

7.73 — ośrodki niejednorodne, kompozyty.
Ośrodki stochastyczne,
wieloskładnikowe i wielofazowe

Grzegorz Musiałak

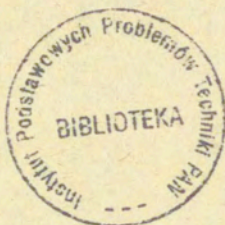
DYSPERSJA IMPULSÓW
W OŚRODKU POROWATYM
WYPEŁNIONYM CIECZĄ

7/1990

P. 269



Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 października 1989 r.



56821



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1 Ark.druk. 1,25

Oddano do drukarni w lutym 1990 r.

Nr zamówienia 66/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,

ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Grzegorz Musielak
Pracownia Mechaniki Ośrodków
Porowatych ZA IPPT PAN

DYSPERSJA IMPULSÓW
W OŚRODKU POROWATYM WYPEŁNIONYM CIECZĄ

Streszczenie

W pracy analizuje się propagację zaburzenia w sprężystym ciele porowatym wypełnionym cieczą ściśliwą i nielepką. Bazując na rozwiązaniu d'Alemberta ilustruje się zjawisko dyspersji impulsu początkowego spowodowane jego rozdzieleniem i transportem przez dwie fale podłużne o różnych prędkościach generujące się w sposób naturalny pod wpływem przyłożonego impulsu. Pokazuje się w jakim stosunku zaburzenie dzieli się na te dwie fale, oraz jakie warunki należy spełnić, aby w ośrodku generowała się wyłącznie fala szybka lub wyłącznie fala wolna.

1. Wstęp

Celem tej pracy jest ukazanie w prosty sposób istotnej z praktycznego punktu widzenia cechy ośrodka porowatego wypełnionego cieczą, którą jest zjawisko rozpraszania impulsów. Każdy impuls wywołany źródłem zewnętrznym, np. wybuchem podziemnym, dozna rozproszenia w wyniku rozdzielenia się na dwie części, z których każda jest transportowana przez inną falę podłużną t.j. przez fale różniące się między sobą prędkościami propagacji.

Istnienie dwóch fal podłużnych w ośrodku porowatym nasyconym cieczą jest zjawiskiem znanym i było niejednokrotnie dyskutowane w literaturze (por. np. [1], [2], [3]). Badano też własności dyspersyjne takich ośrodków analizując fale w przestrzeniach nieograniczonych lub ich odbicie na powierzchniach nieciągłości. Nie analizowano jednakże efektu rozpraszania impulsów, który w tej pracy zilustrujemy bazując na rozwiązaniu d'Alemberta, dającym możliwość jasnej interpretacji fizycznej zjawiska. Takie rozwiązanie nie było dotychczas przedstawione w literaturze.

Potrzebę jego prezentacji wydaje się uzasadniać znaczenie praktyczne i powszechność zjawiska rozpraszania np. tapnięcia w kopalniach, przenoszenie drgań ciężkich maszyn pracujących w kopalniach odkrywkowych, wbijanie pali itp.

Podstawę analizy stanowią równania teorii ośrodków porowatych wypełnionych cieczą zredukowane do zagadnienia jednowymiarowego (patrz np. [4]). Zakłada się, że ośrodek porowaty jest sprężysty a ciecz wypełniająca pory ściśliwa i nielepka. Ten wyidealizowany przypadek jaskrawo ilustruje nam zjawisko rozdzielania impulsów, zachodzące w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą. Wyniki rozważań przedstawiono zarówno w postaci równań jak i na wykresach.

2. Równania ruchu ośrodka.

Rozważać będziemy jednowymiarowe zagadnienie początkowe. Współrzędną miejsca oznaczamy przez x a współrzędną czasu przez t . Korzysta się tu z teorii zawiżonych ośrodków porowatych, której charakterystyczną cechą jest wyrażenie równań za pomocą tzw. wielkości parcjalnych.

Niech $\sigma_s(x,t)$ i $\sigma_f(x,t)$ oznaczają parcjalne naprężenia w szkielecie i w cieczy czyli osiowe siły w szkielecie i cieczy odniesione do jednostki powierzchni ośrodka jako całości a ρ_s i ρ_f parcjalne gęstości czyli masy wymienionych składników odniesione do jednostki objętości całkowitej oraz $u_s(x,t)$ i $u_f(x,t)$ przemieszczenia tych składników w kierunku x .

Równania równowagi mechanicznej można zapisać wtedy jako

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{s,x} &= \rho_s \ddot{u}_s, \\ \sigma_{f,x} &= \rho_f \ddot{u}_f. \end{aligned}$$

gdzie x po przecinku oznacza cząstkową pochodną przestrzenną a kropka nad symbolem pochodną cząstkową po czasie. W równaniach (2.1) pominięto tzw. efekt sprzężenia ruchu przez masę (patrz np. [5]).

