

3.31 — teoria fal elektromagnetycznych

A. Ciarkowski

FAKTORYZACJA DWÓCH FUNKCJI  
Z PUNKTAMI ROZGAŁĘZIENIA

45/1990

P.269



WARSZAWA 1990

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 17 września 1990 r.



56787



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark.wyd.0,75 Ark.druk 1,0

Oddano do drukarni w grudniu 1990 r.

Nr zamówienia 18/91

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Adam Ciarkowski

Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

## FAKTORYZACJA DWÓCH FUNKCJI Z PUNKTAMI ROZGAŁĘZIENIA

**Streszczenie.** Dokonano faktoryzacji dwóch funkcji posiadających cztery punkty rozgałęzienia na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Otrzymane faktor-funkcje wyrażone są przy pomocy całek typu Cauchy'ego. Każda z tych funkcji ma odpowiadające jej dwa punkty rozgałęzienia, a poza tym jest regularna. Dla wybranych wartości parametrów uzyskane wyniki zilustrowano przykładem numerycznym.

### 1. Wstęp

W [1] rozpatrzono problem dyfrakcji elektromagnetycznej fali płaskiej na nieskończenie cienkim, doskonale przewodzącym ekranie umieszczonym na granicy dwóch różnych ośrodków dielektrycznych. W problemie tym fala padająca rozchodzi się w ośrodku rzadszym optycznie zajmującym obszar  $y > 0$ , ośrodek gęstszy optycznie wypełnia komplementarny obszar  $y < 0$ , a ekran określony jest przez  $x > 0, y = 0$ . Elektromagnetyczne pole rozproszone w tym zagadnieniu wyraża się przez całki konturowe postaci

$$\int_C \frac{dw}{w-w_j} \frac{F_-(w)}{F_-(w_j)} e^{-iwx + i \left\{ \begin{matrix} v \\ v_N \end{matrix} \right\} |y|} \quad (1)$$

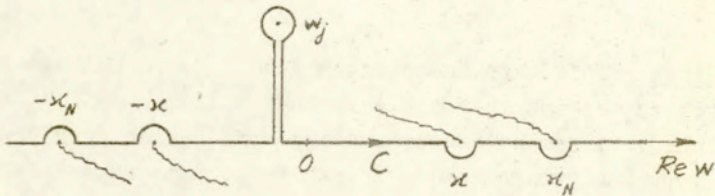
i

$$\int_C \frac{dw}{w-w_j} \left\{ \begin{matrix} v \\ -v_N \end{matrix} \right\}^{-1} \frac{G_-(w)}{G_-(w_j)} e^{-iwx + i \left\{ \begin{matrix} v \\ v_N \end{matrix} \right\} |y|} \quad (2)$$

gdzie funkcje

$$v = (\kappa^2 - w^2)^{1/2}, \quad v_N = (\kappa_N^2 - w^2)^{1/2}, \quad \text{Im } v, v_N \geq 0 \quad (3)$$

mają punkty rozgałęzienia odpowiednio w  $w = \pm \kappa$  i  $w = \pm \kappa_N$ . Kontur C biegnie w płaszczyźnie zmiennej zespolonej w jak na rys. 1.



Rys. 1

$\kappa$  i  $\kappa_N$  są transversalnymi liczbami falowymi odpowiednio w ośrodku rzadszym i gęstszym optycznie, mogącymi mieć dodatnie części urojone. Funkcje  $F_-(w)$  i  $G_-(w)$  są zdefiniowane za pośrednictwem równań

$$\frac{1}{v + v_N} = F_-(w) F_-(-w)$$

i

$$N > 1,$$

$$\frac{v v_N}{N^2 v + v_N} = G_-(w) G_-(-w)$$

Wymaganiem, aby w obszarze  $\text{Im } w < 0$  były one funkcjami analitycznymi. Zatem funkcje te mają punkty rozgałęzienia w  $w = \kappa$  i  $w = \kappa_N$ , a są regularne w punktach  $w = -\kappa$  i  $w = -\kappa_N$ . Wartości bieguna w (1) i (2) określone są w [1].

