

Stefan Owczarek, Leszek Radło

PROGRAM I PRZYKŁADY APROKSYMACJI  
ZA POMOCĄ WIELOMIANÓW  
ZWYKŁYCH FUNKCJI CAŁKOWALNYCH  
Z KWADRATEM NA ODCINKU  $(-1, +1)$

35/1985

P. 269



WARSZAWA 1985

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 marca 1985 r.

56918



Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12 "Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji naszynowych i budowlanych" koordynowanego przez IPPT PAN.



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd. 2,49 Ark.druk. 3,5

Oddano do drukarni we wrześniu 1985 r.

Nr zamówienia 559/85

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Stefan Owczarek  
Leszek Radło  
Pracownia Pól Odkształceń IPPT  
Instytut Dróg i Mostów P W

PROGRAM I PRZYKŁADY APROKSYMACJI ZA POMOCĄ  
WIELOMIANÓW ZWYKŁYCH FUNKCJI CAŁKOWALNYCH  
Z KWADRATEM NA ODCINKU  $[-1, +1/$

1. Wstęp

Zagadnieniem zastępowania dowolnej funkcji wielomianami zajmowano się od dawna. Wystarczy tu wspomnieć zagadnienia rozwinięcia funkcji w szereg Taylora lub Maclaurina, albo wymienić twierdzenia Weierstrassa o możliwości przedstawienia w postaci wielomianów funkcji na odcinku otwartym  $a, b$  [1]. Rozszerzanie możliwości zastępowania dowolnej funkcji przez ciągi innych funkcji doprowadziło do rozwinięcia teorii aproksymacji. Istotnym elementem w teorii aproksymacji jest pojęcie "bliżkości" dwóch funkcji czyli kryterium aproksymacji [4]. Równania kanoniczne aproksymacji wielomianami zwykłymi funkcji całkowalnych z kwadratem były przedmiotem analiz między innymi Hilberta [5]. Z analiz tych wynika, że równania te są słabo uwarunkowane, /wyznacznik główny mały/, a zbieżność aproksymacji nie zawsze jest zadawalająca. Dążenie do zwiększenia zbieżności aproksymacji doprowadziło do powstawania wielomianów ortogonalnych Legendre'a i ortogonalnych z wagą np. Czebyszewa [2].

Aproksymacją dowolnych funkcji wielomianami zajmowano się w zastosowaniach matematyki. Potrzeba taka występuje również w mechanice konstrukcji i teoriach inżynierskich. W niniejszym artykule zajęto się aproksymacją wielomianami zwykłymi. Prosta ich postać i łatwość wykonywania operacji różniczkowania i całkowania decyduje często o ich wyborze w zadaniach aproksymacji

funkcji. Nawrót do wielomianów zwykłych jest uzasadniony również wciąż nowymi możliwościami związanymi z doskonaleniem maszyn liczących. Zwiększenie dokładności obliczeń na maszynach liczących powoduje, że stają się możliwe do rozwiązania te zagadnienia, które dawniej z powodu słabego uwarunkowania równań podstawowych były niemożliwe.

Autorom niniejszego opracowania z racji swoich zainteresowań zawodowych potrzebny był program do aproksymacji funkcji z przestrzeni  $L^2$  /całkowalnych z kwadratem/. Ponieważ nie znaleźli go w dostępnych bibliotekach programu, opracowali go samodzielnie.

W niniejszym artykule przedstawiono założenia programu, metodę rozwiązania zagadnienia, oraz wyniki liczbowe rozwiązań przykładów przyjętych do aproksymacji.

Opracowany program zawiera obliczenie odchyłek pomiędzy funkcją aproksymowaną i aproksymującą, co zdaniem autorów jest jego istotnym elementem. W oparciu o wyniki odchyłek i norm odchyłek obliczonych w przyjętych przykładach wypowiedziano wnioski dotyczące zbliżności wielomianowej aproksymacji funkcji w przestrzeni  $L^2$ .

## 2. Założenia i sformułowanie zagadnienia

Założono, że jest dana funkcja na odcinku  $-1 \leq x \leq +1$ .

Kwadrat tej funkcji, ma całkę ograniczoną na tym odcinku tj.

$$\int_{-1}^1 f/x/^2 dx \text{ istnieje i jest ograniczona.}$$

Funkcję tę rozłożono na część symetryczną  $f^S/x/$  i antysymetryczną  $f^A/x/$

$$/1/ \quad f^S/x/ = \frac{f/x/ + f/-x/}{2}, \quad f^A/x/ = \frac{f/x/ - f/-x/}{2}$$

tak, że funkcję tę można przedstawić w postaci sumy

$$/2/ \quad f/x/ = f^S/x/ + f^A/x/.$$

Postawiono zadanie aproksymacji funkcji  $f/x/$  poprzez funkcje  $\varphi/x/$  gdzie

$$/3/ \quad \varphi/x/ = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k/x/, \quad a_k - \text{współczynniki stałe,} \\ k = 0, 1, 2, 3, \dots, n.$$

Funkcje  $\varphi_k/x/$  są symetryczne /parzyste względem  $x/$  przy  $k = 0, 2, \dots, 2i, i = 0, 1, 2, \dots$ . Funkcje  $\varphi_k/x/$  są antysymetryczne /nieparzyste względem  $x/$  przy  $k$  nieparzystych  $k = 1, 3, 5, \dots, 2i + 1, i = 0, 1, 2, \dots$ .

Wprowadzając funkcje dwuwartościowe  $/0$  lub  $1/$  poprzez wzory

$$/4/ \quad j/k/ = \frac{1}{2} [(-1)^k + 1], \quad j/k+1/ = \frac{1}{2} [(-1)^{k+1} + 1]$$

funkcje  $\varphi/x/$  napisano w postaci:

$$\varphi/x/ = \varphi^S/x/ + \varphi^A/x/,$$

w której oznaczono przez

$$/6/ \quad \varphi^S/x/ = \sum_{k=0}^n j/k/a_k \varphi_k/x/, \quad \varphi^A/x/ = \sum_{k=0}^n j/k+1/a_k \varphi_k/x/.$$

W dalszym ciągu pracy przyjęto następujące nazewnictwo:

$$\|f/x/\|^2 = L = \int_{-1}^1 f/x/^2 dx$$

nazwano miarą funkcji  $f/x/$ .

Wielkość

$$\|f/x/\| = \sqrt{L} = \left[ \int_{-1}^1 f/x/^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

nazywano normą funkcji  $f/x/$ .

Funkcje

$$\lambda/x/ = f/x/ - \varphi/x/$$

nazwano odchyłką aproksymacji.

Wielkość

$$\|\lambda/x/\|^2 = \delta = \int_{-1}^1 [f/x/ - \varphi/x/]^2 dx$$

nazwano miarą odchyłki aproksymacji funkcji  $\varphi/x/$  od funkcji aproksymowanej na odcinku  $(-1, +1)$ .

Wielkość

$$\| \lambda_{x/} \| = \sqrt{\delta} = \left\{ \int_{-1}^{+1} [f/x/ - \varphi/x/]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

nazywano normą odchyłki aproksymacji [8].

Jako kryterium aproksymacji przyjęto minimalną całkę z kwadratu różnicy funkcji aproksymowanej  $f/x/$  i aproksymującej  $\varphi/x/$  /minimum miary odchyłki aproksymacji/

$$/7/ \quad \delta_m = \min_{a_k} \int_{-1}^1 \left[ f/x/ - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k/x/ \right]^2 dx.$$

Jak wiadomo układ równań rozwiązujących zadanie aproksymacji ma postać:

$$/8/ \quad \sum_{i=1}^{n+1} (\varphi_i, \varphi_j) X_i = (f/x/, \varphi_j/x/),$$

$X_i = a_{k+1}$ , stałe współczynniki aproksymacji,  $i, j=1, 2, \dots, n+1$ .

$$/9/ \quad (\varphi_i, \varphi_j) = \int_{-1}^1 (\varphi_i/x/, \varphi_j/x/) dx,$$

$$(f/x/, \varphi_j) = \int_{-1}^1 (f/x/, \varphi_j/x/) dx.$$

Miarę odchyłki /7/ napisano w postaci:

$$/10/ \quad \delta = \int_{-1}^1 \left\{ [f^S/x/ + f^A/x/] - [\varphi^S/x/ + \varphi^A/x/] \right\}^2 dx.$$

Wzór /10/ po uwzględnieniu zależności /11/ wynikających z symetrii funkcji  $\varphi/x/$  i  $f/x/$

$$/11/ \quad \int_{-1}^{+1} f^S/x/ f^A/x/ dx = 0 \quad \int_{-1}^{+1} \varphi^S/x/ \varphi^A/x/ dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} f^S/x/ \varphi^A/x/ dx = 0 \quad \int_{-1}^{+1} f^A/x/ \varphi^S/x/ dx = 0$$

przybiera postać sumy

$$/12/ \quad \delta = \delta^S + \delta^A,$$

w której oznaczono

$$/13/ \quad \delta^S = \int_{-1}^{+1} [r^S/x/ - \varphi^S/x/]^2 dx, \quad \delta^A = \int_{-1}^{+1} [r^A/x/ - \varphi^A/x/]^2 dx.$$

Ze wzoru /12/ wynika, że zadanie aproksymacji /7/ można rozbić na dwa, poszukiwane części symetrycznej  $r^S/x/$ ,

$$/14/ \quad \delta_m^S = \min_{a_k} \int_{-1}^{+1} \left[ r^S/x/ - \sum_{k=0}^n j/k/a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx$$

oraz części niesymetrycznej funkcji  $r^A/x/$

$$/15/ \quad \delta_m^A = \min_{a_k} \int_{-1}^{-1} \left[ r^A/x/ - \sum_{k=0}^n j/k+1/a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx.$$

Tu będziemy się zajmować aproksymacją funkcji wielomianami zwykłymi. W tym przypadku jest:

$$/16/ \quad \varphi_k = x^k.$$

Aproksymujące funkcje symetryczna /parzysta/ i antysymetryczna /nieparzysta/ w przypadku wielomianów zwykłych wyrażają się następująco:

$$/17/ \quad \varphi^S/x/ = \sum_{k=0}^n j/k/a_k x^k, \quad \varphi^A/x/ = \sum_{k=0}^n j/k+1/a_k x^k.$$

3. Aproksymacja funkcji symetrycznych na odcinku  $-1 \leq x \leq +1$  wielomianem zwykłym.

W wielomianie symetrycznym  $\varphi^S/x/$  /6/ zmieniono oznaczenie współczynników przyjmując:

$$a_k = X_k^S / \frac{k}{2} + 1 .$$

W ten sposób otrzymano:

$$\varphi^S/x/ = \sum_{k=0}^n j/k/X_k^S / \frac{k}{2} + 1 x^k .$$

Następnie zmieniając numerację współczynników według wzoru

$$\frac{k}{2} + 1 = i$$

otrzymano

$$/18/ \quad \varphi^S/x/ = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}+1} X_i^S x^{2i-2} .$$

Stąd układ równań kanonicznych metody najmniejszych kwadratów w przypadku aproksymacji symetrycznej ma postać:

$$/19/ \quad A_{1j}^S X_j^S = P_1 , \quad 1, j = 1 \dots g , \quad g = \frac{n}{2} + 1 ,$$

w którym jest

$$/20/ \quad A_{1j}^S = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^{2i-2j-4} dx = \frac{1}{2i+2j-3} ,$$

$$/21/ \quad P_1 = N^{2i-2} \quad N^m = \int_{-1}^{+1} f^S/x/x^m dx .$$

Wielkości  $N^m$  w dalszym ciągu pracy nazywano polimomentami funkcji  $f/x/$ .



Macierz układu równań /19/ i wektor jego prawych stron po uwzględnieniu /20/ i /21/ napisano następująco:

$$/22/ \quad A_{1j}^S = \begin{bmatrix} 1, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{7} & \dots & \frac{1}{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n+1}, & \frac{1}{n+3}, & \dots & \dots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} N^0 \\ N^2 \\ \dots \\ N^n \end{bmatrix}$$

Wykonano program generowania i odwracania macierzy przy dowolnym g. Wartość wyznacznika głównego macierzy  $A_{1j}^S$  przy  $g/ = 2, 4, 6, 8$  podano w tabelicy 1.

Tablica 1. Wartości wyznacznika głównego przy aproksymacji wielomianem parzystym w zależności od ilości przyjętych jego składników g

g	2	4	6	8
$A_{1j}^S$	$0.8888889 \cdot 10^{-1}$	$0.1904239 \cdot 10^{-6}$	$0.6483037 \cdot 10^{-17}$	$0.3425068 \cdot 10^{-32}$

W tablicach /2-5/ podano macierze odwrotne przy  $g = 2, 4, 6, 8$ .

