\ \bar{\bar{K}}' \in (K')^{(j)}\ \sim\exists\, g\,, \quad \bar{K}' = g(\bar{\bar{K}}')\,.$$

DEFINICJA 3. Dekompozycję $\mathcal{D}'$ przestrzeni R^3 nazywamy możliwą, jeśli generuje ona strukturę (K', δ) równania (1).

Niech $\{\mathcal{D}\}$ będzie zbiorem wszystkich możliwych dekompozycji R^3.

HIPOTEZA 1 (podstawowa). W strukturze optymalnej $(K', \delta)_{opt}$ równania (1) liczby komórek i elementów zbioru L osiągają swoje minima na zbiorze $\{\mathcal{D}'\}$.

Wynika stąd następujący

WNIOSEK 2. Jeśli $\bar{x}(x^o, t)$ i $x(x^o, t)$, $x^o \in R^3 \setminus \mathcal{C}$, są odpowiednio rozwiązaniami struktur: optymalnej $(\bar{K}', \bar{\delta})$ i (K', δ) $(\neq (\bar{K}', \bar{\delta}))$ o liczbach przełączeń odpowiednio n i m, to $n \leq m$. Oznacza to, że jeśli M jest zbiorem liczb przełączeń współrzednych wszystkich rozwiązań $x(x^o, t)$ dla pewnego ustalonego punktu początkowego x^o, to

$$n = \min_{M} m$$

3\. LEMAT 1. Dwójka (K, δ), gdzie K jest szkieletem podstawowym i δ - przyporządkowaniem (4), nie jest strukturą optymalną równania (1).

Dowód. Niech bowiem (K, δ) będzie strukturą optymalną równania (1). Niech, dla ustalenia uwagi, komórce czterościennej Ω_- będzie przyporządkowane prawo ruchu (a) : $\Omega_-^{(a)}$. Mogą być trzy przypadki układów elementów brzegu komórki $\Omega_-^{(a)}$ na których obowiązuje prawo (a) i poza którymi to prawo nie obowiązuje: 1^o- krawędź $T^{(a)}$, 2^o- krawędź $T^{(a)}$ i jedna ze ścian $S_{ab}^{(a)}$ lub $S_{ad}^{(a)}$, 3^o- krawędź $T^{(a)}$ i dwie ściany $S_{ab}^{(a)}$ i $S_{ad}^{(a)}$. Układy te odpowiadają trzem różnym szkieletom podstawowym (przyp.: jako klasom równoważności) odpowiednio K^1, K^2, K^3. Ponieważ, z założenia odwrotnego, każde rozwiązanie $x(x^o,t)$, $x^o \in \Omega_-$, jest rozwiązaniem optymalnym równania (1) (p. def. 1) więc, zgodnie z punktem 4^o paragrafu 1, osiąga ono odpowiedni szkielet K^i $(i = 1,2,3)$ dla $t = \bar{t} < +\infty$ w podzbiorze (p.rys.1) :

$$T^{(b)} \cup T^{(c)} \cup T^{(d)} \cup S_{ab}^{(b)} \cup S_{bc}^{(\cdot)} \cup S_{cd}^{(\cdot)} \cup S_{ad}^{(\cdot)} \qquad \text{dla } i = 1 ,$$

$$T^{(b)} \cup T^{(c)} \cup T^{(d)} \cup (S_{ab}^{(b)} \vee S_{ad}^{(d)}) \cup S_{bc}^{(\cdot)} \cup S_{cd}^{(\cdot)} \qquad \text{dla } i = 2 ,$$

$$T^{(b)} \cup T^{(c)} \cup T^{(d)} \cup S_{bc}^{(\cdot)} \cup S_{cd}^{(\cdot)} \qquad \text{dla } i = 3 .$$

A więc

$$\exists\, x^o \in \Omega_-^{(a)} \quad \exists\, \bar{t} > 0 \quad \begin{cases} \forall\, t \in \langle 0, \bar{t}), \quad x(x^o,t) \in \Omega_-^{(a)} , \\ \text{i} \\ x(x^o,\bar{t}) \in T^{(c)} , \end{cases}$$

co jest sprzeczne 1^o- z punktem 4 paragrafu 1 i 2^o- ze zmianą prawa ruchu wg boków prostokąta sterowań U : przyjęto bowiem obieg a,b,c,d. Prawdziwa jest więc teza lematu.

