

- 7.72 — sprężystość
- 7.76 — fale w ciałach stałych
- 7.73 — ośrodki niejednorodne
- 7.75 — warstwa wierzchnia

Praca habilitacyjna

Tadeusz Rożnowski

**NAPRĘŻENIOWE FALE POWIERZCHNIOWE
W PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ
TRANSWERSALNIE IZOTROPOWEJ
NIEJEDNORODNEJ**

31/1990

P. 269



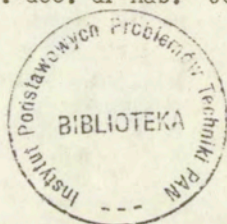
WARSZAWA 1990

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 27 czerwca 1990 r.

Praca habilitacyjna

Recenzent Prof. doc. dr hab. Józef Ignaczak



56800



Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark.wyd. 2,7 Ark.druk. 3,5

Oddano do drukarni w czerwcu 1990 r.

Nr zamówienia 254/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,

ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Tadeusz Rożnowski

Zakład Układów Mechanicznych

IPPPT PAN

NAPRĘŻENIOWE FALE POWIERZCHNIOWE
W PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ
TRANSWERSALNIE IZOTROPOWEJ NIEJEDNORODNEJ

Streszczenie

W pracy przedstawiono równania ruchu ośrodka transwersalnie izotropowego, niejednorodnego w płaszczyźnie izotropii (płaski stan odkształcenia) wykorzystując naprężeniowe równania ruchu (rozdz.3) i sformułowano problem fal powierzchniowych typu Rayleigha. Udowodniono, że w przypadku propagacji fali harmonicznej w czasie problem redukuje się do równania różniczkowego zwyczajnego czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach (3.30,3.31), na "funkcje naprężeń", tj. amplitudę naprężeń normalnych wzdłuż głębokości półprzestrzeni, która definiuje pozostałe amplitudy. Postać równania (3.31) pozwala wyselekcjonować pięć przypadków szczególnych:

- 1.. ciało transwersalnie izotropowe z "małą niejednorodnością" (4.4);
- 2.. ciało "słabo anizotropowe", niejednorodne (4.11);
- 3.. ciało "słabo anizotropowe" z "małą niejednorodnością" (4.12);
- 4.. ciało transwersalnie izotropowe, jednorodne (4.13);
- 5.. ciało izotropowe niejednorodne (4.19).

Pierwsze trzy przypadki przedstawiają równania przybliżone, a ostatnie dwa równania są dokładne dla odnośnych ośrodków. Wykazano, że równania (4.19) lub (4.21 - 4.22) są identyczne z równaniami otrzymanymi przez J. Ignaczaka w pracy [1]. Dalej zaprezentowano metodę rozwiązywania wyprowadzonych równań (rozdz. 5) i rozpatrzono szczegółowo problem wg punktu 3 fali powierzchniowej w ciele "słabo anizotropowym" z "małą niejednorodnością" zakładając monotoniczną zmianę modułów sprężystości poprzecznej i stałe współczynniki Poissona oraz pewne ograniczenie na stosunek modułów sprężystości. Otrzymano rozwiązanie w postaci zamkniętej (6.41, 6.43) i wyznaczono pozostałe amplitudy. Wyprowadzono równanie dyspersji i jego aproksymację uzyskując zależność prędkości fali Rayleigha C_{PR} od wszystkich parametrów charakteryzujących ośrodek w funkcji wielkości Ψ , gdzie $\Psi = \frac{s}{\hat{\epsilon}}$, s - jest liczbą falową, $\hat{\epsilon}$ - para-

metrem niejednorodności. Pewne wyniki numeryczne przedstawiono wykreślnie i w tablicach.

1. Przedmowa

W liniowej teorii elastodynamiki ciał anizotropowych i niejednorodnych wyprowadzono ogólne równania ruchu i odpowiednie postacie warunków początkowych i brzegowych w dwóch układach wielkości poszukiwanych, którą to wielkością może być wektor przemieszczenia lub tensor naprężenia. Imponujące osiągnięcia w szeroko rozumianej technologii wytwarzania opierają się w dużej mierze na obserwacji i badaniu procesów falowych, w tym również fal powierzchniowych.

Do pozytywnych wyników, tzn. takich, które pozwalają na wyciągnięcie wniosków o szerszym charakterze niż obejmuje to eksperyment, dochodzi się przez kompleksowe badanie przebiegu zjawiska, od jego powstania (inicjacji) poprzez sposób rozwoju i zanikania w układzie i elementach pozostających z nim w kontakcie lub w sprzężeniu. Rozpoznanie zmian wielkości opisujących zjawisko w czasie i powiązanie ich z parametrami materii, w jakiej zachodzą, stwarza podstawę do analizy, dyskusji i wnioskowania o skutkach tego rodzaju procesów powstałych w materiale, a także o odpowiedzi materiału na zadany przebieg procesu. W różnych materiałach, maszynach, urządzeniach elektromechanicznych (energetycznych) i przemysłowych szczególną rolę odgrywają fale mechaniczne, akustyczne, cieplne i elektryczne. Badania eksperymentalne i metody fenomenologiczne daleko wyprzedziły teorie, a zwłaszcza ilościową analizę procesów falowych wynikającą z teorii. Istotną rolę odgrywa złożoność zjawiska, ponieważ z ruchem falowym związany jest wszelki proces przemieszczania się zaburzeń.

Celem naszym jest bliższe rozpoznanie możliwości badania przebiegów falowych w materiałach sprężystych o złożonej strukturze wewnętrznej w takim opisie matematycznym, który pozwala na analizowanie problemu falowego przynajmniej w sensie jakościowym, jeśli nie ilościowym. Dlatego podamy najpierw w ogólnym zarysie sposób wyprowadzania równań pola w przemieszczeniach i naprężeniach, a następnie zredukujemy ogólne równania naprężeniowe ruchu do przypadku ciała transwersalnie izotropowego niejednorodnego, wypełniającego półprzestrzeń. Dla tego rodzaju półprzes-

trzeni sformułujemy problem fali powierzchniowej typu Rayleigha w sensie problemu własnego dla zwyczajnego równania różniczkowego czwartego rzędu ze zmiennymi współczynnikami. Jednocześnie wykażemy przejście od otrzymanego równania (3.30) lub (3.31) do znanego w literaturze [2,3] naprężeniowego równania dynamicznego. W przypadku, gdy przestrzeń jest izotropowa niejednorodna, wyprowadza się równanie otrzymane przez J. Ignaczaka w 1963 r. [1],[5].

Na podstawie otrzymanego równania czwartego rzędu okazuje się, że obejmuje ono pięć przypadków szczególnych opisu zjawisk falowych, z których trzy (1-3) daje obraz przybliżony, a dwa (4-5) dokładny, ze względu na cechy ośrodka:

- 1) ciało transwersalnie izotropowe z "małą niejednorodnością",
- 2) ciało "słabo anizotropowe" niejednorodne,
- 3) ciało "słabo anizotropowe" z "małą niejednorodnością",
- 4) ciało transwersalnie izotropowe, jednorodne,
- 5) ciało izotropowe niejednorodne.

Postać równania dla ciała transwersalnie izotropowego jednorodnego w naprężeniach może być przetransformowana do odpowiednich równań przemieszczeniowych. Dalsze przejścia w obu typach równań prowadzą do równań statycznych Beltrami Michella w naprężeniach (wyprowadzonych z równań nierozdzielności) i równań przemieszczeniowych elastostatyki Naviera w ujęciu Lechnickiego, 1977. Niektóre problemy sprężyste w ciałach o izotropii poprzecznej w półprzestrzeni zostały rozwiązane na podstawie równania Naviera przez W. Nowackiego (1954), Z. Mossakowską (1955) i J. Mossakowskiego (1956) oraz przez S. Kaliskiego (1957) w przypadku dynamicznym według równań Lamego, patrz także [4,7].

Niniejsza praca wiąże się bezpośrednio z sugestią J. Kaczmaraka z badania teoretycznie wpływu anizotropii i niejednorodności na własności ukonstytuowanej warstwy wierzchniej poddanej obciążeniom dynamicznym. Przedłożony model ośrodka złożonego ciąglego, stanowiącego półprzestrzeń sprężystą transwersalnie izotropową, niejednorodną i otrzymane równania ruchu dla takiego ośrodka łącznie z wyprowadzonymi równaniami dla fal naprężenia typu Rayleigha stanowią z punktu widzenia teoretycznego poszerzenie możliwości badawczych warstwy wierzchniej.

Otrzymane w pracy wyniki są oryginalne poza równaniem (4.21), które zostało wyprowadzone w pracy [1]. Wypełniają one istotną

część luki w opisie ruchu ośrodka sprężystego, anizotropowego i niejednorodnego, dając możliwość wglądu pod względem jakościowym, a przy pewnych ograniczeniach także ilościowym w omawiany ośrodek poprzez najprostsze równanie przybliżające problem (4.12), które wiąże wszystkie parametry anizotropii i niejednorodności tutaj określone.

2. Wstęp

2.1. Fale naprężenia w technice

Fale naprężenia w materiałach o złożonej strukturze są przedmiotem zainteresowania w praktyce inżynierskiej od początku bieżącego wieku, co najmniej z dwóch powodów. Po pierwsze, ze względu na możliwość konstruktywnego wykorzystania zjawiska w urządzeniach diagnostycznych do pomiaru własności sprężystych tworzyw, wykrywania wad materiałowych oraz transmisji informacji. Tego rodzaju zastosowania odnoszą się zazwyczaj do fal w postaci impulsów lub ultradźwiękowych impulsów sinusoidalnych. Drugim ważkim powodem są uszkodzenia, czy wręcz zniszczenia układów przez krótkotrwałe impuls naprężenia wywołany udarem lub wstrząsem. Przy obciążeniu udarowym nagromadzona energia rozkłada się w objętości, która jest ograniczona prędkością propagacji fal w materiale i dlatego obciążenie udarowe w krótkim czasie działania akumulując nawet niewielką ilość energii w stosunkowo małej objętości może wywołać efekt pęknięcia, pojawienia się szczeliny lub inny rodzaj zniszczenia, przypadek nierzadko spotykany w maszynach o dużej wydajności i precyzyjnym ruchu (np. układy sprzężone turbo-generatorowe) lub ogólnie na obszarach zwanych strefą sejsmiczną.

Najprostszym modelem ciała złożonego jest ośrodek pasmowy składający się z elementów jednorodnych, dla których istnieją opracowywane teoretycznie i doświadczalnie procesy falowe. Między innymi sejsmolodzy korzystając z wyników badań ośrodka pasmowego udoskonaliли swoje metody pomiarowe i interpretację zarejestrowanych wykresów (Ewing, Jardetzky, Press, 1957), wzbogacając wiedzę o strukturze skorupy ziemskiej. Dla potrzeb sejsmologów poświęcono wiele prac z tego zakresu. Wyjaśnienie jed-

nak pewnych zagadek przyrody wzmogło zapotrzebowanie na dalsze subtelniejsze badania, zwłaszcza teoretyczne, struktur złożonych już nie z pasm jednorodnych, lecz bardziej urozmaiconych.

Z drugiej strony, w praktyce inżynierskiej operuje się siłami i innymi rodzajami obciążenia, na które oblicza się wytrzymałość konstrukcji. Inżynierowie potrafią przewidzieć zachowanie się układów składających się z różnych, złożonych tworzyw pracujących w zmiennych warunkach otoczenia, pod działaniem obciążeń statycznych bądź quasi-statycznych (np. przy drganiach ustalonych w czasie). Zagadnienie jest jeszcze bardziej komplikowane, gdy siła jest przekazywana przez konstrukcję w postaci fali naprężenia, ponieważ określenie kierunków propagacji naprężenia w układach (konstrukcjach) złożonych jest zadaniem trudnym do przewidzenia, nawet w przypadku materiałów jednorodnych, a anizotropia i niejednorodność struktury wewnętrznej materii wobec wielorakich kształtów zewnętrznych zadanie to potęguje w bardzo poważnym stopniu (coś w rodzaju błyskawicy i grzmotu).

Dobrze znany jest fakt, że obciążenie udarowe wyróżnia się dwiema cechami, a mianowicie, prędkością propagacji fali naprężenia i szybkością zmian odkształcenia wykazującego pewne cechy regularności, co pomija się przy obciążeniu statycznym utrzymując, że cała energia rozkłada się w konstrukcji jednocześnie.

Prędkość propagacji fali naprężenia zależy od kierunku, w jakim biegnie fala, a jeśli granica proporcjonalności zostanie przekroczona, również od poziomu naprężenia. Każdą prędkość fali w ośrodku nie prostym (złożonym) określa się z uchu uśrednionego po lokalnych regionach takiego ciała zawierającego wiele elementów różnych lub różnych cząstek.

Ze względu więc na czynnik skończonego czasu propagacji fali naprężenia i własności zależne od szybkości zmian odkształcenia, stanowiące wspólne cechy procesów udarowych w materiałach konstrukcyjnych, anizotropia i niejednorodność wymaga specjalnej uwagi na etapie projektowania konstrukcji i struktur materiałowych, gdy chcemy zapewnić wytrzymałość na obciążenia udarowe. Problem można objaśnić na przykładzie. Jeśli weźmiemy pod uwagę łopatkę turbiny, to poza obciążeniem od medium opływającego, sił odśrodkowych i drgań, ten element powinien być projektowany również na naprężenia udarowe, jakie mogą powstać

od czynników zewnętrznych, którymi mogą być ziarna piasku, nakrętki, śruby. Względne prędkości uderzających ciał o łopatkę mogą być rzędu 450 m/s. Zderzenia z tak dużą prędkością nawet małych obiektów wywołują krótkotrwały udar ($< 50\mu\text{s}$) przekazując całkowitą energię zderzenia w lokalnie mały początkowy obszar łopatki. Udar wywołuje nie tylko lokalne wgłębienie albo pęknięcie, lecz może spowodować daleko zasięgowe zniszczenie w znacznej odległości od powierzchni bezpośredniego kontaktu wywołane odbiciem fali naprężenia od brzegów i skupieniem efektów pochodzących od zmian geometrii łopatki.

2.2. Liniowe równania przemieszczeniowe i naprężeniowe elastodynamiki dla ciała anizotropowego i niejednorodnego

Nasze rozważania opieramy na następujących związkach:

a) liniowych zależnościach kinematycznych

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(x,t) + u_{j,i}(x,t)) = u_{(i,j)}(x,t) \quad (2.1)$$

b) równaniach równowagi dynamicznej momentów

$$\sigma_{ij,j}(x,t) + F_i(x,t) = \rho(x)\ddot{u}_i(x,t), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (2.2)$$

c) równaniach konstytutywnych

$$\sigma_{ij}(x,t) = C_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(x,t) \quad (2.3)$$

lub

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \mathcal{H}_{ijkl}(x) \tilde{\sigma}_{kl}(x,t)$$

d) warunkach nierozdzielczości

$$e_{pkl} e_{qmn} \varepsilon_{km,ln} = 0 \quad (2.4)$$

Przez podstawienie (3.2)₁ i (2.1) do (2.2) otrzymamy równania przemieszczeniowe ruchu ośrodka (w warunkach izotermicznych)

$$[C_{ijkl}(x)u_{k,l}(x,t)]_{,j} + \rho(x)(f_i(x,t) - \ddot{u}_i) = 0 \quad (2.5)$$

Eliminując u_i i $\dot{\epsilon}_{ij}$ z równań (2.1)-(2.3) możemy napisać równania ruchu ośrodka na naprężeniach (w warunkach izotermicznych)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{ijkl}(x) \ddot{\sigma}_{kl}(x,t) = & [\varrho^{-1}(x) G_{ik,k}(x,t)]_{,j} + \\ & + [\varrho^{-1}(x) G_{jk,k}(x,t)]_{,i} + [\varrho^{-1}(x) F_i(x,t)]_{,j} + \\ & + [\varrho^{-1}(x) F_j(x,t)]_{,i} . \end{aligned} \quad (2.6)$$

W powyższych równaniach zastosowano oznaczenia:

- u_i - składowa wektora przemieszczenia,
- ϵ_{ij} - składowa tensora odkształcenia,
- G_{ij} - składowa tensora naprężenia,
- x - zmienna przestrzenna (x_1, x_2, x_3) lub (x, y)
w układzie współrzędnych prostokątnych, (2.7)
- t - czas
- e_{pkl} - tensor alternatywny - symbol permutacji,
- $C_{ijkl}(x)$ - tensor 4-go rzędu modułów sprężystości
jako funkcja współrzędnej przestrzennej,
- $\mathcal{K}_{ijkl}(x)$ - tensor 4-go rzędu modułów podatności
jako funkcja współrzędnej przestrzennej,
(x) - gęstość ośrodka,
- $F_i(x,t) = \varrho(x) f_i(x,t)$ - siła masowa.