Tablica 2. Macierz odwrotna  $A_{1j}^S$ ,  $g = 2$

1	1	2
1	2.250	-3.750
2	-3.750	11.250

Tablica 3. Macierz odwrotna  $A_{1j}^S$ ,  $g = 4$

	1	2	3	4
1	4.785	-43.066	94.746	-58.652
2	-43.066	697.676	-1827.246	1231.699
3	94.746	-1827.246	5211.035	-3695.098
4	-58.652	1231.699	-3695.098	2709.738

Tablica 4. Macierz odwrotna  $A_{1j}^S, g = 6$

	1	2	3
1.	7.328	-158.774	952.643
2.	-158.774	6192.180	-44229.860
3.	952.643	-44229.860	344010.049
4.	-2313.562	116963.419	-956973.456
5.	2442.094	-129874.975	1098942.087
6.	-932.436	51283.967	-444461.035
	4	5	6
1.	-2313.562	2442.094	-932.436
2.	116963.419	-129874.975	51283.967
3.	-956973.456	1098942.087	-444461.035
4.	2753139.071	-3238216.000	1333383.073
5.	-3238216.000	3877695.616	-1619107.989
6.	1333383.073	-1619107.989	683623.364

Tablica 5. Macierz odwrotna  $A_{1j}^S, g = 8$

	1	2	3	4
1.	9.871	-391.487	4462.234	-22308.322
2.	-391.487	27947.867	-379247.709	2064600.873
3.	4462.234	-379247.709	5603965.966	-32093321.133
4.	-22308.322	2064600.873	-32093321.133	190082749.639
5.	57004.257	-5549873.299	89221743.490	-541263979.164
6.	-77726.433	7826259.343	-128870221.615	795953224.891
7.	53806.744	-5549241.106	93031252.562	-582669285.617
8.	-14860.002	1560318.873	-26525728.826	167997990.945
	5	6	7	8
1.	57004.257	-77726.433	53806.744	-14860.002
2.	-5549873.299	7826259.343	-5549241.106	1560318.873
3.	89221743.490	-128870221.615	93031252.562	-26525728.826
4.	-541263979.164	795953224.891	-582669285.617	167997990.945
5.	1569177148.265	-2339960315.843	1732153407.796	-503998362.379
6.	-2339960315.843	3528484544.061	-2635886938.718	772803244.336
7.	1732153407.796	-2635886938.718	1984105128.546	-585460750.430
8.	-503998362.379	772803244.336	-585460750.430	173709097.070

Jak widać z tablicy 1 macierz  $A_{ij}^S$  jest słabo uwarunkowana. Przy wzrastającym  $g$  wyznacznik główny szybko maleje. Wyniki przydatne przy odwracaniu macierzy  $A_{ij}^S$  uzyskuje się jedynie przy dostatecznie niskim  $g$ . W opracowanym programie  $g$  można przyjmować dowolne. Jednakże należy pamiętać, że przyjmowanie dużych  $g$  wymaga dostatecznej dużej dokładności maszyny.

4. Aproksymacja funkcji niesymetrycznych na odcinku  $[-1, +1/$  wielomianem zwykłym

Zmieniając w wielomianie niesymetrycznym oznaczenie współczynnika

$$a_k = \frac{x_{k+1}^A}{2}$$

otrzymano:

$$\varphi^A/x/ = \sum_{k=0}^n j/k+1/x_{k+1}^A x^k .$$

Następnie przyjmując numerację niewiadomej według wzoru:

$$\frac{k+1}{2} = i \text{ otrzymano:}$$

$$/23/ \quad \varphi^A/x/ = \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} x_1^A x^{2i-1} .$$

Stąd układ równań kanonicznych metody najmniejszych kwadratów ma w przypadku aproksymacji asymetrycznej postać:

$$/24/ \quad A_{ij}^A x_j^A = P_1 \quad , \quad i, j = 1, \dots, g, \text{ przy } g = \frac{n+1}{2} ,$$

w których jest

$$/25/ \quad A_{ij}^A = \int_{-1}^1 x^{2i+2j-2} dx = \frac{1}{2j+2i-1} ,$$

$$/26/ \quad P_1 = N^{2i-1} , \quad N^m = \int_0^1 r^A/x/x^m dx .$$

Macierz układu równań /24/ i wektor jego prawych stron po uwzględnieniu /25/ i /26/ napisano następująco:

$$/27/ \quad A_{1j}^A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}, & \frac{1}{5} & \dots & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{5}, & \frac{1}{7} & \dots & \dots & \frac{1}{n+4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n+2}, & \frac{1}{n+4} & \dots & \dots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} N^1 \\ N^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ N^n \end{bmatrix}$$

Wykonano program generowania i odwracania macierzy  $A_{1j}^A$  przy dowolnym  $g$ . Wartość wyznacznika głównej macierzy  $A_{1j}^A$  przy  $g = 2, 4, 6, 8$  podano w tablicy 6.

Tablica 6. Wartości wyznacznika głównego przy aproksymacji wielomianem nieparzystym w zależności od ilości przyjętych jego składników  $g$ .

$g$	2	4	6	8
$A_{1j}^A$	$0.7619048 \cdot 10^{-2}$	$0.1035717 \cdot 10^{-8}$	$0.2215242 \cdot 10^{-26}$	$0.7285994 \cdot 10^{-37}$

W programie,  $g$  można przyjmować dowolne, jednakże trzeba pamiętać, że przyjmowanie dużych  $g$  wymaga dużej dokładności maszyny. W tablicach /7-10/ podano macierze odwrotne przy  $g = 2, 4, 6, 8$ .

Tablica 7. Odwrotna macierz  $A_{1j}^A$ ,  $g = 2$

	1	2
1.	18.750	-26.250
2.	-26.250	43.750

Tablica 8. Odwrócona macierz  $A_{1j}^A$ ,  $g = 4$

	1	2	3	4
1.	129.199	-852.715	1583.613	-879.785
2.	-852.715	6699.902	-13548.692	7918.066
3.	1583.613	-13548.692	28821.762	-17419.746
4.	-879.785	7918.066	-17419.746	10783.652

Tablica 9. Odwrócona macierz  $A_{1j}^A$ ,  $g = 6$

	1	2	3
1.	412.811	-6192.154	30076.157
2.	-6192.154	110574.123	-584814.046
3.	30076.157	-584814.046	3253692.215
4.	-63494.080	1298742.546	-7472764.828
5.	60607.963	-1282091.747	7555794.921
6.	-21445.888	464661.057	-2787966.926

	4	5	6
1.	-63494.080	60607.963	-21445.888
2.	1298742.546	-1282091.747	464661.057
3.	-7472764.828	7555794.921	-2787966.926
4.	17578789.675	-18095812.918	6770777.851
5.	-18095812.918	18889490.154	-7146933.004
6.	6770777.851	-7146933.004	2728829.214

Tablica 10. Odwrócona macierz A<sub>1j</sub>, E = 8

	1	2	3	4
1.	953.296	-25384.094	228638.831	-974444.010
2.	-25384.094	804410.543	-7897567.081	35355736.864
3.	228638.831	-7897567.081	81343139.643	-377027184.770
4.	-974444.010	35355736.864	-377027184.770	1789863207.609
5.	2215771.259	-83130238.894	907867029.133	-4387071617.874
6.	-2762350.669	106135110.678	-1179965578.749	5781502732.499
7.	1780808.780	-69853070.594	768176294.047	-3889994278.968
8.	-464047.351	18403385.465	-209764839.477	1048690372.929
1.	2215771.259	-2762350.669	1780808.780	-464047.351
2.	-83130238.894	106135116.678	-69853070.594	18403385.465
3.	907867029.133	-1179965578.749	768176294.047	-209764839.477
4.	-4387071617.874	5781502732.499	-3889994278.968	1048690372.929
5.	10904177933.125	-14530159159.998	9865353456.248	-2679709250.936
6.	-14530159159.998	19538098028.249	-13366013137.871	3653936506.780
7.	9865353456.248	-13366013137.871	9202347861.122	-2529397571.874
8.	-2679709250.936	3653836586.780	-2529397571.874	698552819.266

### 5. Wybór optymalnego wielomianu

Odróżniono dwa zadania aproksymacji funkcji wielomianami. Jedno zadanie polega na określaniu wielomianu aproksymującego o ustalonym stopniu. Zadanie to może być rozwiązane za pomocą kalkulatorów wyzyskując wyżej podane macierze odwrotne  $A_{ij}^S$ ,  $A_{ij}^A$ , lub przy użyciu opracowanego przez autorów niniejszego artykułu programu na maszynie Odra 1305.

W drugim zadaniu poszukiwany jest wielomian optymalny. Zadanie polega na określeniu stopnia wielomianu.

Optymalnym wielomianem będziemy nazywać taki, którego miarą odchyłki od funkcji aproksymowanej jest w ramach danej techniki obliczeniowej najmniejsza. W celu objaśnienia drogi postępowania przy optymalizacji ze względu na stopień wielomianu wykonano proste przekształcenia wzoru na miarę odchyłki. Powracając do /7/ wzór na miarę odchyłki napisano następująco:

$$/28/ \quad \delta = \int_{-1}^{+1} \left[ f/x - \sum_{k=1}^g x_k \varphi_k \right]^2 dx.$$

Po przyjęciu oznaczeń

$$A_{ij} = \int_{-1}^{+1} \varphi_i/x \varphi_j/x dx, \quad P_j = \int_{-1}^{+1} f/x \varphi_j/x dx$$

i elementarnych przekształceniach wyrażenie /28/ napisano następująco:

$$/29/ \quad \delta = \int_{-1}^{+1} f^2/x dx - 2 \sum_{k=1}^g P_k X_k + \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g A_{ij} X_k X_j$$

Wartość wyrażenia

$$/30/ \quad \delta^{ob} = \sum_{k=1}^g \sum_{j=1}^g X_k X_j A_{kj} - P_k X_k$$

nazwano błędem obliczeniowym.

Natomiast wartość wyrażenia

$$/31/ \quad \delta^m = \int_{-1}^{+1} f^2/x/dx - P_k X_k$$

nazwano błędem metody.

Łatwo zauważyć, że zachodzi zależność:

$$/32/ \quad \delta = \delta^{ob} + \delta^m$$

W przypadku, kiedy obliczenia wykonane są dostatecznie dokładnie  $\delta^{ob} = 0$ . Czynnikiem ten przede wszystkim ma znaczenie dla układów prawie osobliwych. W niniejszym podejściu błąd metody maleje wraz ze stopniem wielomianu. Błąd obliczeń rośnie wraz ze stopniem wielomianu. Stąd wynika, że istnieje wielomian, który dla danej techniki obliczeniowej daje minimalną odchyłkę

$$/33/ \quad \delta_m = \min_n [\delta^{ob} + \delta^m]$$

Warto zwrócić uwagę, że we wzorach /29/, /31/ występuje całka z kwadratu funkcji aproksymowanej. Aby aproksymacja miała sens całka ta musi istnieć i być ograniczona.

W celu określenia optymalnego stopnia wielomianu, wyznaczono współczynniki  $X_1$  kolejno przy  $g = 2, 4, 6, 8$ , a następnie dla poszczególnych  $g$  wyznaczono "odchylenie" według wzoru /29/. Wielomian, którego miarą odchyłki jest najmniejszy nazwano wielomianem optymalnym. Oczywiście jest on optymalny spośród wszystkich, które będą liczone z taką samą dokładnością. Przy zwiększeniu dokładności obliczeń optymalny wielomian może ulec zmianie.