WNIOSEK 3. Szkielet struktury optymalnej K' jest nadzbiorem szkieletu podstawowego K , tzn. $L \neq \phi$.

WNIOSEK 4. Struktura optymalna nie dopuszcza komórek czterościennych Ω_-, Ω_+ .

4\. Dokonajmy najprostszego podziału komórek Ω_-, Ω_+ ścianami odpowiednio S_-, S_+ tak, aby nie powstały dodatkowe krawędzie w stosunku do szkieletu K, tzn. utwórzmy szkielet K′:

(6) $$K' = K \cup S_- \cup S_+ \ .$$

Rozważmy, dla ustalenia uwagi, komórkę Ω_-. Zgodnie z założeniem, że liczby krawędzi szkieletów K i K′ są równe, domknięcie ściany S_- zawiera początek układu współrzednych $\mathcal{O}$ oraz parami krawędzie $T^{(a)}$ i $T^{(c)}$ lub $T^{(b)}$ i $T^{(d)}$ (por.rys.1). Niech, znów dla ustalenia uwagi, będzie to para $T^{(a)}$, $T^{(c)}$. Zatem nowa dekompozycja $\mathcal{D}'$ zawiera dwie komórki trójścienne, które oznaczymy przez Ω_d i Ω_b od krawędzi $T^{(d)}$ i $T^{(b)}$ należących do ich domknięć. Załóżmy, że w komórce Ω_d obowiązuje prawo ruchu (i), a w komórce Ω_b - prawo (j), $i, j \in \mathcal{R}$, $i \neq j$. Pokażemy w dalszym ciągu, że dekompozycja $\mathcal{D}'$ jest możliwa w sensie def.3.

Załóżmy, że ściana S_- jest zbiorem przejść rozwiązań równ. (1), a więc przełączenia sterowania u. Załóżmy, dla ustalenia uwagi, że rozwiązania przechodzą przez S_- z komórki Ω_d do komórki Ω_b, tzn. że prawo ruchu na rozwiązaniach równania (1) zmienia się na S_- z (i) na (j). Wtedy słuszne są następujące dwa lematy.

LEMAT 2. Warunkiem koniecznym na to, aby dwójka $(\Omega_d, (i))$ była obcięciem $(K', \delta)|_{\Omega_d}$ struktury optymalnej (K', δ) do zbioru Ω_d, gdzie K′ jest zdefiniowanym wyżej szkieletem, jest:

1^0- $i = d$,

2^0- $\bar{\Omega}_d \supset S^{(d)}_{ad}$, $\bar{\Omega}_d \supset S^{(d)}_{cd}$.

Dowód polega na spostrzeżeniu, że tylko w przypadku określonym warunkami lematu

$$\forall x^0 \in \Omega_d \quad \exists\, \bar{t} > 0 \quad \begin{cases} \forall t \in \langle 0, \bar{t}), & x(x^0, t) \in \Omega_d, \\ x(x^0, \bar{t}) \in S_- & . \end{cases}$$

We wszystkich pozostałych przypadkach par złożonych z prawa ruchu (i) w Ω_d i kombinacji ścian $S^{(\cdot)}_{ad}$, $S^{(\cdot)}_{cd}$ komórki Ω_d,