Z symetrii macierzy $[G_{ij}]$ i $[\epsilon_{ij}]$ wynikają związki

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk} ,$$

które redukują liczbę niezależnych współczynników sprężystości z 81 do 36. Następny związek

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

powoduje dalsze zmniejszenie liczby współczynników do 21.

Ciało wykazujące właściwości transwersalnej izotropii jest opisywane przez 5 różnych parametrów sprężystości. Żąda się ponadto spełnienia warunku silnej eliptyczności w postaci

$$C_{ijkl} a_i b_k a_j b_l > 0$$

dla każdej pary wektorów a i b . Inne oznaczenia: kropka nad symbolem oznacza różniczkowanie względem czasu, indeksy po przecinku wskazują różniczkowanie cząstkowe względem zmiennych przestrzennych.

Jeżeli $G_{ij}(x,t)$ jest rozwiązaniem równania (2.6) przy jednorodnych warunkach początkowych, wówczas wektor przemieszczenia wyraża się równaniem (J, Ignaczak 1963) [1]

$$u_i(x,t) = \rho^{-1}(x) \int_0^t (t-\tau) [\dot{G}_{ij,j}(x,\tau) + F_i(x,\tau)] d\tau. \quad (2.8)$$

Związek (2.8) został uogólniony przez M.E. Gurtina, 1964, tak, że obejmuje niejednorodne warunki początkowe i ma postać [10, 19]

$$u_i(x,t) = \rho^{-1}(x) \int_0^t (t-\tau) [\dot{G}_{ij,j}(x,\tau) + F_i(x,\tau)] d\tau + u_i|_{t=0} + t \dot{u}_i|_{t=0}. \quad (2.9)$$

3. Ciało sprężyste transwersalnie izotropowe, niejednorodne (płaski stan odkształcenia)

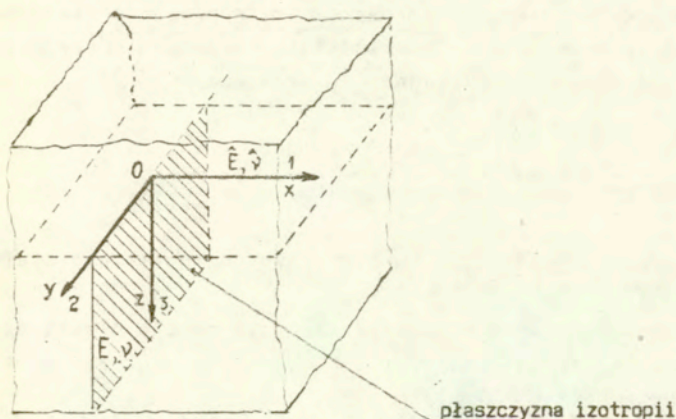
3.1. Równania naprężeniowe

W teorii sprężystości korzysta się z faktu, że jeśli struktura ciała anizotropowego ma symetrię jakiegokolwiek rodzaju, to symetria ujawnia się również we właściwościach sprężystych. Symetria sprężysta, jak ją przyjęto nazywać, przejawia się tym, że w odpowiednich punktach powstają symetryczne naprężenia ekwiwalentne w odniesieniu do właściwości sprężystych (patrz (2.3) oraz (2.7)_{7,8}). Możemy poszukiwać zatem modelu ciała sprężystego anizotropowego, niejednorodnego, mającego uproszczoną budowę.

Przyjmijmy ciało mające takie właściwości, że przez wszystkie jego punkty przechodzą płaszczyzny równoległe, na których każdy kierunek, pod względem właściwości sprężystych, jest równoprawny. W ten sposób mamy określoną w ciele płaszczyznę izotropii lub inaczej mówiąc, istnieje w każdym punkcie jeden "wyróżniony" kierunek główny i nieskończona liczba kierunków głównych na

płaszczyźnie przechodzącej przez dany punkt i prostopadłej do "wyróżnionego" kierunku głównego. Słuszne jest również określenie, że przez każdy punkt takiego ciała przechodzi oś symetrii sprężystej nieskończenie wysokiego rzędu (wystarczy szóstego), tzn. oś obrotu. Ciało z wyżej omówionymi właściwościami nazywa się transwersalnie izotropowe.

Przyjmujemy przestrzenny układ współrzędnych prostokątnych (x, y, z) , przy czym oś z jest skierowana pionowo, a oś x stanowi oś symetrii obrotowej ciała. Płaszczyznę izotropii określają osie (y, z) , jak to ilustruje szkic na rys.1. Wprowadzając stałe techniczne w miejsce stałych podatności wprowadzonych w sekcji drugiej możemy zapisać równania uogólnionego prawa Hooke'a dla ciała z płaszczyzną izotropii w postaci (patrz [4, 5]):



Rys.1. Szkic do opisu ośrodka transwersalnie izotropowego i niejednorodnego

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{11} &= -\frac{\hat{\nu}}{E} (\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{E} \sigma_{xx}, \\
 \epsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{zz}) - \frac{\hat{\nu}}{E} \sigma_{xx}, \\
 \epsilon_{33} &= \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu \sigma_{yy}) - \frac{\hat{\nu}}{E} \sigma_{xx}, \\
 \epsilon_{21} &= \frac{1}{2G} \sigma_{yx}, \\
 \epsilon_{31} &= \frac{1}{2G} \sigma_{zx},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$G_{32} = \frac{1}{2G} G_{zy} = \frac{1+\nu}{E} G_{zy} ,$$

gdzie:

E - oznacza moduł Younga przy rozciąganiu i ściskaniu w kierunkach leżących w płaszczyźnie izotropii, $E = 2\mu(1+\nu)$,
 \hat{E} -- moduł Younga przy rozciąganiu i ściskaniu w kierunkach leżących na płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny izotropii,
 ν - współczynnik Poissona określający poprzeczne zwężenie w płaszczyźnie izotropii przy rozciąganiu w tej płaszczyźnie,
 $\hat{\nu}$ - współczynnik Poissona określający poprzeczne zwężenie przy rozciąganiu w kierunku normalnym do płaszczyzny izotropii,
 $G = \mu$, $\hat{G} = \hat{\mu}$ - moduł sprężystości poprzecznej odpowiednio w płaszczyźnie izotropii i w każdej płaszczyźnie do niej prostopadłej.

Jeśli założymy, że płaszczyzna izotropii jest niejednorodna, to współczynniki sprężystości zależą od punktu. Przyjmijemy za leżność tylko od współrzędnej z , skąd mamy

$$E = E(z), \quad \hat{E} = \hat{E}(z) ,$$

$$G = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} , \quad \hat{G} = \hat{G}(z) = \frac{\hat{E}(z)}{2(1+\hat{\nu}(z))} \quad (3.2)$$

i we wzorach (3.1) należy w tym przypadku podstawić wielkości funkcyjne (3.2).

Przyjmujemy, że w płaszczyźnie (x, z) panuje płaski stan odkształcenia, tzn. tylko ϵ_{11} , ϵ_{33} , $\epsilon_{13} = \epsilon_{31}$ są różne od zera, natomiast $\epsilon_{22} \equiv \epsilon_{21} \equiv \epsilon_{23} \equiv 0$.

Zgodnie z (3.1) i przy $\epsilon_{22} = 0$ zachodzi równość

$$\frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{zz}) = \frac{\hat{\nu}}{\hat{E}} \sigma_{xx} ;$$

skąd

$$\sigma_{yy} = l E \sigma_{xx} + \nu \sigma_{zz} , \quad l = \frac{\hat{\nu}}{E} . \quad (3.3)$$

Zatem uogólnione prawo Hooke'a dla ciała transwersalnie izotropowego z niejednorodnością opisaną modułem sprężystości poprzecznej, zmiennym wraz ze współrzędną $z \geq 0$ dla płaskiego stanu odkształcenia, przyjmie postać

$$\begin{aligned} \xi_{11}(x, z; t) &= -f(z) G_{zz}(x, z; t) - B_1(z) G_{xx}(x, z; t), \\ \xi_{33}(x, z; t) &= B(z)f(z)g(z)G_{zz}(x, z; t) - f(z)G_{xx}(x, z; t), \\ \xi_{13}(x, z; t) &= B_2(z)G_{xz}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdzie

$$\begin{aligned} f(z) &= l(z)(1 + \nu(z)), \quad g(z) = l^{-1}(z)(1 - \nu(z)), \\ l(z) &= \frac{\hat{\nu}(z)}{\hat{E}(z)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{1}{E(z)}, \quad B_1(z) = [^2(z)E(z) - \frac{1}{\hat{E}(z)}], \\ B_2(z) &= l(z) + \frac{1}{\hat{E}(z)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Zlinearyzowane związki pomiędzy wektorem przemieszczenia i tensorem odkształcenia w układzie dwuwymiarowym $(\alpha, \beta) = (1, 3)$ wyrażają się wzorem

$$\xi_{\alpha\beta}(x, z; t) = \frac{1}{2}(u_{\alpha, \beta}(x, z; t) + u_{\beta, \alpha}(x, z; t)), \quad (3.7)$$

przy czym $u(x, z; t) \in \mathbb{C}^3$.

Przez zróżniczkowanie względem czasu otrzymamy

$$\ddot{\xi}_{\alpha\beta}(x, z; t) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{\alpha, \beta}(x, z; t) + \ddot{u}_{\beta, \alpha}(x, z; t)). \quad (3.8)$$

Równanie równowagi dynamicznej bez sił masowych ma postać

$$G_{\alpha\gamma, \gamma} = \rho \ddot{u}_{\alpha}, \quad (3.9)$$

skąd możemy napisać, przyjmując $\rho = \text{const.}$,

$$G_{\alpha\gamma, \gamma\beta} = \rho \ddot{u}_{\alpha, \beta}, \quad (3.10)$$

$$G_{\beta\gamma, \gamma\alpha} = \rho \ddot{u}_{\beta, \alpha}$$

i mamy zależność

$$\rho (\ddot{u}_{\alpha, \beta} + \ddot{u}_{\beta, \alpha}) = \sigma_{\alpha \gamma, \gamma \beta} + \sigma_{\beta \gamma, \gamma \alpha}. \quad (3.11)$$

Porównując równania (3.8) i (3.11) otrzymamy warunki równowagi wiążące przyspieszenie tensora odkształcenia z drugimi pochodnymi przestrzennymi naprężeń

$$\ddot{\xi}_{\alpha \beta} (x, z; t) = (2\rho)^{-1} (\sigma_{\alpha \gamma, \gamma \beta} (x, z; t) + \sigma_{\beta \gamma, \gamma \alpha} (x, z; t)). \quad (3.12)$$

Podstawienie równań konstytutywnych (3.4) do (3.12) pozwala napisać równania ruchu założonego ośrodka w naprężeniach

$$\begin{aligned} -f(z) \ddot{\sigma}_{zz} (x, z; t) - B_1(z) \ddot{\sigma}_{xx} (x, z; t) &= \rho^{-1} (\sigma_{xx, xx} (x, z; t) + \\ &+ \sigma_{xz, zz} (x, z; t)), \\ B(z)f(z)g(z) \ddot{\sigma}_{zz} (x, z; t) - f(z) \ddot{\sigma}_{xx} (x, z; t) &= \rho^{-1} (\sigma_{zx, xz} (x, z; t) + \\ &+ \sigma_{zz, zz} (x, z; t)), \quad (3.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2B_2(z) \ddot{\sigma}_{xz} (x, z; t) &= \rho^{-1} (\sigma_{xx, xz} (x, z; t) + \sigma_{xz, zz} (x, z; t) + \\ &+ \sigma_{zx, xx} (x, z; t) + \sigma_{zz, zx} (x, z; t)). \end{aligned}$$

3.2. Równania fal powierzchniowych

Jeżeli poszukujemy fal powierzchniowych w półprzestrzeni $z \geq 0$, w szczególności typu Rayleigha, to układ równań ruchu (3.13) powinien być uzupełniony następującymi warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} (x, 0; t) = \sigma_{xz} (x, 0; t) = 0, \quad z = 0, \\ \sigma_{zz} (x, \infty; t) = \sigma_{xz} (x, \infty; t) = 0, \quad z = \infty. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Równania ruchu w postaci (3.13) nie zostały dotychczas wyprowadzone i analizowane w dostępnej mi literaturze. J. Ignaczak wyprowadził naprężeniowe równania ruchu dla dowolnego anizotropowego ośrodka w postaci (patrz [1], porównaj równanie (2.6))

$$2\mathcal{N}_{ijkl}(x)\overset{\circ}{\sigma}_{kl}(x,t)=[\varrho^{-1}(x)\overset{\circ}{\sigma}_{ik,k}(x,t)]_{,j} + [\varrho^{-1}(x)\overset{\circ}{\sigma}_{jk,k}(x,t)]_{,i} + [\varrho^{-1}(x)F_i(x,t)]_{,j} + [\varrho^{-1}(x)F_j(x,t)]_{,i}, \quad (3.15)$$

gdzie $\mathcal{N}_{ijkl} = \mathcal{N}_{ijkl}(x)$ jest tensorem podatności będącym w ogólności funkcją położenia, lecz nie czasu. Wykazał on, że układ (3.15) jest podstawowym dynamicznym układem naprężeniowym, tzn. że jeśli znamy tensor $\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = \overset{\circ}{\sigma}_{ij}(x,t)$, który spełnia równania (3.15) to przy jednorodnych warunkach początkowych przemieszczenia oblicza się wg wzoru (2.8). Korzystając z równania (3.15) J. Ignaczak przeanalizował problem fal Rayleigha w niejednorodnej, izotropowej i sprężystej półprzestrzeni poszukując rozwiązania dwuwymiarowych, naprężeniowych równań ruchu przy założeniu, że deformacja jest płaska ($u_3=0$) w postaci, patrz [1]

$$\frac{1}{\mu(x)} \left[\overset{\circ}{\sigma}_{\alpha\beta}^{\circ}(x,z) - \frac{\lambda(x)}{2\lambda(x)+2\mu(x)} \overset{\circ}{\sigma}_{\gamma\gamma}^{\circ}(x,z) \right] = \overset{\circ}{\sigma}_{\alpha\gamma,\gamma\beta}(x,z) + \overset{\circ}{\sigma}_{\beta\gamma,\gamma\alpha}(x,z), \quad (3.16)$$

w obszarze $|x_1| < \infty, 0 < x_2 < \infty$. takiego, że

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{22}(x_1, 0; z) = \overset{\circ}{\sigma}_{12}(x_1, 0; z) = 0, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{22}(x_1, \infty; z) = \overset{\circ}{\sigma}_{12}(x_1, \infty; z) = 0, \end{aligned} \quad x_1 < \infty,$$

gdzie $\overset{\circ}{\sigma}_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$ oznacza bezwymiarowy tensor naprężenia w płaskim stanie odkształcenia $\overset{\circ}{\sigma}_{\alpha\beta} = \hat{\sigma}_{\alpha\beta} / \mu_0$, a pozostałe wielkości są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} \mu &= \hat{\mu} / \mu_0, \quad x_\alpha = \hat{x}_\alpha / x_0, \quad z = t \sqrt{\mu_0} / x_0 \sqrt{\varrho_0}, \quad \lambda = \hat{\lambda} / \mu_0, \\ \hat{\lambda} &= \hat{\lambda}(\hat{x}_\alpha), \quad \hat{\mu} = \hat{\mu}(\hat{x}_\alpha) - \text{współczynniki Lamégo,} \\ \hat{x}_\alpha &- \text{współrzędne kartezjańskie,} \end{aligned}$$

ρ_0 - stała gęstość ośrodka,

$$\mu_0 = \hat{\mu}_0(\hat{x}_0),$$

\hat{x}_0 - ustalony punkt płaszczyzny (x_1, x_2) ,

x_0 - charakterystyczna długość,

τ - bezwymiarowy czas.