W przypadku szczególnym gdy ośrodki są identyczne, tj. gdy  $\kappa_N = \kappa$ , z powyższych definicji dostajemy natychmiast

$$F_-(w) = [2(\kappa - w)]^{-1/2} \quad \text{i} \quad G_-(w) = [(\kappa - w)/2]^{1/2}$$

Wynik ten jest zgodny z klasycznym rozwiązaniem Sommerfelda zagadnienia dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie umieszczonej w ośrodku jednorodnym. W niniejszej pracy będziemy usiłowali skonstruować efektywne wzory dla funkcji  $F_-(w)$  i  $G_-(w)$ , słuszne dla dowolnych ośrodków oddzielających ekran, a więc dla dowolnych  $\kappa$  i  $\kappa_N$ . W literaturze znane są formuły określające te funkcje przy pomocy funkcji zawierających całki eliptyczne [2]. Tu zamierzamy znaleźć prostsze wyrażenia, opisane przez całki typu Cauchy'ego. Zastosujemy w tym celu podejście podobne do użytego w [3] i [4].

Odnotujmy na końcu znaczenie praktyczne funkcji  $F_-$  i  $G_-$ . Funkcje te określają charakterystyki kierunkowe fal dyfrakcyjnych emitowanych z krawędzi ekranu do obu ośrodków, a także amplitudę fali bocznej rozchodzącej się od granicy rozdzielenia ośrodków w głąb ośrodka gęstszego optycznie [5].

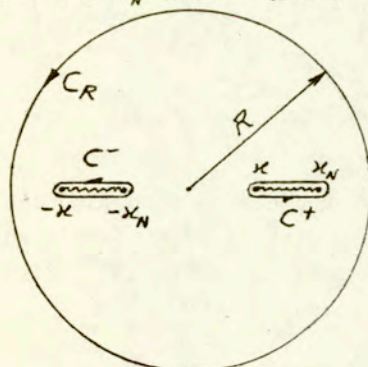
## 2. Reprezentacja funkcji $F_-$ i $G_-$ za pośrednictwem całek typu Cauchy'ego.

### 2.1 Faktoryzacja funkcji pomocniczej.

Wystartujmy z analizą od funkcji pomocniczej

$$H(w) = \frac{1 + N^2}{1 + N^2 \frac{v}{\sqrt{N}}} = \frac{N^2 + 1}{N^2 v + \sqrt{N}} \sqrt{N}, \quad (4)$$

zdefiniowanej na dwupłatewej powierzchni Riemanna z cięciami poprowadzonymi wzdłuż odcinków linii prostych łączących pary punktów:  $w = \kappa$  z  $w = \kappa_N$  i  $w = -\kappa$  z  $w = -\kappa_N$  (rys. 2).



Rys. 2

Wybierzmy tę gałąź funkcji  $v/v_N$ , która zmierza do 1, gdy  $w \rightarrow \infty$ .  
Zauważmy, że wówczas mianownik w (4) jest różny od zera, a ponieważ

$$\frac{v}{v_N} = 1 + \frac{x_N^2 - x^2}{2w^2} + O(w^{-4}), \quad w \rightarrow \infty,$$

więc

$$H(w) = 1 - \frac{N^2}{N^2 + 1} \frac{x_N^2 - x^2}{2w^2} + O(w^{-4}), \quad w \rightarrow \infty$$

i

$$\ln H(w) = O(w^{-2}), \quad w \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Oznaczmy przez  $C^-$  i  $C^+$  zamknięte kontury obejmujące cięcia poprowadzone odpowiednio od  $w = -x$  do  $w = -x_N$  i od  $w = x$  do  $w = x_N$ , a przez  $C_R$  kontur w kształcie okręgu o promieniu  $R$ , obejmujący kontury  $C^-$  i  $C^+$  (rys. 2). Wówczas w obszarze niejednostajnym  $\Omega$  zawartym między tymi konturami regularną tam funkcję  $\ln H(w)$  możemy na mocy twierdzenia Cauchy'ego przedstawić w postaci

$$\ln H(w) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{C_R} - \int_{C^-} - \int_{C^+} \right\} \frac{\ln H(\tau)}{\tau - w} d\tau, \quad w \in \Omega.$$

