1.12 — metody numeryczne
i komputerowe

Eugeniusz Danicki

ROZPRASZANIE AFP NA METALOWYM DYSKU ELIPTYCZNYM NA ANIZOTROPOWYM PODŁOŻU PIEZOELEKTRYCZNYM

14/1990

P.269

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
BIBLIOTEKA

WARSZAWA 1990

http://rcin.org.pl

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 maja 1989 r.

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
BIBLIOTEKA

56814

N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark.wyd.1,4 Ark.druk.1,75
Oddano do drukarni w kwietniu 1990 r.
Nr zamówienia 158/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

http://rcin.org.pl

E. Danicki
ZTFE, IPPT PAN
Warszawa

Rozpraszanie AFP na metalowym dysku eliptycznym na anizotropowym podłożu piezoelektrycznym

Rozważana jest akustyczna fala powierzchniowa (AFP) propagująca się po podłożu piezoelektrycznym dowolnie anizotropowym. Z falą tą sprzężona jest fala potencjału elektrycznego, poprzez którą oddziałuje ona z doskonale przewodzącym (nieważkim) dyskiem położonym na powierzchni podłoża. Przedstawiona jest perturbacyjna teoria rozpraszania AFP na dysku eliptycznym o dowolnej orientacji względem kierunku propagacji płaskiej, harmonicznej fali padającej. Rozwiązanie, podane w postaci szeregu jest szybko zbieżne w szerokim zakresie liczb falowych AFP. Rozważony jest dysk swobodny i dysk uziemiony, wyznaczony jest ładunek elektryczny generowany na dysku przez rozpraszaną AFP oraz charakterystyka kierunkowa rozpraszania fali. Podane są przykłady numeryczne.

1. Wstęp

Akustyczna fala powierzchniowa, propagująca się w podłożu piezoelektrycznym przy jego swobodnej powierzchni sprzężona jest z falą potencjału elektrycznego na powierzchni podłoża (o amplitudzie zanikającej w miarę oddalania się od tej powierzchni). Propagacja takiej fali może zostać zaburzona poprzez zaburzenie potencjału elektrycznego, na przykład przez położenie przewodzących obiektów na powierzchni podłoża.

Przedstawiona poniżej teoria dotyczy rozpraszania AFP przez pojedynczy eliptyczny dysk doskonale przewodzący i nieważki, oddziałujący z akustyczną falą powierzchniową wyłącznie poprzez sprzężony z tą falą potencjał elektryczny.

Rozpatrywane zagadnienie ma swoje odpowiedniki w literaturze

http://rcin.org.pl

akustycznej i elektromagnetycznej, gdzie znana jest ścisła teoria rozpraszania harmonicznej fali płaskiej na elipsoidzie i, w granicy, na dysku [1]. Znane są też teorie przybliżone dla rozpraszania fali na dysku o niewielkich rozmiarach w stosunku do długości fali [2], [3].

Rozpatrywane w tym artykule zagadnienie różni się od znanych w literaturze przede wszystkim tym, że uwzględniona jest dielektryczna i sprężysta anizotropia podłoża, która może być znacząca w wielu przypadkach znanych piezoelektryków. Dielektryczna anizotropia podłoża wpływa bezpośrednio na rozkład ładunku elektrycznego generowanego na dysku przez padającą falę potencjału (padającą AFP). Anizotropia sprężysta objawia się głównie w silnej zależności prędkości propagacji AFP od kierunku propagacji, wielkość potencjału elektrycznego sprzężonego z falą może również silnie zależeć od kierunku propagacji fali względem osi krystalograficznych podłoża.

Wymienione wyżej teorie rozpraszania fali na dysku zakładają izotropię ośrodka, w którym dysk jest umieszczony, nie mogą więc być bezpośrednio zastosowane do rozwiązania rozważanego tu zagadnienia. Także przypadek dysku uziemionego jest specyficzny w rozważaniach dotyczących AFP.

Przedstawiona poniżej teoria jest teorią perturbacyjną. Polega ona na określeniu rozkładu ładunku elektrycznego na dysku bez uwzględnienia wpływu tego ładunku na pole elektryczne pod dyskiem, zachodzącego za pośrednictwem AFP. Rozproszone pole akustycznej fali powierzchniowej daleko od dysku, określające charakterystykę kierunkową rozpraszania, wyznaczane jest za pomocą asymptotycznej postaci funkcji Greena, jako rezultat działania ładunku elektrycznego na dysku, uprzednio wyznaczonego, na podłoże piezoelektryczne. Akustyczne fale objętościowe są w tym artykule całkowicie pominięte.

Pełne sformułowanie zagadnienia rozpraszania płaskiej AFP na kołowym dysku doskonale przewodzącym przedstawione jest w Rozdziale 2. Dodatek B pokazuje, jak można zagadnienie rozpraszania na dysku eliptycznym sprowadzić do zagadnienia dla dysku kołowego, poprzez odpowiednią zmianę współrzędnych i, w konsekwencji, zmianę elektrycznej funkcji Greena podłoża piezoelektrycznego.

http://rcin.org.pl

W Rozdziale 3 przedstawione jest rozwiązanie pewnego prostego zagadnienia elektrostatyki dla anizotropowej półprzestrzeni dielektrycznej. Rozdział 4 poświęcony jest wyznaczeniu rozkładu ładunku na dysku, jaki indukowany jest przez padającą płaską falę potencjału, sprzężonego z papającą AFP. W Rozdziale 5 rozważone jest rozproszone pole akustycznej fali powierzchniowej i podane są przykłady numeryczne. W Dodatku C podane są pewne twierdzenia dotyczące własności wyrazów szeregów, opisujących rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia i podane są uwagi na temat obliczeń numerycznych.

2. Całkowe sformułowanie zagadnienia rozpraszania

2.1. Opis elektrycznych własności podłoża

Rozważmy półprzestrzeń piezoelektryka, na powierzchni którego rozłożony jest powierzchniowy ładunek elektryczny w postaci płaskiej fali harmonicznej

$$\Delta D_{\perp} = \rho \; exp(j\omega t - j\underline{k}\cdot\underline{r}) \tag{1}$$

gdzie $\Delta D_{\perp}$ jest gęstością ładunku powierzchniowego, równą różnicy składowych normalnych gęstości strumienia elektrycznego od strony piezoelektryka i od strony próżni nad piezoelektrykiem,
ω - częstość kołowa fali (zleżność od czasu będzie dalej opuszczana),
$\underline{k}$ - wektor falowy, leżący w płaszczyźnie powierzchni podłoża ($y=0$).

Zgodnie z [4], [5], fala ładunku wywołuje na powierzchni podłoża falę potencjału elektrycznego ϕ, o amplitudzie Φ

$$\Phi = G(\omega,\underline{k}) \; \rho \tag{2}$$

gdzie G jest transformatą Fouriera elektrycznej funkcji Greena półprzestzeni piezoelektryka, opisującej pole elektryczne na powierzchni $y=0$.

Ogólnie biorąc, funkcja G może być rozłożona na trzy składniki, opisujące odpowiednio własności dielektryczne własności dielektryczne podłoża i dwa zjawiska falowe: związane z akustyczną

http://rcin.org.pl

falą powierzchniową i z falą objętościową. Dokładna dyskusja funkcji G podana jest np. w [6], [7], tu zauważmy jedynie, że o ile dwa pierwsze składniki są osobliwymi funkcjami wektora falowego $\underline{k}$, to ostatni składnik jest zwykle ograniczoną funkcją $\underline{k}$.

W dalszej części pracy składnik opisujący fale objętościowe zostanie pominięty, jakkolwiek nie ma istotnych przeszkód w uwzględnieniu go łącznie ze składnikiem drugim. W większości przypadków można przyjąć, że oba składniki opisujące zjawiska falowe są znacznie mniejsze od składnika pierwszego, opisującego zjawiska elektrostatyki (jest to przybliżenie słabego sprzężenia piezoelektrycznego).