Związki fizyczne teorii ośrodków porowatych dla zagadnienia

jednowymiarowego wyrażają się następująco [5]

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_s &= (2N + A)u_{s,x} + Qu_{f,x}, \\ \sigma_f &= Qu_{f,x} + Ru_{s,x}, \end{aligned}$$

gdzie N , A , Q , R są znanymi stałymi teorii ośrodków porowatych.

Przez podstawienie związków fizycznych (2.2) do równań równowagi (2.1) otrzymuje się układ dwóch równań ruchu wyrażonych w przemieszczeniach [4]

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_{s,xx} + a_1 u_{f,xx} &= \frac{1}{a_s^2} \ddot{u}_s, \\ a_2 u_{s,xx} + u_{f,xx} &= \frac{1}{a_f^2} \ddot{u}_f \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.4) \quad \begin{aligned} a_1 &= Q/(2N + A), \quad a_2 = Q/R \\ a_s^2 &= (2N + A)/\rho_s, \quad a_f^2 = R/\rho_f \end{aligned}$$

3. Równania charakterystyk. Wzór d'Alemberta dla bifali.

W celu wyznaczenia charakterystyk układu równań (2.3) wprowadźmy nowe zmienne

$$(3.1) \quad \lambda_1 = \lambda_1(x, t), \quad \lambda_2 = \lambda_2(x, t).$$

Dla otrzymanego w ten sposób nowego układu równań różniczkowych znajdujemy wyznacznik charakterystyczny względem zmiennej λ_1 w postaci [6]

$$(3.2) \quad \Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 - \frac{1}{a_s^2} \alpha_2^2 & a_1 \alpha_1^2 \\ a_2 \alpha_1^2 & \alpha_1^2 - \frac{1}{a_f^2} \alpha_2^2 \end{vmatrix}$$

gdzie

$$(3.3) \quad \alpha_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Analizując warunki zerowania się powyższego wyznacznika otrzymujemy równania kierunków propagacji fal w czasoprzestrzeni czyli tzw. równania charakterystyk

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x - c_s t &= C_1, & x - c_v t &= C_3, \\ x + c_s t &= C_2, & x + c_v t &= C_4 \end{aligned}$$

gdzie C_1, C_2, C_3, C_4 są dowolnymi stałymi, natomiast

$$(3.5) \quad \begin{aligned} c_s &= \sqrt{\frac{1}{2}(a_s^2 + a_f^2) + \frac{1}{2} \sqrt{(a_s^2 - a_f^2)^2 + 4a_1 a_2 a_s^2 a_f^2}} \\ c_v &= \sqrt{\frac{1}{2}(a_s^2 + a_f^2) - \frac{1}{2} \sqrt{(a_s^2 - a_f^2)^2 + 4a_1 a_2 a_s^2 a_f^2}} \end{aligned}$$

są, jak zostanie wykazane poniżej, odpowiednio prędkościami fali szybkiej i fali wolnej.

W celu otrzymania ogólnego rozwiązania układu równań (2.3) dokonamy jego rozsprzężenia. Otrzymujemy wtedy:

$$(3.6) \quad a_s^2 a_f^2 (1 - a_1 a_2) u_{s,xxxx} - (a_s^2 + a_f^2) \ddot{u}_{s,xx} + \ddot{u}_s = 0.$$

Analogiczne równanie otrzymujemy dla funkcji u_f .

Po wykorzystaniu związków (3.5) powyższą zależność możemy zapisać w postaci bifalowej

$$(3.7) \quad \left[c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \left[c_v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u_s = 0.$$

Ze względu na to, że powyższe równanie jest jednorodne można skorzystać z twierdzenia Boggia [7], na podstawie którego otrzymuje się ogólne rozwiązanie równania (3.7) w postaci sumy

$$(3.8) \quad u_s(x,t) = u_s^I(x,t) + u_s^{II}(x,t).$$

gdzie funkcje u_s^I , u_s^{II} spełniają odpowiednio równania

$$(3.9) \quad \begin{aligned} c_s^2 u_{s,xx}^I - \ddot{u}_s^I &= 0, \\ c_v^2 u_{s,xx}^{II} - \ddot{u}_s^{II} &= 0. \end{aligned}$$

Po podstawieniu nowych zmiennych (stałych wzdłuż charakterystyk) i scałkowaniu dwukrotnym otrzymanych związków oraz podstawieniu całek do równania (3.8) otrzymuje się

$$(3.10)_1 \quad \begin{aligned} u_s(x,t) = & U_{s1}(x - c_s t) + U_{s2}(x + c_s t) + \\ & + U_{s3}(x - c_v t) + U_{s4}(x + c_v t). \end{aligned}$$