Założmy, że  $R \rightarrow \infty$ . Wówczas zgodnie z (5) całka po konturze  $C_R$  dąży do zera i w wyniku dostajemy

$$\ln H(w) = \ln H_-(w) + \ln H_+(w), \quad (6)$$

gdzie

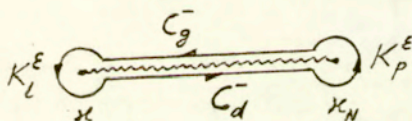
$$\ln H_{\pm}(w) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{C^{\pm}} \frac{\ln H(\tau)}{\tau - w} d\tau.$$

Funkcja  $\ln H_-$  jest regularna w obszarze znajdującym się na zewnątrz konturu  $C^-$  i podobnie funkcja  $\ln H_+$  jest regularna w obszarze znajdującym się na zewnątrz konturu  $C^+$ . Stąd wynika, że te same własności posiadają funkcje

$$H_{\pm}(w) = \exp\left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{C^{\pm}} \frac{\ln H(\tau)}{\tau-w} d\tau\right], \quad (7)$$

a z (6), że ich iloczyn jest równy  $H(w)$ . Z powyższej równości wynika także, że  $H_+(w) = H_-(-w)$ . Zatem w dalszych rozważeniach wystarczy zająć się tylko funkcją  $H_-(w)$ .

Wyrazimy teraz  $H_-(w)$  poprzez całkę typu Cauchy'ego. W tym celu zdeformujmy kontur  $C^-$  do sumy odcinków prostoliniowych  $C_g^-$  i  $C_d^-$  położonych bezpośrednio nad i pod cięciem łączącym punkty  $w = x$  i  $w = x_N$  oraz łuków  $K_L^{\epsilon}$  i  $K_P^{\epsilon}$  o małym promieniu  $\epsilon$ , mających wspólne punkty końcowe z odcinkami  $C_g^-$  i  $C_d^-$  (rys. 3).



Rys. 3

Na  $K_L^{\epsilon}$ :

$$\tau = x + \epsilon e^{i\varphi}, \quad \varphi_0 < \varphi < 2\pi + \varphi_0,$$

gdzie  $\varphi_0$  określa nachylenie odcinka łączącego oba punkty rozgałęzienia względem osi rzeczywistej. Gdy  $\epsilon \rightarrow 0$ , wówczas  $H(\tau) \rightarrow 1 + N^2$  i w rezultacie

$$\int_{K_L^{\epsilon}} \frac{\ln H(\tau)}{\tau-w} d\tau \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Na  $K_P^{\epsilon}$ :

$$\tau = x_N + \epsilon e^{i\varphi}, \quad -\pi + \varphi_0 < \varphi < \pi + \varphi_0,$$

skąd

$$\frac{v(\tau)}{v_N(\tau)} = \frac{e^{-i\varphi/2}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{x_N^2 - x^2}{2x_N}} [1 + O(\varepsilon)] \quad \text{gd}y \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Podstawiając ten wynik do (4), a następnie stosując (7) dostajemy

$$\int_{K_P^\varepsilon} \frac{\ln H(\tau)}{\tau - w} d\tau = \int_{\varphi_0 + \pi}^{\varphi_0 - \pi} \frac{\ln(1 + N^2) + i\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \ln \varepsilon - \ln(e^{i\frac{\varphi}{2}} \sqrt{\varepsilon} + N^2 \sqrt{\frac{x_N^2 - x^2}{2x_N}} [1 + O(\varepsilon)])}{x_N + \varepsilon e^{i\varphi} - w} \cdot i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

bowiem  $\varepsilon \ln \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ .

Pozostają więc do obliczenia całki po odcinkach  $C_d^-$  i  $C_g^-$ . Są one równe odpowiednio

$$\int_{C_d^-} \frac{\ln H(\tau)}{\tau - w} d\tau = \int_{x+E}^{x_N-E} \frac{\ln(N^2+1) - \ln(1 + iN^2 \sqrt{\frac{\tau^2 - x^2}{x_N^2 - \tau^2}})}{\tau - w} d\tau$$

$$\int_{C_g^-} \frac{\ln H(\tau)}{\tau - w} d\tau = \int_{x_N-E}^{x+E} \frac{\ln(N^2+1) - \ln(1 - iN^2 \sqrt{\frac{\tau^2 - x^2}{x_N^2 - \tau^2}})}{\tau - w} d\tau$$

Przechodząc z  $\varepsilon \rightarrow 0$  dostajemy

$$\int_{C^-} \frac{\ln H(\tau)}{\tau - w} d\tau = \int_x^{x_N} \frac{\ln \frac{1 - iN^2 \sqrt{\frac{\tau^2 - x^2}{x_N^2 - \tau^2}}}{1 + iN^2 \sqrt{\frac{\tau^2 - x^2}{x_N^2 - \tau^2}}}}{\tau - w} d\tau = -2i \int_x^{x_N} \frac{\arctg N^2 \sqrt{\frac{\tau^2 - x^2}{x_N^2 - \tau^2}}}{\tau - w} d\tau$$



i ostatecznie

$$H_-(w) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\kappa}^{\kappa_N} \frac{\arctg N^2 \sqrt{\frac{\tau^2 - \kappa^2}{\kappa_N^2 - \tau^2}}}{\tau - w} d\tau \right\} \quad (8)$$

W ten sposób faktor-funkcja  $H_-(w)$  została wyrażona przy pomocy całki typu Cauchy'ego. W zastosowaniach pożyteczna jest także nieco odmienna postać tej funkcji. Mianowicie korzystając z tożsamości

$$\arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

i z

$$\int_{\kappa}^{\kappa_N} \frac{d\tau}{\tau - w} = \ln \frac{\kappa_N - w}{\kappa - w}$$

dostajemy z (8)

$$H_-(w) = \sqrt{\frac{\kappa_N - w}{\kappa - w}} \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\kappa}^{\kappa_N} \frac{\arctg \frac{1}{N^2} \sqrt{\frac{\kappa_N^2 - \tau^2}{\tau^2 - \kappa^2}}}{\tau - w} d\tau \right\}. \quad (9)$$

Pierwsza z przedstawionych postaci jest wygodna do analizy funkcji  $H_-(w)$  w otoczeniu punktu  $w = \kappa$ , zaś druga - w otoczeniu punktu  $w = \kappa_N$ . W szczególności zauważmy, że wyrażenie podcałkowe w (8) jest  $O[(\tau - \kappa)^{-1/2}]$  gdy  $w = \kappa$  i podobnie wyrażenie podcałkowe w (9) jest  $O[(\kappa_N - \tau)^{-1/2}]$  gdy  $w = \kappa_N$ . W obu tych sytuacjach całki istnieją, skąd wnosimy

$$H_-(w) = O(1), \text{ gdy } w \rightarrow \kappa \text{ i } H_-(w) = O[(w - \kappa_N)^{1/2}], \text{ gdy } w \rightarrow \kappa_N.$$

Z teorii całki typu Cauchy'ego wiadomo [6], że całka ta przedstawia sobą funkcję analityczną poza konturem całkowania, zaś sam kontur jest dla tej funkcji linią osobliwą. Przy założeniu, że gęstość w całce typu Cauchy'ego spełnia warunek Höldera, całka ta zachowuje się tak jak potencjał warstwy podwójnej z ciągłą gęstością. Mianowicie przy zbliżaniu się punktu  $w$  do konturu całkowania z lewej, albo z prawej strony, całka

przyjmuje niejednakowe wartości graniczne, doznając na konturze skoku. Wartości graniczne całki opisane są wzorami Sochockiego [6]. Stosując te wzory do naszego przypadku dostajemy