Po tej dygresji, ustalającej genezę podjętego tematu, wracamy do analizy równania (3.13). Przyjmujemy rozwiązanie równania (3.13) w postaci funkcji harmonicznyc

$$\begin{aligned} G_{xx}(x, z; t) &= \alpha(z) \exp [i (sx - pt)] , \\ G_{zz}(x, z; t) &= \beta(z) \exp [i (sx - pt)] , \\ G_{xz}(x, z; t) &= \gamma(z) \exp [i (sx - pt)] , \end{aligned} \quad (3.17)$$

w których α, β, γ są funkcjami tylko z , malejącymi w sposób niekoniecznie eksponencjalny przy $z \rightarrow \infty$ oraz $2\pi/p, 2\pi/s, C_R = p/s$ oznaczają odpowiednio okres, długość i prędkość propagacji fali (prędkość Rayleigha). Podstawiając (3.17) do (3.13) i (3.14) otrzymamy

$$\begin{aligned} \rho^2 [B_1 \alpha(z) + f(z) \beta(z)] &= \rho^{-1} [-s^2 \alpha(z) + i s \gamma'(z)] , \\ \rho^2 [f(z) \alpha(z) - B f(z) g(z) \beta(z)] &= \rho^{-1} [i s \gamma'(z) + \beta''(z)] , \\ 2B_2(z) \rho^2 \gamma(z) &= \rho^{-1} [i s \alpha'(z) + \gamma''(z) - s^2 \gamma(z) + i s \beta'(z)] \end{aligned} \quad (3.18)$$

oraz

$$\begin{aligned} \beta(0) = \gamma(0) &= 0 , \\ \beta(\infty) = \gamma(\infty) &= 0 , \end{aligned} \quad (3.18')$$

gdzie primy oznaczają różniczkowanie po z .

Równania (3.18) mogą być zastąpione układem

$$\begin{aligned} \rho^2 [(B_1 + f(z)) \alpha(z) + f(z)(1 - Bg(z)) \beta(z)] &= \rho^{-1} [-s^2 \alpha(z) + \beta''(z) + 2i s \gamma'(z)] , \\ \rho^2 [(B_1 - f(z)) \alpha(z) + f(z)(1 + Bg(z)) \beta(z)] &= \rho^{-1} [-s^2 \alpha(z) - \beta''(z)] , \\ -\rho^2 \gamma(z) &= (2B_2 \rho)^{-1} [i s \alpha'(z) + i s \beta'(z) - s^2 \gamma(z) + \gamma''(z)] . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Z równania (3.19)₂ wyznaczamy

$$\alpha(z) = -\mathcal{K}^{-1}[f(z)(1+B(z)g(z)) + \frac{1}{\rho p^2} D^2] \beta(z) \quad (3.20)$$

gdzie

$$\mathcal{K} = [B_1 - f(z) + \rho^{-1}(\frac{s}{p})^2] , \quad D = \frac{d}{dz} . \quad (3.21)$$

Z równania (3.19)₃ możemy obliczyć

$$2 \text{ i s } \gamma(z) = \mathcal{K}^{-1} D [2is D \gamma(z) - 2s^2(\alpha(z) + \beta(z))] . \quad (3.22)$$

Równanie (3.19)₁ pozwala na określenie wielkości (2 i s D) występującej w wyrażeniu (3.22)

$$2is D \gamma(z) = [\rho p^2(B_1 + f(z)) + s^2] \alpha(z) - D^2 \beta(z) + \rho p^2 f(z)(1 - Bg(z)) \beta(z) .$$

Stąd i z wzoru (3.22) otrzymujemy

$$2 \text{ i s } \gamma(z) = \mathcal{K}^{-1} D \{ \mathcal{W}^0 \} \beta(z) , \quad (3.23)$$

gdzie

$$\mathcal{K} = s^2 - 2B_2 \rho p^2 = s^2 [1 - 2B_2 \rho (\frac{p}{s})^2] , \quad (3.24)$$

$$\{ \mathcal{W}^0 \} \beta(z) = \mathcal{L} \alpha(z) - D^2 \beta(z) + \mathcal{M} \beta(z) .$$

W ostatnim wzorze oznaczono

$$\mathcal{L} = \rho p^2 (B_1 + f(z)) - s^2 , \quad (3.25)$$

$$\mathcal{M} = \rho p^2 f(z)(1 - Bg(z)) - 2s^2 .$$

Po podstawieniu równania (3.20) do (3.24)₂ i wykorzystaniu zależności

$$\mathcal{M} = \mathcal{L} - [\rho p^2 (Bf(z)g(z) + B_1) + s^2] ,$$

przegrupowaniu wyrazów i uporządkowaniu zapiszemy operator $\{ \mathcal{W}^0 \}$ w postaci

$$\{ \mathcal{W}^0 \} = -\mathcal{A} [D^2 - s^2(1 - \mathcal{R})] + 4s^2 \mathcal{E} , \quad (3.26)$$

gdzie

$$\mathcal{A} = 2 \mathcal{K}^{-1} B_1(z) ,$$

$$\mathcal{R} = \rho (\frac{p}{s})^2 [(B_1)^{-1} f^2(z) + Bf(z)g(z)] , \quad (3.27)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{K}^{-1}(z) [f(z) - B_1(z) - \frac{1}{2} \rho^{-1} (\frac{s}{p})^2] .$$

Należy zwrócić uwagę na operator $\{W^0\}$ w postaci (3.26), działający na funkcję $\beta(z)$, który spełnia istotną rolę w sensie generującym zasadnicze równanie różniczkowe rozwiązujące problem.

Zatem równanie (3.23), określające amplitudę naprężeń stycznich $\gamma(z)$, wyrazi się wzorem

$$2 \text{ is } \gamma(z) = \mathcal{H}^{-1}(z) \mathcal{D} \{ (-A(z)) [D^2 - s^2(1 - \mathcal{R}(z))] + 4s^2 \mathcal{E}(z) \} \beta(z). \quad (3.28)$$

Korzystając z równania (3.18)₂ wyznaczamy związki różniczkowe, które powinna spełniać funkcja β . Mamy równanie

$$Bf(z)g(z)\beta(z) + \frac{1}{\rho p^2} D^2 \beta(z) - f(z)\alpha(z) + \frac{1}{\rho p^2} \text{is}^2 \mathcal{D} \gamma(z) = 0, \quad (3.29)$$

do którego podstawiamy $\alpha(z)$ i $\gamma(z)$ dane przez (3.20) i (3.28). Po redukcji i pogrupowaniu odpowiednich wyrazów otrzymamy

$$[Bfg + f^2 \mathcal{H}^{-1}(1 + Bg)]\beta + \frac{1}{\rho p^2} [1 + f \mathcal{H}^{-1}] D^2 \beta + \frac{1}{\rho p^2} \frac{1}{2} \mathcal{D} \mathcal{H}^{-1} \mathcal{D} (-A) [D^2 - s^2(1 - \mathcal{R})] + \frac{1}{\rho p^2} \frac{1}{2} D^2 \mathcal{H}^{-1} \mathcal{D} 4s^2 \mathcal{E} = 0. \quad (3.30)$$

Do dalszej analizy zapiszemy (3.30) w postaci

$$\begin{aligned} & (\mathcal{D} \mathcal{H}^{-1}(z) \mathcal{D} - 1) (-A(z)) [D^2 - s^2(1 - \mathcal{R}(z))] \beta(z) + \\ & + (2[1 + \mathcal{H}^{-1}(z)(f(z) - B_1(z))] D^2 + 4s^2 \mathcal{D} \mathcal{H}^{-1}(z) \mathcal{D} \mathcal{E}(z)) \beta(z) + \\ & + 2 \rho p^2 \{ B(z)f(z)g(z) + \mathcal{H}^{-1}(z)(f(z)B(z)f(z)g(z) + \\ & + B_1(z)[\rho^{-1}(\frac{s}{\rho})^2 - B(z)f(z)g(z)]) \} \beta(z) = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Jest zatem widoczne, że funkcja $\beta(z)$ powinna spełniać równanie różniczkowe zwyczajne czwartego rzędu liniowe o zmiennych współczynnikach, do których określenia służą charakterystyki materiałowe założonego ośrodka, właściwości sprężyste anizotropii i niejednorodności. Oczywiście muszą istnieć operacje odwrotne: $\mathcal{H}^{-1}(z)$, $\mathcal{H}^{-1}(z)$.

Problem fal powierzchniowych typu Rayleigha redukuje się więc do badania równania (3.31) z następującymi warunkami brzegowymi

$$\beta_z(0) = \beta_z(\infty) = 0,$$

$$D \left\{ \mathcal{K}^{-1} B_1 [D^2 - s^2(1 - \mathcal{R})] - 2s^2 \mathcal{E} \right\} \beta_z(z) \Big|_{\substack{z=0 \\ z=\infty}} = 0 \quad (3.32)$$

Rozwiązanie polega na znalezieniu nieznikającej funkcji $\beta_z = \beta_z(z)$ spełniającej (3.31) i (3.32) oraz stałej $C_R = C_R(s)$, określającej poszukiwaną prędkość fali Rayleigha, która zależna jest w ogólności od liczby falowej s , przyjętej funkcji niejednorodności i charakteru anizotropii. Jeśli funkcja $\beta_z(z)$ zostanie wyznaczona, to amplitudy naprężeń $\alpha(z)$ i $\beta_z(z)$ występujące we wzorach (3.17) oblicza się wg równań (3.20) i (3.28). Z tych względów nazwiemy funkcję $\beta_z(z)$, za Ignaczakiem, funkcją naprężeń.

4. Dyskusja równania dla funkcji naprężeń w półprzestrzeni transwersalnie izotropowej i niejednorodnej

Równanie (3.31) dla funkcji naprężeń w półprzestrzeni sprężystej transwersalnie izotropowej, niejednorodnej (zgodnie z poczynionymi poprzednio założeniami) jest tak przedstawione, że można wydzielić trzy człony, z których każdy wnosi szczególne informacje związane z właściwościami ośrodka. Pierwszy i drugi z tych członów mają postać

$$(D \mathcal{K}^{-1}(z) D - 1) (-\mathcal{A}(z)) [D^2 - s^2(1 - \mathcal{R}(z))] \beta_z(z), \quad (4.1)$$

$$(2[1 + \mathcal{K}^{-1}(z) \mathcal{E}(z) - B_1(z)]) D^2 + 4s^2 D \mathcal{K}^{-1}(z) D \mathcal{E}(z) \beta_z(z). \quad (4.2)$$

Trzeci człon stanowi pozostałą część lewej strony równania (3.31). Rozpatrzmy te człony w kolejności podanej w przedmowie na stronie 5.

4.1. Ciało transwersalnie izotropowe z "małą niejednorodnością"

Można wykazać, że drugi człon równania (3.31) określony przez wyrażenie (4.2) znika tożsamościowo, jeśli ośrodek staje się jednorodny. W przypadku, gdy

$$T(z) \beta_j(z) = (T_1(z) + T_2(z)) \beta_j(z) \ll 1, \quad (4.3)$$

gdzie

$$T_1(z) = 2[1 + \mathcal{H}^{-1}(f(z) - B_1(z))] D^2,$$

$$T_2(z) = 4s^2 D \mathcal{H}^{-1}(z) D \mathcal{E}(z),$$

człon (4.2) można uznać za mały w porównaniu z członem wiodącym (4.1) i równanie (3.31) można zastąpić równaniem

$$\begin{aligned} & (D \mathcal{H}^{-1}(z) D - 1)(-A(z)) [D^2 - s^2(1 - \mathcal{R}(z))] \beta_j(z) + \\ & + 2 \varphi p^2 \{ B(z) f(z) g(z) + \mathcal{H}^{-1}(z) (f(z) B(z) f(z) g(z) + \\ & + B_1(z) [\varphi^{-1} (\frac{s}{\rho})^2 - B(z) f(z) g(z)] \} \beta_j(z) = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Równanie to może mieć zastosowanie do przybliżonego opisu fali powierzchniowej w ośrodku transwersalnie izotropowym z "małą niejednorodnością". Określenie stopnia dokładności rozwiązania wynikać będzie z oszacowania członu (4.3). Zbadamy bliżej $T(z)$. Podstawiając do (4.3)_{2,3} wielkości zdefiniowane przez (3.5), (3.6), (3.21), (3.24)₁, (3.27)₂ otrzymamy

$$\begin{aligned} T_1(z) &= 2 + \frac{2}{1 + \hat{V}(z)} [\hat{V}(z)(1 + \nu(z)) + (1 + \frac{\hat{E}(z)}{\hat{E}(z)} \hat{V}^2(z))] \times \\ & \times \left[\frac{\hat{V}(z)}{1 + \hat{V}(z)} \left(\frac{\hat{E}(z)}{\hat{E}(z)} \hat{V}(z) - \nu(z) \right) + \frac{2 - \hat{\Omega}(z)}{\hat{\Omega}(z)} \right]^{-1} D^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

oraz

$$\begin{aligned} T_2(z) &= -4D \frac{1}{1 - \hat{\Omega}(z)} D \left[\frac{\hat{V}(z)}{1 + \hat{V}(z)} \left(\frac{\hat{E}(z)}{\hat{E}(z)} \hat{V}(z) - \nu(z) \right) + \frac{1 - \hat{\Omega}(z)}{\hat{\Omega}(z)} \right] \times \\ & \times \left[\frac{\hat{V}(z)}{1 + \hat{V}(z)} \left(\frac{\hat{E}(z)}{\hat{E}(z)} \hat{V}(z) - \nu(z) \right) + \frac{2 - \hat{\Omega}(z)}{\hat{\Omega}(z)} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Zakładając dalej, że wielkości występujące w (4.5), (4.6) nie zależą od współrzędnej z (co oznacza, że przechodzimy do

ośrodka anizotropowego jednorodnego) i wprowadzając relacje

$$h = \frac{E}{\hat{E}}, \quad k = \frac{\hat{\nu}}{\nu} \quad (4.7)$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} T = T_1 + T_2 = 2 \left\{ 1 + \frac{1}{(1-\hat{\Omega})(1+k\nu)} (3(k\nu + k\nu^2 - hk^2\nu^2 + 1) - \right. \\ \left. - \hat{\Omega} [k\nu(1+\nu) + (1-hk^2\nu^2)] - 4 \frac{1}{\hat{\Omega}} (1+k\nu)) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{k\nu^2}{1+k\nu} (hk - 1) + \frac{2-\hat{\Omega}}{\hat{\Omega}} \right]^{-1} \right\}. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Przechodząc z h i k do 1 dostajemy

$$\lim_{h,k \rightarrow 1} T = 1 + \frac{1}{1-\hat{\Omega}} \left\{ 3 - \hat{\Omega} - 2 \frac{1}{\hat{\Omega}} \right\} \frac{\hat{\Omega}}{2-\hat{\Omega}} = 0. \quad (4.9)$$

Wynik powyższy oznacza, że w przypadku $\hat{E} \rightarrow E$ i $\hat{\nu} \rightarrow \nu$ i dla ośrodka jednorodnego (4.2) znika.

4.2. Ciało "słabo anizotropowe", niejednorodne

Można wykazać, że jeśli ośrodek jest izotropowy niejednorodny, to trzeci człon równania (3.31) równa się zero tożsamościowo. Przyjmując teraz, że człon ten, tzn. wyrażenie

$$\begin{aligned} 2 \rho p^2 \left\{ (B(z)f(z)g(z)) + \mathcal{K}^{-1}(z) \left(f(z)(B(z)f(z)g(z)) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_1(z) \left[\varphi^{-1} \left(\frac{s}{p} \right)^2 - (B(z)f(z)g(z)) \right] \right) \right\} \beta(z) \quad (4.10) \end{aligned}$$

jest małe w stosunku do pozostałych członów równania (3.31), otrzymamy uproszczone równanie w postaci

$$\begin{aligned} (D \mathcal{K}^{-1}(z) D^{-1}) (-A(z)) [D^2 - s^2(1 - \mathcal{R}(z))] \beta(z) + \\ + (2[1 + \mathcal{K}^{-1}(z)(f(z) - B_1(z))] D^2 + 4s^2 D \mathcal{K}^{-1}(z) D \mathcal{G}(z)) \beta(z) = 0, \quad (4.11) \end{aligned}$$

które opisuje funkcję naprężeń w ośrodku "słabo anizotropowym", niejednorodnym.