W powyższym uproszczeniu funkcja G ma postać

$$G(\underline{k}) = \frac{1}{k\varepsilon_e} \frac{k^2-k_o^2}{k^2-k_v^2} \tag{3}$$

gdzie $k=\|\underline{k}\|$ oraz

k_o - liczba falowa AFP dla metalizowanej powierzchni podłoża,

k_v - liczba falowa AFP dla swobodnej powierzchni podłoża (obie wielkości są proporcjonalne do ω, co w (3) i dalej nie będzie explicite zapisywane),

ε_e - tzw. efektywna powierzchniowa przenikalność dielektryczna podłoża. Należy zauważyć, że wszystkie powyższe wielkości zależą od kierunku propagacji fali, tj. od $\underline{k}/k$.

Dla dalszych wywodów wygodnie będzie zapisać relację (2) w dziedzinie zmiennych przestrzennych

$$\Phi(\underline{r}) = \iint_S g(\underline{r};\underline{r}')\, \rho(\underline{r}')\, dr'^2 \tag{4}$$

gdzie całkowanie zachodzi po całej powierzchni podłoża, na której występuje powierzchniowy ładunek elektryczny. Funkcja Greena g podana jest w Dodatku A.

2.2 Sformułowanie zagadnienia rozpraszania

Relacja (4) pozwala na następujące sformułowanie zagadnienia rozpraszania AFP na uziemionym dysku kołowym (uogólnienie na dysk eliptyczny znajduje się w Dodatku B)

http://rcin.org.pl

$$-\Phi^{o}(\underline{r}) = \iint_{S} g(\underline{r};\underline{r}')\, \rho(\underline{r}')\, dr'^{2} \qquad (5)$$

gdzie $\underline{r}$ należy do obszaru dysku,
S - obszar dysku, gdzie $\|\underline{r}'\| \le R$, R - promień dysku,
Φ^{o} - fala potencjału związana z padającą na dysk AFP, jest to fala potencjału, jaka wystąpiłaby na swobodnej powierzchni podłoża, bez dysku

$$\Phi^{o} = exp(-jk_{v}z) \qquad (6)$$

Przyjęto, że padająca fala powierzchniowa propaguje się wzdłuż osi z i związany z nią potencjał elektryczny ma jednostkową amplitudę.

Relacja (5) wyraża fakt, że całkowity potencjał pod uziemionym dyskiem, złożony z potencjału padającego Φ^{o} i potencjału wywołanego przez ładunek elektryczny ρ na dysku jest zerowy. Ładunek ρ należy wyznaczyć z równania (5).

W przypadku dysku swobodnego, który może mieć pewien stały na całym obszarze dysku ptencjał elektryczny, zagadnienie rozpraszania można rozłożyć na dwa prostsze zagadnienia:
i) należy rozwiązać zagadnienie dla dysku uziemionego i wyznaczyć całkowity ładunek Q zgromadzony na dysku,
ii) należy rozwiązać zagadnienie pomocnicze dla dysku uziemionego przyjmując $-\Phi^{o} = const = U$ i wyznaczyć całkowity ładunek Q_{o} na dysku,
iii) należy złożyć oba rozwiązania tak, aby uzyskać zerowy ładunek całkowity na dysku, wymaga to odpowiedniego dobrania potencjału U , który jest stałym potencjałem dysku swobodnego, wywołanym przez rozpraszaną falę Φ^{o} .

Zagadnienie ii) jest zagadnieniem opisującym generację AFP przez dysk wskutek doprowadzenia do niego potencjału U z zewnętrznego źródła napięcia, zagadnienie to rozwiązuje się na podobnej drodze jak zagadnienie i).

2.3 Uproszczenia

Rozwiązanie równania całkowego (5) nie jest w ogólności możliwe. Jednakże dla większości stosowanych podłoży piezoelektrycznych można przyjąć uproszczenie słabego sprzężenia

http://rcin.org.pl

piezoelektrycznego

$$\Delta v/v = (k_o - k_v)/k_v \ll 1 \tag{7}$$

co umożliwia zastosowanie procedury iteracyjnej dla rozwiązania równania (5).

Przedstawmy (5) w postaci

$$-\Phi^o = \iint g^E \rho \, d^2r' + \iint g^R \rho \, d^2r' \tag{8}$$

Jak to pokazano w Dodatku A, g^E jest funkcją osobliwą w $\underline{r}=\underline{r}'$, podczas gdy g^R jest funkcją regularną, proporcjonalną do $\Delta v/v$. Wynika stąd wniosek, że w przybliżeniu (7) drugi składnik w (8) można zaniedbać.

Pierwsze przybliżenie dla równania (5) jest więc następującym słabo osobliwym równaniem całkowym Fredholma I rodzaju (Φ^o wyrażono we współrzędnych biegunowych)

$$- \sum_m J_m(kr)e^{jm\theta} = \iint \frac{\rho(r',\theta')}{2\pi\bar{r}\varepsilon_e(\bar{\theta}-\pi/2)} dx'dy' = \tag{9}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varepsilon_e(\bar{\theta}-\pi/2)]^{-1} d\bar{\theta} \int_0^{R(\bar{\theta})} \rho(r',\theta') \, d\bar{r}$$

gdzie $\bar{r} = \|\underline{r}-\underline{r}'\|$, $\bar{\theta} = arg((\underline{r}-\underline{r}')/\bar{r})$, podobnie r , θ oraz r' , θ' przedstawiają we współrzędnych biegunowych wektory $\underline{r}$ oraz $\underline{r}'$, $R(\bar{\theta})$ jest granicą całkowania określoną przez przecięcie promienia $\bar{\underline{r}}$ z brzegiem dysku.

Ograniczając się do pierwszego przybliżenia, potencjał elektryczny związany z falowym polem rozproszonym na dysku określa drugi składnik funkcji Greena

$$\phi(r\to\infty) = \iint g^A \rho \, d^2r' \tag{10}$$

przy czym ρ jest rozwiązaniem równania (9), a asymptotyczna postać funkcji g^A podana jest w Dodatku A.

Przedstawione poniżej rozważania dotyczą dysku kołowego o promieniu $R=1$. Uogólnienie na dysk o dowolnym promieniu R uzyskuje się przez prostą zmianę skali układu współrzędnych.

http://rcin.org.pl

3. Proste zagadnienie elektrostatyczne

3.1 Dowolny rozkład ładunku na dysku

Załóżmy następujący rozkład ładunku na dysku kołowym o promieniu R=1

$$\rho(r',\theta') = \sigma_{mn} \frac{T_n(r')}{(1-r'^2)^{1/2}} e^{jm\theta'} \tag{11}$$

gdzie T_n jest wielomianem Czebyszewa rzędu $n \geq 0$. Z warunku $\rho(r',\theta') = \rho(-r',\theta'+\pi)$ wynika, że m i n muszą mieć tę samą parzystość. Dobierając odpowiednie współczynniki σ_{mn} można otrzymać dowolny ciągły i ograniczony rozkład ładunku na dysku z założoną z góry osobliwością pierwiastkową na brzegu dysku przy $r' \to 1$, charakterystyczną dla rozpatrywanego tu zagadnienia elektrostatyki [8] i zagadnienia dyfrakcji na dysku [2].