Analogiczne rozwiązanie otrzymujemy dla funkcji przemieszczenia płynu u_f

$$(3.10)_2 \quad \begin{aligned} u_f(x,t) = & U_{f1}(x - c_s t) + U_{f2}(x + c_s t) + \\ & + U_{f3}(x - c_v t) + U_{f4}(x + c_v t). \end{aligned}$$

W celu otrzymania zależności pomiędzy funkcjami odkształcenia szkieletu $u_s(x,t)$ i cieczy $u_f(x,t)$ podstawiamy całki u_s^I , u_s^{II} równań (3.9) oraz odpowiadające im całki dla migracji cieczy do równań ruchu (2.3). Wykorzystując wyrażenia (3.5) oraz wprowadzając oznaczenia skracające

$$(3.11) \quad \delta_1 = -\frac{1}{a_1} \left[1 - \frac{c_s^2}{a_s^2} \right],$$

$$\delta_2 = -\frac{1}{a_1} \left[1 - \frac{c_v^2}{a_s^2} \right]$$

otrzymujemy

$$(3.12) \quad u_{f,tt}^I = \delta_1 u_{s,tt}^I, \quad u_{f,tt}^{II} = \delta_2 u_{s,tt}^{II}$$

Podstawiając do tych zależności nowe zmienne i wykorzystując fakt, że są one parami niezależne oraz wiedząc, że przy braku przyczyn zewnętrznych funkcje U_{s1} , U_{s2} , U_{s3} i U_{s4} są równe zero a także biorąc pod uwagę, że przemieszczenie $u_f(x,t)$ jest ograniczone a wstępne przesunięcie cieczy i szkieletu równe zero otrzymujemy:

$$(3.13) \quad u_f(x,t) = \delta_1 [U_{s1}(x - c_s t) + U_{s2}(x + c_s t)] + \\ + \delta_2 [U_{s3}(x - c_v t) + U_{s4}(x + c_v t)]$$

Rozpatrzmy teraz zagadnienie Cauchy'ego sformułowane w następujący sposób [8].

Znaleźć rozwiązanie $u_s(x,t)$, $u_f(x,t)$ układu równań różniczkowych (2.3) określone dla dziedziny $x \in (-\infty, +\infty)$, $t \in (0, +\infty)$ i spełniające w momencie początkowym warunki Cauchy'ego

$$(3.14) \quad u_s(x,0) = f_s(x), \quad u_f(x,0) = f_f(x), \\ u_{s,t}(x,0) = g_s(x), \quad u_{f,t}(x,0) = g_f(x)$$

dla $x \in (-\infty, +\infty)$.

Funkcje $f_s(x)$ i $f_f(x)$ przedstawiają tutaj odpowiednio przesunięcia początkowe szkieletu i wypełniającej go cieczy a $g_s(x)$ i $g_f(x)$ odpowiednio prędkości początkowe obu składników.

Podstawiając rozwiązanie ogólne (3.10) do warunków początkowych i wykorzystując związek (3.13) otrzymujemy dwa

następujące układy równań:

$$(3.15) \quad \begin{cases} U_{s1}(x) + U_{s2}(x) = f_1(x) , \\ U'_{s1}(x) - U'_{s2}(x) = -\frac{1}{c_s} g_1(x) , \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{s3}(x) + U_{s4}(x) = f_2(x) , \\ U'_{s3}(x) - U'_{s4}(x) = -\frac{1}{c_v} g_2(x) . \end{cases}$$

Wprowadzono tutaj funkcje skracające w postaci:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{\delta_1 - \delta_2} [f_f(x) - \delta_2 f_s(x)] , \\ f_2(x) &= \frac{1}{\delta_1 - \delta_2} [\delta_1 f_s(x) - f_f(x)] , \\ g_1(x) &= \frac{1}{\delta_1 - \delta_2} [g_f(x) - \delta_2 g_s(x)] , \\ g_2(x) &= \frac{1}{\delta_1 - \delta_2} [\delta_1 g_s(x) - g_f(x)] . \end{aligned}$$

Całkując równania (3.15)_{2,4} w przedziale $\langle 0; x \rangle$ oraz odpowiednio dodając i odejmując stronami otrzymuje się funkcje $U_{s1}(x)$, $U_{s2}(x)$, $U_{s3}(x)$ i $U_{s4}(x)$. Rozwiązanie $u(x,t)$ jest sumą powyższych funkcji od argumentów odpowiednio $x - c_s t$, $x + c_s t$, $x - c_v t$, $x + c_v t$. Wykorzystując dodatkowo związki (3.13) otrzymuje się rozwiązanie będące wzorem d'Alemberta dla bifali