4.3. Ciało "słabo anizotropowe" z "małą niejednorodnością"

Dwa poprzednie przypadki szczególne w punktach 4.1, 4.2 implikują przybliżone równanie dla funkcji naprężeń opisujące ośrodek "słabo anizotropowy", "mało niejednorodny" w postaci

$$(D\mathcal{K}^{-1}(z)D-1)A(z)|D^2 - s^2(1-\mathcal{R}(z))|\beta(z) = 0. \quad (4.12)$$

Równanie (4.12) może mieć zastosowanie przy poszukiwaniu aproksymacyjnego rozwiązania problemu fal powierzchniowych sformułowanego w rozdziale 3.2, patrz równania (3.31), (3.32).

4.4. Ciało transwersalnie izotropowe, jednorodne

Przedstawimy teraz równanie opisujące dokładnie funkcję naprężeń $\beta(z)$ w półprzestrzeni transwersalnie izotropowej, jednorodnej. W tym przypadku współczynniki równania nie zależą od z i równanie (3.31) przyjmie postać

$$\begin{aligned} & \bar{A}(\bar{\mathcal{K}}^{-1}D^2-1)[D^2 - s^2(1-\bar{\mathcal{R}})]\beta(z) - \\ & - (2[1-\bar{\mathcal{K}}^{-1}(\bar{f}-\bar{B}_1)] + 4s^2\bar{\mathcal{K}}^{-1}\bar{\mathcal{G}})D^2\beta(z) - \\ & - 2\varrho\rho^2\{\bar{B}\bar{f}\bar{g} + \bar{\mathcal{K}}^{-1}(\bar{f}(\bar{B}\bar{f}\bar{g}) + \bar{B}_1[\varrho^{-1}(\frac{s}{\rho})^2 - \\ & - \bar{B}\bar{f}\bar{g}])\}\beta(z) = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{A} &= 2\bar{B}_1\bar{\mathcal{K}}^{-1} = 2\frac{1}{1+k}(hk^2\nu^2-1)[hk\nu^2\frac{k-1}{1+k\nu} + \frac{2-\hat{\Omega}}{\hat{\Omega}}]^{-1}, \\ \bar{\mathcal{K}} &= s^2(1-\hat{\Omega}), \\ \bar{\mathcal{R}} &= \frac{1}{2}\hat{\Omega}[2 - \frac{\nu+1}{hk^2-1}], \\ \bar{\mathcal{K}} &= [\bar{B}_1-\bar{f} + \varrho^{-1}(\frac{s}{\rho})^2] = \frac{1}{2\mu}[hk\nu^2\frac{k-1}{1+k\nu} + \frac{2-\hat{\Omega}}{\hat{\Omega}}], \\ \bar{f}-\bar{B}_1 &= \frac{1}{2\mu(1+k\nu)}[k\nu(1+\nu) - (hk^2\nu^2-1)], \\ \bar{\mathcal{G}} &= \bar{\mathcal{K}}^{-1}[\bar{f}-\bar{B}_1 - \frac{1}{2}\varrho^{-1}(\frac{s}{\rho})^2] = [k\nu\frac{1+\nu}{1+k\nu} - \frac{hk^2\nu^2-1}{1+k\nu} - \frac{1}{\hat{\Omega}}] \times \\ & \times [hk\nu^2\frac{k-1}{1+k\nu} + \frac{2-\hat{\Omega}}{\hat{\Omega}}]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \bar{B} \bar{f} \bar{g} &= \frac{1}{\hat{\epsilon}} (1 - v^2) = \frac{1}{4\mu} (1 - v) = \frac{1}{4\mu} \frac{1}{1 - \mathcal{L}} , \\ 2[1 - \bar{\mathcal{H}}^{-1}(\bar{f} - \bar{B}_1)] + 4s^2 \bar{\mathcal{H}}^{-1} \bar{G} &= \\ &= 2(1 + \left\{ \frac{1}{1 + kv} [kv(1 + v) - (hk^2 v^2 - 1)] \times \right. \\ &\quad \left. \times (1 + 2 \frac{1}{1 - \hat{\Omega}}) + 2 \frac{1}{\hat{\Omega}(1 - \hat{\Omega})} \right\} [hk v^2 \frac{k-1}{1 + kv} + \frac{2 - \hat{\Omega}}{\hat{\Omega}}]^{-1} , \\ \bar{f}(\bar{B} \bar{f} \bar{g}) &= \frac{hk v}{B\mu^2(1 - \mathcal{L})} , \quad \bar{B}_1 \varphi^{-1}(\frac{s}{p})^2 = \frac{hk v^2 - 1}{2\hat{\mu}(1 + kv) \hat{\Omega}} , \quad (4.15) \\ \bar{B} \bar{B}_1 \bar{f} \bar{g} &= \frac{hk^2 v^2 - 1}{\bar{B} \hat{\mu} \mu (1 - kv)(1 - \mathcal{L})} . \end{aligned}$$

Skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\{ \bar{B} \bar{f} \bar{g} + \bar{\mathcal{H}}^{-1}[\bar{f}(\bar{B} \bar{f} \bar{g}) + \bar{B}_1[\varphi^{-1}(\frac{s}{p})^2 - \bar{B} \bar{f} \bar{g}]] \} \\ &= \frac{1}{4\mu} \frac{1}{(1 - \mathcal{L})} \left\{ 1 + \left[\frac{kv(1 + v)}{1 + kv} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{4h(hk^2 v^2 - 1)(1 - \mathcal{L})}{\hat{\Omega}(1 + v)} - \frac{hk^2 v^2 - 1}{1 + kv} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times [hk^2 v^2 \frac{k-1}{1 + kv} + \frac{2 - \hat{\Omega}}{\hat{\Omega}}]^{-1} \right\} , \quad (4.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \varphi p^2 \frac{1}{4\mu} &= s^2 \varphi \left(\frac{p}{s}\right)^2 \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2} s^2 \frac{C_R^2}{C^2} \\ &= \frac{1}{2} s^2 \Omega . \quad (4.17) \end{aligned}$$

Ze względu na (4.16) i (4.17) człon z nawiasem klamrowym w równaniu (4.13) można wyrazić w postaci

$$2 \varphi p^2 \{ \dots \} = \frac{1}{2} s^2 \Omega \frac{1}{(1 - \mathcal{L})} \{ 1 + [\dots] [---]^{-1} \} , \quad (4.18)$$

gdzie

$$[\dots] = \frac{k(1 + v)}{1 + kv} + \frac{4h(hk^2 v^2 - 1)(1 - \mathcal{L})}{\hat{\Omega}(1 + v)} - \frac{hk^2 v^2 - 1}{1 + kv} ,$$

$$[---] = hk^2 v^2 \frac{k-1}{1 + kv} + \frac{2 - \hat{\Omega}}{\hat{\Omega}} .$$

Podstawiając (4.18) do (4.13) otrzymujemy ostateczną postać równania na funkcję naprężeń $\hat{\beta}_y$ dla ciała transwersalnie izotropowego jednorodnego. Z równania tego łatwo wydedukować równanie uproszczone dla ośrodka "słabo anizotropowego" jednorodnego na podstawie rozważań przedstawionych w punktach 4.2 i 4.3.

4.5. Ciało izotropowe niejednorodne

Na zakończenie omawiania przypadków szczególnych równania (3.31) napiszemy odpowiednie równanie dla problemu fal powierzchniowych w półprzestrzeni sprężystej izotropowej, niejednorodnej. Otrzymamy typ równania podobny do (4.11), lecz ze współczynnikami znacznie uproszczonymi. Równanie (3.31) przedstawimy teraz w postaci

$$\begin{aligned} & (D \hat{\mathcal{H}}^{-1}(z) D - 1) (-\hat{A}) [D^2 - s^2 (1 - \hat{\mathcal{R}}(z))] \hat{\beta}_y(z) + \\ & + (2[1 + \hat{\mathcal{H}}^{-1}(z)(\hat{f}(z) + \hat{B}_1(z))] + 4s^2 D \hat{\mathcal{H}}^{-1}(z) D \hat{\mathcal{G}}(z)) \hat{\beta}_y(z) = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}(z) &= s^2 (1 - \Omega(z)), \\ \hat{A}(z) &= - \frac{\Omega(z)}{(1 - \kappa)(2 - \Omega(z))}, \\ \hat{\mathcal{R}}(z) &= \kappa \Omega(z), \\ \hat{\mathcal{H}}^{-1}(z) &= \frac{1}{2\mu(z)} \frac{2 - \Omega(z)}{\Omega(z)}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} 2[1 - \hat{\mathcal{H}}^{-1}(z)(\hat{f}(z) - \hat{B}_1(z))] &= 4 \frac{1}{2 - \Omega(z)}, \\ \hat{\mathcal{G}}(z) &= \hat{\mathcal{H}}^{-1}[\hat{f}(z) - \hat{B}_1(z) - \frac{1}{2} \rho^{-1} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^2] = \frac{1 - \Omega(z)}{2 - \Omega(z)}. \end{aligned}$$

Podstawiając (4.20) do (4.19) otrzymamy równanie dla $\hat{\beta}_y(z)$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{s^2} D \frac{1}{1 - \Omega} D - 1\right) \frac{\Omega}{(1 - \kappa)(2 - \Omega)} [D^2 - s^2 (1 - \kappa \Omega)] \hat{\beta}_y(z) + \\ & + 4 \left(\frac{1}{2 - \Omega} D^2 - D \frac{1}{1 - \Omega} D \frac{1 - \Omega}{2 - \Omega}\right) \hat{\beta}_y(z) = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Amplitudy α i γ określone wzorami (3.20) i (3.28) przyjmują postać

$$\alpha(z) = -\frac{1}{s^2(2-\Omega)} (s^2\Omega + 2D^2)\hat{\beta}(z),$$

$$2is\gamma(z) = \frac{1}{s^2(1-\Omega)} D \left\{ \frac{\Omega}{(1-\kappa)(2-\Omega)} [D^2 - s^2(1-\kappa\Omega)]\hat{\beta}(z) + \right. \\ \left. - 4s^2 \frac{1-\Omega(z)}{2-\Omega(z)} \hat{\beta}(z) \right\}. \quad (4.22)$$

W tym przypadku żądamy, aby funkcja $\hat{\beta}(z)$ spełniała warunki

$$\hat{\beta}(0) = \hat{\beta}(\infty) = 0,$$

$$D \left\{ \frac{\Omega(z)}{2-\Omega(z)} \frac{1}{1-\kappa} [D^2 - s^2(1-\kappa\Omega)] \hat{\beta}(z) - 4s^2 \frac{1-\Omega(z)}{2-\Omega(z)} \hat{\beta}(z) \right\} \Bigg|_{z=0}^{z=\infty} = 0. \quad (4.23)$$

W równaniach (4.21) - (4.23) oznaczono

$$\kappa(z) = \frac{1-2\nu(z)}{2(1-\nu(z))}, \quad \nu(z) = \frac{1-2\kappa(z)}{2(1-\kappa(z))},$$

$$\Omega(z) = \frac{c_R^2(z)}{c_2^2(z)}, \quad c_2(z) = \left(\frac{\mu(z)}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.24)$$

Równania (4.21)-(4.23) są znane w literaturze. Zostały wypro-
wadzone przez Ignaczaka i przedstawione w jego rozprawie habi-
litacyjnej w 1963 roku pt. "Zagadnienia zupełności dla naprę-
żeńiowych równań ruchu w liniowej teorii sprężystości", patrz
w szczególności rozdz. II, "Fale Rayleigha w niejednorodnej,
izotropowej i sprężystej półprzestrzeni", praca [1] lub [2 i 3].

5. Metoda rozwiązania wyprowadzonych równań dla ośrodka sprężystego anizotropowego, niejednorodnego

Na podstawie ustaleń poczynionych dotychczas w zakresie opisu ośrodka niejednorodnego przy pomocy równań naprężeniowych i usilnego poszukiwania sposobów ich rozwiązania (2.6), (3.15), (4.21) w celu otrzymania wyników jakościowych i ilościowych (patrz Ignaczak [1], Rao [15], Rożnowski [11,12], Klecha [16]), autor podjął próbę rozpatrzenia problemu fal powierzchniowych dla ciała sprężystego o złożonej strukturze wewnętrznej izotropowo-transwersalnej, zbliżonej do struktury ciał rzeczywistych, a więc ciała anizotropowego, niejednorodnego - ale nie w sensie ogólnym, lecz opisanego przez możliwie małą liczbę parametrów.

Dążono do wyprowadzenia i przedstawienia równania funkcji naprężeń na wzór funkcji naprężeń dla ośrodka jednorodnego podanego przez Beltrami-Michella i niejednorodnego rozpatrzonego przez Ignaczaka. W rozdziale czwartym, równanie (3.31), wykazano, że taka funkcja dla ośrodka poprzecznie izotropowego, niejednorodnego w płaskim stanie odkształcenia spełnia równanie różniczkowe zwyczajne czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach. Przejście od równania (3.31) do (4.21) i zachodzące między nimi pewne analogie sugerują istnienie wspólnych cech zawartych w rozwiązaniach dla obu tych przypadków, co może rzutować na stosowne metody rozwiązania. W pracy [11] autor rozważał równanie typu (4.21). Sformułował i rozwiązał w niej problem fal powierzchniowych w półprzestrzeni sprężystej izotropowej, z "małą niejednorodnością" (1977) przy dwóch założeniach:

- zmiana modułu sprężystości poprzecznej półprzestrzeni jest monotoniczna wraz z głębokością i określona przez funkcję

$$\mu(z) = \frac{\mu_0 \mu_\infty}{\mu_0 - (\mu_0 - \mu_\infty) \exp[-2\xi z]}, \quad \xi > 0, \quad (5.1)$$

gdzie

μ_0, μ_∞ - oznaczają moduły sprężystości poprzecznej na brzegu półprzestrzeni, $z=0$ i w nieskończoności $z=\infty$,

ξ - jest parametrem niejednorodności,

- pomija się w równaniu (4.21) człon, który znika tożsamościowo, kiedy półprzestrzeń jest jednorodna, tj. człon o postaci

$$4 \left[\frac{1}{2-\Omega} D^2 - D \frac{1}{1-\Omega} D \frac{1-\Omega}{2-\Omega} \right] \hat{\beta}(z). \quad (5.2)$$

W tym przypadku otrzymano funkcję $\hat{\beta}(z)$ w postaci zamkniętej i zbadano równanie dyspersji przyjmując, że parametr niejednorodności ε jest dostatecznie duży, aby uzasadnione były rozwinięcia asymptotyczne, z których korzystano.

Ogólny problem własny wg równania (4.21) z warunkami (4.23) przy założeniu niejednorodności opisanej przez (5.1) był przedmiotem rozważań w pracy [12]. Na podstawie wyników uzyskanych w [11] autor przedstawił w niej metodę rozwiązania na drodze kolejnych przybliżeń.

Ze względu na to, że otrzymane w obecnej pracy równania (3.31), (4.4), (4.11), (4.12), (4.13) są podobnego typu, co rozważane w publikacjach [11] i [12], prześledzimy pokrótce te równania w notacji operatorowej, jak to przyjęto w [11] i [12].

Równanie (3.31) zapiszemy w postaci

$$L_1^2 \Gamma(x) L_2^2 \beta(x) = F(x), \quad (5.3)$$

gdzie występują wyrażenia typu

$$L_1^2 = D f_1(x) D - 1,$$

$$L_2^2 = D^2 - s^2(1 - f_2(x)),$$

$$F(x) = P(x) + G(x), \quad (5.4)$$

$$P(x) = [\pi_1(x) D^2 + D 4s^2 f_1(x) D \pi_2(x)] \beta(x),$$

$$G(x) = g_1(x) \beta(x).$$

Funkcje $(f_1(x), f_2(x), \pi_1(x), \pi_2(x), g_1(x), \Gamma(x)) \in C^k$, $k=1,2$.

