3.32 — elektrodynamika ośrodków zjonizowanych

Jacek Zawistowski

NIELOKALNE RÓWNANIE NLS DLA FAL LANGMUIRA W PLAZMIE

23/1990

WARSZAWA 1990

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 30 stycznia 1990 r.

N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd. 1,2 Ark.druk. 1,5
Oddano do drukarni w maju 1990 r.
Nr zamówienia 265/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Jacek Zawistowski
Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów

NIELOKALNE RÓWNANIE NLS DLA FAL LANGMUIRA W PLAZMIE

Streszczenie

W ramach opisu kinetycznego plazmy, metodą równań hierarchii i asymptotycznego rozwinięcia względem odwrotności częstości fal Langmuira, otrzymano zmodyfikowane nieliniowe równanie Schrödingera. Równanie to różni się od zwykłego równania NLS występowaniem nielokalnego wyrazu całkowego. Zbadano podstawowe właściwości tego równania, w szczególności korespondencję jego rozwiązań do rozwiązań Zacharowa otrzymanych w opisie płynowym.

1. Wstęp

W pracy [1] otrzymano, posługując się płynowym opisem plazmy, nieliniowe równanie Schrödingera (NLS - od Non-Linear Schrödinger) opisujące obwiednię zmodulowanych fal Langmuira. Rozważymy to samo zagadnienie w ramach ogólniejszego opisu kinetycznego bezzderzeniowej, wieloskładnikowej plazmy w jednowymiarowym przypadku bez pola magnetycznego. Celem naszym jest znalezienie odpowiednika równania NLS.

Układ fizyczny opisywany jest równaniami Własowa

$$(1) \qquad \partial_t f_\alpha + u\,\partial_x f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E\,\partial_u f_\alpha = 0$$

i Ampera

$$(2) \qquad \partial_t E + \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} du\, u\, f_\alpha = 0$$

gdzie

$E = E(x,t)$ - składowa natężenia pola elektrycznego $\vec{E} = (E,0,0)$,

u - składowa wektora prędkości $\vec{v} = (u,0,0)$,

ϵ_0 - przenikalność dielektryczna próżni,

$f_\alpha = f_\alpha(u,x,t)$ - funkcja rozkładu składnika α plazmy,

q_α, m_α - odpowiednio ładunek i masa składnika α plazmy.

Wybraliśmy równanie Ampera w miejsce częściej stosowanego równania Gaussa. Oba wybory są równoważne, gdyż równania te są powiązane za pomocą równania ciągłości (prawo zachowania ładunku). Równanie ciągłości otrzymuje się całkując równanie Własowa (1) względem prędkości u.

Kierując się pracą Zacharowa [1], będziemy poszukiwać pola elektrycznego w postaci

$$E(x,t) = \mathcal{E}(x,t)e^{-i\omega t} + c.c. \tag{3}$$

zakładając, że amplituda $\mathcal{E}(x,t)$ jest wolno zmienną funkcją czasu t w skali $1/\omega$, tj.

$$\frac{1}{\omega}\partial_t\mathcal{E}(x,t) \ll \mathcal{E}(x,t). \tag{4}$$

Nierówność (4) możemy przepisać w postaci

$$\frac{1}{\omega}\frac{\partial_t\mathcal{E}(x,t)}{\mathcal{E}(x,t)} \ll 1. \tag{5}$$

Zatem postulat (3) pociąga za sobą istnienie małego, bezwymiarowego parametru (5). Możemy więc dokonywać przybliżeń, polegających na obrywaniu rozwinięć asymptotycznych względem tego parametru dla interesujących nas wielkości. Rozwinięcie względem małego parametru (5) jest równoważne rozwinięciu względem $1/\omega$ dla $\omega \to \infty$; dokładniej dla dużych częstości: $\omega \gg \partial_t\mathcal{E}(x,t)/\mathcal{E}(x,t)$. Rozważymy ważny, szczególny przypadek, gdy częstość ω jest równa częstości plazmowej. Rozwinięcia asymptotyczne względem $1/\omega$ wyznaczymy metodą całkowania przez części. Z nierówności (4) wynikają następujące oszacowania

$$\mathcal{E}_t \ll \omega\mathcal{E}, \quad \mathcal{E}_{tt} \ll \omega\mathcal{E}_t \ll \omega^2\mathcal{E}, \tag{6}$$

pozwalające ocenić wkład pewnych wyrazów do poszukiwanego równania na amplitudę .

2. Metoda równań hierarchii

Metoda ta polega na iteracyjnym rozwiązywaniu równania Własowa (1), w którym pole elektryczne E traktujemy jako dane. Rozwiązania f_α poszukujemy w postaci rozwinięcia wokół stanu równowagowego $f_{\alpha 0}$ (w sensie równania Własowa), odpowiadającego znikaniu pola elektrycznego (E = 0),

$$(7) \qquad f_\alpha = N_{\alpha 0} f_{\alpha 0} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{\alpha n}\,, \qquad f_{\alpha n} \sim E^n$$

gdzie $N_{\alpha 0}$ jest równowagową koncentracją składnika α. Oszacowanie $f_{\alpha n} \sim E^n$ wynika z tego, że wyraz $\frac{q_\alpha}{m_\alpha} E \partial_u f_\alpha$, opisujący oddziaływanie z polem elektrycznym, traktujemy jako zaburzenie równania bez pola (E = 0).

Podstawiając rozwinięcie (7) do równania Własowa (1) i przyrównując wyrazy jednakowego rzędu względem pola E otrzymujemy rekurencyjny układ równań hierarchii

$$(8) \qquad \begin{aligned}
&(\partial_t + u\partial_x) f_{\alpha 0} = 0\\
&(\partial_t + u\partial_x) f_{\alpha 1} = -N_{\alpha 0}\frac{q_\alpha}{m_\alpha} E \partial_u f_{\alpha 0}\\
&(\partial_t + u\partial_x) f_{\alpha 2} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} E \partial_u f_{\alpha 1}\\
&\quad\vdots\\
&(\partial_t + u\partial_x) f_{\alpha n} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} E \partial_u f_{\alpha, n-1}\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Równanie Własowa zostało w ten sposób sprowadzone do nieskończonego układu równań liniowych wzajemnie sprzężonych. Sprzężenie to ma rekurencyjny charakter: do wyznaczenia rozwiązania rzędu n potrzebna jest znajomość rozwiązania rzędu $n-1$. Części jednorodne (lewe strony) równań (8) mają jednakową postać.

Ponieważ chcemy otrzymać równanie na amplitudę $\mathcal{E}$ typu NLS zawierające wyraz $\sim|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}$, który jest trzeciego rzędu względem E , więc musimy znaleźć rozwiązania równań hierarchii (8) do $f_{\alpha 3}$ włącznie. Oberwanie rozwiazania na $f_{\alpha 3}$ oznacza założenie małości amplitudy pola elektrycznego $\mathcal{E}$.