## 6. Przykłady aproksymacji

### Przykład 1

Założone, że funkcja  $f/x/$  jest przedziałami ciągła i określona następującymi wyrażeniami:



$$-1 \leq x < -t, \quad f/x/ = -\frac{1}{2/1-t/} - \frac{1}{2/1-t//1+t/}$$

$$-t < x < 0, \quad f/x/ = 0.$$

$$0 < x < t, \quad f/x/ = -1.$$

$$t < x \leq 1, \quad f/x/ = -1 - \frac{1}{2/1-t/} + \frac{1}{2/1-t//1+t/}$$

/34/

Wyrażenia /26/ określają rodzinę "t" funkcji f/x/. Z rodziny /26/ do obliczeń przyjęto funkcje określone przez t = 0.5 /zadanie 1a/ t = 0.9 /zadanie 1b/ i t = 0.99 /zadanie 1c/. Wykresy funkcji aproksymowanych odpowiadających tym parametrom przedstawiono na rysunkach 1,2,3 linią grubą. Twierdzenie i dowód istnienia wielomianów aproksymujących funkcji z przestrzeni L<sup>2</sup> /-1,1/ można znaleźć w pracy /1/ i /3/. Części: symetryczną i antysymetryczną funkcji f/x/ obliczone ze wzoru /1/ podane niżej.

x	0 < x < t	t < x ≤ 1
f <sup>S</sup> /x/	-0.5	-0.5 - $\frac{1}{2/1-t/}$
f <sup>A</sup> /x/	-0.5	-0.5 + $\frac{1}{2/1-t//1+t/}$

Przyjmując kolejno: t = 0.5, t = 0.9, t = 0.99 otrzymano trzy zestawy danych funkcji przyjętych w wykonanych obliczeniach

Przykład 1a, t = 0.5

	0 < x < 0.5	0.5 < x ≤ 1
f <sup>S</sup> /x/	-0.5	-1.5
f <sup>A</sup> /x/	-0.5	0.166667

Przykład 1b  $t = 0.9$

	$0 < x < 0.9$	$0.9 < x \leq 1$
$f^S/x/$	-0.5	-5.5
$f^A/x/$	-0.5	$2 \frac{5}{38}$

Przykład 1c  $t = 0.99$

	$0 < x < 0.99$	$0.99 < x \leq 1$
$f^S/x/$	-0.5	-50.5
$f^A/x/$	-0.5	$24 \frac{249}{398}$

Całka oznaczona z kwadratu części symetrycznej funkcji  $f/x/$  jest równa:

$$/35/ \quad L^S = \int_0^1 [f^S/x/]^2 dx = \frac{1}{4/1-t/2} (4-7t+3t)^2.$$

Wartości liczbowe wyrażenia /27/ obliczone przy poszczególnych  $t$  zestawiono w tablicy

$t$	0.5	0.9	0.99
$L^S$	1.25	3.25	25.75

Całka oznaczona z kwadratu części asymetrycznej funkcji  $f/x/$  jest równa:

$$/36/ \quad L^A = \int_0^1 [f^A/x/]^2 dx = \frac{1}{4} \left[ \frac{1+t-t^2}{/1-t/ /1+t/2} \right] t.$$

Wartości liczbowe wyrażenia /28/ obliczone dla poszczególnych t zestawiono w tabelicy

	0,5	0,9	0,99
$L^A$	0.138889	0.67936	6.31171

Polimomenty funkcji i prawe strony równań.

Przyjmując oznaczenie  $1-t = r$  otrzymano następujące wzory na polimomenty w i wartości prawych stron.

a/ aproksymacja symetryczna

$$N_{(r)}^m = - \int_0^1 \frac{1}{2} x^m dx - \int_{1-r}^1 \frac{1}{2r} x^m dx = - \frac{1}{2/m+1} \left\{ 1 - \frac{1}{r} \left[ /-1-r/^{m+1} - 1 \right] \right\},$$

/37

$$N_r^m = - \frac{1}{2/m+1} \left\{ 1 - \sum_{s=1}^{m+1} /-1/^{s-1} \binom{m+1}{s} r^{s-1} \right\},$$

$$m = 0, 2, 4, \dots, 2g-2, \quad s = 1, 2, 3, \dots, m+1, \quad \binom{m}{s} - \text{symbol Newtona}$$

$$P_{(r)1} = N_r^{2i-2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, g.$$

b/ aproksymacja antysymetryczna

Analogicznie wyprowadzone wyrażenie na polimomenty ma postać:

$$N_r^m = - \frac{1}{2/m+1} \left[ 1 + \frac{1}{2-r} \sum_{s=1}^{m+1} /-1/^{s-1} \binom{m+1}{s} r^{s-1} \right],$$

/38/

$$m = 1, 3, 5, \dots, 2g-1, \quad s = 1, 2, 3, \dots, m+1,$$

$$P_{(r)1} = N_{(r)}^{2i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, g.$$

Przy ustalonym kolejnym g, g = 2, 4, 6, 8 obliczone wartości polimomentów w trzech przypadkach, r = 0.5, r = 0.1, r = 0.01, a następnie wyznaczono niewiadome

$$X_{(r)1}^S = A_{ik}^S \quad {}^{-1} P_{(r)k}, \quad X_{(r)1}^A = A_{ik}^A \quad {}^{-1} P_{(r)k}.$$

Po obliczeniu niewiadomych aproksymacji obliczone przy  $g = 2, 4, 6, 8, 10$  miary odchyłek według wzoru /29/.

Dane zestawiono w tabelicy /10/, w której przyjęto oznaczenia:

$m$  - stopień wielomianu,  $\delta$  - miara odchyłki aproksymacji,

$\delta_p = \frac{\delta}{L} 100$  - miara odchyłki w procentach,

$L$  - całka z funkcji aproksymowanej.

Tablica 10. Wartości miar odchyłek aproksymacji w zadaniu 1 / a, b, c/

Nr zad.	Rozdz. aproks.	m						$\frac{L}{2}$
		$\delta$	3	7	11	15	19	
1a	parzysta	$\delta_k$	0.07422	0.04195	0.02253	0.01726	0.01539	1.25
		$\delta_p$	5.94%	3.36%	1.80%	1.36%	1.23%	
	nieparzysta	$\delta_k$	0.09616	0.02404	0.02218	0.01991	0.01944	0.13889
		$\delta_p$	69.24%	17.31%	15.97%	14.34%	14.00%	
t=0,5	suma ryczna	$\delta_k$	0.17038	0.06599	0.04471	0.03718	0.03482	1.38889
		$\delta_p$	12.27%	4.75%	3.22%	2.68%	2.51%	
	parzysta	$\delta_k$	1.33622	0.39814	0.32175	0.22133	0.08463	3.250
		$\delta_p$	41.11%	12.25%	9.90%	6.81%	2.60%	
1b	nieparzysta	$\delta_k$	0.23086	0.13085	0.09510	0.06890	0.06957	0.67936
		$\delta_p$	33.98%	19.26%	14.00%	10.14%	10.24%	
	suma ryczna	$\delta_k$	1.56708	0.52898	0.41684	0.29023	0.15420	3.92936
		$\delta_p$	39.88%	13.46%	10.61%	7.39%	3.92%	
t=0,9								

c.d. Tablica 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	parzy- sta	$\frac{\delta}{2}$	23.53710	18.87985	13.0076	8.05298	8.9230	25.75
10		$\delta_p$	91.48%	73.32%	50.51%	31.27%	34.65%	
	niepe- rzysta	$\frac{\delta_k}{2}$	5.65506	4.36432	2.90833	1.78709	1.37511	6.31171
t=0,99		$\delta_p$	89.60%	69.15%	47.35%	28.31%	21.79%	
	sumo- ryczna	$\frac{\delta}{2}$	29.21215	23.24417	15.91593	9.84007	10.29811	32.06171
		$\delta_p$	91.11%	72.50%	49.89%	30.69%	32.12%	

W tabelicy zestawiono normę procentową odchyłki  
 $\| \delta \|_p = \frac{\| \delta \|}{\| L \|} \cdot 100$  oraz całkowitą normę  $\| \frac{L}{2} \|$

Nr zad.	Rozdz. aproks.	m=3	m=7	m=11	m=15	m=19	$\  \frac{L}{2} \ $
1a t=0,5	parzysta	24.37%	18.33%	13.42%	11.75%	11.09%	1.118
	nieparzysta	83.21%	41.61%	39.96%	37.87%	37.42%	0.372
	sumaryczna	35.03%	21.79%	17.94%	16.37%	15.84%	1.176
1b t=0,9	parzysta	64.11%	35.00%	31.46%	26.09%	16.12%	1.802
	nieparzysta	58.29%	43.89%	37.42%	31.84%	32.12%	0.824
	sumaryczna	63.15%	36.68%	32.57%	27.18%	19.80%	1.982
1c t=0,99	parzysta	95.65%	85.63%	71.07%	55.92%	58.86%	5.07
	nieparzysta	94.66%	83.16%	68.81%	52.21%	46.68%	2.51
	sumaryczna	95.60%	85.15%	70.63%	55.40%	56.67%	5.66

Tablica 11. Zestawienie norm odchyłek aproksymacji w zadaniu 1 /a,b,c/.

W oparciu o wyniki zamieszczone w dwóch powyższych tablicach zestawiono sumaryczne miary odchyłek /tablica 12/ oraz normy odchyłek odpowiadające wielomianom optymalnym.

Nr zad.	Stopień wielomianu	Odchyłka sumaryczna $\frac{\sigma}{2}$	Norma sum. odchyłki $\frac{\sigma}{2}$	$\frac{L}{2}$	Norma funkc. aproksym. $\frac{L}{2}$
1a	Aproks. parzysta m = 18	$\frac{\sigma}{2}$ 0.03482	0.186	1.38889	1.176
	Aproks. nieparzysta m=19	$\frac{\sigma}{p}$ 2.51%	15.84%		
1b	Aproks. parzyst. m = 18	$\frac{\sigma}{2}$ 0.15353	0.391	3.92936	1.982
	Aproks. nieparzyst. m=15	$\frac{\sigma}{p}$ 3.91%	19.77%		
1c	Aproks. parzyst. m = 14	$\frac{\sigma}{2}$ 9.42809	3.08%	32.06171	5.660
	Aproks. nieparz. m = 19	$\frac{\sigma}{p}$ 29.41%	54.24%		

Tablica 12. Wartości miar odchyłek i norm odchyłek optymalnych wielomianów aproksymujących otrzymanych w zadaniu 1 /a,b,c/.

Dla wyżej wymienionych wielomianów podano wartości liczbowe współczynników  $X_1$ .

Tablica 13. Symetria. Wartości liczbowe współczynników optymalnych wielomianów aproksymujących funkcje występujące w zadaniu 1 /a,b,c/.

l	K	Zad.1a	Zad.1b	Zad.1c
1.	0	-0.468	-0.277	0.300
2.	2	-5.104	-41.634	-96.412
3.	4	108.184	1254.134	1856.177
4.	6	-583.483	-14326.851	-13165.771
5.	8	-218.559	80991.432	43833.165



1	2	3	4	5
6.	10	8704.190	-254459.193	-74025.196
7.	12	-25829.074	465022.941	61370.691
8.	14	34289.266	-490719.607	-19817.760
9.	16	-22056.918	276815.368	
10.	18	5590.656	-64542.703	

Tablica 14. Antysymetria. Wartości liczbowe współczynników optymalnych wielomianów aproksymujących funkcje występujące w zadaniu 1 /a,b,c/.

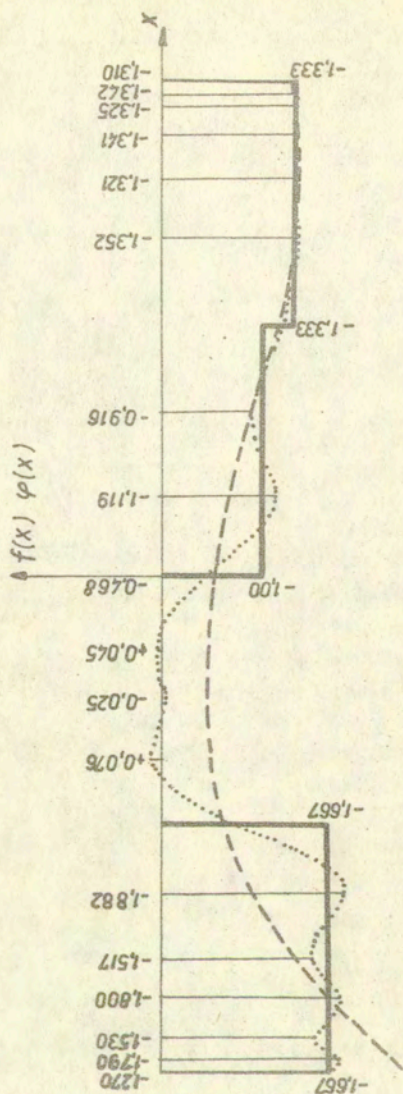
1	K	Zad.1a	Zad.1b	Zad.1c
1.	1	-6.290	-5.753	-1.938
2.	3	140.529	97.258	-87.477
3.	5	-1670.669	-795.736	1662.565
4.	7	10313.729	3207.757	-9896.466
5.	9	-35086.567	-6805.215	20233.963
6.	11	69513.029	7640.287	18736.597
7.	13	-82524.773	-4211.725	-152009.524
8.	15	54842.034	874.627	263771.450
9.	17	-18968.665		-199988.546
10.	19	2447.624		57607.728