(3.17)

$$\begin{aligned}
 u_s(x, t) &= \frac{f_1(x - c_s t) + f_1(x + c_s t)}{2} + \frac{1}{2c_s} \int_{x - c_s t}^{x + c_s t} g_1(z) dz + \\
 &+ \frac{f_2(x - c_v t) + f_2(x + c_v t)}{2} + \frac{1}{2c_v} \int_{x - c_v t}^{x + c_v t} g_2(z) dz, \\
 u_v(x, t) &= \delta_1 \frac{f_1(x - c_s t) + f_1(x + c_s t)}{2} + \frac{\delta_1}{2c_s} \int_{x - c_s t}^{x + c_s t} g_1(z) dz + \\
 &+ \delta_2 \frac{f_2(x - c_v t) + f_2(x + c_v t)}{2} + \frac{\delta_2}{2c_v} \int_{x - c_v t}^{x + c_v t} g_2(z) dz.
 \end{aligned}$$

4. Interpretacja geometryczna

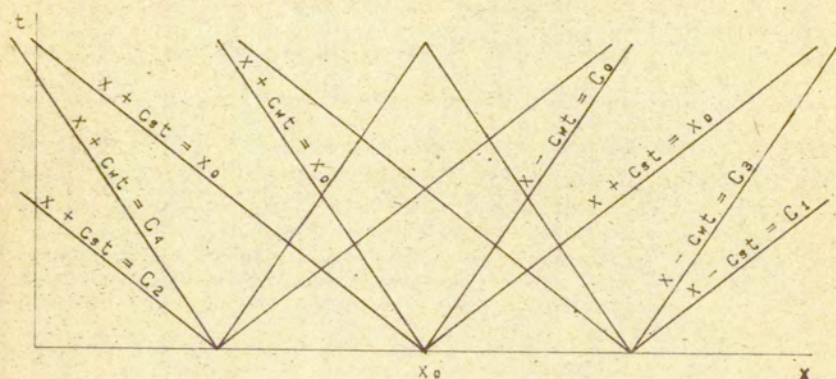
Weźmy pod uwagę rozwiązania (3.10)₁ i (3.13) przy założeniach, że funkcje U_{s2} , U_{s3} , U_{s4} są tożsamościowo równe zero. Otrzymujemy wtedy

$$(4.1) \quad u_s(x, t) = U_{s1}(x - c_s t), \quad u_v(x, t) = \delta U_{s1}(x - c_s t).$$

Zauważmy, że funkcja U_{s1} jest stała wzdłuż charakterystyki (3.4)₁. Jeżeli przyjąć w równaniach (3.10)₁ i (3.13) U_{s1} , U_{s3} , U_{s4} tożsamościowo równe zero, to rozwiązanie będzie stałe wzdłuż charakterystyki (3.4)₂. Podobnie dla $U_{s1} = U_{s2} = U_{s4} = 0$ rozwiązanie jest stałe wzdłuż charakterystyki (3.4)₃ i dla $U_{s1} = U_{s2} = U_{s3} = 0$ wzdłuż charakterystyki (3.4)₄.

Wynika stąd, że początkowy stan ośrodka w każdym punkcie x_0 rozprzestrzenia się wzdłuż charakterystyk

$$(4.2) \quad \begin{aligned}
 x - c_s t &= x_0, & x - c_v t &= x_0, \\
 x + c_s t &= x_0, & x + c_v t &= x_0.
 \end{aligned}$$



rys. 1.

Na rys. 1 przedstawione zostały charakterystyki wszystkich czterech rodzin.

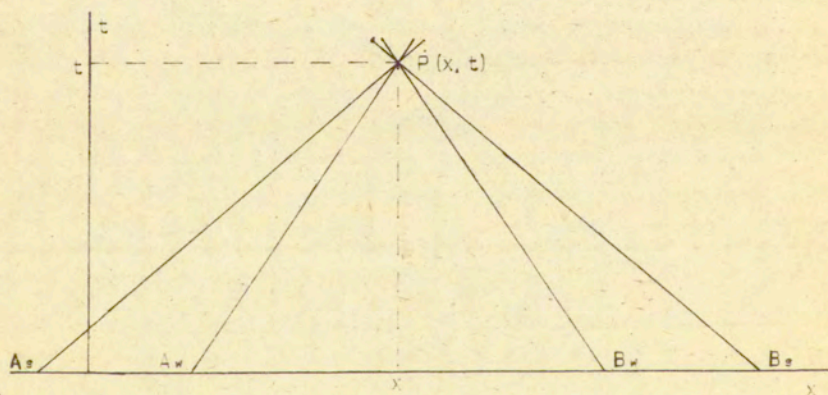
Z powyższych przedstawień wynika natychmiast, że zaburzenie w ośrodku porowatym rozchodzi się z dwoma prędkościami c_s i c_v . Część zaburzenia rozprzestrzeniającego się z prędkością c_s nazywamy falą szybką a z prędkością c_v - falą wolną.