Przechodząc do współrzędnych kołowych $\bar{r}$, $\bar{\theta}$, relację (10), wyrażającą potencjał $\phi(r,\theta)$ w obszarze dysku (r<1) można zapisać następująco

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{\theta}\; \chi(\bar{\theta}-\pi/2) \int_{-(1-r_1^2)^{1/2}}^{(1-r_1^2)^{1/2}} \rho(r',\theta')\, dr_2 \tag{12}$$

gdzie

$$\begin{aligned} r_1 &= r\sin(\bar{\theta}-\theta) \\ r_2 &= \bar{r} + r\cos(\bar{\theta}-\theta) \\ r' &= (r_2^2+ r_1^2)^{1/2} \\ \theta' &= \bar{\theta} - \frac{1}{2} ln[(-r_2+jr_1)/(r_2-jr_1)] \end{aligned} \tag{13}$$

Z relacji (13) wynika, że można podstawić

$$\begin{aligned} r_1 &= \xi \sin\eta \\ r_2 &= \xi \cos\eta \end{aligned} \tag{14}$$

przy czym

$$\begin{aligned} \theta' &= \bar{\theta} - \eta \\ r' &= \xi \end{aligned} \tag{15}$$

Podstawienie (15), (14) i (13) do (12) daje

http://rcin.org.pl

$$\phi = \frac{\sigma_{mn}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \chi(\bar{\theta}-\pi/2) e^{jm\bar{\theta}} \, d\bar{\theta} \int_{-(1-r_1^2)^{1/2}}^{(1-r_1^2)^{1/2}} \frac{T_n(\xi)}{(1-\xi^2)^{1/2}} \, dr_2 \tag{16}$$

przy czym ξ i η należy rozumieć jako funkcje zmiennych niezależnych r_2 i θ.

Wprowadźmy oznaczenie $(-1<r_1<1)$

$$f(r_1) = \int_{-(1-r_1^2)^{1/2}}^{(1-r_1^2)^{1/2}} \frac{T_n[(r_1^2+r_2^2)^{1/2}]}{(1-r_1^2-r_2^2)^{1/2}} \, dr_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} c_l e^{-j\pi l r_1} \tag{17}$$

gdzie

$$c_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dr_1 e^{j\pi l r_1} \int_{-(1-r_1^2)^{1/2}}^{(1-r_1^2)^{1/2}} \frac{T_n[(r_1^2+r_2^2)^{1/2}]}{(1-r_1^2-r_2^2)^{1/2}} e^{-jm\eta} \, dr_2 \tag{18}$$

Jak łatwo zauważyć, obszar całkowania podwójnej całki (18) jest kołem jednostkowym na płaszczyźnie r_1, r_2, zatem wprowadzając zmienne (14) otrzymuje się

$$c_l = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\xi T_n(\xi)}{(1-\xi^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} e^{j\pi l \xi \sin\eta} \, e^{-jm\eta} \, d\eta \, d\xi \tag{19}$$

Dalsze przekształcenia [9] dają ostatecznie

$$c_l^{(m,n)} = (\pi/2)^2 (\mathrm{sign}\, m)^m \left[J_{\frac{|m|-n+1}{2}} \, J_{\frac{|m|+n-1}{2}} + J_{\frac{|m|-n-1}{2}} \, J_{\frac{|m|+n+1}{2}} \right] \tag{20}$$

gdzie argumentem funkcji Bessela J jest $(\pi l/2)$, $\mathrm{sign}(m)=+1$ dla $m \geq 0$ lub -1 dla $m<0$, górne wskaźniki przy c_l podkreślają zależność tych wyrazów od indeksów m i n. Zauważmy też, że indeksy funkcji Bessela w powyższym wyrażeniu mają postać $k+1/2$, gdzie k jest liczbą całkowitą, są to więc indeksy połówkowe.

Łatwo sprawdzić, że dla $l=0$ jest

$c_0^{(m,n)} = 0$, dla $m \neq 0$, przy n dowolnym,

$$c_0^{(0,n)} = \pi(-1)^{n/2}(1-n)^{-1} \quad , \text{ dla } m=0 \text{ (} n \text{ parzyste)} \tag{21}$$

http://rcin.org.pl

$$c_l^{(0,0)} = \pi \quad , \quad \text{dla} \quad m=0 \quad , \quad n=0$$

Dalsze własności współczynników c_l podane są w Dodatku C.

Podstawienie wyrażonej szeregiem (17) funkcji f do relacji (16) i wzięcie pod uwagę oznaczenia (13) dotyczącego r_1, a także wyrazenie $\chi(\bar{\theta})$ w postaci szeregu (A.3) daje

$$\phi = \frac{1}{2}\sigma_{kn}\chi_{m-k}c_l^{(k,n)}(signk)^k e^{jm\theta} J_{|m|}(\pi l r) \tag{22}$$

Relację tę, zgodnie z (C.3) zapisać w postaci

$$\Phi = \frac{1}{2}\sigma_{kn}\chi_{m-k}\left[\frac{a_p^{(k,n)}}{l^p}(-1)^l + \frac{b_p^{(k,n)}}{l^p}\right](signk)^k e^{jm\theta} J_{|m|}(\pi l r) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma_{on}\chi_o c_o^{(o,n)} \tag{23}$$

gdzie występujące w nawiasie kwadratowym wyrazy różnią się przede wszystkim tym, że pierwszy wyraz daje szereg przemienny ze względu na l (w (23) sumowanie zachodzi po wszystkich m, n, k i po l, z wyłączeniem $l=0$, który to wyraz uwzględniony jest w (23) oddzielnie, zgodnie z (21)).

3.2 Szczególny przypadek rozkładu ładunku na dysku

Rozważmy wielomian

$$T_n^{(m)}(r) = \sum_{k=|m|(2)}^{n} w_k r^k \quad , \quad |m| \le n \tag{24}$$

jaki powstaje w wyniku obcięcia wielomianu Czebyszewa $T_n(r)$ od dołu tak, że nie zawiera on wyrazów r^k przy $k<|m|$, gdzie m ma tę samą parzystość co n, a k zmienia się co 2 .

Jak pokazano w Dodatku C, ładunek elektryczny na dysku o rozkładzie wyrażającym się przez szereg

$$\rho(r',\theta') = \sigma_{mn}\frac{T_n^{(m)}(r')}{(1-r'^2)^{1/2}} e^{jm\theta'} \tag{25}$$

wywołuje pod dyskiem (to jest dla $r<1$) potencjał elektryczny Φ opisany przez szereg podobny do szeregu (23), ale nie zawierający

http://rcin.org.pl

wyrazów typu $(+1)^l b_p / l^p$, a mianowicie

$$\Phi = \frac{1}{2}\sigma_{kn}\chi_{m-k}\sum_{l\neq 0}\frac{\alpha_p^{(k,n)}}{l^p}(-1)^l(\mathrm{sign}k)^k e^{jm\theta} J_{|m|}(\pi l r) +$$

$$+\frac{1}{2}\sigma_{on}\chi_o c_o^{(o,n)} \tag{26}$$

gdzie α_p wyrażają się przez $c_l^{(m,n)}$ (Dodatek C). W szeregu tym można pominąć wyrazy z potęgami l mniejszymi od $|m|$, ponieważ [9]

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l^p} J_k(\pi l r) \equiv 0 \quad , \quad \text{dla} \quad 0 < p < k \tag{27}$$

4. Rozkład ładunku na dysku

4.1 Aproksymacja padającej fali potencjału

Padająca na dysk płaska fala potencjału (8) może być przedstawiona w postaci [9]

$$-\frac{\sin k_v}{k_v}\sum_m e^{jm\theta}\sum_l (-1)^l \frac{(k_v/\pi l)^{|m|+\nu}}{1-(k_v/\pi l)^2} J_{|m|}(\pi l r)\,(\mathrm{sign}m)^m \tag{28}$$

gdzie $\nu=0$ dla $m=0$ i $\nu=2$ dla $m=0$, sumowanie zachodzi po wszystkich l . Dopuszczając pewien błąd, zależne od l współczynniki można aproksymować przez (tylko dla $l\neq 0$, przypadek $l=0$ należy rozpatrzeć oddzielnie)

$$(-1)^l \frac{(k_v/\pi|l|)^{|m|+\nu}}{1-(k_v/\pi|l|)^2} \approx \sum_{p=m(2)}^{N} b_p^{(m)}\frac{(-1)^l}{|l|^p} \tag{29}$$

gdzie sumowanie po p zachodzi od m (lub od 2 dla m=0) do wybranej, dostatecznie dużej liczby N , przy czym p zmienia się co 2 .