Wartości rzędnych optymalnych wielomianów symetrycznych, antysymetrycznych wyznaczano z wzorów:

$$/39/ \quad \psi^S/x/ = \sum_{i=1}^g X_1^S x^{2i-2}, \quad \psi^A/x/ = \sum_{i=1}^g X_1^A x^{2i-1},$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, g$$

w punktach wynikających z podziału odcinka /0,1/ na dziesięć równych części. Wielkości obliczone zestawiono w tabelicy:

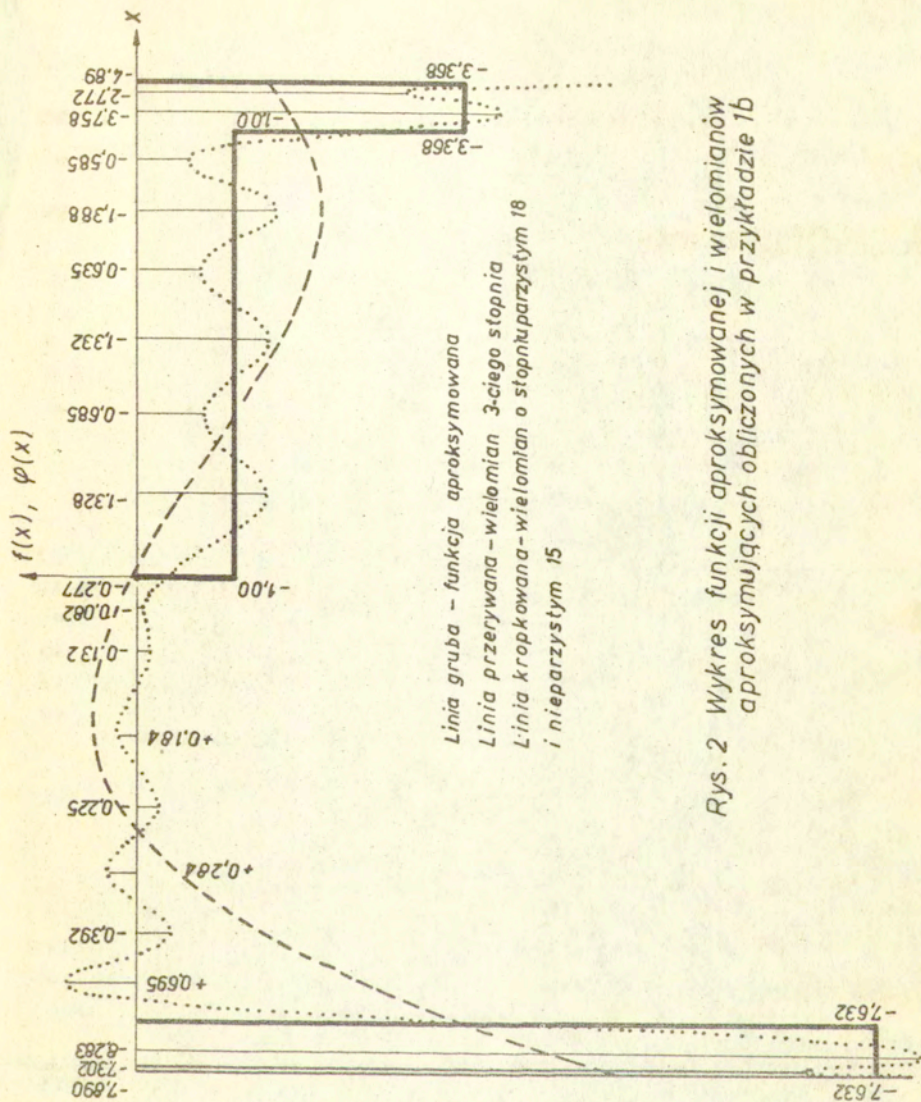


Linia gruba - funkcja aproksymowana

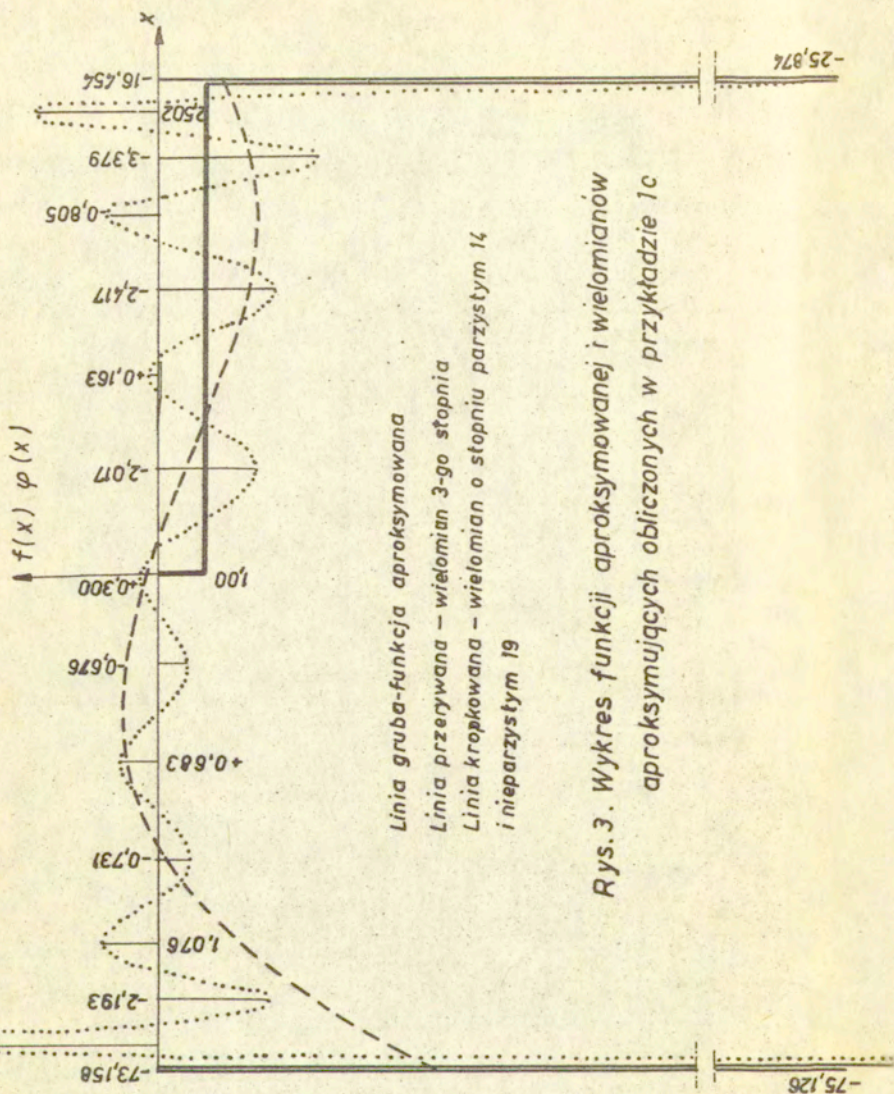
Linia przerywana - wielomian 3-ciego stopnia

Linia kropkowa - wielomian 19 tego stopnia

Rys. 1. Wykres funkcji aproksymowanej i wielomianów aproksymujących obliczonych w przykładzie 1a.



Rys. 2 Wykres funkcji aproksymowanej i wielomianów aproksymujących obliczonych w przykładzie 1b



Rys. 3. Wykres funkcji aproksymowanej i wielomianów aproksymujących obliczonych w przykładzie 1c

x	Symetria			Antysymetria		
	1a	1b	1c	1a	1b	1c
0	-0.468	-0.277	0.300	0.0	0.0	0.0
0.1	-0.509	-0.582	-0.492	-0.504	-0.486	-0.266
0.2	-0.536	-0.670	-1.325	-0.553	-0.590	-0.672
0.3	-0.451	-0.274	-0.470	-0.477	-0.453	-0.657
0.4	-0.486	-0.520	0.406	-0.505	-0.460	-0.243
0.5	-0.981	-0.724	-0.801	-0.216	-0.574	-0.519
0.6	-1.555	-0.193	-1.423	0.234	-0.476	-0.782
0.7	-1.513	-0.769	0.693	0.163	-0.431	-0.055
0.8	-1.474	-0.150	-1.084	0.152	-0.692	-1.077
0.9	-1.491	-3.078	0.191	0.150	0.746	0.476
1	-1.290	-6.392	-44.806	-0.020	1.499	28.353

Tablica 15. Symetria i antysymetria. Wartości rzędnych optymalnych wielomianów aproksymujących występujących w zadaniu 1 /a,b,c/ w punktach podziału odcinka /0,1/ na dziesięć równych części.

Następnie według wzorów /40/ obliczono rzędne sumarycznych optymalnych wielomianów aproksymujących:

$$/40/ \quad \psi/x/ = \psi^S/x/ + \psi^A/x/ \quad x > 0, \text{ dodatnia półoś}$$

$$\psi/x/ = \psi^S/x/ - \psi^A/x/ \quad x < 0, \text{ ujemna półoś}$$

Krzywe odpowiadające wielomianom aproksymującym znaczone na rysunkach 1,2,3 kropkami. Na tych rysunkach podano również wielkości rzędnych optymalnych wielomianów aproksymujących. Celem porównania naniesiono linią przerywaną krzywe odpowiadające wielomianom 3-go stopnia.

Przykład 2.

Założono, że funkcja  $f/x/$  jest ciągła i określona następującymi wyrażeniami:

$$/41/ \quad -1 \leq x \leq \frac{-1}{2} /1+t/ , \quad f/x/ = - \frac{2/1+x/}{/1-t/^2} - \frac{2/1+x/}{/1-t/^2/1+t/} .$$

$$\frac{1}{2}/1+t/ \leq x \leq -t , \quad f/x/ = 2 \frac{/t+x/}{/1-t/^2} + 2 \frac{/t+x/}{/1-t/^2/1+t/} .$$

$$-t \leq x \leq 0 , \quad f/x/ = 0 .$$

$$0 \leq x \leq 0.5 , \quad f/x/ = -4x .$$

$$0.5 \leq x \leq t , \quad f/x/ = -4/1-x/ .$$

$$t \leq x \leq \frac{1}{2}/1+t/ , \quad f/x/ = -4/1-x/ + \frac{2/t-x/}{/1-t/^2} - \frac{2/t-x/}{/1-t/^2/1+t/} .$$

$$\frac{1}{2}/1+t/ \leq x \leq 1 , \quad f/x/ = -4/1-x/ - \frac{2/1-x/}{/1-t/^2} + \frac{2/1-x/}{/1-t/^2/1+t/} .$$

Podobnie jak w przykładzie /1/ i tu do obliczeń przyjęto funkcje określone przez  $t = 0.5$  /zadanie 2a/,  $t = 0.9$  /zadanie 2b/,  $t = 0.99$  /zadanie 2c/. Wykresy funkcji aproksymowanych odpowiadających tym parametrom przedstawiono na rysunkach 4,5,6 linią grubą.

Twierdzenie i dowód istnienia wielomianów aproksymujących funkcji ciągłych w przestrzeni  $L^2$   $/-1,1/$  można znaleźć w pracy [1] Część symetryczną i antysymetryczną funkcji  $f/x/$  podano poniżej:

	$0 \leq x \leq 0.5$	$0.5 \leq x \leq t$	$t \leq x \leq \frac{1}{2} / 1+t/$	$\frac{1}{2} / 1+t/ \leq x \leq 1$
$f^S/x/$	$-2x$	$-2/1-x/$	$-2/1-x/ + \frac{2/t-x/}{1-t/2}$	$-2/1-x/ - 2\frac{1-x/}{1-t/2}$
$f^A/x/$	$-2x$	$-2/1-x/$	$-2/1-x/ - 2\frac{t-x/}{1-t/2} / 1+t/$	$-2/1-x/ + 2\frac{1-x/}{(1-t/2)(1+t)}$

Przyjmując kolejno  $t = 0,5$ ,  $t = 0,9$ ,  $t = 0,99$  otrzymano trzy zestawy danych funkcji przyjętych w wykonanych obliczeniach.