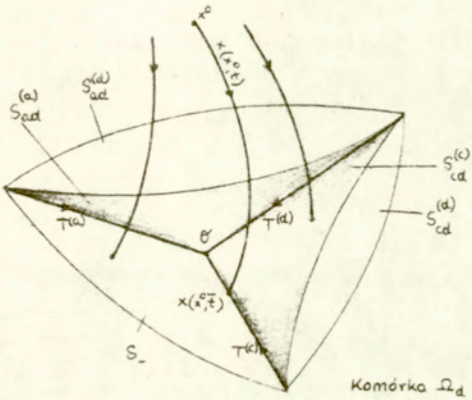
$$\exists\, j \in \mathcal{R} \quad \exists\, x^0 \in \Omega_d \quad \exists\, \bar{t} > 0 \quad \begin{cases} \forall t \in \langle 0, \bar{t}), & x(x^0, t) \in \Omega_d, \\ x(x^0, \bar{t}) \in T^{(j)}, \end{cases}$$

co jest wykluczone przez założenie, że $x(x^0, t)$ jest rozwiązaniem optymalnym równania (1) - por. punkt 4° z §1.

Przykład struktury (K', δ) takiej, że

$$(K', \delta)|_{\Omega_d} = (\Omega_d, (a)), \quad \overline{\Omega}_d \supset S_{ad}^{(a)}, \quad \overline{\Omega}_d \supset S_{cd}^{(c)}$$

podaje rys.2.



Rys.2

Niech K' będzie zdefiniowanym przez (6) szkieletem i niech $(\Omega_d, (d)) = (K', \delta)|_{\Omega_d}$, gdzie (K', δ) jest pewną strukturą równania (1). Wtedy

LEMAT 3. Warunkiem koniecznym na to, aby dwójka $(\Omega_b, (j))$ była obcięciem $(K', \delta)|_{\Omega_b}$ struktury optymalnej (K', δ) do zbioru Ω_b jest, by spełniony był jeden z dwu warunków:

1°- $j = a$, $\overline{\Omega}_b \supset S_{ab}^{(a)}$, $\overline{\Omega}_b \supset S_{bc}^{(b)}$,

2°- $j = c$, $\overline{\Omega}_b \supset S_{ab}^{(b)}$, $\overline{\Omega}_b \supset S_{bc}^{(c)}$,

Dowód. (j) jest prawem ruchu w komórce Ω_b, przy czym $j =$ a lub $j = c$. Istotnie, $j \neq d$ bo (j) jest z założenia różne od prawa ruchu obowiązującego w komórce $\Omega_d^{(d)}$ (p.lemat 2) i $j \neq$ b, ponieważ nie może być przełączenia (d) - (b) (przekątna prostokąta sterowań) przy przejściu rozwiązania przez ścianę S_-.

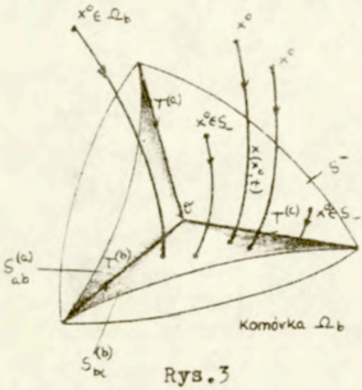
Niech $j = a$. Wtedy wykluczone są kombinacje ścian komórki Ω_b:

$$S_{ab}^{(b)} \text{ i } S_{bc}^{(c)}, \qquad S_{ab}^{(b)} \text{ i } S_{bc}^{(c)},$$

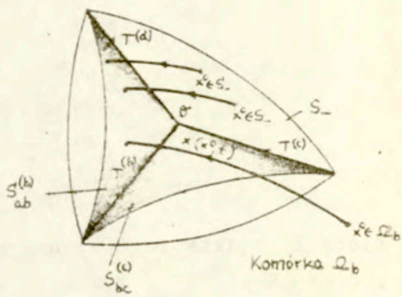
wtedy bowiem w komórce $\Omega_b^{(a)}$ byłoby:

$$\exists\, x^\circ \in \Omega_b \cup S_- \quad \exists\, \bar{t} > 0 \quad \begin{cases} \forall\, t \in (0,\bar{t}), & x(x^\circ,t) \subset \Omega_b, \\ x(x^\circ,\bar{t}) \in T^{(b)}. \end{cases}$$