Rozwiązania $f_{\alpha n}$ układu równań (8) rozwiniemy asymptotycznie względem $1/\omega$ dla $\omega \to \infty$. Ponieważ rozwinięcie $f_{\alpha 3}$ zaczyna się od $1/\omega^3$ (patrz (31)) , więc rozwinięcia $f_{\alpha 1}$ i $f_{\alpha 2}$ należy wyznaczyć również do $1/\omega^3$ włącznie aby zachować tę samą dokładność.

Tak wyznaczone, przybliżone rozwiązanie równania Własowa $f_\alpha = N_{\alpha 0} f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1} + f_{\alpha 2} + f_{\alpha 3}$, wyrażone przez pole E i rozkład równowagowy $f_{\alpha 0}$, wstawiamy do równania Ampera (2) otrzymując poszukiwane równanie na amplitudę pola elektrycznego $\mathcal{E}$.

3. Rozwiązanie równań hierarchii

Rozwiążemy najpierw równanie jednorodne

$$(9)\qquad (\partial_t + u\,\partial_x) f = 0 .$$

W tym celu zamienimy zmienne $(u,x,t) \longrightarrow (u,\xi,\eta)$:

$$(10)\qquad \begin{cases} \xi = x - ut \\ \eta = x + ut \end{cases} .$$

Ponieważ

$$(11)\qquad \begin{cases} \partial_x = \partial_\eta + \partial_\xi \\ \frac{1}{u}\partial_t = \partial_{(ut)} = \partial_\eta - \partial_\xi \end{cases} ,$$

więc wprowadzajac funkcję $\tilde{f}(\cdot,\cdot,\cdot)$:

$$f(u,x,t) = f\left(u, \frac{\eta+\xi}{2}, \frac{\eta-\xi}{2u}\right) = \tilde{f}(u,\xi,\eta) = \tilde{f}(u, x-ut, x+ut)$$

możemy przepisać równanie (9) w postaci

$$(12)\qquad 0 = (\partial_t + u\,\partial_x) f(u,x,t) = 2u\,\partial_\eta \tilde{f}(u,\xi,\eta) .$$

Równanie (12) musi być spełnione dla każdego $u \in]-\infty,\infty[$,więc

$\partial_\eta \tilde{f}(u,\xi,\eta) = 0$, tj. funkcja $\tilde{f}$ nie zależy od $\eta = x+ut$: $\tilde{f}(u,\xi,\eta) = \tilde{f}(u,\xi)$. Oznacza to, że rozwiązanie równania jednorodnego (9) zależy od x,t tylko poprzez kombinację $x-ut$. Zatem ogólne rozwiązanie równania jednorodnego ma postać

$$(13) \qquad f(u,x,t) = \tilde{f}(u, x-ut)$$

Funkcja rozkładu $f_{\alpha 0}$ musi spełniać oprócz równania (9) dodatkowe warunki: nieujemność, unormowanie, równanie Ampera (2) . Poza szczególnymi przypadkami (jak np. $\alpha = 1,2,\ q_1 = -q_2,\ f_1 = f_2$) z uzgodnienia z równaniem Ampera dla $E = 0$ wynika, że $f_{\alpha 0}$ musi być parzystą funkcją prędkości u . Ponieważ wyrażenie $x-ut$ nie jest ani parzystą ani nieparzystą funkcją u $(x-ut \neq x+ut,\ x-ut \neq -(x-ut) = -x+ut$ dla $x,t \neq 0$, więc $f_{\alpha 0}(u,x,t) = \tilde{f}_{\alpha 0}(u, x-ut)$ nie może zależeć od $x-ut$. Zatem $f_{\alpha 0}$ zależy tylko od $|u|$ $(|u| = +\sqrt{u^2})$. Ostatecznie więc rozwiązanie zerowego rzędu w metodzie równań hierarchii ma postać

$$(14) \qquad f_{\alpha 0}(u,x,t) = f_{\alpha 0}(u^2)$$

czyli jest rozwiązaniem równowagowym (stacjonarnym) równania Własowa [2] . Pozostaje otwartym pytanie, czy dopuszczenie ogólniejszej postaci (13) zerowego przybliżenia wniosłoby coś istotnego. Największe fizyczne znaczenie ma rozkład Maxwella

$$(15) \qquad f_{\alpha 0}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, a_{\alpha 0}}\, e^{-u^2/2a_{\alpha 0}^2}, \quad a_{\alpha 0}^2 = \frac{kT_\alpha}{m_\alpha}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} du\, f_{\alpha 0} = 1 .$$

Niejednorodne równania hierarchii (8) są postaci

$$(16)\qquad (\partial_t + u\,\partial_x) f(u,x,t) = g(u,x,t),$$

gdzie niejednorodność g jest daną funkcją, wynikajacą z rozwiązania równania niższego rzędu. Będziemy poszukiwać rozwiązania tego równania spełniajacego warunek początkowy

$$(17)\qquad f(u,x,-\infty) = 0,$$

tj. $f_\alpha(u,x,-\infty) = f_{\alpha 0}(u)$. Wybór chwili początkowej $t_0 = -\infty$ wiąże się z tym, że interesuje nas odpowiedź plazmy w stanie ustalonym (mody własne plazmy) z pominięciem efektów przejsciowych, które zależą od szczegółów pobudzenia poczatkowego. Dokonując zamiany zmiennych (10) i wprowadzając funkcję $\tilde{g}(\cdot,\cdot,\cdot)$:

$$g(u,x,t) = g\left(u,\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\eta-\xi}{2u}\right) = \tilde{g}(u,\xi,\eta) = \tilde{g}(u,x-ut,x+ut)$$

otrzymujemy równanie

$$2u\,\partial_\eta \tilde{f}(u,\xi,\eta) = \tilde{g}(u,\xi,\eta),$$

którego rozwiazanie ma postać

$$\tilde{f}(u,\xi,\eta) = \tilde{f}(u,\xi,\eta_0) + \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' \,\frac{\tilde{g}(u,\xi,\eta')}{2u} .$$

Warunek poczatkowy (17) pociąga za sobą $\tilde{f}(u,\xi,-\infty) = 0$. Wracając do zmiennych x,t :

$$f(u,x,t) = f\left(u,\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\eta-\xi}{2u}\right) = \tilde{f}(u,\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \,\frac{\tilde{g}(u,\xi,\eta')}{2u} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \frac{g\left(u, \frac{\xi+\eta'}{2}, \frac{\eta'-\xi}{2u}\right)}{2u} = \int_{-\infty}^{t} dt' g(u, x-u(t-t'), t'),$$

(gdzie podstawiliśmy $t' = \frac{\eta'-\xi}{2u}$, $dt' = \frac{d\eta'}{2u}$) otrzymujemy rozwiązanie równania (16) spełniające warunek początkowy (17)

$$(18) \qquad f(u,x,t) = \int_{-\infty}^{t} dt_1\, g(u, x-u(t-t_1), t_1) \equiv \int_{-\infty}^{t} dt_1\, g(1) .$$

Wzór (18) można łatwo sprawdzić przez podstawienie do równania (16) .