Zadanie 2a,  $t = 0,5$

Współrzędna	$0 \leq x \leq 0,5$	$0,5 \leq x \leq 0,75$	$0,75 \leq x \leq 1$
Funkcja $f^S/x/$	$-2x$	$-2/3x-1/$	$-10/1-x/$
Wartość funkc. na końc. prz.	$0 \quad -1$	$-1 \quad -2,5$	$-2,5 \quad 0$
Funkcja $f^A/x/$	$-2x$	$-\frac{2}{3}/7-11x/$	$-\frac{10}{3}/x-1/$
Wartość funkc. na końc. prz.	$0 \quad -1$	$-1 \quad \frac{5}{6}$	$\frac{5}{6} \quad 0$

Zadanie 2b,  $t = 0,9$

Współrz.	$0 \leq x \leq 0,5$	$0,5 \leq x \leq 0,9$	$0,9 \leq x \leq 0,95$	$0,95 \leq x \leq 1$
Funkc. $f^S/x/$	$-2x$	$-2/1-x/$	$-2/99-89/$	$-202/1-x/$
Wart. funkc. na końc. prz.	$0 \quad -1$	$-1 \quad -0,2$	$-0,2 \quad -10,1$	$-10,1 \quad 0$
Funkc. $f^A/x/$	$-2x$	$-2/1-x/$	$-\frac{2}{19}/919-1019x/$	$\frac{1962}{19}/1-x/$
Wart. funkcji na końc. prz.	$0 \quad -1$	$-1 \quad -0,2$	$-0,2 \quad 5,16317$	$5,16317 \quad 0$

Zadanie 2c,  $t = 0.99$

Współrz.	$0 \leq x \leq 0.5$	$0.5 \leq x \leq 0.99$	$0.99 \leq x \leq 0.995$	$0.995 \leq x \leq 1$
Funkc. $f^S/x/$	$-2x$	$-2/1-x/$	$-2/9999x-9899/$	$-20002/1-x/$
Wart. funkcji na końc. prz.	0 -1	-1 -0.02	-0.02 -100.01	-100.01 0
Funkcja $f^A/x/$	$-2x$	$-2/1-x/$	$\frac{-2}{199}/990199-\frac{1000199x}{199}$	$\frac{199602}{199}/1-x/$
Wart. funkcji na końc. prz.	0 -1	-1 -0.02	-0.02 +50.241256	50.241256 0

Całka oznaczona z kwadratu części symetrycznej  $f/x/$  jest równa:

$$/42/ \quad L^B = \int_0^1 [f^S/x/]^2 dx = \frac{1}{3\sqrt{1-t}} /5-7t + 3t^2/.$$

Wartości liczbowe wyrażenia /31/ obliczone przy poszczególnych  $t$  zestawiono poniżej:

$t$	0.5	0.9	0.99
$L^B$	1.5	3.766667	33.6766667

Całka oznaczona z kwadratu części asymetrycznej funkcji  $f/x/$  jest równa:

$$/43/ \quad L^A = \int_0^1 [f^A/x/]^2 dx = \frac{1}{3\sqrt{1-t}/\sqrt{1+t}} (-1+4t+2t^2-4t^3).$$

Wartości liczbowe wyrażenia /32/ obliczone dla poszczególnych  $t$  podano w poniższym zestawieniu.



t	0.5	0.9	0.99
L <sup>A</sup>	0.296296	1.20406	8.745604

Polimomenty funkcji i prawe strony równań wyrażono jak następuje:

a/ aproksymacja symetryczna

$$/44/ \quad N_{(r)}^m = \frac{1}{\sqrt{m+1}\sqrt{m+2}} \left[ \sum_{s=0}^m /0.5/s + \sum_{s=2}^{m+2} /-1/s r^{s-2} /1 - \frac{1}{s-1} / \binom{m+2}{s} \right],$$

$$m = 0, 2, 4, \dots, 2g-2,$$

$$P_{(r)1}^{2i-2} = N_{(r)}^{2i-2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, g.$$

b/ aproksymacja antysymetryczna

W tym przypadku polimomenty funkcji i prawe strony równań liczono ze wzorów:

$$/45/ \quad N_{(r)}^m = \frac{1}{\sqrt{m+1}\sqrt{m+2}} \left[ \sum_{s=0}^m /0.5/s - \frac{2}{2-r} \sum_{s=2}^{m+2} /-1/s r^{s-2} \left( 1 - \frac{1}{2^{s-1}} \binom{m+2}{s} \right) \right],$$

$$m = 1, 3, 5, \dots, 2g-1.$$

$$P_{(r)1} = N_{(r)}^{2i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, g.$$

Przy ustalonym kolejnym g, g = 2, 4, 6, 8 obliczono wartości polimomentów w trzech przypadkach r = 0.5 /zadanie 2a/, r = 0.1 /zadanie 2b/, r = 0.01 /zadanie 2c/, a następnie obliczono niewiadome X<sub>1</sub><sup>S</sup>, X<sub>1</sub><sup>A</sup>. Po obliczeniu niewiadomych aproksymacji obliczono przy każdym g odchyłki według wzoru /29/.

Dane zestawiono w tabeli /16/.

Tablica 16. Wartości miar odchyłek aproksymacji w zadaniu 2 /a, b, c/

Nr zad.	Rozdz. aprosk.	m					$\frac{L}{\Sigma}$	
		3	7	11	15	19		
2a	parzy- sta	$\delta$	0.38968	0.02920	0.00748	0.00161	0.00061	1.5
		$\delta_p$	25.98%	1.95%	0.50%	0.11%	0.04%	
	niepa- rzysta	$\delta$	0.16542	0.03514	0.00593	0.00113	0.00106	0.29630
		$\delta_p$	55.83%	11.86%	2.0%	0.36%	0.36%	
t=0,5	suma- ryczna	$\delta$	0.55511	0.06435	0.01342	0.00274	0.00167	1.7963
		$\delta_p$	30.90%	3.58%	0.75%	0.15%	0.09%	
	parzy- sta	$\delta$	1.98246	1.31183	0.97030	0.29814	0.17740	3.76667
		$\delta_p$	52.63%	34.82%	25.76%	7.92%	4.71%	
2b	niepa- rzysta	$\delta$	0.43948	0.35915	0.21207	0.07285	0.06678	1.2041
		$\delta_p$	36.50%	29.83%	17.61%	6.05%	5.55%	
	suma- ryczna	$\delta$	2.42193	1.67098	1.18236	0.37099	0.24418	4.97077
		$\delta_p$	48.72%	33.61%	23.79%	7.46%	4.91%	
t=0,9	parzy- sta	$\delta$	0.38968	0.02920	0.00748	0.00161	0.00061	1.5
		$\delta_p$	25.98%	1.95%	0.50%	0.11%	0.04%	
	niepa- rzysta	$\delta$	0.16542	0.03514	0.00593	0.00113	0.00106	0.29630
		$\delta_p$	55.83%	11.86%	2.0%	0.36%	0.36%	
t=0,5	suma- ryczna	$\delta$	0.55511	0.06435	0.01342	0.00274	0.00167	1.7963
		$\delta_p$	30.90%	3.58%	0.75%	0.15%	0.09%	
	parzy- sta	$\delta$	1.98246	1.31183	0.97030	0.29814	0.17740	3.76667
		$\delta_p$	52.63%	34.82%	25.76%	7.92%	4.71%	
2b	niepa- rzysta	$\delta$	0.43948	0.35915	0.21207	0.07285	0.06678	1.2041
		$\delta_p$	36.50%	29.83%	17.61%	6.05%	5.55%	
	suma- ryczna	$\delta$	2.42193	1.67098	1.18236	0.37099	0.24418	4.97077
		$\delta_p$	48.72%	33.61%	23.79%	7.46%	4.91%	

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	parzy- sta	Łk	31.6094	27.0801	21.3953	16.5151	16.8289	33.6767
20		Łp	93.86%	80.35%	63.53%	49.04%	49.97%	
	niepa- rzysta	Łk	7.71039	6.55814	5.04400	3.95467	3.56553	8.7456
t=0,99		Łp	88.16%	74.99%	57.67%	45.22%	40.77%	
	suma- ryczna	Łk	39.3198	33.6182	26.4393	20.4698	20.3945	42.4223
		Łp	92.67%	79.24%	62.32%	48.25%	48.07%	

W tabelicy zestawiono normę procentową miar odchyłki  
 $\| \delta \|_p = \frac{\| \delta \|}{\| L \|} \cdot 100$  oraz całkowitą normę  $\| \frac{L}{2} \|$

Tablica 17. Zestawienie norm odchyłek aproksymacji w zadaniu 2 /a, b, c/

Nr zad.	Rodz. aproks.	m=3	m=7	m=11	m=15	m=19	$\  \frac{L}{2} \ $
2a	parzysta	50.97%	13.96%	7.07%	3.31%	2.00%	1.225
	nieparzysta	74.72%	34.44%	14.14%	6.18%	6.00%	0.544
	sumaryczna	55.59%	18.92%	8.66%	3.87%	3.00%	1.340
2b	parzysta	72.55%	59.00%	50.75%	28.14%	21.70%	1.941
	nieparzysta	60.42%	54.62%	41.96%	24.60%	23.56%	1.097
	sumaryczna	69.80%	57.98%	48.77%	27.32%	22.16%	2.230
2c	parzysta	96.88%	89.64%	79.71%	70.03%	70.69%	5.803
	nieparzysta	93.89%	86.60%	75.94%	67.25%	63.85%	2.957
	sumaryczna	96.27%	89.02%	78.94%	69.46%	69.33%	6.513

W oparciu o wyniki zamieszczone w dwóch powyższych tabelach zestawiono sumaryczne miary odchyłki /tablica 18/ oraz normy odchyłek odpowiadające wielomianom optymalnym zadań aproksymacji 2a, 2b, 2c.

**Tablica 18.** Wartości miar odchyłek i norm odchyłek optymalnych wielomianów aproksymujących otrzymanych w zadaniu 2 /a, b, c/.

Nr zad.	Stopień wiel.	Odchyłka sumarycz.	Norma sum. odchyłki	N/L	Norma funkcji aproks.	
		$\sum \delta$	$\frac{\sum \delta}{20} p$		$\frac{  \delta  }{  \delta  }$	
2a	Aproks. parzysta m = 18	$\sum \delta$	0.00167	0.04087	1.7963	1.340
	Aproks. nieparz. m = 19	$\sum \delta_p$	0.09%	3.05%		
2b	Aproks. parzysta m = 18	$\sum \delta$	0.24418	0.4914	4.97077	2.230
	Aproks. nieparz. m = 19	$\sum \delta_p$	4.91%	22.16%		
2c	Aproks. parzysta m = 14	$\sum \delta$	20.0806	4.48114	42.4223	6.513
	Aproks. nieparz. m = 19	$\sum \delta_p$	47.80%	68.80%		

Dla wyżej wymienionych wielomianów podano wartości liczbowe współczynników  $X_1$ .

**Tablica 19.** Symetria. Wartości liczbowe współczynników optymalnych wielomianów aproksymujących funkcje występujące w zadaniu 2 /a, b, c/.

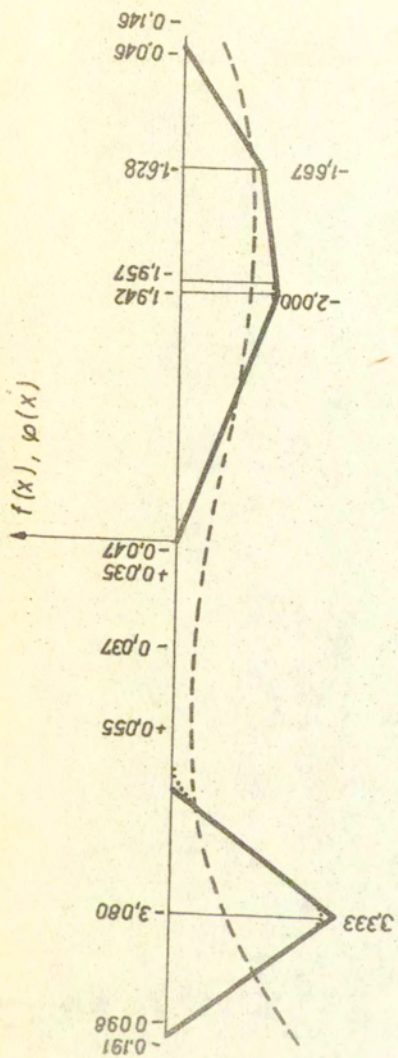
1	Zad. 2a	Zad. 2b	Zad. 2c
0	-0.047	0.160	0.682
2	-15.777	-54.061	-102.032
4	227.327	1365.609	1842.083
6	-2042.229	-14757.238	-12945.162
8	10459.783	79878.851	43091.537
10	-31936.698	-239987.574	-72854.406

1	2	3	4
12	58175.359	418034.578	60468.146
14	-61485.121	-418768.031	-19544.943
16	34689.925	223153.008	
18	-8072.687	-48863.151	

Tablica 20. Antysymetria. Wartości liczbowe współczynników optymalnych wielomianów aproksymujących funkcje występujące w zadaniu 2 /a, b, c/.