Wykluczona jest również kombinacji ścian $S_{ab}^{(a)}$ i $S_{bc}^{(c)}$, bo wtedy na ścianie $S_{bc}^{(c)}$ realizowane byłoby przełączenie (a) - (c), a więc po przekątnej prostokąta sterowań U. Pozostaje jedyna kombinacja ścian: $S_{ab}^{(a)}$ i $S_{bc}^{(b)}$ (p.rys.3), przy której



Rys.3



Rys.4

$$\forall\, x^\circ \in \Omega_b \cup S_- \quad \exists\, \bar{t} > 0 \quad \begin{cases} \forall\, t \in (0,\bar{t}), & x(x^\circ,t) \in \Omega_b, \\ x(x^\circ,\bar{t}) \in S_{bc}^{(b)}. \end{cases}$$

Analogicznie dowodzi się, że jeśli $j = c$, to możliwa jest tylko jedna kombinacja ścian komórki Ω_b : $S_{ab}^{(b)}$ i $S_{bc}^{(c)}$ (p.rys.4), przy której

$$\forall\, x^\circ \in \Omega_b \cup S_- \quad \exists\, \bar{t} > 0 \quad \begin{cases} \forall\, t \in (0,\bar{t}), & x(x^\circ,t) \in \Omega_b, \\ x(x^\circ,\bar{t}) \in S_{ab}^{(b)}. \end{cases}$$

To kończy dowód lematu.

Lematy 2 i 3 można uogólnić, formułując następujący

WNIOSEK 5. Niech Ω_i $(i \in \mathcal{N})$ będzie zdefiniowaną wyżej komórką trójścienną, której jedna ze ścian jest S_k $(k \in \{-,+\})$. Warunkiem koniecznym na to, aby dwójka $(\Omega_i, (j))$ $(j \in \mathcal{N})$ była obcięciem struktury optymalnej (K',δ) do zbioru Ω_i jest, by spełniony był jeden z dwu warunków:

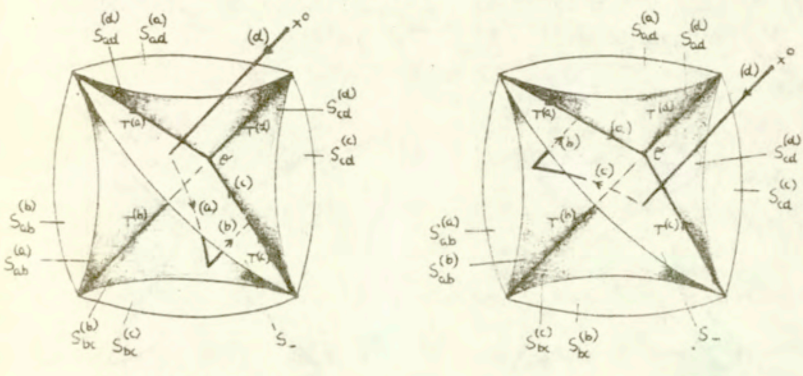
1) $j = i$, gdy dwie przyległe do krawędzi $T^{(i)}$ ściany rozporządzają prawem ruchu (i),

2) $j = l$, $l \neq i$, gdy do krawędzi $T^{(i)}$ przylegają dwie ściany $S_{il}^{(l)}$, $S_{im}^{(m)}$ $(l,m \in \mathcal{N})$ przy czym pary $((i),(l))$ i $((i),(m))$ wyznaczają boki prostokąta sterowań U.

W przypadku 1) wszystkie rozwiązania równania (1) zaczynające się w komórce Ω_i osiągają w skończonym czasie ścianę S_k, w przypadku 2) komórka Ω_i jest zbiorem odcinków trajektorii równania (1) o początkach należących do S_k i końcach - do $S_{im}^{(m)}$.