4. Obliczenie $f_{\alpha 1}$

Zgodnie z (8) mamy

$$g_{\alpha 1}(u,x,t) = -N_{\alpha 0} \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E\, \partial_u f_{\alpha 0} ,$$

więc na podstawie (18) otrzymujemy

$$f_{\alpha 1}(u,x,t) = -N_{\alpha 0} \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^{t} dt_1\, E(x-u(t-t_1), t_1)\, \partial_u f_{\alpha 0} .$$

Podstawiając (3) dostajemy

$$(19) \qquad f_{\alpha 1}(u,x,t) \doteq -N_{\alpha 0} \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^{t} dt_1\, \mathcal{E}(1) e^{-i\omega t_1} \partial_u f_{\alpha 0} + c.c. ,$$

gdzie użyliśmy oznaczenia

$$(20) \qquad \mathcal{E}(n) \equiv \mathcal{E}(x-u(t-t_n), t_n) .$$

Zauważmy, że dla funkcji argumentu (n) zachodzi relacja

$$(21) \qquad \frac{d}{dt_n} = u\,\partial_x + \partial_{t_n},$$

z której będziemy wielokrotnie korzystać.

Znajdziemy teraz rozwinięcie asymptotyczne $f_{\omega 1}$ względem $\frac{1}{\omega}$ aż do $\frac{1}{\omega^3}$ włącznie wykonując wielokrotne całkowanie przez części:

$$\int_{-\infty}^{t} dt_1\, e^{-i\omega t_1}\cdot\mathcal{E}(1) = \left[\frac{e^{-i\omega t_1}}{(-i\omega)}\cdot\mathcal{E}(1)\right]_{-\infty}^{t} - \int_{-\infty}^{t} dt_1\,\frac{e^{-i\omega t_1}}{(-i\omega)}\cdot\frac{d}{dt_1}\mathcal{E}(1) =$$

$$= \frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)}\mathcal{E}(x,t) - \frac{e^{i\omega\infty}}{(-i\omega)}\mathcal{E}(\pm\infty,-\infty) - \int_{-\infty}^{t} dt_1\,\frac{e^{-i\omega t_1}}{(-i\omega)}\cdot\left(u\mathcal{E}_x(1) + \mathcal{E}_{t_1}(1)\right)$$

Znak pierwszego argumentu w $\mathcal{E}(\pm\infty,-\infty)$ zależy od znaku prędkości u. $\mathcal{E}_x(1)$ i $\mathcal{E}_{t_1}(1)$ oznaczają pochodne cząstkowe, tj. $\mathcal{E}_x(1)=\partial_x\mathcal{E}(1)$, $\mathcal{E}_{t_1}(1)=\partial_{t_1}\mathcal{E}(1)$. Widać, że potrzebne jest założenie

$$(22) \qquad \mathcal{E}(\pm\infty,-\infty) = 0$$

o zachowaniu się pola w nieskończoności $x=\pm\infty$ w chwili początkowej $t_0=-\infty$. Warunek (22) ma naturalny sens fizyczny. Opisuje on przypadek skończonego przestrzennie zaburzenia początkowego (skończone przestrzennie źródło pola $\mathbf{E}$ włączone w chwili początkowej). Powtarzamy całkowanie przez części

$$-\int_{-\infty}^{t} dt_1\,\frac{e^{-i\omega t_1}}{(-i\omega)}\cdot\left(u\mathcal{E}_x(1)+\mathcal{E}_{t_1}(1)\right) = -\left[\frac{e^{-i\omega t_1}}{(-i\omega)^2}\left(u\mathcal{E}_x(1)+\mathcal{E}_{t_1}(1)\right)\right]_{-\infty}^{t} + \int_{-\infty}^{t} dt_1\,\frac{e^{-i\omega t_1}}{(-i\omega)^2}\frac{d}{dt_1}\left(u\mathcal{E}_x(1)+\mathcal{E}_{t_1}(1)\right) =$$

$$= -\frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)^2}\left(u\mathcal{E}_x(x,t)+\mathcal{E}_t(x,t)\right) + \frac{e^{i\omega\infty}}{(-i\omega)^2}\left(u\mathcal{E}_x(\pm\infty,-\infty)+\mathcal{E}_t(\pm\infty,-\infty)\right) +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{t} dt_1 \frac{e^{-i\omega t_1}}{(-i\omega)^2}\left(u^2\mathcal{E}_{xx}(1) + 2u\,\mathcal{E}_{xt_1}(1) + \mathcal{E}_{t_1t_1}(1)\right).$$

Potrzebne jest dodatkowe założenie o zachowaniu się pola w nieskończoności

$$\mathcal{E}_x(\pm\infty,-\infty) = \mathcal{E}_t(\pm\infty,-\infty) = 0 .$$

Przyjmiemy od razu mocniejszy warunek, pozwalający efektywnie wykonać następne całkowania przez części,

$$\mathcal{E},\ \mathcal{E}_x,\ \mathcal{E}_t,\ \mathcal{E}_{xx},\ \mathcal{E}_{tt}\Big|_{\substack{x=\pm\infty\\ t=-\infty}} = 0 \tag{23}$$

gdzie $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x,t)$, $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x(x,t)$ itd.

Kolejne całkowanie przez części daje

$$\int\limits_{-\infty}^{t} dt_1 \frac{e^{-i\omega t_1}}{(-i\omega)^2}\left(u^2\mathcal{E}_{xx}(1) + 2u\,\mathcal{E}_{xt_1}(1) + \mathcal{E}_{t_1t_1}(1)\right) \doteq$$

$$= \frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)^3}\left(u^2\mathcal{E}_{xx}(x,t) + 2u\,\mathcal{E}_{xt}(x,t) + \mathcal{E}_{tt}(x,t)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^4}\right).$$

Otrzymaliśmy w ten sposób rozwinięcie asymptotyczne funkcji rozkładu pierwszego rzędu względem $\frac{1}{\omega}$ dla $\omega \longrightarrow \infty$

$$f_{\alpha 1}(u,x,t) = -N_{\alpha 0}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\Bigg[\frac{1}{(-i\omega)}\mathcal{E} - \frac{1}{(-i\omega)^2}\left(u\,\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_t\right) + \tag{24}$$

$$+ \frac{1}{(-i\omega)^3}\left(u^2\mathcal{E}_{xx} + 2u\,\mathcal{E}_{xt} + \mathcal{E}_{tt}\right)\Bigg] e^{-i\omega t}\,\partial_u f_{\alpha 0} + \text{c.c.}$$