1	Zad.2a	Zad.2b	Zad.2c
1	-2.264	-1.709	1.639
3	14.097	-7.548	-183.084
5	-186.495	-26.622	2567.114
7	853.208	1357.633	-14924.133
9	-1219.416	-10464.293	38151.933
11	-421.304	37719.459	-22698.208
13	2563.493	-73161.929	-90509.642
15	-2105.475	77851.462	207443.129
17	395.942	-42495.217	-171090.972
19	108.243	9227.215	51270.711

Wartości rzędnych optymalnych wielomianów aproksymacyjnych otrzymanych w zadaniach 2a, 2b, 2c w stanach symetrii, i antysymetrii wyznaczone z wzorów /39/. W obliczeniach przyjęto podział odcinka /0,1/ na dziesięć równych części. Wielkości obliczone zestawiono w tablicy.



*Linia gruba - funkcja aproksymowana*

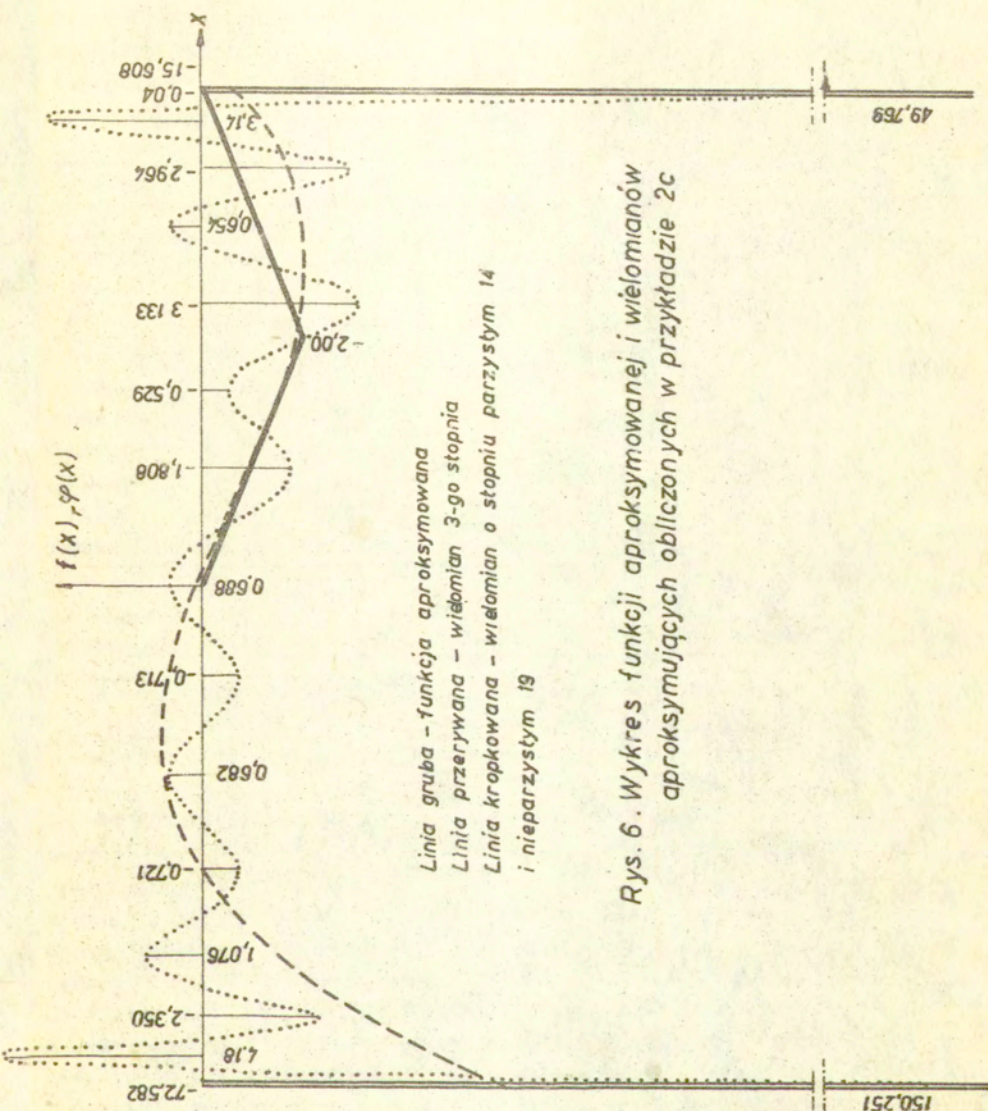
*Linia przerywana - wielomian 3-go stopnia*

*Linia kropkowa - wielomian 19-go stopnia. Wielomian 19-go stopnia nie pokrywa się z funkcją aproksymowaną, jedynie w bliskim otoczeniu punktów  $(-0.75, -0.5, 0, 2.000)$*

*Rys. 4. Wykres funkcji aproksymowanej i wielomianów aproksymujących obliczonych w przykładzie 2a*







Rys. 6. Wykres funkcji aproksymowanej i wielomianów aproksymujących obliczonych w przykładzie 2c

Tablica 21. Symetria i antysymetria. Wartości rzędnych optymalnych wielomianów aproksymujących występujących w zadaniu 2 w punktach podziału odcinka  $/0,1/$  na dziesięć równych części.

x	Symetria			Antysymetria		
	2a	2b	2c	2a	2b	2c
0	-0,047	0,160	0,682	0,00	0,00	0,00
0,1	-0,184	-0,258	-0,166	-0,214	-0,179	0,005
0,2	-0,421	-0,581	-1,177	-0,389	-0,398	-0,487
0,3	-0,588	-0,376	-0,588	-0,590	-0,634	-0,778
0,4	-0,785	-0,809	0,054	-0,838	-0,790	-0,590
0,5	-1,074	-1,205	-1,214	-0,868	-0,905	-0,931
0,6	-1,552	-0,491	-1,725	-0,318	-0,912	-1,100
0,7	-2,254	-0,831	0,569	0,517	-0,480	-0,169
0,8	-2,059	-0,166	-0,976	0,692	-0,540	-0,950
0,9	-0,983	-2,297	0,505	0,323	0,876	0,723
1,0	-0,164	2,150	-44,093	0,024	-1,548	28,488

### 7. Wnioski z wykonanych przykładów aproksymacji

Aproksymowane w niniejszej pracy funkcje są całkowalne z kwadratem na odcinku  $/-1, +1/$ .

Funkcje przyjęte w przykładzie 1 są nieciągłe w trzech wewnętrznych punktach  $/-t, 0, t/$  odcinka  $/-1,1/$ .

Funkcje przyjęte w przykładzie 2 są ciągłe natomiast ich pochodne są nieciągłe w pięciu punktach  $/-\frac{1+t}{2}, -t, 0, t, +\frac{1+t}{2}/$  odcinka  $/-1, +1/$ .

Występujące nieciągłości funkcji aproksymowanych są wprost proporcjonalne do parametru  $t$ . Aproksymacje wykonano przy  $t = 0,5, 0,9, 0,99$ .

Funkcje aproksymowane nie są wielomianami, dlatego aproksymacje nie mogą być z nimi identyczne. Stąd też ich aproksymacje wielomianowe posiadają odchyłki skończone. Miary odchyłek wielomianów aproksymujących od funkcji aproksymowanych przy danym stopniu wielomianu rosną wraz z parametrem  $t$  /tablica 11, 17/.

We wszystkich 6-ciu zadaniach miary odchyłek maleją wraz ze stopniem wielomianu od 0 do 15 /tablica 11, 17/.

W przypadku  $t = 0.9$ ,  $0.99$  w pierwszym zadaniu i  $t = 0.99$  w drugim zadaniu rozpoczynając od 15 stopnia wielomianu odchyłka aproksymacji rośnie co jest wynikiem błędu obliczeniowego metody.

Najmniejsza możliwa miara odchyłki /norma odchyłki/ wynosi przy:

$t = 0.5$  w zadaniu 1 2.51% /15.84%/ a w zadaniu 2 0.09% /3.05%/,  
 $t = 0.9$  w zadaniu 1 3.91% /19.77%/ a w zadaniu 2 4.91% /22.16%/,  
 $t = 0.99$  w zadaniu 1 29.41% /54.24%/ a w zadaniu 2 47.30%  
/68.80%/.

/patrz tablice 12 i 18/.

Stąd wynika, że rozpatrywane funkcje przy parametrze  $t = 0.99$  /przy dużych nieciągłościach/ nie powinny w praktyce być aproksymowane metodą wielomianową.

Niniejsza metoda nadaje się do aproksymacji wielomianami funkcji, które mogą być przedstawione przy pomocy wielomianów o stopniach niższych niż 20. Przy wyższych stopniach występujący błąd obliczeniowy decyduje o wielkości odchyłki. Aby aproksymacja przy wyższych stopniach była efektywna koniecznym jest zwiększenie dokładności obliczeń maszyny liczącej.

## 8. Opis programu

Program przeznaczony jest do aproksymacji funkcji na odcinku  $[-1, +1]$ . Napisany jest w języku Fortran 1900 na maszynie z serii Odra 1305. Program zajmuje mniej niż 9K słów pamięci operacyjnej.

Wartość wyznacznika przy odwracaniu macierzy jest liczona z podwójną precyzją. Wszystkie inne elementy są liczone z pojedynczą precyzją. Czas obliczeń około 10 sekund.

Danymi programu są: polimomenty o rzędzie odpowiadającym stopniowi wielomianu aproksymującego, oraz całki z kwadratu części symetrycznej i asymetrycznej funkcji aproksymowanej.

Program drukuje współczynniki wielomianów symetrycznej i asymetrycznej części funkcji aproksymowanej zmieniających się kolejno stopni od 2 do 19 oraz odpowiadające tym wielomianom

miary odchyłek i współrzędne na odcinku /0,1/ w odstępach co 0,1.

Program jest dostępny w Laboratorium Instytutu Dróg i Mostów Politechniki Warszawskiej. Dysponentem programu jest Pracownia Pól Odkształceń IPPT.

### 9. Aproksymacja funkcji na odcinku /-1, +1/ wielomianami Legendre'a.

W tym punkcie przedstawiono zagadnienie aproksymacji za pomocą wielomianów Legendre'a.

Rozszerzenie w niniejszej pracy zbioru funkcji aproksymacyjnych o wielomiany ortogonalne Legendre'a umożliwiło porównanie wyników otrzymanych z dwóch metod obliczeniowych aproksymacji:

- wielomianami zwykłymi,
- wielomianami ortogonalnymi Legendre'a.

Kolejne wielomiany Legendre'a mogą być wyrażone następująco:

$$/46/ \quad P_n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{i=0}^{i=s} \frac{2^{n-i} / i!}{n-2i} \binom{n}{i} (-1)^i x^{n-2i}$$

$n, i = 0, 1, 2, \dots$  kolejne liczby naturalne,

$\binom{n}{i}$  - symbol permutacyjny Newtona,

$s = \frac{n}{2}$ , w przypadku wielomianów parzystych,

$s = \frac{n-1}{2}$  dla wielomianów nieparzystych.

Zmieniając indeksy we wzorze /46/ napisano:

$$/47/ \quad P_n = \frac{1}{2^n n!} \sum_k^{k=n} \frac{(n+k)!}{k!} \binom{n}{\frac{n-k}{2}} (-1)^{\frac{n-k}{2}} x^k,$$

$n$  - stopień wielomianu,

$k = 0, 2, 4, 6, \dots$  w przypadku wielomianów parzystych,  $n$ -parzyste,

$k = 1, 3, 5, 7, \dots$  w przypadku wielomianów nieparzystych,  
n-nieparzyste.

W oparciu o wzór /47/ wprowadzono macierz współczynników  
wielomianu według wzoru:

$$/48/ \quad B_{nk} = \frac{1}{2^n n!} \frac{(n+k)!}{k!} \binom{n}{\frac{n-k}{2}} /-1/ \frac{n-k}{2}$$

Współczynniki te liczone rekurencyjnie.

Łatwo wykazać że zachodzi wzór:

$$/49/ \quad B_{nr} = -B_{r-2} \frac{(n+r-1)/(n+2-r)}{r/r-1}, \quad B_{nr} = 0, \quad r > n$$

W przypadku wielomianów parzystych przyjmując  $k = 0$   
otrzymano wyrazy kolumny pierwszej:

$$/50/ \quad B_{n0} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} /-1/ \frac{n}{2}$$

W przypadku wielomianów nieparzystych wyrazy kolumny  
pierwszej otrzymano przyjmując  $k=1$  we wzorze /48/:

$$/51/ \quad B_{n1} = \frac{1}{2^n n+1} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} /-1/ \frac{n-1}{2}$$

Obliczenia wykonano zakładając, że  $n$  i  $k$  zmieniają się od  
0 do 19. Najwyższy stopień wielomianu jest równy 19. Stopień  
wielomianu może być bez trudności podwyższony, o ile byłoby to  
konieczne. Mając  $B_{n0}$ ,  $B_{n1}$  obliczono wszystkie współczynniki  
wielomianów według wzorów rekurencyjnych /50/ i /51/. W ten  
sposób otrzymano dwie macierze trójkątne o wymiarach  $10 \times 10$ .  
Poniżej podano macierze współczynników 6-ciu pierwszych wielo-  
mianów. W tabelicy 21 zestawiono macierze współczynników wielo-  
mianów parzystych a w 22 wielomianów nieparzystych .