Zauważmy, że K' jest oznaczeniem dowolnego szkieletu (jako klasy) podstawowego uzupełnionego o ściany S_-, S_+. Zatem, w oparciu o lematy 2 i 3 można sformułować następujący

WNIOSEK 6. K' dopuszcza dwie struktury (rys.5) optymalne



a) Struktura K , b) Struktura K ,

Rys.5

(K',δ_1) i (K'_2,δ_2) o szkieletach odpowiednio K'_1, K'_2 :

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
K'_1 &: \ \mathrm{Fr}\,\Omega_- \supset S_{cd}^{(d)} \cup S_{cd}^{(d)} \cup S_{ab}^{(a)} \cup S_{bc}^{(b)}, \\
K'_2 &: \ \mathrm{Fr}\,\Omega_- \supset S_{ad}^{(d)} \cup S_{cd}^{(d)} \cup S_{ab}^{(b)} \cup S_{bc}^{(c)}
\end{aligned}
$$

i funkcjach δ_1, δ_2 :

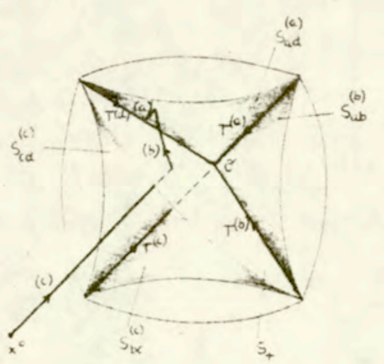
$(K_1', \mathcal{E}_1)|_{\Omega_d} = (\Omega_d, (d)), \qquad (K_1', \mathcal{E}_1)|_{\Omega_b} = (\Omega_b, (a)),$
$(K_2', \mathcal{E}_2)|_{\Omega_d} = (\Omega_d, (d)), \qquad (K_2', \mathcal{E}_2)|_{\Omega_b} = (\Omega_b, (c)).$

Struktury $(K_1', \mathcal{E}_1)$, $(K_2', \mathcal{E}_2)$, rzecz jasna, wykluczają się wzajemnie. Na ścianie S_- szkieletów K_1', K_2' realizowane są odpowiednio przełączenia $(d) - (a)$, $(d) - (c)$.

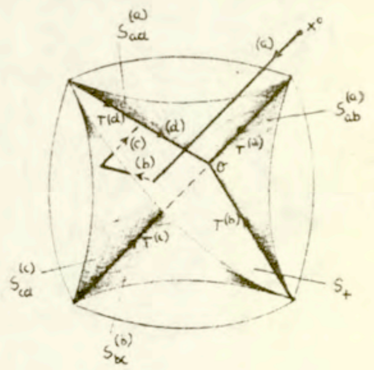
Wniosek 6, dotyczący struktury zbioru Ω_-, prowadzi do określenia brzegów zbioru Ω_+. Jest bowiem natychmiast (p.rys.5):

$$\text{(8)} \quad \begin{aligned} &\mathrm{Fr}\,\Omega_+ \supset S_{ad}^{(a)} \cup S_{cd}^{(c)} \cup S_{ab}^{(b)} \cup S_{bc}^{(c)} \quad \text{dla struktury } (K_1', \mathcal{E}_1), \\ &\mathrm{Fr}\,\Omega_+ \supset S_{ad}^{(a)} \cup S_{cd}^{(c)} \cup S_{ab}^{(a)} \cup S_{bc}^{(b)} \quad \text{dla struktury } (K_2', \mathcal{E}_2). \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla obu struktur układ ścian zbioru Ω_+ jest analogiczny do układu ścian zbioru Ω_- - istnieją dwie ściany o tym samym prawie ruchu: $S_{cd}^{(c)}$ i $S_{bc}^{(c)}$ dla struktury $(K_1', \mathcal{E}_1)$ oraz $S_{ad}^{(a)}$ i $S_{ab}^{(a)}$ dla $(K_2', \mathcal{E}_2)$. To zaś prowadzi do sposobu podziału zbioru Ω_+ ścianą S_+: przez analogię do podziału zbioru Ω_-, ściana S_+ przechodzi przez początek układu $\mathcal{O}$ i, w obu przypadkach struktur, przez krawędzie $T^{(b)}$, $T^{(d)}$ - rys.6.