5. Obliczenie $f_{\alpha 2}$

W tym wypadku mamy

(25) $$f_{\alpha 2}(u,x,t) = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\int_{-\infty}^{t} dt_1\, E(1)\,\partial_u f_{\alpha 1}(1) \ ,$$

gdzie

(26) $$\partial_u f_{\alpha 1}(u, x-u(t-t_1), t_1) \equiv \partial_u f_{\alpha 1}(u,x,t)\Big|_{\substack{t \to t_1 \\ x \to x-u(t-t_1)}}$$

Korzystając z (24) obliczamy .

$$\partial_u f_{\alpha 1}(u,x,t) = -N_{\alpha 0}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\Big\{\frac{1}{(-i\omega)}\mathcal{E}\,\partial_u^2 f_{\alpha 0} - \frac{1}{(-i\omega)^2}\Big[(u\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_t)\partial_u^2 f_{\alpha 0} + \mathcal{E}_x\,\partial_u f_{\alpha 0}\Big] +$$
$$+ \frac{1}{(-i\omega)^3}\Big[(u^2\mathcal{E}_{xx} + 2u\,\mathcal{E}_{xt} + \mathcal{E}_{tt})\partial_u^2 f_{\alpha 0} + (2u\,\mathcal{E}_{xx} + 2\,\mathcal{E}_{xt})\partial_u f_{\alpha 0}\Big]\Big\} e^{-i\omega t} + c.c.$$

Teraz możemy podstawić $t \to t_1$, $x \to x-u(t-t_1)$. Zauważmy, że dla pochodnych cząstkowych ∂_x, ∂_t kolejność operacji różniczkowania i podstawienia nowych argumentów jest dowolna np.

$$\Big[\partial_x \mathcal{E}(x,t)\Big]\Big|_{\substack{t \to t_1 \\ x \to x-u(t-t_1)}} = \partial_x\Big[\mathcal{E}(x-u(t-t_1), t_1)\Big] \ .$$

Natomiast dla pochodnej ∂_u tak nie jest i należy posługiwać się wzorem (26) .

Podstawiając tak obliczone $\partial_u f_{\alpha 1}(1)$ oraz (3) do (25) otrzymujemy

$$f_{\alpha 2}(u,x,t) = N_{\alpha 0}\Big(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\Big)^2\int_{-\infty}^{t} dt_1\Big(\mathcal{E}(1)e^{-i\omega t_1} + c.c.\Big)\cdot\Big[\Big\{\frac{1}{(-i\omega)}\mathcal{E}(1)\,\partial_u^2 f_{\alpha 0} +$$
$$- \frac{1}{(-i\omega)^2}\Big[(u\mathcal{E}_x(1) + \mathcal{E}_{t_1}(1))\partial_u^2 f_{\alpha 0} + \mathcal{E}_x(1)\,\partial_u f_{\alpha 0}\Big] +$$
$$+ \frac{1}{(-i\omega)^3}\Big[(u^2\mathcal{E}_{xx}(1) + 2u\,\mathcal{E}_{xt_1}(1) + \mathcal{E}_{t_1 t_1}(1))\partial_u^2 f_{\alpha 0} + (2u\,\mathcal{E}_{xx}(1) + 2\mathcal{E}_{xt_1}(1))\partial_u f_{\alpha 0}\Big]\Big\} e^{-i\omega t_1} + c.c.\Big]$$

Posłużymy się wzorem

(27) $\qquad (z_1 + c.c.)(z_2 + c.c.) = z_1 z_2 + z_1^* z_2 + c.c.$

wybierając jako z_2 bardziej skomplikowane wyrażenie w nawiasie $\{\cdots\}$

(28)
$$f_{\alpha 2}(u,x,t) = N_{\alpha 0}\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 \int_{-\infty}^{t} dt_1 \left[\left\{\frac{1}{(-i\omega)}\mathcal{E}^2(1)\partial_u f_{\alpha 0} + \right.\right.$$
$$- \frac{1}{(-i\omega)^2}\mathcal{E}(1)\left[\left(u\mathcal{E}_x(1) + \mathcal{E}_{t_1}(1)\right)\partial_u^2 f_{\alpha 0} + \mathcal{E}_x(1)\partial_u f_{\alpha 0}\right] +$$
$$\left. + \frac{1}{(-i\omega)^3}\mathcal{E}(1)\left[\left(u^2\mathcal{E}_{xx}(1) + 2u\mathcal{E}_{xt_1}(1) + \mathcal{E}_{t_1t_1}(1)\right)\partial_u^2 f_{\alpha 0} + \left(2u\mathcal{E}_{xx}(1) + 2\mathcal{E}_{xt_1}(1)\right)\partial_u f_{\alpha 0}\right]\right\} e^{-2i\omega t_1} +$$
$$+ \frac{1}{(-i\omega)}|\mathcal{E}(1)|^2 \partial_u f_{\alpha 0} - \frac{1}{(-i\omega)^2}\mathcal{E}^*(1)\left[\left(u\mathcal{E}_x(1) + \mathcal{E}_{t_1}(1)\right)\partial_u^2 f_{\alpha 0} + \mathcal{E}_x(1)\partial_u f_{\alpha 0}\right] +$$
$$\left. + \frac{1}{(-i\omega)^3}\mathcal{E}^*(1)\left[\left(u^2\mathcal{E}_{xx}(1) + 2u\mathcal{E}_{xt_1}(1) + \mathcal{E}_{t_1t_1}(1)\right)\partial_u^2 f_{\alpha 0} + \left(2u\mathcal{E}_{xx}(1) + 2\mathcal{E}_{xt_1}(1)\right)\partial_u f_{\alpha 0}\right] + c.c.\right].$$

Wyrazy w (28) proporcjonalne do $e^{-2i\omega t_1}$ całkujemy przez części korzystając z (23) i (21)

$$\int_{-\infty}^{t} dt_1 \frac{e^{-2i\omega t_1}}{(-i\omega)}\mathcal{E}^2(1) = \frac{e^{-2i\omega t}}{2(-i\omega)^2}\mathcal{E}^2(x,t) - \int_{-\infty}^{t} dt_1 \frac{e^{-2i\omega t_1}}{2(-i\omega)^2}\cdot\frac{d}{dt_1}\mathcal{E}^2(1) =$$
$$= \frac{e^{-2i\omega t}}{2(-i\omega)^2}\mathcal{E}^2 - \frac{e^{-2i\omega t}}{2(-i\omega)^3}\mathcal{E}\left(u\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_t\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^4}\right),$$
$$-\int_{-\infty}^{t} dt_1 \frac{e^{-2i\omega t_1}}{(-i\omega)^2}\cdot\mathcal{E}(1)\left[\left(u\mathcal{E}_x(1) + \mathcal{E}_{t_1}(1)\right)\partial_u^2 f_{\alpha 0} + \mathcal{E}_x(1)\partial_u f_{\alpha 0}\right] =$$
$$= \frac{e^{-2i\omega t}}{2(-i\omega)^3}\mathcal{E}\left[\left(u\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_t\right)\partial_u^2 f_{\alpha 0} + \mathcal{E}_x\partial_u f_{\alpha 0}\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^4}\right).$$

Wyraz $\sim \frac{1}{(-i\omega)^3}e^{-2i\omega t_1}$ w (28) daje wkład rzędu $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^4}\right)$.