Przeanalizujemy teraz geometryczne znaczenie wzorów (3.17). Dla ułatwienia rozumowania założymy, że prędkości początkowe $g_s(x)$, $g_f(x)$ są równe zero. Po wykorzystaniu zależności (3.11) i (3.16) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 u_s(x, t) = \frac{1}{2} & \left[\frac{a_s^2 - c_v^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x - c_s t) + \frac{a_1 a_s^2}{c_s^2 - c_v^2} f_f(x - c_s t) + \right. \\
 & + \frac{a_s^2 - c_v^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x + c_s t) + \frac{a_1 a_s^2}{c_s^2 - c_v^2} f_f(x + c_s t) + \\
 (4.3)_1 & + \frac{c_s^2 - a_s^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x - c_v t) - \frac{a_1 a_s^2}{c_s^2 - c_v^2} f_f(x - c_v t) + \\
 & \left. + \frac{c_s^2 - a_s^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x + c_v t) - \frac{a_1 a_s^2}{c_s^2 - c_v^2} f_f(x + c_v t) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_f(x,t) = \frac{1}{2} & \left[\frac{a_s^2 a_f^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x - c_s t) + \frac{a_f^2 - c_v^2}{c_s^2 - c_v^2} f_f(x - c_s t) + \right. \\
 & + \frac{a_s^2 a_f^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x + c_s t) + \frac{a_f^2 - c_v^2}{c_s^2 - c_v^2} f_f(x + c_s t) + \\
 (4.3)_2 & - \frac{a_s^2 a_f^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x - c_v t) + \frac{c_s^2 - a_f^2}{c_s^2 - c_v^2} f_f(x - c_v t) + \\
 & \left. - \frac{a_s^2 a_f^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x + c_v t) + \frac{c_s^2 - a_f^2}{c_s^2 - c_v^2} f_f(x + c_v t) \right].
 \end{aligned}$$

co oznacza, że początkowe przemieszczenia dzieli się w sposób z góry określony na część transportowaną przez falę szybką i przez falę wolną.



rys. 2.

Poprowadźmy teraz z punktu $P(x, t)$ cztery charakterystyki (rys. 2), które przecinają oś x odpowiednio w punktach

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad & A_s(x - c_s t, 0), \quad A_v(x - c_v t, 0), \\
 & B_s(x + c_s t, 0), \quad B_v(x + c_v t, 0).
 \end{aligned}$$

Przy wprowadzonych powyżej oznaczeniach równania (3.17) można zapisać następująco:

$$(4.5) \quad u_s(P) = \frac{f_1(A_s) + f_1(B_s)}{2} + \frac{f_2(A_v) + f_2(B_v)}{2},$$

$$u_f(P) = \delta_1 \frac{f_1(A_s) + f_1(B_s)}{2} + \delta_2 \frac{f_2(A_v) + f_2(B_v)}{2}$$

co oznacza, że w przypadku gdy prędkość początkowa jest równa zeru przemieszczenie w punkcie P czasoprzestrzeni jest sumą dwóch średnich arytmetycznych: średniej arytmetycznej części początkowych przemieszczeń rozprzestrzeniających się z falą szybką z punktów, w których charakterystyki fali szybkiej poprowadzone z punktu P przecinają oś x oraz z odpowiadającej jej średniej arytmetycznej dla fali wolnej.

Ze wzoru (3.17) wynika także wniosek, że zarówno część przypadająca na falę szybką jak i na falę wolną impulsu początkowego w punkcie x_0 (rys. 1) rozchodzą się wzdłuż odpowiednich charakterystyk poprowadzonych z tego punktu, przy czym wzdłuż każdej charakterystyki przenosi się połowa odpowiedniej części zaburzenia początkowego w x_0 .