Tablica 21. Współczynniki  $B_{nr}$  sześciu pierwszych parzystych wielomianów Legendre'a.

n	r	0	2	4	6	8	10	12
0		1	-	-	-	-	-	-
2		$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-	-	-	-	-
4		$\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{35}{8}$	-	-	-	-
6		$-\frac{5}{16}$	$\frac{105}{16}$	$-\frac{315}{16}$	$\frac{231}{16}$	-	-	-
8		$\frac{35}{128}$	$-\frac{315}{32}$	$\frac{3465}{64}$	$-\frac{3003}{32}$	$\frac{6435}{128}$	-	-
10		$-\frac{63}{256}$	$\frac{3465}{256}$	$-\frac{15015}{128}$	$\frac{45045}{128}$	$-\frac{109395}{256}$	$\frac{46189}{256}$	-
12		$\frac{231}{1024}$	$\frac{9009}{512}$	$-\frac{225225}{1024}$	$\frac{255255}{256}$	$\frac{2078505}{1024}$	$-\frac{969969}{512}$	$\frac{676039}{1024}$

Tablica 22. Współczynniki  $B_{nr}$  sześciu pierwszych nieparzystych wielomianów Legendre'a.

n	r	1	3	5	7	9	11	13
1		1	-	-	-	-	-	-
3		$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-	-	-	-	-
5		$\frac{15}{8}$	$-\frac{35}{4}$	$\frac{63}{8}$	-	-	-	-
7		$-\frac{35}{16}$	$\frac{315}{16}$	$-\frac{693}{16}$	$\frac{429}{16}$	-	-	-
9		$\frac{315}{128}$	$-\frac{1155}{32}$	$\frac{9009}{64}$	$-\frac{6435}{32}$	$\frac{12155}{128}$	-	-
11		$-\frac{693}{256}$	$\frac{15015}{256}$	$-\frac{45045}{128}$	$\frac{109395}{128}$	$-\frac{230945}{256}$	$\frac{88179}{256}$	-
13		$\frac{3003}{1024}$	$-\frac{45045}{512}$	$\frac{765765}{1024}$	$-\frac{692835}{256}$	$\frac{4849845}{1024}$	$-\frac{2028117}{512}$	$+\frac{1300075}{1024}$

Po przyjęciu powyższych oznaczeń wielomiany Legendre'a mają prostą postać:

$$/52/ \quad P_n = \sum_{r=0}^n B_{nr} x^r,$$

Aproksymujący wielomian symetryczny w tym przypadku ma postać:

$$/53/ \quad \varphi^S/x/ = \sum_{i=0}^n X_i \sum_{r=0}^i B_{ir} x^r, \text{ w którym } r, i = 0, 2, 4, \dots$$

parzyste,

$X_i$  - niewiadome aproksymacji.

Analogicznie wielomian asymetryczny jest:

$$/54/ \quad \varphi^A/x/ = \sum_{i=1}^n X_i \sum_{r=1}^i B_{ir} x^r, \quad i, r = 1, 3, 5, \dots \text{ nie-}$$

parzyste.

Wielomiany Legendre'a są ortogonalne tj:

$$/55/ \quad A_{ij} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \left( \sum_{r=1}^i B_{ir} x^r \right) \left( \sum_{m=1}^j B_{jm} x^m \right) dx = \begin{cases} \frac{2}{2i+1} & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Stąd niewiadome współczynniki aproksymacji wyznacza się ze wzoru:

$$/56/ \quad X_i \frac{1}{2i+1} = R_i \text{ przy dowolnym } i$$

to jest:

/57/

$$X_i = (2i+1) / R_i.$$

Przy czym jest:

$$/58/ \quad R_i = \sum_{r=1}^i B_{ir} N^r, \quad N^r = \int_0^1 f^S/x/ x^r dx \quad i, r, \text{ parzyste}$$

$$/59/ \quad R_i = \sum_{r=1}^i B_{ir} N^r, \quad N^r = \int_0^1 f^A/x/ x^r dx \quad i, r \text{ nie-}$$

parzyste

Po obliczeniu niewiadomych  $X_i$  z funkcji aproksymujących wyrażonych przez szeregi Legendre'a, obliczono współczynniki wielomianów zwykłych  $a_r$  według wzoru:

$$/60/ \quad a_r = \sum_n^m X_n B_{nr}$$

W ten sposób otrzymano:

$$/61/ \quad \varphi(x) = \sum_{r=0}^m a_r x^r.$$

Wyrażenie /61/ pozwoliło na porównanie wyników otrzymanych z aproksymacji wielomianami zwykłymi i wielomianami Legendre'a.

Miara odchyłki aproksymacji w tym przypadku wyraża się wzorem bardzo prostym a mianowicie:

$$/62/ \quad \delta = \delta^m = \int_{-1}^1 f^2(x) dx - \sum_k^n R_k X_k.$$

W przypadku aproksymacji szeregami Legendre'a odchyłka obliczeniowa wyznaczona wzorem /30/ jest równa tożsamościowo zeru. Zagadnienie wyboru wielomianu optymalnego w sensie sformułowanym w punkcie 5 nie istnieje. Podwyższenie stopnia wielomianu zawsze wiąże się ze zmniejszeniem odchyłki.

Problem optymalizacji stopnia wielomianu w metodzie wielomianów Legendre'a może być wyprowadzony z innych przesłanek. Wiadomo, że wyniki tej metody są silnie zależne od dokładności obliczeń prawych stron. Odchyłka wynikająca z błędów zaokrągleń prawych stron rośnie wraz ze stopniem wielomianu i wpływa na odchyłkę ogólną podobnie jak błąd obliczeń w wielomianach zwykłych. Jednakże do analizy norm odchyłek wynikających z zaokrągleń prawych stron nie nadają się wzory wyprowadzone w punkcie 5. Wzory /30-31/, /62/ są słuszne jedynie wtedy, gdy błąd prawych stron jest pomijalny w porównaniu z innymi błędami. Tymi zagadnieniami nie będziemy się zajmować w niniejszej pracy. Rozważania zakończymy uwagą, że przy aproksymacji wielomianami Legendre'a stopień wielomianu musi być na tyle



niski, aby błąd prawych stron nie był istotnym w obliczeniach funkcji aproksymującej.

Obliczenie wykonano dla tych samych danych co w przykładzie 1/a,b,c/. Wartości prawych stron  $R_1$  przy aproksymacji symetrycznej zestawiono w tablicy /23/ i aproksymacji asymetrycznej w tablicy /24/.

Tablica 23. Wartości prawych stron przy aproksymacji parzystymi wielomianami Legendre'a.

i	1a	1b	1c
0	-1.00000000	-1.00000000	-1.00000000
2	-0.18750000	-0.42750000	-0.49252500
4	0.05859375	-0.28535625	-0.47537282
6	0.01025391	-0.12564759	-0.44922395
8	-0.02888489	-0.00049573	-0.41510777
10	0.01579857	0.06030883	-0.37435170
12	0.00407731	0.05880279	-0.32851591
14	-0.01295939	0.02196500	-0.27931823
16	0.00794643	-0.01608622	-0.22854906
18	0.00231230	-0.03214240	-0.17799282

Tablica 24. Wartości prawych stron przy aproksymacji nieparzystymi wielomianami Legendre'a.

i	1a	1b	1c
1.	0.00000000	0.00000000	0.00000000
3	0.07812500	0.25312500	0.30628125
5	-0.06835938	0.07619063	0.20159738
7	0.03717041	0.04909641	0.23716195
9	-0.00965118	-0.03396831	0.18505516
11	-0.00197744	-0.02451661	0.18712035
13	-0.00087327	-0.03047614	0.14482077
15	0.00853917	0.00590370	0.13419295
17	-0.01197216	0.00905010	0.09662402
19	0.00875054	0.02047402	0.08168912

Wartości liczbowe niewiadomych aproksymacji symetrycznej zestawiono w tablicy /25/, a aproksymacji asymetrycznej w tablicy /26/.

Tablica 25. Wartości liczbowe niewiadomych aproksymacji  $X_i$  przy aproksymacji parzystymi wielomianami Legendre'a.

i	1a	1b	1c
0	-1.000000000	-1.000000000	-1.000000000
2	-0.937500000	-2.137500000	-2.462625000
4	0.52734375	-2.56820625	-4.27835535
6	0.13330078	-1.63341872	-5.83991129
8	-0.49104309	-0.00842745	-7.05683212
10	0.33176995	1.26648541	-7.86138564
12	0.10193279	1.47006987	-8.21289774
14	-0.37582228	0.63698491	-8.10022862
16	0.26223224	-0.53084528	-7.54211909
18	0.08555520	-1.18926883	-6.58573437

Tablica 26. Wartości liczbowe niewiadomych aproksymacji  $X_i$  przy aproksymacji nieparzystymi wielomianami Legendre'a.

i	1a	1b	1c
1	0.00000000	0.00000000	0.00000000
3	0.54687500	1.77187500	2.14396875
5	-0.75195313	0.83809688	2.21757119
7	0.55755615	0.73644662	3.55742926
9	-0.18337250	-0.64539795	3.51604811
11	-0.04548120	-0.56388211	4.30376805
13	-0.02357821	-0.82285568	3.91016080
15	0.26471418	0.18301477	4.15998148
17	-0.41902570	0.31675354	3.38184059
19	0.34127089	0.79848665	3.18587565

Wartości liczbowe miar odchyłek aproksymacji symetrycznej zestawiono w tablicy 27, a aproksymacji asymetrycznej w tablicy 28.

Tablica 27. Wartości liczbowe miar odchyłek  $\delta_1$  aproksymacji parzystymi wielomianami Legendre'a

i	1a	1b	1c
0	0.25000	2.25000	24.75000
2	0.07422	1.33622	23.53710
4	0.04332	0.60337	21.50329
6	0.04195	0.39813	18.87986
8	0.02777	0.39813	15.95051
10	0.02253	0.32175	13.00759
12	0.02211	0.23531	10.30952
14	0.01724	0.22132	8.04698
16	0.01516	0.21278	6.32324
18	0.01496	0.17454	5.15103

Tablica 28. Wartości liczbowe miar odchyłek  $\delta_1$  aproksymacji nieparzystymi wielomianami Legendre'a.

i	1a	1b	1c
1	0.13889	0.67936	6.31171
3	0.09617	0.23085	5.65505
5	0.04477	0.16699	5.20799
7	0.02405	0.13083	4.36430
9	0.02228	0.10891	3.71364
11	0.02219	0.09509	2.90832
13	0.02217	0.07001	2.34205
15	0.01991	0.06893	1.78381
17	0.01489	0.06606	1.45704
19	0.01190	0.04971	1.19679

Porównując miary odchyłek aproksymacji wielomianami prostymi /tablica 10/ oraz Legendre'a /tablica 27 i 28/ stwierdzono, że dla stopni niższych niż 16 są one identyczne. Otrzymane w obydwu metodach wielomiany parzyste 18 stopnia i nieparzyste

19 stopnia mają odchyłki różne. Różnice te są w przykładach 1a i 1b mało znaczące. Największą różnicę odchyłek otrzymano w wielomianie 18 stopnia w przykładzie 1c. W metodzie wielomianów zwykłych miara odchyłki wynosi 8.9230, a w metodzie wielomianów Legendre'a 5.15103. W oparciu o powyższe porównanie stwierdzono, że przy przyjętej obliczeniowej dokładności maszyny w przypadku wielomianów wyższych stopni rozpoczynając od 16-tego nieco lepsze wyniki otrzymywane są z aproksymacji wielomianami Legendre'a niż z aproksymacji wielomianami prostymi.

Analogiczne wnioski można wypowiedzieć odnośnie współczynników wielomianów. Współczynniki wielomianów  $a_r$  otrzymane z aproksymacji wielomianami zwykłymi i Legendre'a do 15 stopnia są identyczne. Poniżej w tablicach 29-34 podano współczynniki wielomianów  $a_r$  otrzymane z aproksymacji wielomianami zwykłymi:

Tablica 29. Wartości liczbowe współczynników wielomianów  $a_r$  otrzymane z aproksymacji wielomianami zwykłymi funkcji symetrycznej z przykładu 1a. n-stopień wielomianu.