Oznaczając

$$v(x) = \Gamma(x) L_2^2 \beta(x) \quad (5.5)$$

i podstawiając (5.5) do (5.3) otrzymamy

$$L_1^2 v(x) = F(x) \quad (5.6)$$

oraz

$$L_2^2 \tilde{f}(x) = \Gamma^{-1}(x) v(x) . \quad (5.7)$$

Założmy, że

$$\begin{aligned} v(x) &\stackrel{\text{df}}{=} D \varphi(x) , \\ F(x) &\stackrel{\text{df}}{=} D f_1(x) q(x) . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Podstawiając (5.8)₁ do (5.6) i korzystając z (5.4)₁ otrzymujemy

$$\begin{aligned} L_1^2 v(x) &= L_1^2 D \varphi(x) = (D f_1(x) D - 1) D \varphi(x) = \\ &= D f_1(x) \{ D^2 - h(x) \} \varphi(x) = D f_1(x) q(x) . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Z równania (5.9) możemy napisać bezpośrednio, że

$$D f_1(x) \{ D^2 \varphi(x) - h(x) \varphi(x) - q(x) \} = 0 ,$$

a następnie

$$\begin{aligned} D^2 \varphi(x) - h(x) \varphi(x) &= q(x) , \\ h(x) &= (f_1(x))^{-1} , f(x) \neq 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

i jeśli $\varphi(x)$ spełnia (5.10), to również (5.8) spełnia równanie (5.6).

Porównując równania (5.3)-(5.10) ze wzorami (2.10)-(2.14) w pracy [12] widzimy analogię, która pokazuje, że metoda rozwiązania równania (3.31) i równań uproszczonych stąd wynikających może być przyjęta z pracy [12]. Zatem rozwiązanie równania opisującego funkcję naprężeń w ośrodku anizotropowym i niejednorodnym rozpatrywanym w pracy można poszukiwać postępując wg rozważań w [12], tzn. szukając rozwiązania układu równań

$$\begin{aligned} D^2 \varphi(x) - h(x) \varphi(x) &= q(x) , \\ L_2^2 \tilde{f}(x) &= (\Gamma(x))^{-1} D \varphi(x) \end{aligned} \quad (5.11)$$

z warunkami brzegowymi

$$\tilde{f}(0) = \tilde{f}(\infty) = 0 , \quad (5.12)$$

$$0 \{ \mathcal{H}^{-1}(x) B_1(x) [D^2 - s^2(1 - \mathcal{R}(z))] - 2s^2 \mathcal{E}(x) \} \mathcal{B}(x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} = 0 . \quad (5.12)$$

Analiza funkcji $q(x)$ jest szerzej rozwinięta w pracy [12].

Na szczególną uwagę zasługuje równanie (4.12). W tym przypadku $F(x) \equiv 0$ i przy zręcznym skonstruowaniu funkcji $\mathcal{H}^{-1}(x)$, $A(x)$, $\mathcal{R}(x)$, które wyrazić należy wg przyjętych w (5.3) oznaczeniach, poszczególne etapy rozwiązania można odczytać bezpośrednio z wyników uzyskanych w pracy [11]. W tym przypadku mamy zgodnie z (5.1) i (5.4) następujące równanie rozwiązujące

$$\begin{aligned} D^2 \varphi(x) - h(x) \varphi(x) &= 0 , \\ L^2_2 \mathcal{B}(x) &= (\Gamma(x))^{-1} D \varphi(x) , \end{aligned} \quad (5.13)$$

gdzie

$$\begin{aligned} h(x) &= (\mathcal{H}^{-1}(x))^{-1} = \mathcal{H}(x) = s^2 [1 - 2B \varphi(\frac{D}{S})^2] , \\ \Gamma(x) &= -A(x) = -2 \mathcal{H}^{-1}(x) B_1(x) , \\ f_2(x) &= \mathcal{R}(x) = \varphi(\frac{D}{S})^2 [(B_1)^{-1} f^2(x) + B f(x) g(x)] . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Korzystając z adoptowanego rozwiązania należy przeprowadzić właściwą interpretację fizyczną sformułowanego problemu.

6. Pewne rozwiązanie i analiza równania fali powierzchniowej w półprzestrzeni "słabo anizotropowej" z "małą niejednorodnością"

Równanie (3.31) opisuje w ogólności sformułowany problem fali powierzchniowej typu Rayleigha w półprzestrzeni sprężystej transwersalnie izotropowej niejednorodnej i pozwala na wyselekcjonowanie szczególnego równania różniczkowego (4.12), które opisuje w przybliżeniu fale powierzchniowe w ośrodku "słabo anizotropowym" z "małą niejednorodnością". Przeprowadzimy dyskusję tego równania, a następnie zakładając określoną zmienność modułów

sprężystości poprzecznej i stałe współczynniki Poissona rozwiąże-
my równanie (4.12) na podstawie metody przedłożonej w rozdziale
5. Po wyprowadzeniu równania dyspersji i aproksymacji odpowied-
nych wyrażeń względem dużego parametru , otrzymamy związek na
tyle prosty, że pozwala na analizę ilościową wpływu anizotropii
i niejednorodności na prędkość propagacji fali w funkcji wielkoś-
ci zawierającej liczbę falową s.

6.1. Sformułowanie zagadnienia i rozwiązanie problemu

Rozważmy równanie definiujące tzw. funkcję naprężeń $\beta(z)$
i przypomnijmy, że β jest amplitudą naprężeń normalnych $\sigma_{33} =$
 $= \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(x, z; t)$, patrz (3.17)

$$\left(\frac{1}{s^2} \mathcal{D} \mathcal{H}^{-1}(z) \mathcal{D} - 1\right) A(z) [D^2 - s^2(1 - \mathcal{R}(z))] \beta(z) = 0, \quad (6.1)$$

stosując oznaczenia:

$$\mathcal{D} = \frac{d}{dz} \quad - \text{operator różniczkowy}, \quad (6.2)$$

$$\mathcal{H}(z) = 1 - 2B_2 \rho \left(\frac{\rho}{s}\right)^2,$$

$$A(z) = 2\mathcal{H}^{-1} B_1(z),$$

$$\mathcal{R}(z) = \rho \left(\frac{\rho}{s}\right)^2 [(B_1)^{-1} f^2(z) + B(z) f(z) g(z)],$$

$$\mathcal{X}(z) = B_1(z) - f(z) + \rho^{-1} \left(\frac{s}{\rho}\right)^2,$$

$$B(z) = \frac{1}{E(z)},$$

$$B_1(z) = l^2(z) E(z) - \frac{1}{\hat{E}(z)},$$

$$B_2(z) = l(z) + \frac{1}{\hat{E}(z)},$$

$$f(z) = l(z)(1 + \nu(z)),$$

$$g(z) = l^{-1}(z)(1 - \nu(z)),$$

$$l(z) = \frac{\hat{\nu}(z)}{\hat{E}(z)},$$

ρ - gęstość ,

$E(z)$, $\hat{E}(z)$ - moduł Younga przy rozciąganiu i ściskaniu w kierun-
kach leżących w płaszczyźnie izotropii i odpowied-
nio w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny izo-
tropii,

$\nu(z), \hat{\nu}(z)$ - współczynnik Poissona określający poprzeczne zwężenie w płaszczyźnie izotropii przy rozciąganiu w tej płaszczyźnie oraz odpowiednio poprzeczne zwężenie przy rozciąganiu w kierunku prostopadłym do płaszczyzny izotropii.

Założono płaski stan odkształcenia.

Wprowadzamy operatory

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{s^2} \mathcal{D} \tilde{\mathcal{K}}^{-1}(z) \mathcal{D}^{-1} , \\ \mathcal{L}_2^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}^2 - s^2(1 - \mathcal{R}(z)) . \end{aligned} \quad (6.3)$$

Równanie (6.1) przyjmie postać

$$\mathcal{L}_1^2 A(z) \mathcal{L}_2^2 \beta(z) = 0 . \quad (6.4)$$

Jeśli oznaczymy

$$A(z) \mathcal{L}_2^2 \beta(z) = v(z) , \quad (6.5)$$

to otrzymamy dwa równania

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^2 v(z) &= 0 , \\ \mathcal{L}_2^2 \beta(z) &= A^{-1}(z) v(z) . \end{aligned} \quad (6.6)$$

Wykażemy, że równania różniczkowe (6.6) są tego samego typu. Podstawiamy

$$v = \mathcal{D} \varphi , \quad (6.7)$$

skąd

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^2 v(z) &= \mathcal{L}_1^2 \mathcal{D} \varphi(z) = \left(\frac{1}{s^2} \mathcal{D} \tilde{\mathcal{K}}^{-1}(z) \mathcal{D}^{-1} \right) \mathcal{D} \varphi(z) \\ &= \frac{1}{s^2} \mathcal{D} \tilde{\mathcal{K}}^{-1}(z) [\mathcal{D}^2 - s^2 \tilde{\mathcal{K}}(z)] \varphi(z) . \end{aligned} \quad (6.8)$$

Przekształcimy funkcje $\tilde{\mathcal{K}}(z)$, $\mathcal{R}(z)$ i $A(z)$:

$$a) \quad \tilde{\mathcal{K}}(z) = 1 - 2B_2 \varrho \left(\frac{\rho}{s} \right)^2 = 1 - 2 \frac{\hat{\nu}(z)+1}{\hat{\epsilon}(z)} \varrho \left(\frac{\rho}{s} \right)^2$$

$$= 1 - \frac{\rho}{\hat{\mu}(z)} C_R^2 = 1 - \Omega_n(z), \quad (6.9)$$

gdzie

$$\Omega_n = \frac{C_R^2}{\hat{c}_2^2(z)}, \quad \hat{c}_2 = \left(\frac{\hat{\mu}(z)}{\rho} \right)^{1/2}; \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{R}(z) &= \rho \left(\frac{\rho}{S} \right)^2 \left[(B_1)^{-1} f^2(z) + B(z) f(z) \sigma(z) \right] \\ &= \rho \left(\frac{\rho}{S} \right)^2 \left[\frac{\hat{\nu}^2 (1 + \nu(z))^2}{\hat{\nu}^2 E - \hat{E}} + \frac{1}{E} (1 + \nu)(1 - \nu) \right] \\ &= \rho \left(\frac{\rho}{S} \right)^2 \frac{1 + \nu}{2\hat{\mu}(1 + \hat{\nu})} \left[\frac{\hat{\nu}^2 (1 + \nu)}{\hat{\nu}^2 \frac{E}{E} - 1} + \frac{1}{E} (1 - \nu) \right] \\ &= \Omega_n(z) \mathcal{X}_n(z), \end{aligned} \quad (6.11)$$

o ile

$$\mathcal{X}_n(z) = \frac{1 + \nu(z)}{2(1 + \hat{\nu}(z))} \left[\frac{\hat{\nu}^2(z)(1 + \nu(z))}{\hat{\nu}^2 \frac{E(z)}{E} - 1} + \frac{\hat{E}(z)}{E(z)} (1 - \nu(z)) \right] \quad (6.12)$$

i łatwo jest sprawdzić, że jeśli $\nu(z)$ jest tożsame z $\hat{\nu}(z)$, otrzymamy znaną wielkość z opisu ośrodka izotropowego niejednorodnego

$$\mathcal{X}_n(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{\nu^2(1 + \nu)}{\nu^2 - 1} + (1 - \nu) \right] = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} = \mathcal{X};$$

$$\text{c) } \hat{A}(z) = \hat{A}_1(z) \hat{A}_2(z), \quad (6.13)$$

gdzie

$$\hat{A}_1(z) = 2 \frac{\hat{\nu}^2 - \frac{E}{E} - 1}{1 + \hat{\nu}}, \quad (6.14)$$

$$\hat{A}_2(z) = \frac{\Omega_n}{2 - \left[1 - \frac{\hat{\nu}}{1 + \hat{\nu}} \left(\hat{\nu} \frac{E}{E} - \nu \right) \right] \Omega_n}.$$

Na podstawie (6.8) i (6.9) oraz (6.11), (6.12), (6.3)₂, (6.13) możemy zapisać układ (6.6) w następującej postaci

$$\begin{aligned} [0^2 - s^2(1 - \Omega_n(z))] \varphi(z) &= 0, \\ [0^2 - s^2(1 - \mathcal{K}_n(z)\Omega_n(z))] \beta(z) &= A_1^{-1}(z) A_2^{-1}(z) D \varphi(z). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Z wzoru (6.10) wynika, że Ω_n zależy od parametrów p i s (patrz (3.17)) i zmiennego modułu sprężystości poprzecznej $\hat{\mu}(z)$, natomiast wzory (6.12) uwidaczniają bardzo złożoną zależność \mathcal{K}_n od wszystkich założonych współczynników materiałowych $\nu(z)$, $\mu(z)$, $\hat{\nu}(z)$, $\hat{\mu}(z)$. Stwierdzamy więc, że zmienne współczynniki układu (6.15) wiążą wszystkie parametry anizotropii i niejednorodności w funkcji z , a zatem układ jest nośnikiem pewnych informacji o omawianym procesie w przyjętym ośrodku. Dlatego słuszna wydaje się sugestia, że analiza jakościowa, a zwłaszcza ilościowa tego układu pozwala wnikać w istotne właściwości fal powierzchniowych w półprzestrzeni transwersalnie izotropowej, niejednorodnej wzdłuż głębokości.

Będziemy dążyli do uzyskania rozwiązania układu (6.15) w postaci zamkniętej. W tym celu założymy monotoniczną zmienność funkcji $\mu(z)$ i $\hat{\mu}(z)$:

$$\begin{aligned} \mu(z) &= \frac{\mu_0 \mu_\infty}{\mu_0 - (\mu_0 - \mu_\infty) \exp[-2 \hat{\epsilon} z]}, \\ \hat{\mu}(z) &= \frac{\hat{\mu}_0 \hat{\mu}_\infty}{\hat{\mu}_0 - (\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_\infty) \exp[-2 \hat{\epsilon} z]}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

W relacjach (6.12), (6.14) występuje również wielkość wyrażona stosunkiem odpowiednich modułów sprężystości podłużnej, którą oznaczymy przez $m(z)$. Mamy

$$m(z) = \frac{\hat{\epsilon}(z)}{\epsilon(z)} = \frac{\mu(z)(1 + \nu(z))}{\hat{\mu}(z)(1 + \hat{\nu}(z))}. \quad (6.17)$$

Rozwińmy (6.17) w szereg Taylora względem małych z przyjmując jednocześnie, że współczynniki Poissona są stałe. Po uproszczeniach napiszemy

$$m(z) = \frac{1+\nu}{1+\hat{\nu}} \left\{ \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - 2 \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} \left[\varepsilon \left(\frac{\mu_0}{\mu_\infty} - 1 \right) - \hat{\varepsilon} \left(\frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\mu}_\infty} - 1 \right) \right] z + \dots \right\}. \quad (6.18)$$

Ponieważ rozważany proces zachodzi przy bardzo małych wartościach z , a pierwsze dwa człony zawierają interesujące nas parametry niejednorodności i anizotropii, ograniczymy się do przypadku szczególnego. Zauważymy mianowicie, że drugi człon możemy uczynić dowolnie małym lub równym zeru przez odpowiedni dobór parametrów. Jeśli zatem założymy, że drugi człon znika, co zdarzy się gdy

$$\frac{\varepsilon}{\hat{\varepsilon}} = \frac{\mu_\infty (\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_\infty)}{\hat{\mu}_\infty (\mu_0 - \mu_\infty)}, \quad (6.19)$$

pozostaje prosta relacja

$$\frac{E}{\hat{E}} = \frac{1+\nu}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0}, \quad (6.20)$$

z której będziemy w dalszym ciągu korzystać, pamiętając o ograniczeniu warunkiem (6.19). W tym szczególnym przypadku \mathcal{K}_n jest również wielkością stałą i wyraża się wzorem, patrz (6.12)

$$\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n0} = \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{1+\hat{\nu}} \left[\frac{\hat{\nu}^2 (1+\nu)}{\hat{\nu}^2 \frac{1+\nu}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - 1} + \frac{(1-\nu)(1+\hat{\nu})}{1+\nu} \frac{\hat{\mu}_0}{\mu_0} \right]. \quad (6.21)$$