$$H_{\left\{ \begin{smallmatrix} l \\ p \end{smallmatrix} \right\}}(t) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_x^{x_N} \frac{\psi(\tau)}{\tau-t} d\tau \pm i\psi(t) \right\}, \quad (10)$$

gdzie

$$\psi(t) = \operatorname{arctg} N^2 \sqrt{\frac{\tau^2 - x^2}{x_N^2 - \tau^2}},$$

t należy do konturu całkowania, zaś indeksy l i p odpowiadają sytuacjom, gdy punkt w dąży do punktu t z lewej, albo z prawej strony konturu całkowania. Całka występująca w (10) jest rozumiana w sensie wartości głównej, tj.

$$\int_x^{x_N} \frac{\psi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_x^{x_N} \frac{\psi(\tau) - \psi(t)}{\tau-t} d\tau + \psi(t) \ln \frac{x_N - t}{t - x}. \quad (11)$$

Z (10) wynika, że skok całki przy przechodzeniu przez kontur całkowania prowadzi do związku

$$H_{-l}(t) = H_{-p}(t) \exp[2i\psi(t)]. \quad (12)$$

Podkreślimy, że związek (12) zachodzi na konturze całkowania. Jeśliby więc kontur całkowania w (8) został zdeformowany, wówczas związek ten obowiązywałby w punktach nowego konturu, natomiast na poprzednim konturze funkcja  $H_{-}(w)$  byłaby analityczna.

## 2.2 Faktoryzacja funkcji $F(w)$ i $G(w)$ .

Otrzymawszy faktoryzację funkcji  $H(w)$  nietrudno znaleźć wzory faktoryzacyjne dla interesujących nas funkcji  $F(w)$  i  $G(w)$ . Istotnie, funkcje te można przedstawić w postaci iloczynów

$$F(w) = \frac{1}{2\sqrt{N}} \cdot \frac{2}{1 + \frac{w}{\sqrt{N}}} \quad \text{i} \quad G(w) = \frac{w}{1 + N^2} \cdot \frac{1 + N^2}{1 + N^2 \frac{w}{\sqrt{N}}}. \quad (13)$$

Pierwszy czynnik w każdym z iloczynów daje się natychmiast sfaktoryzować, zaś drugi jest równy funkcji  $H(w)$  (w przypadku funkcji  $F$  z  $N = 1$ ). W ten sposób otrzymujemy z (13) i (8)

$$F_-(w) = \frac{1}{\sqrt{2(x_N - w)}} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_x^{x_N} \frac{\arctg \sqrt{\frac{z^2 - x^2}{x_N^2 - z^2}}}{z - w} dz \right\}, \quad (14)$$

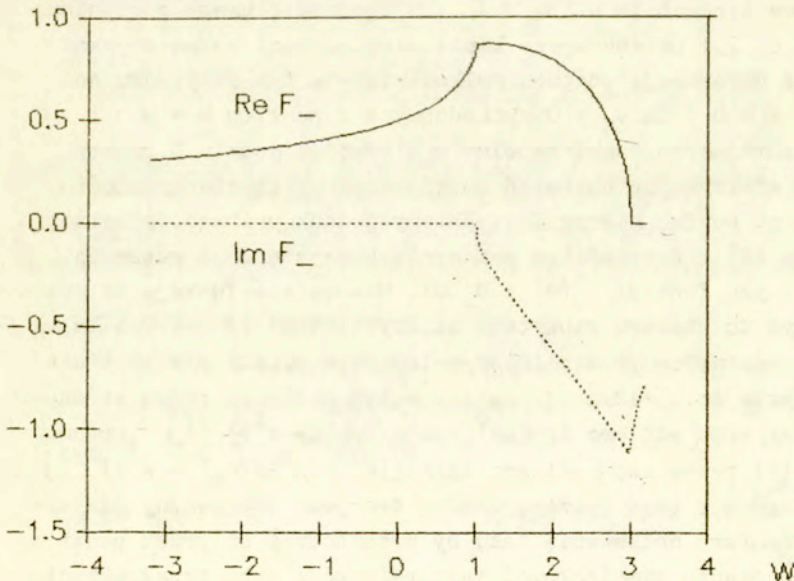
$$G_-(w) = \sqrt{\frac{x - w}{1 + N^2}} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_x^{x_N} \frac{\arctg N^2 \sqrt{\frac{z^2 - x^2}{x_N^2 - z^2}}}{z - w} dz \right\}. \quad (15)$$