Wzory (3.17) w ogólnym przypadku można zapisać następująco:

$$(4.6) \quad u_s(P) = \frac{f_1(A_s) + f_1(B_s)}{2} + \frac{f_2(A_v) + f_2(B_v)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2c_s} \int_{A_s B_s} g_1(z) dz + \frac{1}{2c_v} \int_{A_v B_v} g_2(z) dz,$$

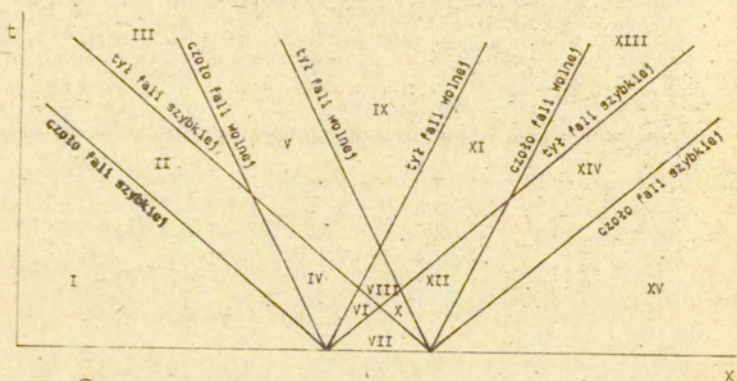
$$u_f(P) = \delta_1 \frac{f_1(A_s) + f_1(B_s)}{2} + \delta_2 \frac{f_2(A_v) + f_2(B_v)}{2}$$

$$+ \frac{\delta_1}{2c_s} \int_{A_s B_s} g_1(z) dz + \frac{\delta_2}{2c_v} \int_{A_v B_v} g_2(z) dz.$$

Wynika stąd, że stan ośrodka w punkcie P czasoprzestrzeni zależy

od początkowych przemieszczeń w punktach A_u , B_u , A_v , B_v oraz od prędkości początkowej wszystkich punktów leżących na odcinku $A_u B_u$.

Rozważmy teraz, jak będzie się zachowywał ośrodek, który w chwili początkowej jest odkształcony pomiędzy punktami x_1 i x_2 przy prędkościach początkowych równych zeru.



rys. 3.

Charakterystyki poprowadzone z punktów x_1 i x_2 (rys. 3) dziela czasoprzestrzeń na piętnaście części (oznaczonych liczbami rzymskimi). Widać od razu, że obszary I, III, IX, XIII i XV są niezaburzone, ponieważ charakterystyki poprowadzone z dowolnego punktu w tych obszarach przecinają oś x w punktach, w których zaburzenie początkowe jest równe zeru. Wzdłuż pasów II i XIV przesuwa się impuls w postaci fali szybkiej, wzdłuż pasów V i XI rozchodzi się impuls w postaci fali wolnej a w pozostałych obszarach (IV, VI, VII, VIII, X, XII) zachodzi superpozycja zaburzeń. Granice pomiędzy obszarami zaburzonymi i niezaburzonymi nazywamy odpowiednio czołem lub tyłem fali wolnej lub szybkiej.

W celu pokazania w jaki sposób zmienia się "kształt" ośrodka w czasie przyjmijmy funkcję początkowego przemieszczenia szkieletu w postaci trójkąta równoramiennego oraz zerowe przemieszczenie początkowe cieczy, przy prędkościach początkowych równych również zeru

$$(4.7) \quad f_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, x_1), \\ 2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & \text{dla } x \in \left\langle x_1, \frac{x_1 + x_2}{2} \right\rangle, \\ 2 \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} & \text{dla } x \in \left\langle \frac{x_1 + x_2}{2}, x_2 \right\rangle, \\ 0 & \text{dla } x \in \langle x_2, -\infty \rangle, \end{cases}$$

$$f_f(x) = 0,$$

$$g_s(x) = g_f(x) = 0.$$

Otrzymujemy wtedy, korzystając z (4.3) rozwiązanie w postaci

$$(4.8) \quad u_s(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{a_s^2 - c_v^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x - c_s t) + \frac{a_s^2 - c_v^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x + c_s t) + \frac{c_s^2 - a_s^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x - c_v t) + \frac{c_s^2 - a_s^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x + c_v t) \right],$$

$$u_f(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{a_2 a_f^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x - c_s t) + \frac{a_2 a_f^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x + c_s t) - \frac{a_2 a_f^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x - c_v t) - \frac{a_2 a_f^2}{c_s^2 - c_v^2} f_s(x + c_v t) \right].$$