Jak łatwo zauważyć, liczba N musi być znacznie większa od

http://rcin.org.pl

k_v/π . Współczynniki b_p można łatwo obliczyć przez porównanie lewej i prawej strony (29) dla $l=1, 2, 3, \ldots, N$, można w tym celu wykorzystać znaną formułę interpolacyjną Lagrange'a. Po obliczeniu tych N współczynników, przyjmiemy tak uzyskaną aproksymację dla wszystkich l w (29). Można to uczynić, gdyż dalsze wyrazy (przy $l>N$) dają ograniczony wkład do sumy (28), tym mniejszy, im większe jest N .

Uwzględniając (29) w (28) łatwo otrzymać funkcję (6), wyrażającą lewą stronę równania (9) w postaci analogicznej do (26)

$$-\frac{\sin k_v}{k_v}\left[1+\sum_m\sum_l\sum_{p=\nu+m(2)}^{N} b_p^{(m)}\frac{(-1)^l}{|l|^p}e^{jm\theta}J_{|m|}(\pi|l|r)(\mathrm{sign}\,m)^m\right] \tag{30}$$

4.2 Rozkład ładunku na tarczy, pojemność tarczy

Z porównania relacji (30) i (26) wynika wniosek, że
i) rozkład ładunku na dysku można wyrazić w postaci (25),
ii) współczynniki rozkładu σ_{mn} można obliczyć przez porównanie wyrazów szeregów (30) i (26) dla każdego m i p oddzielnie,
iii) przy porównywaniu wyrazów typu l^p należy w (26) pominąć te, w których $p<|m|$, ze względu na to, że dają one zerowy wkład do sumy (patrz relacja (27)). Wówczas liczba niewiadomych σ_{mn} i liczba równań do ich wyznaczenia są równe.

Tym samym zagadnienie poszukiwania rozkładu ładunku na uziemionym dysku kołowym o promieniu jednostkowym zostało rozwiązane. Uogólnienie na dowolny promień dysku R uzyskuje się przez zastąpienie k_v przez k_vR w relacji (30).

Znając rozwiązanie na σ_{mn} można łatwo obliczyć całkowity ładunek Q indukowany na dysku, całkując (25) po całym obszarze dysku. Otrzymuje się

$$Q = 2\pi\frac{\sigma_{0n}}{1-n^2}(-1)^{n/2} \tag{31}$$

Z drugiej strony, porównanie (28) i (20) dla $m=0$ przy uwzględnieniu (21) prowadzi do wniosku, że

$$Q = (4/\chi_0)\frac{\sin k_v}{k_v} \tag{32}$$

http://rcin.org.pl

a stąd wynika, że pojemność dysku o promieniu R wynosi [14]

$$C = 4R/\chi_0 \tag{33}$$

(dla dysku eliptycznego χ_0 określone jest zgodnie z Dodatkiem B i wzorem (A.3), przy czym promień R jest promieniem zastępczego dysku kołowego po wprowadzeniu transformacji (B.1)).

5. Charakterystyka kierunkowa rozpraszania AFP

5.1 Dalekie pole rozproszone na dysku

Asymptotyczne pole rozproszone, daleko od dysku określa relacja (11). Wyraża ona zależność amplitudy fali potencjału sprzężonego z rozproszoną AFP od kierunku propagacji tej fali. Charakterystykę kierunkową rozpraszania fali na dysku otrzymamy jeśli uwzględnimy, że akustyczna fala powierzchniowa o jednostkowej gęstości przenoszonej przez nią mocy sprzężona jest z potencjałem elektrycznym o amplitudzie $\Phi(\theta)$ zależnej od kierunku propagacji θ. Jest to rezultat anizotropii podłoża piezoelektrycznego.

Powyżej przyjęto, że fala padająca, propagująca się w kierunku z $(\theta=\pi/2)$ związana jest z potencjałem Φ_z. Uwzględniając to, charakterystyka kierunkowa rozpraszania może być określona za pomocą relacji

$$S(\theta) = \frac{\Phi_z}{\Phi(\theta)} \iint\limits_S g^A \rho \, d^2r' \tag{34}$$

przy czym $SS^*/2$ określa gęstość mocy fali rozproszonej w kierunku θ, zależność g^A od θ podana jest w Dodatku B (warto zauważyć, że g^A jest odwrotnie proporcjonalne do $\sqrt{r}$, gdzie r jest odległością od środka dysku do punktu, w którym obliczane jest pole rozproszone), ρ jest rozkładem ładunku na dysku, zajmującym obszar S .

Podwójną całkę po powierzchni dysku S w relacji (34) można obliczyć dla dysku kołowego o jednostkowym promieniu R=1, na drodze podobnej do zastosowanej uprzednio w Rozdziale 3. Uwzględniając, że $g^A(\theta;r',\theta')$ jest zależne od r' , θ' jak

http://rcin.org.pl

(Dodatek A)

$$J_m(r'k_\theta)\, e^{-jm\theta'} \quad (35)$$

widoczne jest, że całkowanie po θ' w (34) jest trywialne, natomiast całka po r' ma postać

$$\int_0^1 \frac{r' T_n^{(m)}(r')}{(1-r'^2)^{1/2}} J_m(r'k_\theta) dr' \quad (36)$$

którą oblicza się podobnie jak w Rozdziale 3. Ostatecznie otrzymuje się $S(\theta)$ w postaci szeregu Fouriera o współczynnikach zależnych od funkcji Bessela o indeksach połówkowych, podobnie jak w wyrażeniach w Dodatku C.

W przypadku dysku eliptycznego wygodnie jest sprowadzić zagadnienie do dysku kołowego, przez zastosowanie przekształcenia współrzędnych (B.3) dalsze obliczenia charakterystyki prowadzić w tym samym układzie. Charakterystyka kierunkowa w układzie rzeczywistym określona zostanie przez odwrotne przekształcenie, uzależniające kierunek obserwacji pola rozproszonego w rzeczywistym układzie od kierunku w układzie przekształconym. Zauważmy, że przekształcenie współrzędnych wprowadza również zmianę skali odległości, zależną od θ, należy to uwzględnić w relacji (34) w wyrażeniu określającym g^{A} jako odwrotnie proporcjonalne do $\sqrt{r}$.

6. Podsumowanie

Przedstawiona praca zawiera nowe podejście do teorii rozpraszania fali na dysku, uwzględniająca anizotropię podłoża. Autor wyraża przekonanie, że można ją rozszerzyć na podobne podobne zagadnienie rozpraszania fal elektromagnetycznych, a także na przypadek dysku "ciężkiego" i, być może, sprężystego w odpowiednim zagadnieniu rozpraszania AFP.