Powyższe funkcje nie stanowią jeszcze rozwiązania zagadnienia wyjściowego, bowiem w definicji funkcji  $F(w)$  i  $G(w)$  zakładaliśmy zgodnie z (3), że cięcia wychodzące z punktów  $w = \pm x$  i  $w = \pm x_N$  poprowadzone są wzdłuż linii  $\text{Im } v = 0$  i  $\text{Im } v_N = 0$ . Tymczasem w procesie faktoryzacji funkcji  $H(w)$  założyliśmy, że cięcia biegną wzdłuż odcinków prostoliniowych łączących punkty  $w = x$  z  $w = x_N$  i  $w = -x$  z  $w = -x_N$ . W konsekwencji skokowe nieciągłości faktor-funkcji występują właśnie na tych odcinkach, zamiast na liniach  $\text{Im } v, v_N = 0$ . Zgodnie z uwagą poczynioną na końcu p. 2.1 przesunięcie linii nieciągłości można uzyskać na drodze deformacji konturu całkowania - w tym przypadku do linii  $\text{Im } v = 0$  i  $\text{Im } v_N = 0$  wychodzących z punktów  $w = x$  i  $w = x_N$  i mających punkt wspólny w nieskończoności. Z punktu widzenia efektywnych obliczeń numerycznych taki nieograniczony kontur jest bardzo niewygodny. Możemy jednak uniknąć deformacji konturu w (8) i uzyskać ten sam wynik korzystając z własności analitycznych funkcji  $F_-(w)$  i  $G_-(w)$ . Mianowicie funkcje te można przedłużyć do obszaru zawartego między liniami  $\text{Im } v = 0$  i  $\text{Im } v_N = 0$  oraz odcinkiem prostoliniowym łączącym punkty  $w = x$  i  $w = x_N$  korzystając z (12), tj. mnożąc w tym obszarze prawą stronę (14) przez  $\exp \{-2i \arctg [(w^2 - x^2)/(x_N^2 - w^2)]^{1/2}\}$  i prawą stronę (15) przez  $\exp \{-2i \arctg N^2 [(w^2 - x^2)/(x_N^2 - w^2)]^{1/2}\}$ . Dla każdego  $w$  z tego obszaru zabieg ten jest równoważny zdeformowaniu konturu całkowania tak, by przechodził on przez punkt  $w$  i skompensowaniu nieciągłości faktor-funkcji przy przekraczaniu