W konsekwencji powyższych uproszczeń, tj. $\nu, \hat{\nu}, \mathcal{K}_{n0}$ równe const., mamy związki

$$\mathcal{A}_1(z) = \mathcal{A}_{10}(z) = 2 \frac{\hat{\nu}^2 \frac{1+\nu}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - 1}{1 + \hat{\nu}} = \text{const.}, \quad (6.22)$$

$$\mathcal{A}_2(z) = \mathcal{A}_{20}(z) = \frac{\Omega_n(z)}{2 - \left[1 - \frac{\hat{\nu}}{1+\hat{\nu}} \left(\hat{\nu} \frac{1+\nu}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - \nu \right) \right] \Omega_n(z)}$$

Podstawiając oznaczenia (6.21), (6.22) do równania (6.15) otrzymamy

$$L_1^2 \varphi(z) = [D^2 - s^2(1 - \Omega_n(z))] \varphi(z) = 0, \quad (6.23)$$

$$L_2^2 \beta(z) = [D^2 - s^2(1 - \mathcal{K}_{no} \Omega_n(z))] \beta(z) = \mathcal{A}_{10}^{-1} \mathcal{A}_{20}^{-1}(z) D \varphi(z),$$

gdzie wg (6.10) i (6.16)₂

$$\Omega_n(z) = C_R^2 / \hat{c}_{20}^2 - C_R^2 (1 / \hat{c}_{20}^2 - 1 / \hat{c}_{20}^2) \exp[-2 \hat{\epsilon} z]. \quad (6.24)$$

Bądźmy poszukiwali rozwiązania układu (6.23) spełniającego warunki graniczne

$$\beta(0) = \beta(\infty) = 0, \quad (6.25)$$

$$D \{ \mathcal{K}^{-1}(z) B_1(z) [D^2 - s^2(1 - \mathcal{R}(z))] - 2s^2 \mathcal{G}(z) \} \beta(z) \Big|_{z=0}^{z=\infty} = 0,$$

gdzie

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{K}^{-1}(z) [f(z) - B_1(z) - \frac{1}{2} \varphi^{-1}(\frac{s}{p})^2] \quad (6.26)$$

lub w jawnej postaci

$$\mathcal{G}(z) = - \frac{1 - [1 - \frac{\hat{\nu}}{1+\hat{\nu}} (\hat{\nu} \frac{1+\nu}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - \nu)] \Omega_n}{2 - [1 - \frac{\hat{\nu}}{1+\hat{\nu}} (\hat{\nu} \frac{1+\nu}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - \nu)] \Omega_n}.$$

Przystąpimy do rozwiązania równania (6.23)₁. Po podstawieniu na miejsce Ω_n relacji (6.24) i wykonaniu odpowiednich przekształceń, otrzymamy równanie różniczkowe typu

$$\varphi'' + \frac{1}{\tau} \varphi' + (1 - \frac{\eta^2}{\tau^2}) \varphi = 0, \quad (6.27)$$

którego rozwiązanie znikające w nieskończoności ma postać

$$\varphi(\tau) = \varphi(\hat{k}_n t) = \varphi(\hat{k}_n e^{-\hat{\epsilon} z}) = C J_{\hat{\nu}}(\hat{k}_n e^{-\hat{\epsilon} z}), \quad (6.28)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 J_{\eta}(z) & - \text{funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu } \eta, \\
 \hat{\eta} & = \frac{s}{\xi} (1 - C_R^2 / \hat{c}_{200}^2)^{1/2} > 0, \\
 \hat{k}_n & = \frac{s}{\xi} C_R (1 / \hat{c}_{20}^2 - 1 / \hat{c}_{200}^2)^{1/2} > 0, \\
 \tau & = \hat{k}_n t, \quad t = e^{-\hat{\xi} z},
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

C - stała dowolna.

Widzimy, że w definicji funkcji Ψ występują parametry ośrodka związane z odkształceniami w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny izotropii.

Przechodząc do rozwiązania równania (6.23)₂ korzystamy z określenia funkcji Ψ wg wzorów (6.28) i postępujemy dalej, tak jak z równaniem (6.23)₁. Otrzymane w ten sposób rozwiązanie zapiszemy w postaci

$$\beta_n(z) = \bar{\beta}_n(z) + \beta_{no}(z), \tag{6.30}$$

jeżeli

$$L_2^2 \bar{\beta}_n(z) = 0, \tag{6.31}$$

$$L_2^2 \beta_{no}(z) = A_{10}^{-1} A_{20}^{-1}(z) D \Psi(z).$$

Z warunków zadania wynika, że $\bar{\beta}_n$ i β_{no} należy tak dobrać, aby funkcja β_n zniknęła wraz ze swymi pochodnymi przy $z \rightarrow \infty$.

Ogólne rozwiązanie równania (6.31)₁ ma postać

$$\beta_n = \bar{C}_1 J_{\bar{\eta}}(\bar{k}_n t) + \bar{C}_2 Y_{\bar{\eta}}(\bar{k}_n t), \tag{6.32}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 Y_{\bar{\eta}}(z) & - \text{funkcja Bessela drugiego rodzaju rzędu } \bar{\eta}, \\
 \bar{\eta} & = \frac{s}{\xi} (1 - \kappa_{no} \frac{C_R^2}{\hat{c}_{200}^2})^{1/2} > 0, \\
 \bar{k}_n & = \frac{s}{\xi} \kappa_{no} C_R (1 / \hat{c}_{20}^2 - 1 / \hat{c}_{200}^2)^{1/2} > 0, \\
 \hat{\eta} > 0 & \implies \bar{\eta} > 0.
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Rozwiązanie β_{no} równania (6.31)₂ przyjmiemy w postaci

$$\beta_{no} = A_{10}^{-1} \beta_{n2} \int_0^z \frac{\beta_{n1} h_n}{w} d\xi - A_{10}^{-1} \beta_{n1} \int_0^z \frac{\beta_{n2} h_n}{w} d\xi, \quad (6.34)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \beta_{n1} &= J_{\bar{\eta}}(\bar{k}_n t), \\ \beta_{n2} &= Y_{\bar{\eta}}(\bar{k}_n t), \\ w &= \beta_{n1} \beta'_{n2} - \beta'_{n1} \beta_{n2}, \\ h_n &= A_{20}^{-1}(z) \circ \psi. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Nie sprawia większych trudności sprawdzenie, że funkcja $\beta_n(z)$ przedstawiona wzorem (6.30) i równaniami (6.32) i (6.34) spełnia równanie (6.32)₂. Należy w tym celu podstawić odpowiednie wyrażenia, wykonać wskazane operacje i przeprowadzić redukcję. Jest widoczne, że funkcja $\beta_n(z)$ zawiera informacje wiążące cechy anizotropii półprzestrzeni przez wielkości $\bar{\eta}$ i \bar{k}_n definiujące $\bar{\beta}_n$ a ponadto przez wielkości h_n i A_{10} występujące w definicji członu β_{no} .

Funkcja rozwiązująca $\beta_n(z)$, zwana funkcją naprężeń, opisana jest wyrażeniami (6.30), (6.32), (6.34) i (6.28), w których występują trzy stałe dowolne C , \bar{C}_1 , \bar{C}_2 . Do wyznaczenia tych stałych wykorzystamy warunki znikania $\beta_n(z)$ przy $z=0$ i $z=\infty$. Zgodnie z (6.30), (6.32), (6.34), (6.28) napiszemy

$$\begin{aligned} \beta_n(z) &= \bar{C}_1 J_{\bar{\eta}}(\bar{k}_n t) + \bar{C}_2 Y_{\bar{\eta}}(\bar{k}_n t) + \\ &+ \bar{C}^* A_{10}^{-1} \left\{ Y_{\bar{\eta}}(\bar{k}_n t) \mathcal{J}_{n2}(z) - J_{\bar{\eta}}(\bar{k}_n t) \mathcal{J}_{n4}(z) \right\}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{n2}(z) &= \int_0^z u_n(\xi) J_{\bar{\eta}}(\bar{k}_n t) \circ_{\xi} J_{\bar{\eta}}(\hat{k}_n t) d\xi, \\ \mathcal{J}_{n4}(z) &= \int_0^z u_n(\xi) Y_{\bar{\eta}}(\bar{k}_n t) \circ_{\xi} J_{\bar{\eta}}(\hat{k}_n t) d\xi, \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$u_n = f_{20}^{-1}(z)$$

$$= \frac{s^2 [1 + \frac{\hat{\nu}}{1+\hat{\nu}} (\hat{\nu} \frac{1+\hat{\nu}}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - \nu)] + [1 - \frac{\hat{\nu}}{1+\hat{\nu}} (\hat{\nu} \frac{1+\hat{\nu}}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - \nu)] [(\hat{\epsilon} \hat{\gamma})^2 - (\hat{\epsilon} \hat{k}_n)^2 \exp[-2\hat{\epsilon}z]]}{s^2 - (\hat{\epsilon} \hat{\gamma})^2 + (\hat{\epsilon} \hat{k}_n)^2 \exp[-2\hat{\epsilon}z]}$$

$$\hat{C} = - \frac{\hat{\nu}}{2\hat{\epsilon}} C.$$

Z warunku $\hat{\beta}_n(0) = 0$ wynika

$$\bar{C}_2 = - \bar{C} \frac{J_{\hat{\gamma}}(\bar{k}_n)}{Y_{\hat{\gamma}}(\bar{k}_n)}, \quad \bar{C}_1 = C, \quad (6.38)$$

a z warunku $\hat{\beta}_n(\infty) = 0$

$$\bar{C} = \bar{C} \frac{1 + \hat{\nu}}{2(\frac{1+\hat{\nu}}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - 1)} \frac{Y_{\hat{\gamma}}(\bar{k}_n)}{J_{\hat{\gamma}}(\bar{k}_n)} J_{n2}^{\alpha}, \quad (6.39)$$

gdzie

$$\lim_{z \rightarrow \infty} J_{n2}(z) = J_{n2}^{\alpha} = \int_0^{\infty} u_n(\xi) J_{\hat{\gamma}}(\bar{k}_n t) D_{\xi} J_{\hat{\gamma}}(\hat{k}_n t) d\xi. \quad (6.40)$$

Ostatecznie rozwiązanie przedstawimy w postaci

$$\hat{\beta}_n(z) = \hat{C}^{-1} \left\{ Y_{\hat{\gamma}}(\bar{k}_n t) [J_{n2}(z) - J_{n2}^{\alpha}] - J_{\hat{\gamma}}(\bar{k}_n t) [J_{n4}(z) - \right.$$

$$\left. - \frac{Y_{\hat{\gamma}}(\bar{k}_n)}{J_{\hat{\gamma}}(\bar{k}_n)} J_{n2}^{\alpha}] \right\}, \quad (6.41)$$

oznaczając

$$\hat{C}^{-1} = \hat{C} \frac{1 + \hat{\nu}}{2(\hat{\nu} \frac{1+\hat{\nu}}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - 1)} \quad (6.42)$$

lub

$$\beta_n(z) = \left\{ Y_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n t) \mathcal{J}_{n2}(z) - J_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n t) \mathcal{J}_{n4}(z) \right. \\ \left. - \frac{1}{J_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n)} [J_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n t) Y_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n t) - J_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n t) Y_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n)] \mathcal{J}_{n2}^{\infty} \right\}. \quad (6.43)$$

Wyprowadzimy teraz równanie dyspersji z warunku $\gamma(0) = 0$.
W tym celu obliczymy wyrażenie

$$D_z \beta_n(z) = \hat{C}^* \left\{ D_z Y_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n t) [\mathcal{J}_{n2}(z) - \mathcal{J}_{n2}^{\infty}] - \right. \\ \left. - D_z J_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n t) [\mathcal{J}_{n4}(z) - \frac{Y_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n)}{J_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n)} \mathcal{J}_{n2}^{\infty}] \right\}, \quad (6.44)$$

gdzie

$$D_z Y_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n t) = -\hat{\epsilon} [\bar{\gamma} Y_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n t) - \bar{k}_n t Y_{\bar{\gamma}+1}(\bar{k}_n t)];$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} [J_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n e^{-\hat{\epsilon}z}) D Y_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n e^{-\hat{\epsilon}z}) - Y_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n e^{-\hat{\epsilon}z}) D J_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n e^{-\hat{\epsilon}z})] = -\frac{2\hat{\epsilon}}{\pi};$$

$$\beta_n(0) = 0;$$

$$D \beta_n(z) \Big|_{z=0} = -\hat{C}^* \left\{ D_z Y_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n e^{-\hat{\epsilon}z}) - D_z J_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n e^{-\hat{\epsilon}z}) \frac{Y_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n)}{J_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n)} \right\} \mathcal{J}_{n2}^{\infty} \Big|_{z=0} \\ = \hat{C}^* \frac{2\hat{\epsilon}}{\pi} \frac{1}{J_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n)} \mathcal{J}_{n2}^{\infty} = -C A_{10} \frac{1}{J_{\bar{\gamma}}(\bar{k}_n)} \mathcal{J}_{n2}^{\infty}.$$

Równanie amplitudy naprężeń stycznych $\gamma(z)$ wyprowadzone przez autora, patrz (3.28), dla materiału niejednorodnego, transwersalnie izotropowego ma postać

$$2is \gamma(z) = \frac{1}{s^2} \mathcal{K}^{-1}(z) D \left\{ -A(z) [D^2 - s^2(1 - \mathcal{R}(z))] + \right. \\ \left. + 4s^2 \mathcal{G}(z) \right\} \beta_n(z)$$

i po podstawieniu przyjętych w niniejszym rozdziale oznaczeń i relacji możemy napisać

$$2is \chi(z) = \frac{1}{s^2(1-\Omega_n(z))} \{ -A_{10} A_{20}(z) [D^2 - s^2(1-\chi_{no} \Omega_n(z))] - 4s^2 \frac{1 - [1 - \hat{\nu} (\hat{\nu} \frac{1+\nu}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - \nu)] \Omega_n}{2 - [1 - \hat{\nu} (\hat{\nu} \frac{1+\nu}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - \nu)] \Omega_n} \} \beta_n(z). \quad (6.45)$$

Oznaczając

$$q = 1 - \hat{\nu} \left(\hat{\nu} \frac{1+\nu}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - \nu \right), \quad (6.46)$$

przekształcimy wyrażenie

$$\begin{aligned} & D \{ -A_{10} A_{20}(z) [D^2 - s^2(1-\chi_{no} \Omega_n(z))] \beta_n(z) - 4s^2 \frac{1-q \Omega_n}{2-q \Omega_n} \beta_n(z) \} \\ &= -s^2(1-\Omega_n(z)) \varphi(z) + 4s^2 \left[\frac{q \dot{\Omega}_n(z)}{(2-q \Omega_n(z))^2} \beta_n(z) - \frac{1-q \Omega_n}{2-q \Omega_n} D \beta_n(z) \right]. \end{aligned}$$

Przez podstawienie (6.46)₂ do (6.45) otrzymamy znacznie uproszczone równanie

$$2is \chi(z) = \frac{1}{s^2(1-\Omega_n(z))} \left\{ -s^2(1-\Omega_n(z)) C J_{\hat{\nu}}(\hat{k}_n t) + 4s^2 \left[\frac{q \dot{\Omega}_n(z)}{(2-q \Omega_n)^2} \beta_n(z) - \frac{1-q \Omega_n}{2-q \Omega_n} D \beta_n(z) \right] \right\}. \quad (6.47)$$

Stąd równanie dyspersji, zwane również równaniem periodu, może być przedstawione w postaci

$$(2-q \Omega_{no}) J_{\hat{\nu}}(\hat{k}_n) J_{\hat{\nu}}(\bar{k}_n) - 4 \frac{(1+\hat{\nu})(1-q \Omega_{no})}{2(\hat{\nu}^2 \frac{1+\nu}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - 1)(1-\Omega_{no})} \gamma_{n2}^{\infty} = 0. \quad (6.48)$$