a) Struktura $(K_1', \mathcal{E}_1)$



b) Struktura $(K_2', \mathcal{E}_2)$

Rys.6

Stód, prowadząc rozważania analogiczne jak dla zbioru Ω_-, dochodzi się do następującego stwierdzenia, które zapiszemy jako

WNIOSEK 7. Warunkiem koniecznym na to, by $(K_1', \mathcal{E}_1)$, $(K_2', \mathcal{E}_2)$

były strukturami optymalnymi równania (1) jest (p.rys.6), by: 1°- były spełnione warunki (8), 2°-

$$(K_1',\delta_1)\big|_{\Omega_c} = (\Omega_c,(c)), \qquad (K_1',\delta_1)\big|_{\Omega_a} = (\Omega_a,(b)),$$
$$(K_2',\delta_2)\big|_{\Omega_a} = (\Omega_a,(a)), \qquad (K_2',\delta_2)\big|_{\Omega_c} = (\Omega_c,(b)).$$

Zachodzi pytanie, czy istnieją ściany S_-, S_+ realizujące przełączenia odpowiednio (d) - (a) i (d) - (c), (c) - (b) i (a) - (b). Odpowiedź twierdzącą otrzymamy przyjmując następującą hipotezę.

HIPOTEZA 2. Jeśli (K',δ) jest strukturą optymalną równania (1), to wszystkie przełączenia odbywają się na rozmaitościach różniczkowych równania (1) postaci $T^{(\cdot)}$ lub $S^{(\cdot)}_{\cdot\cdot}$.

WNIOSEK 8. Z hipotezy 2 wynika, że ściany S_-, S_+ są rozmaitościami różniczkowymi równania (1). Są więc postaci odpowiednio $S^{(\cdot)}_{ac}$, $S^{(\cdot)}_{bd}$, przy czym

$$S_- = S^{(c)}_{ac} \quad \text{dla struktury } (K_1',\delta_1),$$
$$S_- = S^{(a)}_{ac} \quad \text{dla struktury } (K_2',\delta_2)$$

(p.rys.5 i 6). Sciany te nie należą jednak do struktury optymalnej równ.(1), tzn. jeśli (K',δ) jest strukturą optymalną równ. (1) taką, że S_- i S_+ należą do szkieletu K', to S_- i S_+ są zbiorami niekreśloności funkcji δ.

WNIOSEK 9. Jeśli (K',δ), gdzie K' jest szkieletem (6), jest strukturą optymalną równania (1), to:

1°- szkielet K' jest jednym z dwu przypadków określonych we wniosku 8 i

2°- δ jest przyporządkowaniem określonym przez lematy 2 i 3 dla odpowiedniego przypadku szkieletu.

Przypomnijmy, że komórki trójścienne Ω_b, Ω_d powstały przez podział komórki czterościennej Ω_- rozmaitością różniczkową $S^{(\cdot)}_-$ (hipoteza 2) o nieokreślonym górnym wskaźniku. Zauważmy, że górny wskaźnik, a więc prawo ruchu na rozmaitości S_- nie miał dla rozważań znaczenia, ponieważ (przyp. wniosek 8) przyporządkowanie δ jest na S_- nieokreślone. Dla struktury optymalnej ma znaczenie tylko istnienie takiej rozmaitości różniczkowej $S_-^{(\cdot)}$, dokładniej ściany $S_{ac}^{(i)}$ $(i\in\{a,c\})$. Można łatwo pokazać, że w komórce Ω_- istnieje dokładnie jedna rozmaitość $S_-^{(\cdot)}$ postaci $S_{ac}^{(i)}$. Istotnie, weźmy dla ustalenia uwagi ścianę $S_{ac}^{(c)}$; ściana ta należy do jednej z dwu komórek czterościennych: Ω_- lub Ω_+. Niech, znów dla ustalenia uwagi, $S_{ac}^{(c)}\subset\Omega_-$. Wtedy wartość pola wektorowego równania (1) odpowiadającego prawu ruchu (c) w punkcie σ jest