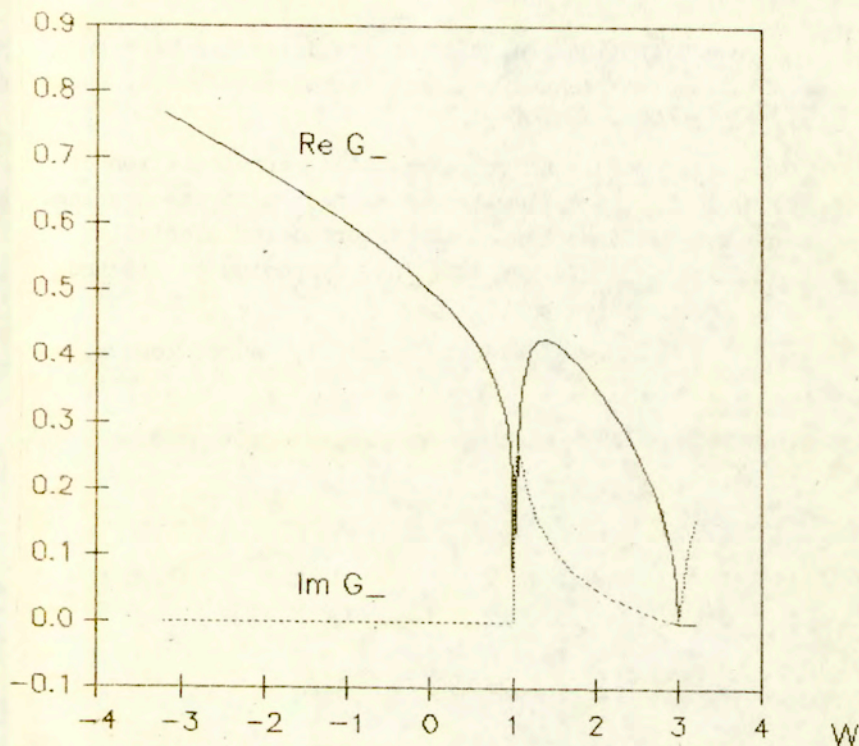
tego konturu z prawej na lewą stronę. Otrzymane w ten sposób funkcje  $F_-(w)$  i  $G_-(w)$  są analityczne na płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $w$  za wyjątkiem linii  $\text{Im } v = 0$  i  $\text{Im } v_N = 0$  wychodzących z punktów  $w = \kappa$  i  $w = \kappa_N$ . Otrzymaliśmy w ten sposób faktoryzację funkcji  $F(w)$  i  $G(w)$ .

### 3. Przykład numeryczny.

W oparciu o otrzymane formuły wyliczono wartości funkcji  $F_-(w)$  i  $G_-(w)$  dla ważnych z punktu widzenia zastosowań rzeczywistych wartości  $w$ . Przyjęto także rzeczywiste wartości parametrów:  $\kappa = 1$ ,  $\kappa_N = 3$  i  $N = 3$ . Ten ostatni parametr jest równy stosunkowi współczynników załamania ośrodków gęstszego i rzadszego optycznie w zagadnieniu wzmiankowanym w p. 1. W obliczeniach numerycznych posługiwano się formułami (14) i (15) dla  $w$  leżących na zewnątrz przedziału  $[\kappa, \kappa_N]$ . Wewnątrz tego przedziału obliczono prawostronne granice funkcji  $F_-(w)$  i  $G_-(w)$ , odpowiadające granicznym wartościom  $w = t - i\sigma$ ,  $\sigma > 0$  i  $t \in [\kappa, \kappa_N]$  gdy  $\sigma \rightarrow 0$ . W tym celu zastępowano człon wykładniczy w (14) i (15) wyrażeniami danymi przez (11) i (12). Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 4 i 5.



Rys. 4



Rys. 5

### Literatura

- [1] Ciarkowski. A, Three-dimensional electromagnetic half-plane diffraction at the interface of different media, *Radio Sci.*, 22(6), 969-975, 1987.
- [2] Stockel H., Die Beugung einer ebenen elektromagnetischen Welle an einer bzw. zwei idealleitenden Halbebenen in der Trennebene zwischen zwei homogenen, isotropen Medien, *Annalen der Physik*, 12(3-4), 156-185, 1963.
- [3] Witlox H.W.M., High-frequency diffraction of elastic waves by a plane surface, Eindhoven Univ. of Technology, Dept. of Math. and Computing Sci., 1983 (praca magisterska).
- [4] Coblin R.D. i Pearson L.W., A geometrical theory of diffrac-

ction for a half plane residing on the interface between dissimilar media: Transverse magnetic polarized case, Radio Sci., 19(5), 1277-1288, 1984.

- [5] Ciarkowski A., Quasi-uniform asymptotic representation of the EM field in the optically denser medium in the problem of plane wave diffraction at the interface of dissimilar media, Proceedings of 1989 URSI Int. Symposium on Electromagnetic Theory, Sztokholm, 1989.
- [6] Gachow F.D., Krajewyje zadaczi, Rozdz. 1, Nauka, Moskwa, 1977.