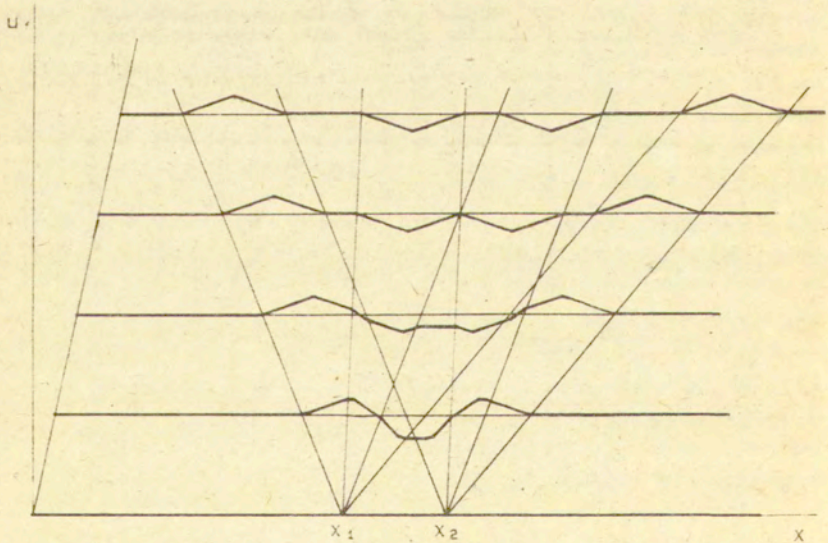
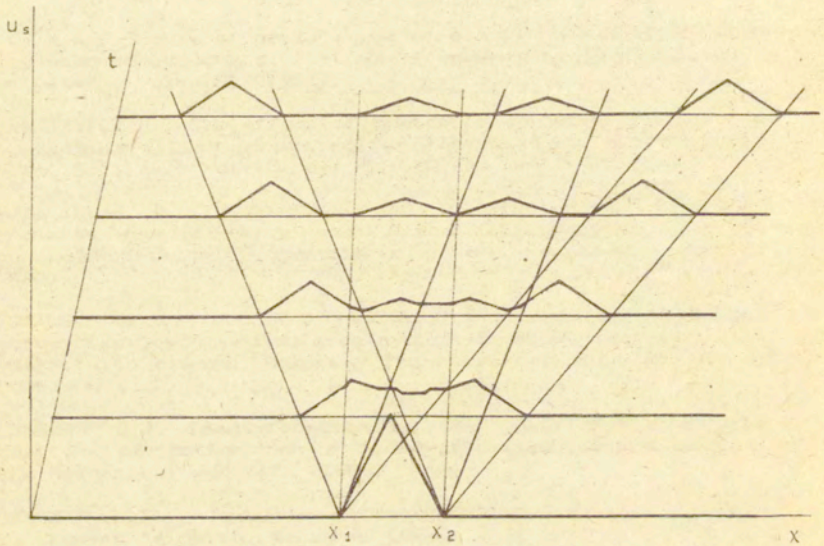
Wykorzystując tutaj łatwe do udowodnienia związku, że dla iloczynu $a_1 a_2 > 0$ zachodzi

$$(4.9) \quad c_s^2 > a_s^2 > c_v^2, \quad c_s^2 > a_f^2 > c_v^2$$

przyjmijmy w celu uproszczenia stałą odległość pomiędzy kwadratami prędkości

$$(4.10) \quad c_s^2 - a_s^2 = a_s^2 - a_f^2 = a_f^2 - c_v^2.$$

Założenie tego typu nie ogranicza nam badanego zjawiska a tylko ułatwia pokazanie wyników.



rys. 4.

Na rys. 4 pokazano w jaki sposób zaburzenie początkowe szkieletu rozchodzi się zarówno w szkielecie jak i w cieczy. Widać (por. wzór (4.8)₁), że jest ono w całości przenoszone poprzez szkielet, przy czym dzieli się w określonym stosunku na falę szybką i wolną oraz (patrz (4.8)₂), że przez sprzężenie składników powoduje powstanie fal szybkiej i wolnej w cieczy, o równych amplitudach lecz przeciwnych fazach.

W podobny sposób rozchodzi się zaburzenie początkowe w cieczy, przy czym fale w cieczy są również sprzężone z falami w szkielecie.

Istnienie dwóch fal sprzężonych pozwala nam, przy odpowiednich warunkach początkowych, uzyskać propagację wyłącznie fali szybkiej lub też wyłącznie fali wolnej. W pierwszym przypadku konieczne jest zerowanie się funkcji $f_2(x)$ i $g_2(x)$ (wzory (4.18)), czyli inaczej

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \delta_1 f_0(x) &= f_f(x), \\ \delta_1 g_0(x) &= g_f(x) \end{aligned}$$

wchylenie początkowe i prędkość początkowa cieczy muszą być równe wychyleniu początkowemu i prędkości początkowej szkieletu pomnożonym przez stałą δ_1 , charakterystyczną dla danego ośrodka. Aby uzyskać propagację fali wolnej należy spełnić warunki

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \delta_2 f_0(x) &= f_f(x), \\ \delta_2 g_0(x) &= g_f(x). \end{aligned}$$