Przechodzimy do analizy wyrazów nie zawierających czynnika $e^{-2i\omega t_1}$. Wyraz

$$\frac{1}{(-i\omega)}\left|\mathcal{E}(1)\right|^2 \partial_u^2 f_{d0}$$

jest czysto urojony i w związku z tym znosi się ze swoim sprzężonym odpowiednikiem w (28) (operacja $+c.c.$). W pozostałych wyrazach warto zwinąć pewne wyrażenia różniczkowe do pochodnej zupełnej $\frac{d}{dt_1}$ korzystając z (21). Pozwoli to wykonać całkowanie względem t_1. I tak dla wyrazów rzędu $\sim \frac{1}{\omega^2}$ mamy:

$$\mathcal{E}^*(1)\left(u\mathcal{E}_x(1) + \mathcal{E}_{t_1}(1)\right) = \mathcal{E}^*(1)\frac{d}{dt_1}\mathcal{E}(1)\,.$$

Ponieważ $\frac{1}{(-i\omega)^2}$ jest liczbą rzeczywistą, więc wyraz ten wraz ze swoim sprzężonym odpowiednikiem w (28) daje całkowalne wyrażenie

$$-\frac{1}{(-i\omega)^2}\frac{d}{dt_1}\left|\mathcal{E}(1)\right|^2 \partial_u^2 f_{d0}\,.$$

Natomiast $\mathcal{E}^*(1)\mathcal{E}_x(1) + c.c.$ prowadzi do $-\frac{1}{(-i\omega)^2}\int_{-\infty}^{t} dt_1\,\partial_x\left|\mathcal{E}(1)\right|^2 \partial_u f_{d0}$.
Dla wyrazów rzędu $\sim\frac{1}{\omega^3}$ mamy:

$$\mathcal{E}^*(1)\left(u\mathcal{E}_{xx}(1) + 2u\,\mathcal{E}_{xt_1}(1) + \mathcal{E}_{t_1t_1}(1)\right) = \mathcal{E}^*(1)\frac{d^2}{dt_1^2}\mathcal{E}(1)$$

oraz

$$\mathcal{E}^*(1)\left(2u\mathcal{E}_{xx}(1) + 2\mathcal{E}_{xt_1}(1)\right) = 2\mathcal{E}^*(1)\frac{d}{dt_1}\mathcal{E}_x(1)\,.$$

Pozwala to wykonać odpowiednie całkowania przez części:

$$\frac{1}{(-i\omega)^3}\int_{-\infty}^{t} dt_1\,\mathcal{E}^*(1)\frac{d^2}{dt_1^2}\mathcal{E}(1) = \frac{1}{(-i\omega)^3}\mathcal{E}^*\left(u\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_t\right) - \frac{1}{(-i\omega)^3}\int_{-\infty}^{t} dt_1\,\frac{d\mathcal{E}^*(1)}{dt_1}\frac{d\mathcal{E}(1)}{dt_1}$$

Ostatni wyraz całkowy jest czysto urojony i dlatego redukuje się ze swoim sprzężonym odpowiednikiem w (28) . Natomiast

$$\frac{2}{(-i\omega)^3}\int_{-\infty}^{t} dt_1\, \mathcal{E}^*(1)\cdot \frac{d}{dt_1}\mathcal{E}_x(1) = \frac{2}{(-i\omega)^3}\left[\mathcal{E}^*\mathcal{E}_x - \int_{-\infty}^{t} dt_1 \frac{d\,\mathcal{E}^*(1)}{dt_1}\cdot \mathcal{E}_x(1)\right] =$$

$$= \frac{2}{(-i\omega)^3}\left[\mathcal{E}^*\mathcal{E}_x - u\int_{-\infty}^{t} dt_1\, \mathcal{E}^*_x(1)\mathcal{E}_x(1) - \int_{-\infty}^{t} dt_1\, \mathcal{E}^*_{t_1}(1)\mathcal{E}_x(1)\right] .$$

Wyraz $\frac{-2u}{(-i\omega)^3}\int_{-\infty}^{t} dt_1\, \mathcal{E}^*_x(1)\mathcal{E}_x(1)$ jest urojony, więc znosi się ze swoim sprzężonym odpowiednikiem w (28) .

Ostatecznie, rozwinięcie asymptotyczne względem $\frac{1}{\omega}$ dla funkcji rozkładu drugiego rzędu przyjmuje postać

$$f_{\alpha 2}(u,x,t) = N_{\alpha 0}\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\Bigg[\Bigg\{\frac{1}{(-i\omega)^2}\frac{1}{2}\mathcal{E}^2\partial_u^2 f_{\alpha 0} + \tag{29}$$

$$- \frac{1}{(-i\omega)^3}\mathcal{E}\left[(u\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_t)\partial_u^2 f_{\alpha 0} + \frac{1}{2}\mathcal{E}_x \partial_u f_{\alpha 0}\right]\Bigg\} e^{-2i\omega t} +$$

$$- \frac{1}{(-i\omega)^2}\frac{1}{2}\left[|\mathcal{E}|^2\partial_u^2 f_{\alpha 0} + \int_{-\infty}^{t} dt_1\, \partial_x |\mathcal{E}(1)|^2 \partial_u f_{\alpha 0}\right] +$$

$$+ \frac{1}{(-i\omega)^3}\left[\mathcal{E}^*\mathcal{E}_x(u\partial_u^2 + 2\partial_u)f_{\alpha 0} + \mathcal{E}^*\mathcal{E}_t\partial_u^2 f_{\alpha 0} - 2\int_{-\infty}^{t} dt_1\, \mathcal{E}^*_{t_1}(1)\mathcal{E}_x(1)\partial_u f_{\alpha 0}\right]\Bigg] + c.c.$$

6. Obliczenie $f_{\alpha 3}$

Na podstawie (18) mamy

$$f_{\alpha 3}(u,x,t) = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\int_{-\infty}^{t} dt_2\, E(2)\,\partial_u f_{\alpha 2}(2) , \tag{30}$$

gdzie

$$\partial_u f_{\alpha 2}(2) = \partial_u f_{\alpha 2}(u,x,t)\Big|_{\substack{t \to t_2 \\ x \to x - u(t - t_2)}} .$$