$j \setminus n$	2	6	10	14
0	-0.531	-0.375	-0.591	-0.489
2	-1.406	-2.509	6.815	-3.236
4		-0.317	-65.821	96.987
6		1.925	164.761	-826.012
8			-166.460	2707.874
10			59.860	-4223.343
12				3165.873
14				-919.363

Tablica 30. Wartości liczbowe współczynników wielomianów  $a_r$  otrzymane z aproksymacji wielomianami zwykłymi funkcji symetrycznej z przykładu 1b.

$i \setminus n$	2	6	10	14
0	0.069	- 0.384	- 0.698	- 0.500
2	- 3.206	- 4.295	12.930	1.063
4		+ 20.922	-128.099	- 42.764
6		- 23.582	422.903	464.475
8			-541.624	-2079.829
10			228.507	4377.507
12				-4282.540
14				1558.613

Tablica 31. Wartości liczbowe współczynników wielomianów  $a_r$  otrzymane z aproksymacji wielomianami zwykłymi funkcji symetrycznej z przykładu 1c.

$i \setminus n$	2	6	10	14
0	0.231	0.452	0.457	0.300
2	- 3.694	- 25.975	- 62.914	- 96.412
4		96.255	636.372	1856.177
6		- 84.314	- 2188.609	- 13165.771
8			3004.592	43833.165
10			- 1418.398	- 74025.196
12				61370.691
14				- 19817.760

Tablica 32. Wartości liczbowe współczynników wielomianu  $a_p$  otrzymane z aproksymacji wielomianami zwykłymi funkcji asymetrycznej z przykładu 1a.

$i \setminus n$	3	7	11	15
1	- 0.820	- 3.450	- 3.778	- 4.684
3	1.367	18.924	22.875	58.148
5		- 30.071	- 39.878	- 435.915

$i \setminus n$	3	7	11	15
7		14.949	12.954	1968.550
9			23.617	- 4922.112
11			- 15.666	6669.065
13				- 4592.838
15				1260.153

Tablica 33. Wartości liczbowe współczynników wielomianu  $a_r$  funkcji asymetrycznej z przykładu 1b

$i \setminus n$	3	7	11	15
1	- 2.658	- 2.697	- 2.759	- 5.753
3	4.430	11.595	1.817	97.258
5		- 25.297	82.290	- 795.736
7		19.746	-332.388	3207.757
9			447.405	-6805.215
11			-194.228	7640.287
13				-4211.725
15				874.627

Tablica 34. Wartości liczbowe współczynników wielomianu  $a_r$  funkcji asymetrycznej z przykładu 1c

$i \setminus n$	3	7	9	11
1	- 3.216	- 6.840	- 9.837	- 11.514
3	5.360	55.993	181.511	358.754
5		- 136.618	-1156.229	- 4173.544
7		95.384	3066.523	22187.619
9			-3548.652	-60931.180
11			1482.424	89487.908
13				-66680.838
15				19786.621

Dociekliwy czytelnik sam może sprawdzić w oparciu o tablice 25 i 26 stosując wzór /50/, że otrzymane w aproksymacji wielomianami Legendre'a współczynniki wielomianów  $a_r$  są równe odpo-

wiadającym im w aproksymacji wielomianami zwykłymi /tablice 29-34/. W przypadku wielomianów 18 i 19-tego stopnia współczynniki  $a_r$  na skutek znaczących błędów obliczeń i zaokrąglenia prawych stron uzyskane z aproksymacji wielomianami zwykłymi i Legendre'a różnią się między sobą. W tablicy 35 i 36 zamieszczono współczynniki wielomianów  $a_r$  18 i 19 stopnia otrzymane w aproksymacji wielomianami Legendre'a funkcji z przykładu 1a,b,c.

Tablica 35. Wartości liczbowe współczynników  $a_r$  otrzymane z aproksymacji wielomianami Legendre'a 18-tego stopnia funkcji symetrycznej z przykładu 1.

i	1a	1b	1c
0	- 0.4537	- 0.3833	0.0413
2	- 7.5346	- 22.4669	- 104.0002
4	176.3936	698.9013	3241.9703
6	- 1315.4592	-8230.1489	- 38447.1112
8	3697.8034	47800.9438	226114.4608
10	- 3023.6162	-153702.4903	-740612 .7863
12	- 5258.3960	286337.0983	1414412.5318
14	13310.3551	-306824.0262	-1564144.3766
16	-10542.2809	175108.0494	927471.1688
18	2961.8262	-41171 .1713	-227990 .8387

Tablica 36. Wartości liczbowe współczynników  $a_r$  otrzymane z aproksymacji wielomianami Legendre'a 19-tego stopnia funkcji asymetrycznej z przykładu 1.

i	1a	1b	1c
1	- 7.2805	- 7.5037	- 11.3782
3	204.5849	220.7129	491.2413
5	-2869.6097	-3267.2666	- 8748.0999
7	20421.4604	25200.5691	75230.3638
9	-80945.4685	111118.0746	-356715.7458
11	191137.4234	294778.8075	998846.3410
13	-275740.0438	-477467.8050	-1691506.0458
15	238582.3111	460977.6444	1700078.6542

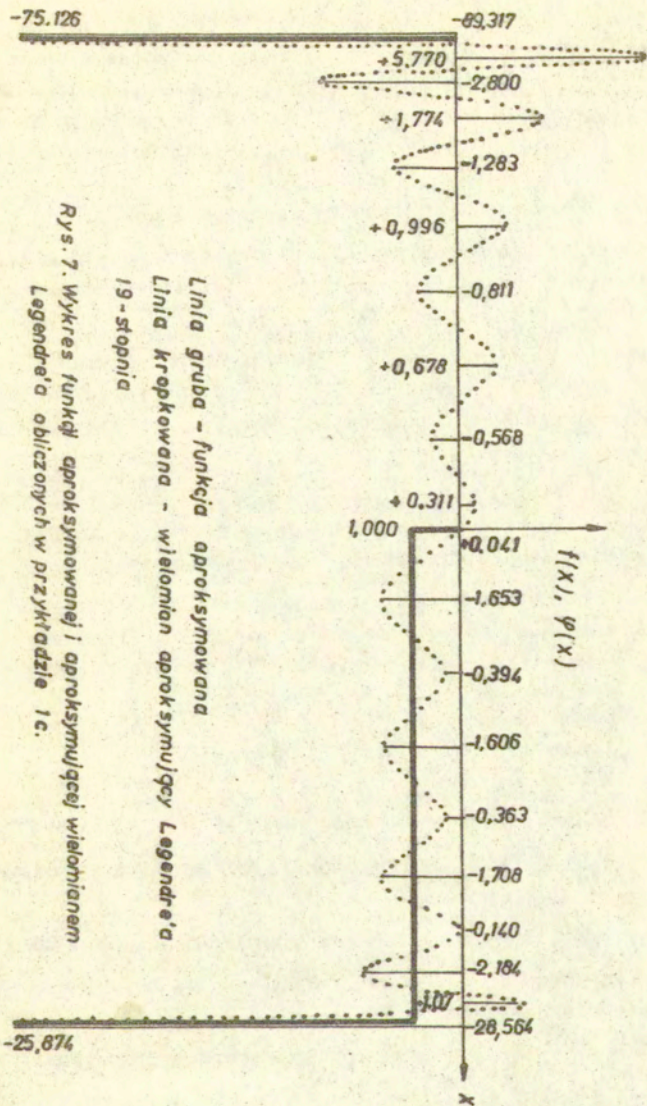
i	1a	1b	1c
17	- 113790.1198	- 243145.0402	- 932413.1204
19	23007.0295	53830.5689	214778.1666

Dla wielomianów o współczynnikach określonych w tablicach 35 i 36 obliczono ich rzędne w punktach o odciętych różniących się o 0.01. Rzędne charakterystyczne tych wielomianów podano w tablicy 37.

Tablica 37. Współrzędne punktów charakterystycznych otrzymane w aproksymacji wielomianem Legendre'a 19-tego stopnia funkcji z przykładu 1/a,b,c/.

1a		1b		1c	
x	y	x	y	x	y
-1.00	-1.649	-1.00	-8.307	-1.00	-89.316
-0.97	-1.694	-0.99	-7.230	-0.96	+ 5.702
-0.91	-1.628	-0.96	-8.295	-0.90	- 2.800
-0.84	-1.721	-0.82	+0.658	-0.83	+ 1.774
-0.74	-1.584	-0.73	-0.348	-0.73	- 1.283
-0.62	-1.817	-0.61	+0.232	-0.61	+ 0.996
-0.36	+0.134	-0.48	-0.168	-0.48	- 0.811
-0.24	-0.061	-0.34	+0.122	-0.33	0.678
-0.13	+0.055	-0.20	-0.074	-0.17	- 0.559
0.00	-0.454	-0.10	+0.014	-0.05	+ 0.311
0.15	-1.136	0.00	-0.383	0.00	# 0.041
0.30	-0.902	0.15	-1.207	0.14	- 1.653
0.67	-1.407	0.30	-0.832	0.29	- 0.394
0.78	-1.264	0.44	-1.159	0.44	- 1.606
0.87	-1.405	0.58	-0.835	0.58	- 0.364
0.94	-1.252	0.71	-1.189	0.70	- 1.708
0.98	-1.438	0.81	-0.721	0.81	- 0.140
1.00	-1.075	0.97	-3.558	0.89	- 2.184
		1.00	-3.082	0.95	+ 1.070
				1.00	-28.564





Rys. 7. Wykres funkcji aproksymowanej i aproksymującej wielomianem Legendre'a obliczonych w przykładzie 1c.

Nanosząc rzędne z tablicy 37 /przykład 1a i 1b/ na wykresy 1 i 2 przekonano się, że nowe punkty otrzymane w oparciu o aproksymacje wielomianami Legendre'a pokrywają się z wykresami aproksymacji wielomianami zwykłymi. W przypadku 1c otrzymany według danych z tablicy 27 wykres nieco różni się od rysunku 3. Przedstawiono go na rysunku 7.

Na zakończenie wysunięto następujące wnioski:

1. Jeżeli dokładność wykonywanych obliczeń jest dostateczna wyniki otrzymywane z aproksymacji wielomianami zwykłymi i Legendre'a są identyczne.
2. Jeżeli dla danego stopnia wielomianu aproksymacyjnego dokładność maszyny liczącej /dokładność obliczeń/ nie jest dostateczna obydwie porównywane metody charakteryzują się innymi miarami odchyłek.
3. W przypadku obliczeń wykonywanych na maszynie Odra 1305 zgodność obydwóch przedstawionych metod aproksymacji wielomianowej występuje do 15 stopnia włącznie.
4. Przy wyższych stopniach niż 15 i zastosowanej dokładności obliczeniowej maszyny stosując wielomiany Legendre'a uzyskano nieznacznie lepsze wyniki niż przy użyciu wielomianów zwykłych.

#### 9. Prace cytowane w tekście

1. N.I. Achiezer, Teoria aproksymacji. PWN, Warszawa 1957.
2. С.Н. Бернштейн, О многочленах, ортогональных в конечном интервале, Харьков 1937.
3. P.J. Davis, Interpolation and approximation, New York 1964.
4. G. Meinardus, Aproksymacja funkcji i jej metody numeryczne, PWN, Warszawa 1968.
5. A. Ralston, Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa 1968.
6. J.R. Rice, The Approximation of Functions, Reading, 1964.

### Streszczenie

Przedstawiono zagadnienie aproksymacji wielomianami na odcinku  $[-1, +1]$  funkcji całkowalnych z kwadratem /z przestrzeni  $L_2$ /. Zadanie rozłożono na dwa: aproksymacji funkcji symetrycznej i asymetrycznej. Opracowano program na maszynę Odra 1305 wykonujący obliczenia współczynników wielomianu wybranego stopnia z kryterium najmniejszej odchyłki od funkcji aproksymowanej. Podano wzory na obliczenie miar odchyłek i sposób postępowania przy wyborze optymalnego stopnia wielomianu. W oparciu o opracowany program wyznaczono optymalne wielomiany w przypadku sześciu obranych funkcji. Wyprowadzono wnioski dotyczące zbieżności wielomianów aproksymujących oraz podano opis opracowanego programu. Prace uzupełniono opracowaniem programu aproksymacji wielomianami Legendre'a. Porównano wyniki otrzymane z obydwu metod.