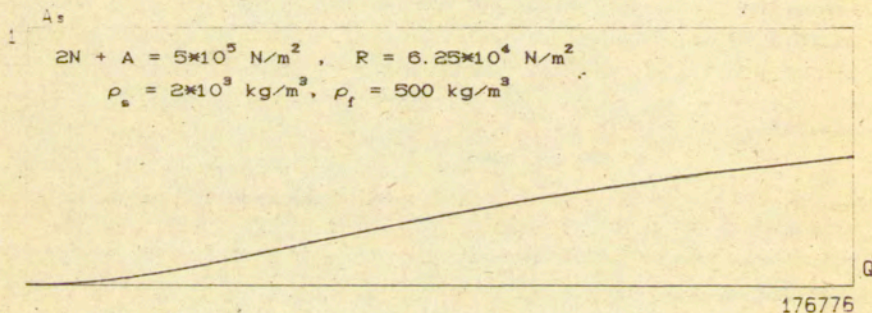
Z porównania warunków (4.11) i (4.12) z wzorem d'Alemberta dla bifali (3.17) wynika kolejny wniosek. Mianowicie fala szybka w ośrodku porowatym spełnia w każdej chwili czasowej warunek (4.11) a fala wolna warunek (4.12). Oznacza to, że przemieszczenie ośrodka związane z poruszającą się falą szybką nie jest nigdy źródłem generującym falę wolną i vice-versa.

Wykorzystując wzory (4.3) można stwierdzić, że impuls początkowy zarówno w cieczy jak i w szkielecie rozdziela się w określonym stosunku na falę szybką i falę wolną w danym składniku

ośrodka. I tak stosunek części przemieszczenia transportowanej przez falę wolną do fali szybkiej w szkielecie wynosi

$$(4.13) \quad A_s = \frac{c_s^2 - a_s^2}{a_s^2 - c_v^2}$$

Stosunek ten został przedstawiony dla pewnych, wybranych stałych materiałowych w zależności od współczynnika sprzężenia deformacji objętościowych Q na rys. 5. Wartość maksymalna Q , jest to wartość graniczna, dla której prędkość fali wolnej jest równa zero.



rys. 5.

Analogiczny stosunek dla fal w cieczy przedstawia się następująco:

$$(4.14) \quad A_f = \frac{c_s^2 - a_f^2}{a_f^2 - c_v^2}$$

Jak widać o podziale zaburzenia na falę szybką i falę wolną decydują wyłącznie własności fizyczne składników i struktura ośrodka, natomiast nie ma wpływu sposób zadania impulsu początkowego.

5. Uwagi końcowe.

W pracy rozważano ośrodek konsolidujący, w którym nie zachodzi tłumienie fal. Ten wyidealizowany przypadek pozwolił wyraźnie zilustrować ważne zjawisko rozdzielania się zaburzenia tak w szkielecie jak i w cieczy na dwie fale poruszające się w obu ośrodkach równocześnie. Zjawisko to spowodowane jest sprzężeniami dylatacyjnymi, które w związkach fizycznych (2.2) są reprezentowane przez wyrazy zawierające stałą Q .

Stwierdzono, że impuls początkowy zarówno w cieczy jak i w szkielecie rozdziela się w określonym stosunku na falę szybką i falę wolną w danym składniku ośrodka. O podziale tym decydują wyłącznie własności fizyczne składników i struktura ośrodka, natomiast nie ma wpływu sposób zadania impulsu.

Wnioskujemy również, że zaburzenie transportowane w ośrodku przez falę szybką nie generuje fali wolnej. Analogiczna uwaga odnosi się do fali wolnej.

Literatura

- [1] BIOT M.A., Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid, I. Low - frequency range, J. Acoust. Soc. Amer., vol. 28, (1956).
- [2] DERESIEWICZ H., The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: XI Waves in a plate, Bull. Seism. Soc. Am., vol. 64, nr 6, (1974).
- [3] DZIĘCIELAK R., Propagacja fal nieciągłości w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą, Praca habilitacyjna, Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, ser. Rozprawy, nr 118, (1980).
- [4] KOWALSKI S.J., KUC R., MUSIELAK G., Analiza własności wibroizolacyjnych odkształcalnych ośrodków perforowanych wypełnionych cieczą, Rozprawy Inżynierskie, vol. 36, nr 3, (1988).
- [5] KOWALSKI S.J., Identification of the coefficients in the equations of motion for a fluid-saturated porous medium, Acta Mechanica, vol. 47, (1983).
- [6] WOROSZYŁ S., Podstawowe metody rozwiązywania równań cząstkowych falowych, Warszawa 1984.
- [7] BOGGIO T., Sull' integrazione di alcuna equazioni lineari alle derivate parziali, Ann. Mat., ser. III, vol. 8, (1903).
- [8] TRAJDOS T., Matematyka dla inżynierów, Warszawa 1974.