Różniczkujemy (29) względem u pomijając wyrazy rzędu $\sim \frac{1}{\omega^3}$, które dałyby wkład w (30) rzędu $\sim \frac{1}{\omega^4}$:

$$\partial_u f_{\alpha 2}(u,x,t) = N_{\alpha 0}\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 \frac{1}{(-i\omega)^2}\left\{\left[\frac{1}{2}\mathcal{E}^2 e^{-2i\omega t}\partial_u^3 f_{\alpha 0} + c.c.\right] - |\mathcal{E}|^2 \partial_u^3 f_{\alpha 0} + \right.$$
$$\left. - \partial_u \int_{-\infty}^{t} dt_1\, \partial_x |\mathcal{E}(1)|^2 \partial_u f_{\alpha 0}\right\}.$$

Podstawiamy $t \to t_2$, $x \to x - u(t-t_2)$, wykorzystujac fakt, że dla funkcji argumentu (1) kolejność operacji ∂_u i tego podstawienia (argument (2)) jest dowolna, a następnie wstawiamy wynik do (30)

$$f_{\alpha 3}(u,x,t) = -N_{\alpha 0}\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^3 \frac{1}{(-i\omega)^2}\int_{-\infty}^{t} dt_2 \left(\mathcal{E}(2) e^{-i\omega t_2} + c.c.\right)\left[\left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^2(2) e^{-2i\omega t_2}\partial_u^3 f_{\alpha 0} + c.c.\right) + \right.$$
$$\left. - |\mathcal{E}(2)|^2 \partial_u^3 f_{\alpha 0} - \partial_u \int_{-\infty}^{t_2} dt_1\, \partial_x |\mathcal{E}(x-u(t_2-t_1),t_1)|^2 \partial_u f_{\alpha 0}\right] =$$
$$= -N_{\alpha 0}\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^3 \frac{1}{(-i\omega)^2}\int_{-\infty}^{t} dt_2 \left[\frac{1}{2}\mathcal{E}^3(2) e^{-3i\omega t_2}\partial_u^3 f_{\alpha 0} - \frac{1}{2}|\mathcal{E}(2)|^2 \mathcal{E}(2) e^{-i\omega t_2}\partial_u^3 f_{\alpha 0} + \right.$$
$$\left. - \mathcal{E}(2) e^{-i\omega t_2}\partial_u \int_{-\infty}^{t_2} dt_1\, \partial_x |\mathcal{E}(x-u(t_2-t_1),t_1)|^2 \partial_u f_{\alpha 0}\right] + c.c.$$

Całkując przez części po t_2 otrzymujemy rozwinięcie względem $\frac{1}{\omega}$ funkcji rozkładu trzeciego rzędu

$$f_{\alpha 3}(u,x,t) = -N_{\alpha 0}\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^3 \frac{1}{(-i\omega)^3}\left[\frac{1}{6}\mathcal{E}^3 e^{-3i\omega t}\partial_u^3 f_{\alpha 0} - \frac{1}{2}|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} e^{-i\omega t}\partial_u^3 f_{\alpha 0} + \right.$$
$$\left. - \mathcal{E} e^{-i\omega t}\partial_u \int_{-\infty}^{t} dt_1\, \partial_x |\mathcal{E}(1)|^2 \partial_u f_{\alpha 0}\right] + c.c. \tag{31}$$

Ponieważ $f_{\alpha 3}$ nie służy już do obliczenia $f_{\alpha 4}$, więc wyraz całkowy w (31) pozostawiliśmy w postaci wygodnej do całkowania (przez części) w równaniu Ampera - patrz (37).

7. Nielokalne równanie NLS

Rozwinięcie

$$f_\alpha = N_{\alpha 0} f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1} + f_{\alpha 2} + f_{\alpha 3} \tag{32}$$

dane wzorami (24), (29) i (31) wstawiamy do równania Ampera (2) w celu otrzymania równania na amplitudę $\mathcal{E}(x,t)$. Ze względu na występujace w równaniu (2) całkowanie $\int du\, u f_\alpha$, wyrazy parzyste względem u w rozwinięciu (32) nie daja wkładu. W szczególności, dla wystarczajaco szybko malejacych do zera w nieskończoności rozkładów $f_{\alpha 0}$ (np. dla rozkładu Maxwella (15)), znikaja całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} du\, u f_{\alpha 0} = \int_{-\infty}^{\infty} du\, u\, \partial_u^2 f_{\alpha 0} = \int_{-\infty}^{\infty} du\, u\, \partial_u^3 f_{\alpha 0} = \int_{-\infty}^{\infty} du\, u^2 \partial_u f_{\alpha 0} = 0, \tag{33}$$

natomiast różne od zera całki są równe

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} du\, u\, \partial_u f_{\alpha 0} = \left[u f_{\alpha 0}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} du\, f_{\alpha 0} = -1 \\
&\int_{-\infty}^{\infty} du\, u^2 \partial_u^2 f_{\alpha 0} = \left[u^2 \partial_u f_{\alpha 0}\right]_{-\infty}^{\infty} - 2\int_{-\infty}^{\infty} du\, u\, \partial_u f_{\alpha 0} = 2 \\
&\int_{-\infty}^{\infty} du\, u^3 \partial_u f_{\alpha 0} = \left[u^3 f_{\alpha 0}\right]_{-\infty}^{\infty} - 3\int_{-\infty}^{\infty} du\, u^2 f_{\alpha 0} = -3\langle u^2\rangle_{\alpha 0}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Dla rozkładu Maxwella (15) otrzymujemy

$$\langle u^2\rangle_{\alpha 0} = a_{\alpha 0}^2 \tag{35}$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} du\, \frac{1}{u} \partial_u f_{\alpha 0} = -\frac{1}{a_{\alpha 0}^2}. \tag{36}$$

Dla innych rozkładów będziemy również czasem posługiwać się oznaczeniem $a_{\alpha 0}$ traktując wówczas wzory (35) i (36) jako definicje, przy czym zakładamy, że $\partial_u f_{\alpha 0}\big|_{u=0}=0$, dzięki czemu całka (36) jest nieosobliwa.