==== praca została wykonana w ramach CPBP 02.02 ====

http://rcin.org.pl

Dodatek A

Wprowadzając nowe zmienne

$$
\begin{aligned}
k_x &= k\cos\theta \\
k_y &= k\sin\theta \\
x &= r\cos\vartheta \\
y &= r\sin\vartheta
\end{aligned}
\qquad (A.1)
$$

gdzie k, r, θ i ϑ są współrzędnymi kołowymi, a k_x, k_y, x, y są współrzędnymi kartezjańskimi, odwrotna transformata Fouriera funkcji $G(\underline{k})$ daje się wyrazić następująco

$$
\begin{aligned}
g(r,\vartheta) = {} & (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} dk \int_0^{2\pi} e^{-jk\cos(\theta-\vartheta)} \chi(\theta)\, d\theta \; - \\
& - (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} dk \int_0^{2\pi} \chi(\theta) \frac{k_o^2(\theta)-k_v^2(\theta)}{k^2-k_v^2(\theta)}\, d\theta
\end{aligned}
\qquad (A.2)
$$

gdzie

$$\varepsilon_e(\theta) = \varepsilon(\theta+\pi)$$

$$\chi(\theta) = 1/\varepsilon_e(\theta) = \varepsilon(\theta+\pi) = \sum_n \chi_n e^{jn\theta} \qquad (A.3)$$

$$k_o(\theta) = k_o(\theta+\pi)$$

$$k_v(\theta) = k_v(\theta+\pi)$$

Pierwszy składnik funkcji g ma postać [10]

$$g^E(r,\vartheta) = \frac{1}{2\pi r}\, \chi(\vartheta+\pi/2) \qquad (A.4)$$

zaś drugi można przedstawić w następującej postaci

$$g^R(r,\vartheta) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\pi} \frac{\Delta(\theta+\vartheta+\pi/2)}{k^2-k_v^2(\theta+\vartheta+\pi/2)}\, e^{jrk\sin\theta}\, d\theta \qquad (A.5)$$

Korzystając z lematu Jordana, całkowanie po k można wykonać ściśle, co daje

$$g^R(r,\vartheta) = j/(4\pi) \int_{\vartheta-\pi/2}^{\vartheta+\pi/2} [\Delta(\theta')/k_v(\theta')] e^{-jrk_v(\theta')\cos(\theta'-\vartheta)} \qquad (A.6)$$

http://rcin.org.pl

gdzie $\theta'=\theta+\vartheta-\pi/2$ oraz

$$\Delta/k_v = (k_o+k_v)(k_o-k_v)/(k_v\varepsilon_e) \approx 2(k_o-k_v)/\varepsilon_e = 2\chi\Delta k \qquad (A.7)$$

Funkcja $g=g^c+g^R$ wzięta od argumentów $(\bar{r}, \bar{\theta})$ opisujących wektor $(\underline{r}-\underline{r}'$ we współrzędnych kołowych jest elektryczną funkcją Greena półprzestrzeni piezoelektrycznej, wyrażającą potencjał elektryczny w punkcie $\underline{r}$ wywołany przez punktowy ładunek elektryczny położony w punkcie $\underline{r}'$ ($\underline{r}$ i $\underline{r}'$ na powierzchni podłoża).

Dla oszacowania relacji między g^c a g^R zauważmy, że $\|g^c\|>\|g^R\|$ dla $\bar{r}k_v<(\Delta k/k_v)^{-1}$, co dla większości podłozy piezoelektrycznych pozwala zaniedbać składnik g^R dla odległości $\bar{r}$ mniejszych od około 10λ, gdzie λ jest długością rozpatrywanej padającej fali powierzchniowej, rozpraszanej na dysku. Wynika stąd wniosek, że przy obliczaniu potencjału pod dyskiem o promieniu nie przekraczającym około 10 długości rozpraszanej fali, można składnik g^R zaniedbać. Uzasadnia to przybliżenie (9) w tekście pracy.

Asymptotyczną postać funkcji Greena (pokrywającą się z asymptotyczną postacią g^R) otrzymuje się przy pomocy metody stacjonarnej fazy, zastosowanej do (A.6) przy $r\to\infty$ [11]. Uwzględniając, że

$$\bar{r} = r-r'\cos(\theta'-\theta) \qquad (A.8)$$

gdzie $r\to\infty$ jest odległością od środka dysku (pokrywającym się z początkiem układu współrzędnych) do punktu obserwacji (współrzędną kątową tego punktu jest θ) otrzymuje się

$$g^R(\theta;r',\theta')\approx j/(2\pi)\int_{\theta-\pi/2}^{\theta+\pi/2}\chi(\theta')\Delta k(\theta')e^{-j[r-r'\cos(\theta'-\theta)]k_v(\theta')\cos(\theta-\vartheta)}d\theta' \qquad (A.9)$$

Oznaczmy punkt stacjonarnej fazy przez θ_θ. Jest to kąt θ', dla którego prędkość grupowa AFP pokrywa się z kierunkiem obserwacji θ (inaczej, jest to kąt określający punkt styczności krzywej $k_v(\theta')$ i prostej prostopadłej do linii łączącej środek dysku z punktem obserwacji [12]). Metoda stacjonarnej fazy daje w wyniku

http://rcin.org.pl

$$\vec{k}_{\vartheta} = \vec{k}_{v}(\theta_{\vartheta})$$

$$g^{A}(\theta;r',\theta') = r^{-1/2}\, C_{\vartheta}\, exp[\, jr'k_{\vartheta}cos(\theta'-\theta_{\vartheta})]\, e^{-j\vec{r}\vec{k}_{\vartheta}} \tag{A.10}$$

$$C_{\vartheta} = \left[\frac{j}{2\pi \frac{d^2}{d\theta'^2}[k_{v}(\theta')cos(\theta'-\vartheta)]\Big|_{\theta'=\theta_{\vartheta}}} \right]^{1/2} \chi(\theta_{\vartheta})\Delta k_{v}(\theta_{\vartheta})$$

(przy założeniu, że pochodna po θ' w mianowniku C_{ϑ} nie zeruje się, co zwykle zachodzi [13]).

Dalsze przekształcenia dają (z pominięciem $exp(\vec{k}_{\vartheta}\vec{r})$)

$$g^{A}(\theta;r',\theta') = r^{-1/2}\, C_{\vartheta} \sum_{m} J_{m}(r'k_{\vartheta})\, e^{-jm\theta'}\, e^{jm(\pi/2+\vartheta)} \tag{A.11}$$

Dodatek B

Poniżej, podobnie jak w tekście pracy, założymy że padająca na dysk fala płaska rozchodzi się w kierunku osi z. Załóżmy, że dysk jest eliptyczny, o osiach obróconych względem osi x, z o kąt θ_o , α jest stosunkiem długości osi dysku.

Wprowadźmy nowe współrzędne, skierowane wzdłuż osi dysku, a następnie przeskalujmy je tak, aby eliptyczny dysk przeprowadzić w koło

$$\begin{aligned} \alpha x' &= xcos\theta_o + zsin\theta_o \\ z'/\alpha &= -xsin\theta_o + zcos\theta_o \end{aligned} \tag{B.1}$$

Następnie wprowadźmy współrzędne ξ , ζ obrócone względem osi x' , z' o kąt θ_1 dobrany tak, żeby kierunek osi ζ pokrywał się z kierunkiem osi z (wówczas fala padająca wyrażać się będzie jako fala płaska propagująca się wzdłuż osi ζ). Warunek ten zapisuje się w postaci

$$tg\theta_1 = -\alpha^2 tg\theta_o \tag{B.2}$$

Ostatecznie otrzymuje się

http://rcin.org.pl

$$z = (\zeta/\alpha)(1+\alpha^4 tg^2\theta_o)^{1/2}\cos\theta_o$$

$$x = [\xi - (\zeta/\alpha)(1-\alpha^4)\sin\theta_o]/\cos\theta_o \qquad (B.3)$$

Niech w nowym układzie współrzędnych propaguje się fala płaska o liczbie falowej k' w kierunku osi ξ' obróconej o kąt θ' względem osi ξ na płaszczyźnie ξ, ζ. Fala taka odpowiada w układzie współrzędnych x, z fali płaskiej propagującej się w kierunku x', obróconym o kąt θ względem osi x, przy czym

$$tg\theta = \frac{(1-\alpha^4)tg\theta_o + (1+tg^2\theta_o)\alpha^2 tg\theta'}{1+\alpha^4 tg^2\theta_o} \qquad (B.4)$$

Między długością ξ a długością l zachodzi relacja

$$\xi' = s \cdot x'$$

$$s = \frac{(1+\alpha^4 tg^2\theta_o)}{\alpha^2(1+tg^2\theta_o)\cos^2\theta'}(1+tg^2\theta) \qquad (B.5)$$

tak, że $k'\xi' = kx' = sk'x'$ więc $k=sk'$, gdzie k jest liczbą falową fali płaskiej opisanej w układzie współrzędnych (x, y).