Jeżeli $\hat{\nu} = \nu$ i $\hat{\mu} = \mu$, to wynik powyższy prowadzi do równania dyspersji w półprzestrzeni izotropowej "mało niejednorodnej",

jakie otrzymał autor w pracy w 1977 r., patrz [11]

$$(2 - \Omega_0) J_{\hat{\gamma}}(\hat{k}) J_{\bar{\gamma}}(\bar{k}) + 4(1 - \mathcal{X}_0) J_2^\infty = 0 \quad (6.49)$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę współczynniki materiałowe założonego ośrodka wysiępujące jawnie w równaniu (6.48) i za pośrednictwem wielkości $\hat{\gamma}$, $\bar{\gamma}$, \hat{k}_n , \bar{k}_n , q , Ω_{no} oraz oznaczymy lewą stronę tego równania przez R , to równanie dyspersji (6.48) możemy wyrazić ogólnie w postaci

$$R(C_R, s, \frac{\xi}{\hat{\epsilon}}, \hat{\epsilon}, \nu, \mu_0, \mu_\infty, \hat{\nu}, \hat{\mu}_0, \hat{\mu}_\infty, \mathcal{X}_{no}) = 0 \quad (6.50)$$

Jest więc widoczne, że prędkość poszukiwanej fali powierzchniowej C_R zależy od długości fali $\lambda = 2\pi/s$ i parametrów niejednorodności ξ , ν , μ_0 , μ_∞ oraz anizotropii $\hat{\nu}$, $\hat{\mu}_0$, $\hat{\mu}_\infty$, \mathcal{X}_{no} . W uzupełnieniu podamy wyrażenie na amplitudę $\alpha(z)$ naprężeń normalnych $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{xx}$ opisaną równaniem (3.20), korzystając z (6.41)

$$\alpha(z) = s^2 \left[2 - (1 - \hat{\nu}) \frac{1 + \nu \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - \nu}{1 + \hat{\nu}} \right] \Omega_n^{-1} \times \\ \times \left[s^2 \frac{\hat{\mu}_0}{\mu_0} \left(\frac{1 + \nu \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} + 1 - \nu}{1 + \hat{\nu}} \Omega_n + 20^2 \right) \beta_n(z) \right] \quad (6.51)$$

Znając C_R obliczoną z równania (6.48) i amplitudy $\alpha(z)$, $\beta_n(z)$, $\gamma(z)$, wyznaczmy naprężenia wg wzorów (3.17).

6.2. Analiza równania dyspersji

Zbadamy równanie dyspersji (6.48) w przypadku szczególnym, gdy parametr niejednorodności $\hat{\epsilon}$ jest dostatecznie duży. W tym celu rozważymy najpierw przejście graniczne równania przy $\hat{\epsilon} \rightarrow \infty$. Korzystamy z wyrażen asymptotycznych dla funkcji Bessela. Mamy

$$\lim_{\hat{\epsilon} \rightarrow \infty} J_{\hat{\gamma}}(\bar{k}_n e^{-\hat{\epsilon}z}) / J_{\hat{\gamma}}(\bar{k}_n) \rightarrow \exp[-\hat{\epsilon} \bar{\gamma} z] \quad (6.52)$$

Przyjmując (6.52), równanie dyspersji (6.48) możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned}
 & (2 - q\Omega_{no}) - 4 \frac{1+\hat{\nu}}{2\chi_2} \frac{1-q\Omega_{no}}{1-\Omega_{no}} \times \\
 & \times \int_0^{\infty} u_n(\xi) \frac{J_{\hat{\nu}}(\hat{k}_n t) J_{\hat{\nu}}(\hat{k}_n t)}{J_{\hat{\nu}}(\hat{k}_n) J_{\hat{\nu}}(\hat{k}_n)} d\xi \\
 & = 2 - q\Omega_{no} + 4 \frac{1+\hat{\nu}}{2\chi_2} \frac{1-q\Omega_{no}}{1-\Omega_{no}} \frac{2-(1-\frac{1}{1+\hat{\nu}}\chi_1)\Omega_{n\infty}}{\Omega_{n\infty}} \times \\
 & \times h_{n1} \int_0^{\infty} \exp[-z(h_{n1} + h_{n2})] dz = 0, \quad (6.53)
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\lim_{\hat{\epsilon} \rightarrow \infty} u(z) = \lim_{\hat{\epsilon} \rightarrow \infty} \frac{2-(1-\frac{1}{1+\hat{\nu}}\chi_1)\Omega_n(z)}{\Omega_n(z)} - \frac{2-(1-\frac{1}{1+\hat{\nu}}\chi_1)\Omega_{n\infty}}{\Omega_{n\infty}};$$

$$\chi_1 = \hat{\nu} \left(\hat{\nu} \frac{1+\nu}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - \nu \right); \quad \chi_2 = \hat{\nu}^2 \frac{1+\nu}{1+\hat{\nu}} \frac{\mu_0}{\hat{\mu}_0} - 1;$$

$$h_{n1} = s \left(1 - \frac{C_R^2}{\hat{c}_{200}^2} \right)^{1/2} = \hat{\epsilon} \hat{\eta}; \quad h_{n2} = s \left(1 - \chi_{no} \frac{C_R^2}{\hat{c}_{200}^2} \right)^{1/2} = \hat{\epsilon} \hat{\eta};$$

$$q = 1 - \chi_1.$$

Stąd po wykonaniu wskazanych operacji i wykorzystaniu zależności

$$h_{n1}^2 - h_{n2}^2 = -s^2 \frac{C_R^2(1-\chi_{no})}{\hat{c}_{200}^2} = -s^2 \Omega_{n\infty} (1-\chi_{no}) \quad (6.54)$$

dochodzimy do równania

$$\begin{aligned}
 & \Omega_{n\infty}^2 (2-q\Omega_{no}) - 4 \frac{1+\hat{\nu}}{2\chi_2} \frac{1}{1-\chi_{no}} \frac{1-q\Omega_{no}}{1-\Omega_{no}} \times \\
 & \times 2-(1-\frac{1}{1+\hat{\nu}}\chi_1)\Omega_{n\infty} (1-\Omega_{n\infty})^{1/2} [(1-\Omega_{n\infty})^{1/2} -
 \end{aligned}$$

$$- (1 - \chi_{n0} \Omega_{n0})^{1/2}] = 0 . \quad (6.55)$$

Jeśli zauważymy, że $2\chi_2/(1+\hat{\nu})$ wynosi dla ośrodka izotropowego i jednorodnego $2(\gamma^2-1)/(1+\nu) = -2(1-\nu) = (\chi_0-1)^{-1}$, $\chi_1 = 0$, $\chi_{n0} = \chi_0$ i przyjmiemy $\Omega_0 = \Omega_\infty$, otrzymamy

$$(2 - \Omega_0)^2 - 4(1 - \Omega_0)^{1/2}(1 - \chi_0 \Omega_0)^{1/2} = 0 ,$$

Wynik ostatni przedstawia klasyczne równanie periodu Rayleigha.

Rozważmy teraz asymptotyczną postać równania (6.48) dla dużych $\hat{\xi}$. Korzystając z asymptotycznych związków dla funkcji Bessela w (6.48) wg zachodzących tam relacji napiszemy

$$(2 - q \Omega_{n0}) + 4 \frac{1 + \hat{\nu}}{2\chi_2} \frac{1 - q \Omega_{n0}}{1 - \Omega_{n0}} \frac{2 - (1 - \frac{1}{1+\hat{\nu}} \chi_1) \Omega_{n0}}{\Omega_{n0}} \times \\ \times \int_0^\omega e^{-h_{n2}z} [\hat{\gamma} e^{-h_{n1}z} - \frac{\hat{k}_n^2 e^{-\hat{\xi}(\hat{\gamma}+2)z}}{2(\hat{\gamma}+1)}] dz = 0 \quad (6.56)$$

lub

$$(2 - q \Omega_{n0}) + 4 \frac{1 + \hat{\nu}}{2\chi_2} \frac{1 - q \Omega_{n0}}{1 - \Omega_{n0}} \frac{2 - (1 - \frac{1}{1+\hat{\nu}} \chi_1) \Omega_{n0}}{\Omega_{n0}} \times \\ \times \frac{h_{n1}}{h_{n1} + h_{n2}} - \frac{k_n^2}{2(h_{n1} + \hat{\xi})(h_{n1} + h_{n2} + 2\hat{\xi})} = 0 \quad (6.57)$$

gdzie

$$k_n = \hat{\xi} \hat{k}_n = s C_R (1/\hat{c}_{20}^2 + 1/\hat{c}_{2\infty}^2)^{1/2} .$$

Jeżeli odpowiednio pogrupujemy człony powyższego równania (6.57) może ono być zapisane w postaci następującej sumy

$$R_1(C_R) + R_2(C_R, \lambda \frac{\hat{\xi}}{2\sqrt{\eta}}) = 0 , \quad (6.58)$$

gdzie

$$R_1(C_R) = (2-q\Omega_{no}) + 4 \frac{1+\hat{\nu}}{2\chi_2} \frac{1-q\Omega_{no}}{1-\Omega_{no}} \frac{2-(1-\frac{1}{1+\hat{\nu}}\chi_1)\Omega_{no}}{\Omega_{no}} \times$$

$$\times \frac{(1-\Omega_{no})^{1/2}}{(1-\Omega_{no})^{1/2} + (1-\chi_{no}\Omega_{no})^{1/2}} ; \quad (6.59)$$

$$R_2(C_R, \lambda \frac{\hat{\xi}}{2\sqrt{s}}) = -4 \frac{1+\hat{\nu}}{2\chi_2} \frac{1-q\Omega_{no}}{1-\Omega_{no}} \frac{2-(1-\frac{1}{1+\hat{\nu}}\chi_1)\Omega_{no}}{\Omega_{no}} \times$$

$$= \frac{\Omega_{no} - \Omega_{no}}{2[\frac{\hat{\xi}}{s} + (1-\Omega_{no})^{1/2}] [2\frac{\hat{\xi}}{s} + (1-\Omega_{no})^{1/2} + (1-\chi_{no}\Omega_{no})^{1/2}]}$$

W tym szczególnym przybliżeniu równania dyspersji (6.48) widoczna jest zależność prędkości fali powierzchniowej C_R od długości fali $\lambda = \frac{2\sqrt{s}}{s}$ od parametrów niejednorodności i parametrów anizotropii, tak że mamy relację

$$C_R = C_R(\lambda, \frac{\hat{\xi}}{s}, \hat{\xi}, \nu, \hat{\nu}, \chi_{no}, \frac{\mu_0}{\mu'_0}, \hat{c}_{20}, \hat{c}_{2\infty}). \quad (6.61)$$

Do obliczeń numerycznych przyjmiemy

$$R_2(C_R, \Psi) = \frac{A(C_R)}{R(C_R, \Psi)}, \quad \Psi = \frac{\hat{\xi}}{s}, \quad (6.62)$$

oznaczając

$$A(C_R) = -2 \frac{1+\hat{\nu}}{2\chi_2} \frac{1-q\Omega_{no}}{1-\Omega_{no}} \frac{2-(1-\frac{1}{1+\hat{\nu}}\chi_1)\Omega_{no}}{\Omega_{no}} (\Omega_{no} - \Omega_{no}), \quad (6.63)$$

$$R(C_R, \Psi) = [\Psi + (1-\Omega_{no})^{1/2}] [2\Psi + (1-\Omega_{no})^{1/2} + (1-\chi_{no}\Omega_{no})^{1/2}]$$

$$= 2\Psi^2 + [3(1-\Omega_{no})^{1/2} + (1-\chi_{no}\Omega_{no})^{1/2}] \Psi +$$

$$+ (1 - \Omega_{n\infty})^{1/2} [(1 - \Omega_{n\infty})^{1/2} + (1 - \chi_{no} \Omega_{n\infty})^{1/2}] ,$$

przy założeniu, że $R(C_R, \Psi) \neq 0$. Po podstawieniu (6.60), (6.62), (6.63) do (6.58) i uporządkowaniu wyrazów otrzymamy równanie

$$2\Psi^2 + B\Psi + C = 0 , \quad (6.64)$$

gdzie

$$B = 3(1 - \Omega_{n\infty})^{1/2} + (1 - \chi_{no} \Omega_{n\infty})^{1/2} , \quad (6.65)$$

$$C = (1 - \Omega_{n\infty})^{1/2} [(1 - \Omega_{n\infty})^{1/2} + (1 - \chi_{no} \Omega_{n\infty})^{1/2}] + \frac{A}{R_1} .$$

Równanie (6.64) prowadzi bezpośrednio do wyników ilościowych. Wyznamy prędkość fali Rayleigha w zależności od parametru $\Psi = \frac{\hat{\epsilon}}{s}$, gdzie s jest liczbą falową, a $\hat{\epsilon}$ wyraża charakter niejednorodności w półprzestrzeni anizotropowej i niejednorodnej szczególnego rodzaju, a mianowicie "słabo anizotropowej" i "mało niejednorodnej". Jeśli współczynniki opisujące taką półprzestrzeń mają następujące wartości:

- w płaszczyźnie izotropii, płaszczyzna poprzeczna, patrz rys.2.

$$\nu = 0,28, \quad \mu_0 = 1,05, \quad \mu_\infty = 1,21 \quad \text{i stąd } \chi_0 = 1/3 \quad (6.66)$$

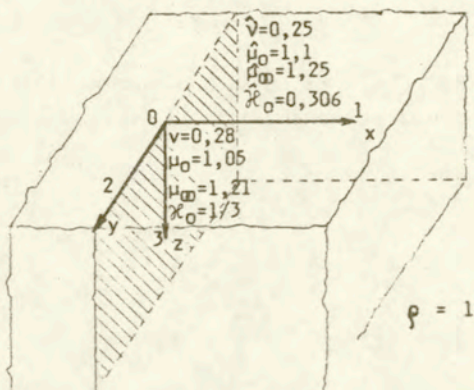
- w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny izotropii

$$\hat{\nu} = 0,25, \quad \mu_0 = 1,1, \quad \mu_\infty = 1,25 \quad \text{i stąd } \hat{\chi}_0 = 0,306 ,$$

to otrzymamy wartości przytoczone w Tabelicy 1, na podstawie których wykreślono przebieg krzywej A na rys.3. Krzywa ma asymptotę przy wartości C_R nieco większej niż 1,017. W założonym ośrodku możliwe prędkości fali powierzchniowej rozkładają się w przedziale 0,98 do 1,017, a parametru Ψ od 0,00087 do ∞ .