Wykorzystujac zależności (33) ÷ (36) możemy zapisać równanie Ampera w następującej postaci

$$
\begin{aligned}
(37)\quad 0 = {} & \mathcal{E}_t e^{-i\omega t} - i\omega \mathcal{E} e^{-i\omega t} + \\
& + \sum_\alpha N_{\alpha 0} \frac{q_\alpha}{\varepsilon_0} \Bigg\{ \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left[\frac{1}{(-i\omega)} \mathcal{E} + \frac{1}{(-i\omega)^2} \mathcal{E}_t + \frac{3\langle u^2\rangle_{\alpha 0}}{(-i\omega)^3} \mathcal{E}_{xx} - \frac{1}{(-i\omega)^3} \mathcal{E}_{tt} \right] e^{-i\omega t} + \\
& + \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 \left[-\frac{1}{(-i\omega)^3} \frac{3}{2} \mathcal{E}\mathcal{E}_x e^{-2i\omega t} - \frac{1}{(-i\omega)^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{t} dt_1 \partial_x |\mathcal{E}(1)|^2 u\, \partial_u f_{\alpha 0} - \frac{2}{(-i\omega)^3} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{t} dt_1 \mathcal{E}^*_{t_1}(1) \mathcal{E}_x(1) u\, \partial_u f_{\alpha 0} \right] + \\
& + \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^3 \frac{1}{(-i\omega)^3} \mathcal{E} \int_{-\infty}^{\infty} du\, u\, \partial_u \int_{-\infty}^{t} dt_1 \partial_x |\mathcal{E}(1)|^2 \partial_u f_{\alpha 0}\, e^{-i\omega t} \Bigg\} + \text{c.c.}
\end{aligned}
$$

Ostatni wyraz w (37) możemy przekształcić wykonujac całkowanie przez części względem zmiennej u

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} du\, u\, \partial_u \int_{-\infty}^{t} dt_1 \partial_x |\mathcal{E}(1)|^2 \partial_u f_{\alpha 0} &= \left[\int_{-\infty}^{t} dt_1 \partial_x |\mathcal{E}(1)|^2 u\, \partial_u f_{\alpha 0} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{t} dt_1 \partial_x |\mathcal{E}(1)|^2 \partial_u f_{\alpha 0} = \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{t} dt_1 \partial_x |\mathcal{E}(1)|^2 \partial_u f_{\alpha 0} ,
\end{aligned}
$$

gdzie wykorzystaliśmy założenie o odpowiednio szybkim dążeniu $f_{\alpha 0}(u)$ do zera dla $|u| \longrightarrow \infty$.

Warunkiem wystarczającym do spełnienia równania (37) jest zerowanie się współczynników przy różnych eksponensach. W przybliżeniu wolnej zmienności amplitudy (4) jest to również warunek konieczny. Wyższe harmoniczne $e^{-ni\omega t}$ pojawiają się w wyższych rzędach rozwinięcia $f_{\alpha n}$, zatem konsekwentnie ograniczymy się do najniższych harmonicznych e^0, $e^{-i\omega t}$. Oznaczając częstość plazmową dla składnika α

$$\omega_{\alpha 0} = \left(\frac{N_{\alpha 0}\, q_\alpha^2}{\epsilon_0\, m_\alpha} \right)^{1/2} \tag{38}$$

i przyrównując do zera współczynniki przy e^0 oraz $e^{-i\omega t}$ w (37) otrzymujemy następujace równania

$$0 = \sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2 \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \Big\{ \frac{1}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{t} dt_1\, \partial_x |\mathcal{E}(1)|^2 u\, \partial_u f_{\alpha 0} + \tag{39}$$

$$+ \frac{2i}{\omega^3} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{t} dt_1 \left[\mathcal{E}_x(1) \mathcal{E}^*_{t_1}(1) - \mathcal{E}^*_x(1) \mathcal{E}_{t_1}(1) \right] u\, \partial_u f_{\alpha 0} \Big\},$$

$$0 = i\mathcal{E}_t \Big(1 + \frac{1}{\omega^2} \sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2 \Big) + \mathcal{E}\omega \Big(1 - \frac{1}{\omega^2} \sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2 \Big) + \mathcal{E}_{xx} \frac{3}{\omega^3} \sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2 \langle u^2 \rangle_{\alpha 0} + \tag{40}$$

$$- \mathcal{E}_{tt} \frac{1}{\omega^3} \sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2 - \mathcal{E} \frac{1}{\omega^3} \sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2 \Big(\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \Big)^2 \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{t} dt_1\, \partial_x |\mathcal{E}(1)|^2 \partial_u f_{\alpha 0}.$$

Korzystajac z (21) możemy przekształcić wyrazy całkowe w (39) i (40) zawierajace $\partial_x |\mathcal{E}(1)|^2$

$$\int_{-\infty}^{t} dt_1\, \partial_x |\mathcal{E}(1)|^2 = \frac{1}{u} |\mathcal{E}(x,t)|^2 - \frac{1}{u} \int_{-\infty}^{t} dt_1\, \partial_{t_1} |\mathcal{E}(1)|^2$$

Ponieważ $\int_{-\infty}^{\infty} du\, \partial_u f_{\alpha 0} = 0$, więc równanie (39) przyjmie postać

$$0 = \sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2 \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \Big\{ \frac{1}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{t} dt_1\, \partial_{t_1} |\mathcal{E}(1)|^2 \partial_u f_{\alpha 0} + \tag{41}$$

$$+ \frac{2i}{\omega^3} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{t} dt_1 \left[\mathcal{E}^*_x(1) \mathcal{E}_{t_1}(1) - \mathcal{E}_x(1) \mathcal{E}^*_{t_1}(1) \right] u\, \partial_u f_{\alpha 0} \Big\},$$

a równanie (40)

$$(42)\quad 0=i\mathcal{E}_t\left(1+\frac{1}{\omega^2}\sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2\right)+\mathcal{E}\omega\left(1-\frac{1}{\omega^2}\sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2\right)+\mathcal{E}_{xx}\frac{3}{\omega^3}\sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2\langle u^2\rangle_{\alpha 0}-\mathcal{E}_{tt}\frac{1}{\omega^3}\sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2+$$

$$-|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}\frac{1}{\omega^3}\sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}du\frac{1}{u}\partial_u f_{\alpha 0}+\mathcal{E}\frac{1}{\omega^3}\sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{t}dt_1\,\partial_{t_1}|\mathcal{E}(1)|^2\frac{1}{u}\partial_u f_{\alpha 0}\ .$$

W szczególnym przypadku, gdy plazma drga z częstością plazmową (ω_{ec} - elektronowa częstość plazmowa), tj. gdy

$$(43)\qquad \omega^2=\omega_0^2\equiv\sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2\approx\omega_{ec}^2$$

w równaniu (42) znika wyraz $\sim\mathcal{E}$, przy $i\mathcal{E}_t$ pojawia się czynnik 2, zaś wyraz $\sim\mathcal{E}_{tt}$ przyjmuje postać $-\frac{1}{\omega}\mathcal{E}_{tt}$ i zgodnie z oszacowaniem (6) może być pominięty w stosunku do $2i\mathcal{E}_t$. Otrzymujemy w ten sposób <u>nielokalne, nieliniowe równanie Schrödingera (NNLS - od Nonlocal NLS)</u> na wolno zmienną amplitudę pola elektrycznego

$$(44)\quad 0=i\mathcal{E}_t+\mathcal{E}_{xx}\frac{3}{2\omega^3}\sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2\langle u^2\rangle_{\alpha 0}-|\mathcal{E}|^2\mathcal{E}\frac{1}{2\omega^3}\sum \omega_{\alpha 0}^2\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}du\frac{1}{u}\partial_u f_{\alpha 0}+$$

$$+\mathcal{E}\frac{1}{2\omega^3}\sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2\left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{t}dt_1\,\partial_{t_1}|\mathcal{E}(1)|^2\frac{1}{u}\partial_u f_{\alpha 0}\ .$$