Dla danej fali płaskiej, propagującej się w kierunku x' obróconym o kąt θ względem osi x efektywna przenikalność powierzchniowa podłoża wyraża się przez relację (3) w układzie współrzędnych x, z. W układzie współrzędnych ξ, ζ, dla tej samej fali, propagującej się w kierunku ξ', obróconym o kąt θ' względem osi ξ będzie

$$\frac{\Phi}{\Delta D_\perp} = \frac{1}{\varepsilon_e(\theta)sk'}\,\frac{(sk')^2-k_o^2}{(sk')^2-k_v^2} \qquad (B.6)$$

Relację powyższą można zapisać w funkcji θ' podobnie jak relację (3) w funkcji θ. Przechodząc więc do układu współrzędnych ξ, ζ należy zmienić efektywną przenikalność powierzchniową zgodnie z (B.6). Odpowiada to wprowadzeniu do dalszych rozważań pewnej sztucznej anizotropii podłoża, ale zamiast dysku eliptycznego, w dalszych rozważaniach będziemy mieć do czynienia z dyskiem kołowym.

Rozkład ładunku na takim zastępczym dysku kołowym można następnie przeliczyć do układu oryginalnego, jednakże wówczas

http://rcin.org.pl

spotkamy pewne trudności z obliczeniem pola rozproszonego, wymagającym obliczenia pewnej całki po powierzchni dysku. Wygodniej będzie poprowadzić obliczenia do końca w układzie współrzędnych ξ , ζ , a dopiero charakterystykę kierunkową rozpraszania przeliczyć do układu x , z . Wymaga to przeliczenia wszystkich parametrów funkckji Greena w ujęciu relacji (3) do nowego układu współrzędnych.

Dodatek C

Obliczenie całki (19) oparte jest na relacji [9] ($m\geq 0$)

$$\int_0^1 \frac{T_n(x)}{(1-x^2)^{1/2}} J_m(\alpha x)\, dx = \frac{\pi}{2} J_{\frac{m+n}{2}}(\alpha/2)\, J_{\frac{m-n}{2}}(\alpha/2) \qquad (C.0)$$

Zgodnie ze znanymi wzorami, wyrażającymi funkcje Bessela o rzędach połówkowych przez funkcje trygonometryczne

$$J_{k+1/2}(z) \sim z^{-1/2} \left[\sum \frac{a_p}{z^p} \cos(z) + \sum \frac{b_p}{z^p} \sin(z) \right] \qquad (C.1)$$

gdzie sumowanie zachodzi w skończonym, zależnym od k zakresie p , wyrazenie (21) można zapisać w następującej postaci

$$c_l = (\pi/2)^2 (\mathrm{sign}\, m)^m \left[\sum \frac{{}^1a_p^{(m,n)}}{(\pi l/2)^p} \cos^2(\pi l/2) + \sum \frac{{}^2a_p^{(m,n)}}{(\pi l/2)^p} \sin^2(\pi l/2) + \right.$$

$$\left. + \sum \frac{{}^3a_p^{(m,n)}}{(\pi l/2)^p} \cos(\pi l/2) \sin(\pi l/2) \right] \qquad (C.2)$$

co łatwo dalej przekształcić do (sumowanie po p co 2)

$$c_l = (\pi/2)^2 (\mathrm{sign}\, m)^m \left[\sum_{p=P_1(2)}^{P_2} \frac{a_p^{(m,n)}}{(\pi l/2)^p} (-1)^l + \sum_{p=P_3(2)}^{P_4} \frac{b_p^{(m,n)}}{(\pi l/2)^p} \right] \qquad (C.3)$$

Wartości współczynników a_p , b_p łatwo jest wyliczyć numerycznie. Okazuje się też, że zachodzi następująca

Własniść I

a) dla $m=0$ lub dla $m=1$ drugi składnik w nawiasie po prawej

http://rcin.org.pl

stronie (C.3) nie występuje, tj, $b_p^{(0,n)} = b_p^{(1,n)} \equiv 0$,

b) sumowanie zachodzi po p co 2 w granicach

$p_1 = m$

$p_2 = n$

$p_3 = 2$ dla parzystych m , lub $= 1$ dla nieparzystych m ,

$b_c^{(m,n)} \equiv 0$ dla parzystych m ;

$p_4 = m$

c) tak, że liczba wyrazów w drugiej sumie, zawierających b_p wynosi $m/2$, podczas gdy liczba składników pierwszej sumy, zawierającej współczynniki a_p wynosi $|n|/2$, lub 1 dla $m=n=0$.

Rozważmy wielomian $T_n^{(m)}$ wprowadzony w (26). Można go zapisać jako kombinację wielomianów Czebyszewa rzędu $k \le n$

$$T_n^{(m)} = T_n - \sum_{k(2)}^{.m.} \beta_k T_k \tag{C.5}$$

gdzie sumowanie zachodzi co 2 . Okazuje się, co pozostawimy bez dowodu, że zachodzi następujące

Twierdzenie I

$$b_p^{(m,n)} - \sum_k^{.m.} \beta_k b_p^{(m,k)} \equiv 0 \tag{C.5}$$

skąd wynika wniosek, że zastępując wielomian $T_n(r')$ w wyrażeniu (11) przez $T_n^{(m)}$, otrzymuje się wyrażenie na potencjał analogiczne do (23) ale nie zawierające członów typu $(+1)^l/l^p$.

Oznaczmy przez

$$\alpha_p^{(m,n)} = a_p^{(m,n)} - \sum_k \beta_k a_p^{(m,k)} \tag{C.6}$$

wówczas, przy rozkładzie ładunku na dysku w postaci (24) otrzymamy wyrażenie na potencjał pod dyskiem w postaci (26). Tabela I przedstawia wyniki obliczeń liczb $\alpha_p^{(m,n)}(\pi/2)^{p-1}$ (są to liczby całkowite) dla kilku wartości m i n .

Podobne rozważania można przeprowadzić przy obliczaniu całki (36), jednak wówczas argumentem funkcji trygonometrycznych w wyrażeniu analogicznym (C.2) jest $(k_v/2)$, a nie $(\pi/2)$, w związku z czym w relacji analogicznej (C.3) wystąpi suma składników typu (sumowanie po p)

http://rcin.org.pl

$$k_v^{-P}\cos k_v \quad , \quad k_v^{-P}\sin k_v \quad , \quad k_v^{-P}$$

przy czym ostatni składnik jest dokładnie tym samym składnikiem, który wystąpił poprzednio w (C.3) przy $(+1)^l$, co łatwo sprawdzić podstawiając πl w miejsce k_v. Podobnie pierwszy składnik jest tym samym składnikiem, który wystąpił w (C.3).

Biorąc pod uwagę, że

$$J_{\frac{|m|-n+1}{2}}(z)\, J_{\frac{|m|+n-1}{2}}(z) \to z^{-|m|} \quad \text{dla } z \to 0 \qquad \text{(C.7)}$$

widoczne jest, że odpowiednie współczynniki związane z funkcjami Bessela w (C.3) można zapisać w postaci (dla m parzystych)

$$a_0\cos z + b_1\sin z/z + \frac{a_2\cos z + b_3\sin z/z + \dfrac{a_4\cos z + b_5\sin z/z + ..}{z^2}}{z^2} \qquad \text{(C.8)}$$

Znając a_p współczyniki b_p można obliczyć (za wyjątkiem b_1) z warunku, że wyrażenie (C.8) spełnia (C.7) przy $z \to 0$. Podobnie można postąpić w przypadku m nieparzystych. Użycie powyższych własności znacznie przyśpiesza obliczenia pola dalekiego.