$$f_{(c)}(\sigma) = B\,c^T$$

i, zgodnie z przyjęciem, jest to wektor należący do dopełnienia zbioru Ω_-. Odpowiednio wektor

$$f_{(a)}(\sigma) = B\,a^T$$

i przy $a = -c$ (przyp.: naroża przekątnej prostokąta sterowań U) jest

$$f_{(a)}(\sigma) = -f_{(c)}(\sigma)$$

co znaczy, że $f_{(a)}(\sigma)\in\Omega_-$: $S_{ac}^{(a)}\notin\Omega_-$ a więc, że $S_{ac}^{(a)}\in\Omega_+$. Analogicznie jest z rozmaitością $S_+^{(\cdot)}$ będącą jedną ze ścian $S_{bd}^{(i)}$ $(i\in\{b,d\})$.

Niech $\mathcal{D}'$ będzie dekompozycją przestrzeni R^3 o szkielecie K' określonym przez (6) i niech (K',δ) będzie pewną strukturą równ.(1) przy $\delta:\{\Omega'\}\to\mathcal{U}$, gdzie $\{\Omega'\}$ jest zbiorem wszystkich komórek dekompozycji $\mathcal{D}'$. Niech $\mathcal{D}_1'$ oznacza różną od $\mathcal{D}'$ dekompozycję R^3 o szkielecie K_1':

$$K_1' = K\cup\bigcup_i W_i\ ,\qquad W_i\neq\phi\ ,$$

gdzie K jest szkieletem podstawowym równ.(1), W_i $(i = 1,\dots,N$, $N<+\infty)$ - rozmaitościami jedno- i dwuwymiarowymi i (K_1',δ_1) - strukturą równ.(1), $\delta_1:\{\Omega_1\}\xrightarrow{\text{inj}}\mathcal{U}$, $\{\Omega_1\}$ - zbiór wszystkich komórek dekompozycji $\mathcal{D}_1$. Załóżmy dalej o strukturze (K_1',δ_1), że zapewnia każdemu ze swych rozwiązań $x^1(x^o,t)$, $x^o\in R^3$, osiągalność σ w skończonym czasie.

WNIOSEK 10. Jeśli n i m są odpowiednio liczbami przełączeń rozwiązań $x(x^o,t)$ i $x^1(x^o,t)$ struktur (K',δ) i (K_1',δ_1), to $n\leq m$ dla każdego $x^o\in R^3$.

Istotnie, K' jest szkieletem minimalnym (w sensie liczby swych elementów) struktury (K', δ) zapewniającej osiągalność przez swe rozwiązania początku układu σ (por. lematy 1,2 i 3) - każdy szkielet $K'_1 \neq K'$ jest zbiorem o większej od K' liczbie elementów, podzbiorów R^3, na których realizowane są czyste przełączenia (tzn. będących zbiorami przejścia rozwiązań). Implikuje to istnienie takich punktów $x^o \in R^3$, że rozwiązania $x^1(x^o,t)$ mają większą liczbę przełączeń niż rozwiązania $x(x^o,t)$.

6. Niech $\mathcal{D}$ będzie dekompozycją podstawową R^3 określoną przez równanie (1), zawierającą dwie komórki czterościenne. Niech będzie określony obieg wierzchołków prostokąta sterowań U : a,b,c,d .