<u>8. Właściwości równania NNLS</u>

Podstawowa cecha równania NNLS, różniącą go od zwykłego równania NLS, jest jego nielokalny charakter. Należy przy tym podkreślić, że oprócz równania NNLS (44) musi być spełnione również równanie (41), które jest też równaniem całkowym. W członie nielokalnym równania (44) występuje kwadrat modułu amplitudy pola elektrycznego $\mathcal{E}$. Zatem w wypadku zależności

$$\mathcal{E}(x,t) = \mathcal{E}_0 e^{i(kx-\Omega t)}, \quad \mathcal{E}_0 = const, \quad \Omega \ll \omega = \omega_0, \tag{45}$$

jak również w ogólniejszym przypadku $\mathcal{E}_0 e^{i\varphi(x,t)}$, nielokalny wyraz w równaniu (44) znika. Pole o postaci (45) spełnia zwykłe równanie NLS (pojawia się związek między $\mathcal{E}_0, k$ i Ω - nieliniowa relacja dyspersyjna [3]) oraz równanie (41) . Jednak (45) nie spełnia warunku początkowego (22). Należy więc dopuścić zależność amplitudy $\mathcal{E}_0$ od x,t . Kierując się rozwiązaniem Zacharowa dla równania NLS rozważymy rozwiązanie równania NNLS o postaci

$$\mathcal{E}(x,t) = \mathcal{E}_0(x-Ut)e^{i(kx-\Omega t)}, \quad \Omega \ll \omega = \omega_0, \tag{46}$$

które spełnia równanie (44) z pominięciem członu całkowego, pod warunkiem, że między U, k, Ω zachodzą określone związki zależne od współczynników tego równania. Wówczas $\mathcal{E}_0(z)$ wyraża się przez $\operatorname{sech} z$. Warunek początkowy (23) jest teraz spełniony, gdyż $\mathcal{E}_0(z) \xrightarrow[|z|\to\pm\infty]{} 0$ odpowiednio szybko. Dokładniej, otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $x-Ut\big|_{\substack{t\to-\infty \\ x\to\pm\infty}} = \pm\infty + U\infty$, co wymaga ustalenia kolejności przejść granicznych $t\to-\infty$ i $x\to\pm\infty$. Ponieważ warunek początkowy (23) możemy zadać dla skończonego t_0 np. $\mathcal{E}(\pm\infty, t_0)=0$, więc wszystko jest w porządku. Na końcu przechodzimy do granicy $t_0\to-\infty$, co odpowiada fizycznej sytuacji rozważania dużych $t-t_0$, zapewniających znikanie efektów przejściowych.

Należy więc zbadać co daje wyraz całkowy w (44) dla pola typu (46) . Ponieważ w tym wypadku

$$\partial_{t_1}|\mathcal{E}(1)|^2 = \partial_t|\mathcal{E}(x,t)|^2\Big|_{\substack{t\to t_1 \\ x\to x-u(t-t_1)}} = \partial_t|\mathcal{E}_0(x-Ut)|^2\Big|_{\substack{t\to t_1 \\ x\to x-u(t-t_1)}} =$$

$$= -U W'(x-Ut)\Big|_{\substack{t\to t_1 \\ x\to x-u(t-t_1)}} = -U W'(x-ut+(u-U)t_1),$$

gdzie $W(z) \equiv |\mathcal{E}_0(z)|^2$, więc zamieniając zmienne $z = x-ut+(u-U)t_1$, $dz = (u-U)dt_1$ w całce po t_1 , możemy tę całkę efektywnie wykonać

$$\int_{-\infty}^{t} dt_1\, \partial_1|\mathcal{E}(1)|^2 = \frac{-U}{u-U}\int_{\pm\infty}^{x-Ut} dz\, W'(z) = \frac{-U}{u-U}W(x-Ut) = \frac{-U}{u-U}|\mathcal{E}(x,t)|^2 . \tag{47}$$

Zgodnie z (47) wyraz całkowy w (44) staje się wyrazem typu $\sim |\mathcal{E}|^2\mathcal{E}$. Ponieważ

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \left(\frac{-U}{u-U} - 1\right) \frac{1}{u} \partial_u f_{\alpha 0} = - \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{u-U} \partial_u f_{\alpha 0} \, ,$$

więc wyraz ten wraz z istniejącym już w (44) wyrazem $\sim |\mathcal{E}|^2\mathcal{E}$ daje wkład

$$(48) \qquad -|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} \frac{1}{2\omega^3} \sum_\alpha \omega_{\alpha 0}^2 \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{u-U} \partial_u f_{\alpha 0} \, .$$

Oznacza to, że dla rozwiązań typu (46) równanie NNLS (44) staje się zwykłym równaniem NLS . Innymi słowy, rozwiązanie Zacharowa równania NLS jest również rozwiązaniem ogólniejszego równania (44)

Przedstawione rozumowanie nie jest jednak kompletne, gdyż całka

$$(49) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{u-U} \partial_u f_{\alpha 0}$$

występująca w (48) jest rozbieżna w $u=U$, (poza szczególnym wyborem $\partial_u f_{\alpha 0}|_{u=U}=0$) czyli dla cząstek będących "w rezonansie" z falą (46). Przepis obchodzenia osobliwości w całce (49) musi wynikać z fizyki problemu. Mechanizm fizyczny oddziaływania fali i cząstek prowadzi do tłumienia (lub narastania) Landaua. Przepis Landaua obchodzenia osobliwości w całce typu (49) jest w przypadku małego tłumienia (tylko wówczas jest sens mówić o fali obwiedniowej) równoważny przepisowi epsilonowemu [2]:

$$(50) \qquad \frac{1}{u-U} \longrightarrow \frac{1}{u-U-i0} = \frac{P}{u-U} + i\pi\delta(u-U)$$

Wkład od δ - Diraca w całce (49) ,pojawiającej się w nieliniowym warunku dyspersyjnym, który otrzymujemy z równania (44) po wstawieniu do niego rozwiązania (46) , prowadzi do pojawienia się urojonej części częstości opisującej tłumienie Landaua fali [2]. Zatem równanie NNLS , mimo dokonanych licznych przybliżeń przy jego wyprowadzeniu, zawiera w sobie nadal wiele istotnych informacji wynikających z opisu kinetycznego plazmy. Pełne omówienie tłumienia Landaua dla fal obwiedniowych Langmuira będzie przedstawione w innej pracy.

9. Literatura

1. В. Е. Захаров, ЖЭТФ т.62 вып.5, 1972
2. N. A. Krall, A. W. Trivelpiece, Principles of Plasma Physics, McGraw - Hill, NY 1973
3. G. B. Whitham, Linear and Nonlinear Waves, Wiley, NY 1974

Spis treści