Tabelica 1. Dla materiału wg (6.66)_{1,2}

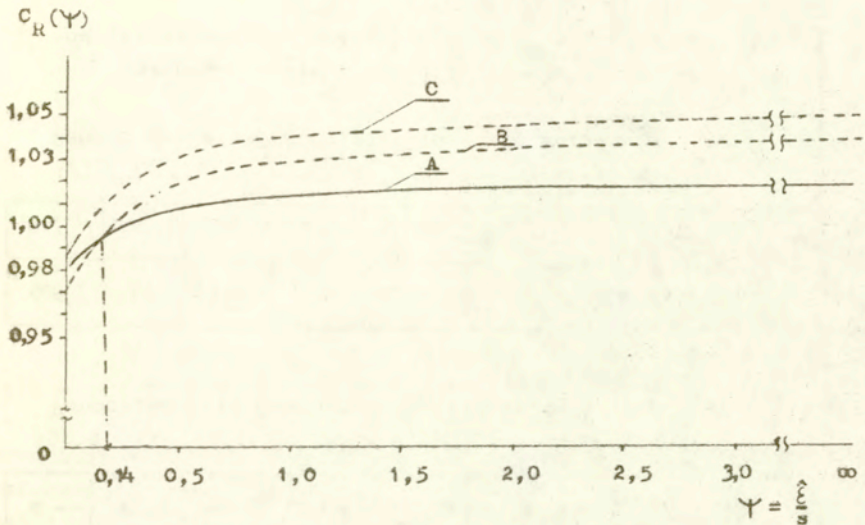
	0,00087	0,1038	0,2525	0,3803	0,5909	1,5448	3,3174	3,9471
C_R	0,98	0,99	1,00	1,005	1,01	1,015	1,0165	1,017



Rys.2. Objaśnienie symboli współczynników materiałowych

W celu porównania informacji zawartej w równaniu (6.57), które jest rozwinięciem asymptotycznym równania dyspersji (6.48) z wynikami wpływającymi z równania dyspersji dla ośrodka z "małą niejednorodnością" również w rozwinięciu asymptotycznym, patrz [11] wzory (4.6), (4.7), przytoczone zostały na rys.3, krzywe B i C wyrażają zależność $C_R = C_R(\Upsilon)$ dla dwóch materiałów izotropowych "mało niejednorodnych" o identycznych współczynnikach odpowiednio do rozpatrzonego ciała "słabo anizotropowego" z "małą niejednorodnością", patrz rys.2. Krzywa B odnosi się do materiału o współczynnikach $\nu = 0,28$, $\mu_0 = 1,05$, $\mu_\infty = 1,21$, $\chi_0 = 1/3$, a krzywa C odnosi się do materiału o współczynnikach $\nu = 0,25$, $\mu_0 = 1,1$, $\mu_\infty = 1,25$, $\chi_0 = 0,306$. Krzywe B i C są wykreślone odpowiednio do podanych wartości w tabelicy 2 i 3.

Krzywe A i B przecinają się w punkcie $\Upsilon = 0,14$, $C_R = 0,993$. Jeżeli założymy, że $\hat{\xi} = 1,5$, co oznacza $\xi = 1,36$, patrz (6.19), to możemy powiedzieć, że przy liczbie falowej $s = 10,7$ (długość fali $\lambda = 0,587$) prędkość fali w materiale "słabo anizotropowym" z "małą niejednorodnością" określonym przez parametry (6.66)_{1,2} jest równa prędkości fali w materiale izotropowym z "małą niejednorodnością" odpowiednio do parametrów (6.66)₁ i wynosi $C_R = 0,993$. Zauważymy dalej dyskutując te krzywe, że



Rys.3. Prędkość $C_R = C_R(\Psi)$ fali powierzchniowej typu Rayleigha w funkcji $\Psi = \frac{\hat{\epsilon}}{s}$, gdzie s jest liczbą falową, a $\hat{\epsilon}$ parametrem niejednorodności, w półprzestrzeni sprężystej "słabo anizotropowej" z "małą niejednorodnością" - krzywa A wg danych w. tablicy 1 oraz izotropowej "mało niejednorodnej" - krzywa B w tablicy 2 i krzywa C w tablicy 3. $\epsilon / \hat{\epsilon}$ - zgodnie z warunkiem (6.19)

przy $\Psi = 0,1$ i $\Psi = 0,2$, przyjmując $\hat{\epsilon} = 1,5$, tzn. $s = 15$ i $s = 30$, mamy odpowiednio $C_R = 0,99$ i $C_R = 0,9967$ dla materiału zaprezentowanego przez krzywą A, a prędkość $C_R = 0,987$ i $C_R = 0,998$ dla materiału reprezentowanego przez krzywą B. Dlatego przez zmianę liczby falowej w zakresie 0,7 do 1,4 wydaje się, że możemy już rozróżnić te materiały. Jeśli natomiast parametr niejednorodności $\hat{\epsilon} = 2,0$, to w omawianych materiałach jednakowa prędkość fali powierzchniowej wystąpi przy liczbie falowej $s = 14,29$.

Jest widoczne, że równanie (6.57) dostarcza nowych ilościowych informacji o wpływie anizotropii na prędkość fali powierzchniowej typu Rayleigha. Struktura równań (6.58)-(6.65) i przejrzystość występujących w nim wielkości pozwala na interpretację fizyczną i szacowanie wpływu poszczególnych parametrów materiałowych zachodzącego procesu. Zatem równanie (6.1), stanowiące treść rozważań tego rozdziału wnosić może istotny element teore-

tycznych dociekań pozwalający na wniknięcie w tajniki fal powierzchniowych w ośrodku anizotropowym i niejednorodnym.

Tablica 2. Dane dla półprzestrzeni izotropowej niejednorodnej o parametrach: $\nu=0,28$, $\mu_0=1,05$, $\mu_\infty=1,21$, $\gamma_0=1/3$

$\Psi = \frac{\hat{c}}{s}$	0,0174	0,0445	0,218	0,3402	0,5647	0,7685	1,0955	2,5584
C_R	0,975	0,98	1,00	1,01	1,02	1,025	1,03	1,035

Tablica 3. Dane dla półprzestrzeni izotropowej niejednorodnej o parametrach: $\nu=0,25$, $\mu_0=1,1$, $\mu_\infty=1,25$, $\gamma_0=0,306$

$\Psi = \frac{\hat{c}}{s}$	0,0191	0,0816	0,1705	0,2997	0,5129	1,0381	2,2105	$\rightarrow \infty$
C_R	0,99	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,045	$\rightarrow 1,048$

* * *

WNIOSKI

1. W pracy wyprowadzono równanie różniczkowe zwyczajne czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach opisujące funkcję naprężeń (tj. amplitudę naprężeń normalnych $\bar{\sigma}_{22} = \sigma_{zz}(x, z; t)$) w półprzestrzeni transwersalnie izotropowej, niejednorodnej wzdłuż głębokości, w przypadku fal harmonicznych w płaskim stanie odkształcenia, równanie (3.30) lub (3.31) i sformułowano problem fal powierzchniowych typu Rayleigha w sensie zagadnienia własnego z odpowiednimi warunkami brzegowymi (3.32).

2. Równanie (3.31) przedstawiono w takiej postaci, aby pozwoliło na wyselekcjonowanie kilku przypadków przybliżonych na podstawie oszacowania małego wkładu niektórych członów równania do członów wiodących w zazwyczaj klasyfikowanych materiałach, takich jak:

- ciało transwersalnie izotropowe z "małą niejednorodnością", równanie (4.4),
- ciało "słabo anizotropowe" niejednorodne, równanie (4.11),
- ciało "słabo anizotropowe" z "małą niejednorodnością", równanie (4.12)

i równania dokładne, gdy jest

- ciało transwersalnie izotropowe jednorodne, równanie (4.13),
- ciało izotropowe niejednorodne, równanie (4.19) lub (4.21)-(4.23).

3. Z przypadków szczególnych autor wybrał równanie opisujące fale w ośrodku "słabo anizotropowym" z "małą niejednorodnością", (4.12), patrz również (6.1) łącznie z (6.25), analizował je korzystając z metody przedłożonej w rozdziale 5 w celu zbadania informacji o fali powierzchniowej w półprzestrzeni anizotropowej i niejednorodnej wyrażonej przez to równanie w zakresie jakościowym i ilościowym.

4. Przy założeniu monotonicznie zmiennych modułów sprężystości poprzecznej i stałych współczynników Poissona oraz ograniczeniu do dwóch wyrazów rozwinięcia w szereg Taylora ilorazu wymienionych modułów z warunkiem (6.19), otrzymano rozwiązanie zagadnienia własnego (6.1) z warunkami (6.25) w postaci zamkniętej, które przedstawia funkcja $\beta_N(z)$ zapisana wzorem (6.41) lub (6.43) i funkcje $\alpha(z)$ (amplituda naprężeń normalnych $\sigma_{11} = \sigma_{xx}(x, z; t)$) wg wzoru (6.51) oraz $\gamma(z)$ (amplituda naprężeń stycznych) dana wzorem (6.47).

5. Przy założeniach w punkcie 4, wyprowadzono równanie dyspersji (6.48) i wykazano, że zależy ono od wszystkich współczynników materiałowych, tzn.

$$R(c_R, s, \epsilon/\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon}, \nu, \mu_0, \mu_\omega, \hat{\nu}, \hat{\mu}_0, \hat{\mu}_\omega, \kappa_{no}) = 0.$$

6. Podstawienie asymptotycznych rozwinięć funkcji Bessela do równania dyspersji (6.48) pozwoliło na otrzymanie równania algebraicznego (6.57) dogodnego do obliczeń numerycznych. W równaniu (6.57) występują wszystkie współczynniki charakteryzujące założony materiał anizotropowy i niejednorodny. Przyjmując nową

wielkość $\Upsilon = \frac{\hat{c}}{s}$, gdzie \hat{c} jest parametrem niejednorodności, a s liczbą falową i specyfikując inne współczynniki materiałowe można na podstawie równania (6.57) poszukiwać rzeczywistych prędkości fali Rayleigha w zależności od rzeczywistej wielkości

7. W półprzestrzeni sprężystej anizotropowej i niejednorodnej opisanej przez współczynniki (6.66) można oczekiwać zależności $C_R = C_R(\Upsilon)$ przedstawionej w tabelicy 1 i wykreślenie na rys.3, krzywa A. W tym przypadku rozkład prędkości zajmuje przedział $C_R (0,98, 1,017)$, podczas gdy parametr Υ należy do dziedziny $(0,00087), 3,9471$).

8. Na podstawie wykresów z rys.3 wynika, że prędkość C_R w ośrodku anizotropowym, niejednorodnym i izotropowym niejednorodnym przy pewnych współczynnikach materiałowych może być taka sama. Wydaje się, że zmiana liczby falowej w granicach od 0,7 do 1,4 powinna być wystarczająca do wykazania, w jakiego rodzaju ośrodka proces zachodzi.

9. Opublikowane prace autora z dziedziny fal powierzchniowych w ośrodkach niejednorodnych [11], [12] spotkały się z odzewem szkoły specjalistycznej z USA i ZSRR. Napisano, że równania dyspersji (3.21), (4.7) w pracy [11] wzbudzają zainteresowanie ze względu na przydatność w badaniach sejsmicznych ziemi - Suhubi, równania (3.7), (3.45) w [12] do badania zjawisk sejsmicznych w oceanach - Alenitsyn, Leningrad, z propozycją współpracy.

10. Równanie dyspersji (6.48) w niniejszej pracy jest, jak wykazują przejścia do ośrodków prostszych, rozwinięciem równania dyspersji w ośrodku izotropowym niejednorodnym na ośrodek anizotropowy niejednorodny. Na tej podstawie można wnosić, że wyniki otrzymane w pracy stanowią dalszy oryginalny przyczynek do rozwoju badań teoretycznych procesów falowych.

Wykaz literatury

- [1] J. Ignaczak, Zagadnienia zupełności dla naprężeniowych równań ruchu w liniowej teorii sprężystości, Rozprawa Habilitacyjna, Biblioteka IPPT PAN, Warszawa 1963.
- [2] J. Ignaczak, A completeness problem for stress-equations of motion in linear elasticity theory, Arch. Mech. Stos., 15, 2, 225-233, 1963.
- [3] J. Ignaczak, Rayleigh waves in a nonhomogeneous isotropic elastic semi-space, Part I, Arch. Mech. Stos., 15, 3, 341-345, 1963.
- [4] S.G. Lechnickij, Teoria uprugosti anizotropnowo tieła, Nauka, Izdanie wtoroje, Moskwa 1977.
- [5] W. Nowacki, Teoria sprężystości, PWN, Warszawa 1970.
- [6] W. Nowacki, The stress functions in three-dimensional problems concerning an elastic body characterized by transverse isotropy, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. tech., 2, 1, 21-25, 1954.
- [7] Z. Mossakowska, Stress functions of elastic bodies with three-dimensional orthotropy, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. tech., 3, 1, 3-6, 1955.
- [8] J. Mossakowski, The Michell problem for anisotropic semi-infinite plate, Arch. Mech. Stos., 8, 4, 539-548, 1956.
- [9] S. Kaliski, Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych, praca dyplomowa na stopień doktora nauk technicznych, Wojskowa Akademia Tech., Warszawa 1957.
- [10] A.C. Eringen, E.S. Suhubi, Elastodynamics, Vol. II, Academic Press, New York 1975.
- [11] T. Roźnowski, Surface waves in an isotropic elastic semi-space with small nonhomogeneity, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. tech., 25, 2, 67-77, 1977.
- [12] T. Roźnowski, Surface waves in an isotropic elastic nonhomogeneous semi-space, Arch. Mech. Stos., 39, 4, 337-358, Warszawa 1987.
- [13] W.M. Ewing, W.S. Jardetzky, F. Press, Elastic waves in layered media, McGraw Hill book Company, INC, New York 1957.
- [14] M. Sokołowski, Pewne zagadnienia płaskiej teorii sprężystości ciała ortotropowego, Arch. Mech. Stos., 2, 1, 1954.
- [15] C.R.A. Rao, Surface waves in an elastic semi-space with a stable nonhomogeneity, Pure and Appl. Geophysics, 75, 31-41, 1969.

- [16] T.Klecha, Fale powierzchniowe w niejednorodnej izotropowej półprzestrzeni sprężystej, Rozprawa Doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1983.
- [17] Z.Kączkowski, Orthotropic rectangular plates with arbitrary boundary conditions, Arch.Mech.Stos., 8, 2, 179-196, 1956.
- [18] A.Ben-Menahem, S.J.Singh, Seismic Waves, Springer Verlag, New York 1981.
- [19] M.E.Gurtin, The Linear Thoery of Elasticity, in Encyclopeda of Physics, Vol. VI a/2, Springer Verlag, 1972.
- [20] R.Roźnowski, Dyspersja fal powierzchniowych w izotropowej niejednorodnej półprzestrzeni sprężystej, Materiały "Piętnastej Krajowej Konferencji Badań Nieniszczących", Rynia 4-6 listopada 1986.
- [21] T.Roźnowski, Stress surface waves in a heterogeneous elastic semi-space covered by solid homogeneous layer, Vibrations in Physical Systems, XIIIth Symposium, Poznań-8 Błażewko, May 25-28, 1988.
- [22] T.Roźnowski, Surface waves in an elastic transversally isotropic semi-space with small non-homogeneity, 27th Polish Solid Mechanics Conference, 29th Aug.-3rd Sept., Ryto 1988, Abstracts.
- [23] A.G.Alenitsyn (), Rayleigh waves in an inhomogeneous elastic semi-space, (in Russian), Prik.Mat.Mech., 27, 3, 547-550, Moskwa 1963.
- [24] A.G.Alenitsyn (), Rayleigh waves in inhomogeneous layer on a semi-space, (in Russian), Prik.Mat. Mech., 37, 5, 895-899, Moskwa 1973.
- [25] A.G.Alenitsyn (), Asymptotic limiting condition on the boundary of a liquid layer and an elastic inhomogeneous semi-space, (in Russian), Akust.Žurn., 34, 9, 969-971, Moskwa 1988.

SPIS TREŚCI	str.
1. Przedmowa	4
2. Wstęp	6
2.1. Fale naprężenia w technice	6
2.2. Liniowe równania przemieszczeniowe i naprężeniowe elastodynamiki dla ciała anizotropowego, niejednorodnego	8
3. Ciało sprężyste transwersalnie izotropowe, niejednorodne (płaski stan odkształcenia)	10
3.1. Równania naprężeniowe	10
3.2. Równania fal powierzchniowych	14
4. Dyskusja równania dla funkcji naprężeń w półprzestrzeni transwersalnie izotropowej i niejednorodnej	19
4.1. Ciało transwersalnie izotropowe z "małą niejednorodnością"	20
4.2. Ciało "słabo anizotropowe" niejednorodne	21
4.3. Ciało "słabo anizotropowe" z "małą niejednorodnością"	22
4.4. Ciało transwersalnie izotropowe, jednorodne	22
4.5. Ciało izotropowe niejednorodne	24
5. Metoda rozwiązywania wyprowadzonych równań dla ośrodka sprężystego anizotropowego, niejednorodnego	26
6. Pewne rozwiązania i analiza fali powierzchniowej w półprzestrzeni "słabo anizotropowej" z "małą niejednorodnością"	29
6.1. Sformułowanie zagadnienia i rozwiązanie problemu	30
6.2. Analiza równania dyspersji	41
Wnioski	48
Wykaz literatury	51