Załóżmy, że

1^o- wśród ścian każdej komórki czterościennej są dokładnie dwie o wspólnej krawędzi i wspólnym dla tych ścian i tej krawędzi prawie ruchu;

2^o- prawa ruchu dla wspólnej krawędzi tych par są wierzchołkamiprostokąta sterowań U odpowiadającymi końcom jednego z jego boków. Wyróżnijmy jedną z komórek czterościennych i oznaczmy krawędź pary ścian o wspólnym prawie ruchu $T^{(d)}$, a samą komórkę Ω_- (drugą komórkę przez Ω_+) (oznaczenia pozostałych krawędzi wynikają wtedy z równ.(1) i przyjętego obiegu wierzchołków prostokąta sterowań U). Jest więc $S^{(d)}_{cd}$, $S^{(d)}_{ad}$ w komórce Ω_-;

3^o- ściany komórek czterościennych, w zależności od obowiązujących na nich praw ruchu, tworzą układy odpowiadające dwum wersjom:

$$\left(S^{(a)}_{ab}, S^{(b)}_{bc}, S^{(d)}_{cd}, S^{(d)}_{ad}\right)_{I} \vee \left(S^{(b)}_{ab}, S^{(c)}_{bc}, S^{(d)}_{cd}, S^{(d)}_{ad}\right)_{II} \quad \text{w komórce } \Omega_-$$

i odpowiednio

$$\left(S^{(b)}_{ab}, S^{(c)}_{bc}, S^{(c)}_{cd}, S^{(a)}_{ad}\right)_{I} \vee \left(S^{(a)}_{ab}, S^{(b)}_{bc}, S^{(c)}_{cd}, S^{(a)}_{ad}\right)_{II} \quad \text{w komórce } \Omega_+ ;$$

4^o- istnieje podział komórek Ω_- , Ω_+ ścianami odpowiednio S_-, S_+ postaci:

$$S_- = \left(S^{(c)}_{ac} \text{ w wersji I}\right) \vee \left(S^{(a)}_{ac} \text{ w wersji II}\right),$$

$$S_+ = S^{(d)}_{bd} \text{ w obu wersjach}$$

na komórki trójścienne S_d, S_b, S_c, S_a.

Niech K' będzie szkieletem dekompozycji $\mathcal{D}'$ powstałej z $\mathcal{D}$ przez wprowadzenie dwu ścian S_-, S_+ do szkieletu podstawowego K, tzn. szkielet (6). K', w zależności od wersji I lub II, będziemy oznaczali przez K_1' lub K_2'. Implikuje to dwie wersje dekompozycji $\mathcal{D}_1'$, $\mathcal{D}_2'$.

Wyniki przeprowadzonych wyżej rozważań można ująć w postaci następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE. Aby (K', δ) było strukturą optymalną równania (1) potrzeba, by

$$(K', \delta) = (K_1', \delta_1) \vee (K_2', \delta_2) ,$$

gdzie K_1', K_2' są zdefiniowanymi powyżej szkieletami, δ_1, δ_2 są funkcjami określonymi w zbiorach wszystkich komórek dekompozycji $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ przez swe obcięcia do komórek:

$$\begin{aligned}
(K_1', \delta_1)|_{\Omega_d} &= (\Omega_d, (d)), & (K_2', \delta_2)|_{\Omega_d} &= (\Omega_d, (d)),\\
(K_1', \delta_1)|_{\Omega_b} &= (\Omega_b, (a)), & (K_2', \delta_2)|_{\Omega_b} &= (\Omega_b, (c)),\\
(K_1', \delta_1)|_{\Omega_c} &= (\Omega_c, (c)), & (K_2', \delta_2)|_{\Omega_c} &= (\Omega_c, (b)),\\
(K_1', \delta_1)|_{\Omega_a} &= (\Omega_a, (b)), & (K_2', \delta_2)|_{\Omega_a} &= (\Omega_a, (a)).
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] W.G. Boltianskij, Matematiczeskije metody optimalnogo uprawlenia, Moskwa 1969.

[2] H. Stefaniuk, Warunki wyboru parametrów przy sterowaniu układem liniowym, Mat.sprawozdań z działalności w CPBP 02.13,'89

[3] J. Szadkowski, Sur l'application de la methode des solutions glissantes à la synthèse optimale, Nonl.Vibr.Probl. 23, 1989, 183 - 194.