Literatura

http://rcin.org.pl

TABELA wspolczynnikow "alfa" : kolumny - kolejne p , wiersze - kolejne n przy m jak opisano

	p=0	p=2	p=4	...				
m=0	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	0.	2.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	0.	8.	-72.	0.	0.	0.	0.	0.
	0.	18.	-912.	7200.	0.	0.	0.	0.
	0.	32.	-5280.	192000.	-1411200.	0.	0.	0.
	0.	50.	-20400.	2079840.	-64915200.	457228800.	0.	0.
	0.	72.	-61320.	13870080.	-1132911360.	32310835200.	-221298739200.	0.
	0.	98.	-155232.	67596480.	-11574178560.	829199669760.	-22277406412800.	149597947699200.
	p=1	p=3	p=5	...				
m=1	-1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	-1.	12.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	-1.	84.	-720.	0.	0.	0.	0.	0.
	-1.	312.	-13200.	100800.	0.	0.	0.	0.
	-1.	840.	-104880.	3528000.	-25401600.	0.	0.	0.
	-1.	1860.	-535920.	48545280.	-1447891200.	10059033600.	0.	0.
	-1.	3612.	-2066400.	401587200.	-30649570560.	848311833600.	-5753767219200.	0.
	-1.	6384.	-6541920.	2381581440.	-373597297920.	25596887500800.	-673190764646400.	4487938430976000.
	p=0	p=2	p=4					
m=2	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	0.	-6.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	0.	-8.	120.	0.	0.	0.	0.	0.
	0.	-22.	1200.	-10080.	0.	0.	0.	0.
	0.	-32.	6240.	-241920.	1814400.	0.	0.	0.
	0.	-54.	22800.	-2449440.	78624000.	-558835200.	0.	0.
	0.	-72.	66360.	-15644160.	1313383680.	-38000793600.	261534873600.	0.
	0.	-102.	164640.	-74088000.	13000055040.	-946107993600.	25630417612800.	-172613016576000.
	p=1	p=3	p=5					
m=3	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	4.	-60.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	-4.	-100.	1680.	0.	0.	0.	0.	0.
	8.	-472.	21840.	-181440.	0.	0.	0.	0.
	-8.	-936.	146160.	-5382720.	39916800.	0.	0.	0.
	12.	-2196.	677040.	-66286080.	2062368000.	-14529715200.	0.	0.
	-12.	-3852.	2456160.	-508999680.	40542163200.	-1147847500800.	7846046208000.	0.
	16.	-6960.	7469280.	-2866872960.	467705145600.	-32866215782400.	876141826560000.	-5868842563584000.

Literatura

[1] J.J. Bowman, T.B.A. Senior, P.L.E. Uslenghi, Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes, Nord-Holland, Amsterdam 1969

[2] W.H. Eggimann, Higher-Order Evaluation of Electromagnetic Diffraction by Circular Disks, IRE Trans., MTT-9,5(1961),408-418

[3] F.J. Sabina, General formulas for low-frequency acoustic scattering by soft body or disk, JASA,81,6(1987),1677-1682

[4] K.A. Ingebrigtsen, Surface waves in piezoelectrics, J.Appl.Phys.,40,7(1969),2681-2686

[5] E. Danicki, Influence of bulk wave generation on SAW filter performance, J.Tech.Phys.,21,3(1980),405-420

[6] R.F. Milsom, N.H.C. Reilly, M. Redwood, Analysis of Generation and Detection of Surface and Bulk Acoustic Waves by Interdigital Transducers, IEEE Trans.,SU-24,3(1977),147-166

[7] E. Danicki, Propagation of Transverse Surface Acoustic Waves in Rotated Y-Cut Quartz Substrates Under Heavy Periodic Metal Electrodes, IEEE Trans.,SU-30,5(1983),304-312

[8] F. Oberhettinger, W. Magnus, Zastosowania funkcji eliptycznych w fizyce i technice, PWN, Warszawa 1963

[9] A.P. Prudnikov, J.A. Mariczіev, Integrały i Riady. Dopołnitielnyje Głavy, Nauka, Moskwa 1986

[10] E. Danicki, Green's Function For Anisotropic Dielectric Halfspace, IEEE Trans.,UFFC-35,5(1988),643

[11] L.B. Felsen, N. Marcuvitz, Radiation and scattering of waves, Prentice Hall, Englewood Cliff 1973

[12] E. Dieulesaint, D. Royer, Ondes Elastiques Dans Les Solides, Masson, Paris 1974

[13] A.A. Maradudin, Surface Acoustic Waves on Real Surfaces, Proc. ISSWAS'86,v.3,22-62, Novosibirsk 1986

[14] E. Danicki, Teoria sondy Williamsona piezoelektrycznej AFP, Mater. OSA'88,251-254, Warszawa 1988

http://rcin.org.pl

E. Danicki
ZTFE, IPPT PAN
Warszawa

Nowe podejscie do teorii elektromagnetycznych falowodow mikropaskowych

Często stosowana w praktycznych obliczeniach teoria falowodów mikrofalowych oparta jest na metodzie Galerkina w dziedzinie widma. Poniżej przedstawiono teorię analityczną, wcześniej zastosowaną przez autora w rozprawie habilitacyjnej do falowodów akustycznych fal powierzchniowych, opartą o pewne własności szeregów Fouriera ze współczynnikami wyrazonymi przez funkcje Legendre'a. Teoria dotyczy struktur periodycznych, co nie stanowi praktycznie istotnego ograniczenia. Przedstawiono zarys teorii, wyjaśniający sposób konstrukcji rozwiązań w dowolnych przypadkach. Teoria moze być łatwo rozszerzona na problemy rospraszania fal.

1. Sformułowanie zagadnienia

Niech w próżni, na umownej płaszczyźnie $y=0$ położony jest nieskończony periodyczny (w kierunku x) układ elektrod paskowych (wzdłuż osi z) o liczbie falowej K. Zgodnie z twierdzeniem Floqueta rozwiązanie na pole elektromagnetyczne ma postać szeregu

$$A_n^{\pm}\, e^{j\omega t}\, e^{-jr_n x}\, e^{-js_n^{\pm} y}\, e^{-jkz} \tag{1.1}$$

$$r_n = r + nK \quad , \qquad k_o = \omega^2 \mu_o \varepsilon_o \tag{1.2}$$

$$s_n^{+} = -s_n^{-} = (k_o^2 - k^2 - r_n^2)^{1/2} \tag{1.3}$$

gdzie indeksy + i - oznaczają rozwiązania dla górnej i dolnej półprzestrzeni, spełniające tam warunek wypromieniowania.

Wprowadzając potencjały Hertza $\hat{z}\Phi$ i $\hat{z}\Psi$, poszczególne składowe pola wyrażają się przez [2]

http://rcin.org.pl

$E_x = -\omega\mu_o s_n \Phi_n - kr_n \Psi_n$, $H_x = -kr_n \Phi_n + \omega\varepsilon_o s_n \Psi_n$ (2.1),(2.3)

$E_z = (k_o^2 - k^2)\Psi_n$, $H_z = (k_o^2 - k^2)\Phi_n$ (2.2),(2.4)

Na powierzchni y=0 mają one spełniać warunki brzegowe

$E_x^+ = E_x^- = E_x$, $E_x = 0$ na elektrodach (3.1)

$E_z^+ = E_z^- = E_z$, $E_z = 0$ na elektrodach (3.2)

$H_x^+ - H_x^- = 0$ poza elektrodami (3.3)

$H_z^+ - H_z^- = 0$ poza elektrodami (3.4)

2. Konstrukcja rozwiązania

Znane są relacje [1]

$$\sum_{n=-\infty} e^{jnKx} \sum_{m=M_1}^{M_2} \alpha_m P^{\mu}_{n-m} = 0 \qquad \text{poza obszarem elektrod} \quad (4.1)$$

$$\sum_{n=-\infty} e^{jnKx} \sum_{m=M_1}^{M_2} \beta_m S_{n-m} P^{\mu}_{n-m} = 0 \qquad \text{w obszarze elektrod} \quad (4.1)$$

jeśli odpowiednio wybrany jest argument funkcji Legendre'a P oraz $\mu \le 0$, $S_k = 1$ dla $k \ge 0$ i $=-1$ dla $k<0$. Współczynniki α i β mogą być dowolne, co pozwala wyrazić w postaci (4.1) i (4.2) dowolne funkcje, o osobliwości na krawędziach typu $(1-\zeta)^{-1/2-\mu}$ przy $\zeta \to 1$.

Uwzględniając (3.2) a następnie (3.1) można zapisać

$$\Psi_n^+ = \Psi_n^- = \Psi = \psi_m^{\mu} S_{n-m} P^{\mu}_{n-m} \quad (5.1)$$

$$\Phi_n^+ = -\Phi_n^- = \Phi_n = \phi_m^{\nu} P^{\nu}_{n-m} \quad (5.2)$$

przy czym (5.2) zapewnia spełnienie (3.4)

Relacje (3.1), (3.3) wymagają spełnienia

$$E_x = \quad -\omega\mu_o s_n \Phi_n - kr_n \Psi_n = e_m^{\mu} S_{n-m} P^{\mu}_{n-m} \quad (6.1)$$

$$\tfrac{1}{2}[H_x] = \quad -kr_n \Phi_n - \omega\varepsilon_o s_n \Psi_n = h_m^{\nu} P_{n-m} \quad (6.2)$$

dla kazdego n (konwencja sumowania dotyczy μ, ν, m). Obliczone stąd Φ oraz Ψ winny mieć postać (5), a więc

http://rcin.org.pl

$$\phi^{\nu}_{m} P^{\nu}_{n-m} = \frac{e^{\mu}_{m}\omega\varepsilon_{o} s_{n} S_{n-m} P^{\mu}_{n-m} + h^{\nu}_{m} k r_{n} P^{\nu}_{n-m}}{-\omega^{2}\varepsilon_{o}\mu_{o} s^{2}_{n} - k^{2} r^{2}_{n}} \tag{7.1}$$

$$\psi^{\mu}_{m} S_{n-m} P^{\mu}_{n-m} = \frac{e^{\mu}_{m} k r_{n} S_{n-m} P^{\mu}_{n-m} - h^{\nu}_{m}\omega\mu_{o} s_{n} P^{\nu}_{n-m}}{-\omega^{2}\varepsilon_{o}\mu_{o} s^{2}_{n} - k^{2} r^{2}_{n}} \tag{7.2}$$

Istotą metody jest to [1], że żądamy, aby powyższe równości spełnione były tożsamościowo dla $n<N_1<0$ i dla $n>N_2>0$, to jest dla $|n|\to\infty$, gdzie $s_n\to|n|K$, co czyni związki (7) prostszymi. W pozostałym zakresie n, a więc w N_2-N_1+1 punktach, relacje (7) spełnione mają być poprzez odpowiedni dobór współczynników ϕ, ψ, e i h, których jest M_2-M_1+1.

Rozpatrzmy obszar $n<N_1$ lub $n>N_2$.

Uwzględniając przyjęte przybliżenie $s_n \approx |n|K$ i tożsamość

$$nP^{(-1)}_{n-m}(\xi) = (m-1/2)P^{(-1)}_{n-m}(\xi) + \frac{P^{(0)}_{n-(m+1)}(\xi) - P^{(0)}_{n-(m-1)}(\xi)}{2(1-\xi^{2})^{1/2}} \tag{8}$$

oraz przyjmując niezbędną tu liczbę współczynników, to jest ograniczając reprezentację (6) jedynie do

$$\phi^{(-1)}_{m} = \phi_{m} \quad , \quad \psi^{(-1)}_{m} = \psi_{m} \tag{9}$$

z warunków (7), wziętych jako tożsamości zachodzące dla każdego n z rozpatrywanego zakresu otrzymuje się

$$e^{(-1)}_{m} = (m-1/2)(j\omega\mu_{o}\phi_{m} - k\psi_{m}) \tag{10.1}$$

$$h^{(-1)}_{m} = (m-1/2)(-k\phi_{m} - j\omega\varepsilon_{o}\psi_{m}) \tag{10.2}$$

$$e^{(0)}_{m} = [j\omega\mu_{o}(\phi_{m-1}-\phi_{m+1}) - k(\psi_{m-1}-\psi_{m+1})]/[2(1-\xi^{2})^{1/2}] \tag{10.3}$$

$$h^{(0)}_{m} = [-k(\phi_{m-1}-\phi_{m+1}) - j\omega\varepsilon_{o}(\psi_{m-1}-\psi_{m+1})]/[2(1-\xi^{2})^{1/2}] \tag{10.4}$$

tak, że w reprezentacji (6) i w relacjach (7) wystąpią wyłącznie niewiadome ϕ i ψ.

Rozpatrzmy teraz relacje (7) dla $n\in[N_1,N_2]$.

Nieznane współczynniki ϕ i ψ należy tak wybrać, aby relacje (7) były spełnione, wymaga to przyjęcia $M_2-M_1+1=N_2-N_1+1$, co

http://rcin.org.pl

umożliwia konstrukcję odpowiedniej liczby równań do wyznaczenia określonej liczby niewiadomych.

3. Przykład

Niech K=1, $k_o=1$, a także przyjmijmy, że szerokość elektrod równa jest szerokości przerwy między nimi (wówczas $P^0_{-1}=P^{-1}_0=P^0_0=1$, $P^0_1=0$, $\zeta=0$). Dla uproszczenia przyjmijmy też, że fala propaguje się wzdłuż elektrod (r=0) oraz że $a_n=|n|$ już dla $n\neq0$. Do dyspozycji mamy wówczas tylko po jednym równaniu (7), dla n=0, do wyznaczenia współczynników ϕ i ψ, wystarczy więc przyjąć reprezentację (6) z tylko dwoma niewiadomymi: ϕ_o i ψ_o.

Relacje (10) dają

$$e^{(-1)}_1 = -(j\omega\mu_o\phi_o - k\psi)/2 \qquad e^{(0)}_{-1} = (j\omega\mu_o\phi_o + k\psi_o)/2 = -e^{(0)}_1$$

$$h^{(-1)}_1 = (k\phi_o + j\omega\varepsilon_o\psi_o)/2 \qquad h^{(0)}_{-1} = (k\phi_o + j\omega\varepsilon_o\psi_o)/2 = -h^{(0)}_1$$

co podstawione do (7) wziętej dla n=0 daje

$$\begin{bmatrix} j[(k^2-1)^{1/2}-1] & k\omega\varepsilon_o \\ -k\omega\mu_o & -j[(k^2-1)^{1/2}+1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_o \\ \psi_o \end{bmatrix} = 0$$

skąd łatwo otrzymać relację dyspersyjną k=1. W tym elementarnym przypadku i przy założonych uproszczeniach fala ma postać fali TEM

Literatura

[1] E. Danicki, Akustyczne fale powierzchniowe, propagacja, generacja i zastosowania, Biul WAT, dodatek, 11, 1976

także

Theory of surface acoustic waves slant propagation in periodic system of electrodes, J.Tech.Phys., 19,1(1979),69-77

[2] E.I. Collin, Prowadzenie fal elektromagnetycznych, PWN 1976

http://rcin.org.pl