7.71 — teoria drgań, rezonans

Tomasz Lekszycki

WARIACYJNE ZASADY W ANALIZIE I SYNTEZIE SPRĘŻYSTYCH UKŁADÓW Z TŁUMIENIEM

37/1987

37/1987

P. 269

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN 3

BIBLIOTEKA

WARSZAWA 1987

http://rcin.org.pl

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 19 września 1987 r.

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
BIBLIOTEKA

56863

IPPT PAN

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd.2,07 Ark.druk. 3
Oddano do drukarni w listopadzie 1987 r.
Nr zamówienia 600/87

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

http://rcin.org.pl

Tomasz Lekszycki
Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych

WARIACYJNE ZASADY W ANALIZIE I SYNTEZIE SPRĘŻYSTYCH UKŁADÓW Z TŁUMIENIEM. CZĘŚĆ I - UKŁADY DYSKRETNE

Niniejsza praca jest poświęcona zagadnieniom analizy i syntezy sprężystych układów z liniowym tłumieniem zewnętrznym i materiałowym. Jej celem jest przedstawienie podstawowych zasad wariacyjnych dla niektórych ważnych zadań dynamiki układów z tłumieniem a następnie ogólne sformułowanie zadania syntezy układów niesamosprzężonych z wykorzystaniem niektórych z wyprowadzonych zasad.
W pierwszej części, dotyczacej analizy, uwzględniono trzy grupy zadań: harmoniczne drgania wymuszone, tłumiony ruch swobodny oraz ruch i analiza statecznosci układów z zewnętrznymi obciążeniami niekonserwatywnymi. Wyprowadzono podstawowe zasady wariacyjne jak zasadę stacjonarności zespolonej energii wzajemnej, uogólnioną zasadę Rayleigh'a dla zespolonych wartości własnych i zasadę opisującą krytyczne obciążenia niekonserwatywne i krytyczne częstości drgań. Wykorzystano do tego sformułowanie zespolone oraz pojęcie sprzężonych układow analizy. Zasady te mogą być przydatne przy budowaniu przybliżonych metod analizy oraz w syntezie konstrukcji.
Następna część pracy jest poświęcona syntezie i analizie wrażliwości układów niesamosprzężonych. Po wprowadzeniu sprzężonych układów syntezy przedstawiono ogólne sformułowanie zadania przy czym wykorzystano tam niektóre z zasad wariacyjnych przytoczonych wcześniej. Dzięki temu że zastosowano metodę układów sprzężonych z wyrażenia na wariacje funkcjonału celu zostały wyeliminowane wyrazy zależne od wariacji zmiennych stanu.
Ostatnia część pracy zawiera proste przykłady ilustracyjne, pierwszy dotyczący wykorzystania zasad wariacyjnych w analizie a drugi - w syntezie.

http://rcin.org.pl

1. Wstęp

W ostatnim trzydziestoleciu zjawisko tłumienia oraz jego wpływ na własności dynamiczne układów mechanicznych i elektrycznych było przedmiotem wielu prac. Szczególną, lecz bardzo ważną klasą ruchów w dynamice są drgania, wymuszone oraz swobodne. W pierwszym przypadku tłumienie w istotny sposób decyduje o amplitudzie drgań, szczególnie w pobliżu rezonansów, zaś w drugim, mając wpływ na wartości własne układu, określa charakter jego ruchu (drgania tłumione lub ruch aperiodyczny). W 1952 roku Ziegler [1] zauważył t.zw. destabilizujacy wpływ tłumienia wewnętrznego w układach z obciążeniami niekonserwatywnymi. Był to początek istnej lawiny prac poświęconych tej tematyce. Ponadto, wysokie wymagania stawiane współczesnym konstrukcjom oraz gwałtowny rozwój inżynierii materiałowej, dającej do dyspozycji konstruktorom materiały o różnych własnościach, wpłynęły dodatkowo na wzrost zainteresowania układami z tłumieniem.

Praca ta jest poświęcona zagadnieniom analizy i syntezy sprężystych układów z liniowym tłumieniem zewnętrznym i materiałowym. Jej celem jest przedstawienie szeregu zasad wariacyjnych dla niektórych ważnych zadań dynamiki układów z tłumieniem a następnie ogólne sformułowanie zadania syntezy układów niesamosprzężonych z wykorzystaniem niektórych z wyprowadzonych zasad.

W pierwszej części pracy, dotyczącej analizy, uwzględnione zostały trzy grupy zadań: harmoniczne drgania wymuszone, tłumiony ruch swobodny oraz ruch i analiza stateczności układów z zewnętrznymi obciążeniami niekonserwatywnymi. Do opisu ruchu wykorzystane zostało sformułowanie zespolone oraz pojęcie sprzężonych układów analizy potrzebne przy wyprowadzaniu zasad wariacyjnych. Zasady te, jak np. zasada stacjonarności zespolonej energii wzajemnej, uogólniona zasada Rayleigh'a dla zespolonych wartości własnych czy zasada opisująca krytyczne obciążenia niekonserwatywne, mogą być przydatne zarówno przy budowaniu przybliżonych metod analizy układów z tłumieniem jak też w syntezie

http://rcin.org.pl

tych układów.

Synteza jest przedmiotem następnej części pracy. Po wprowadzeniu sprzężonych układów syntezy zostało przedstawione ogólne sformułowanie zadania dla układów niesamosprzężonych, w którym wykorzystano przykładowo niektóre z zasad wariacyjnych podanych w poprzednim rozdziale. Omówiono również przypadki, gdy dzięki szczególnej postaci funkcjonału celu, jak to często zdarza się w praktyce, sformułowanie i rozwiązanie problemu da się znacznie uprościć.

Ostatnia część pracy zawiera proste przykłady ilustracyjne, pierwszy - dotyczący wykorzystania zasad wariacyjnych w analizie a drugi - w syntezie.

Do prezentacji omawianego tu materiału zostało wybrane sformułowanie dyskretne. Analogiczne rezultaty można otrzymać dla sformułowania ciągłego. Będzie to tematem następnej pracy, gdzie poświęcimy również więcej miejsca na omówienie interpretacji mechanicznej oraz własności sprzężonych układów analizy i syntezy.

2. Analiza

Wspólną cechą rozpatrywanych tu klas zadań dynamiki układów z tłumieniem jest to, że w równaniach ruchu daje się dokonać rozdzielenia zmiennych przestrzennych i czasowych oraz znany jest charakter funkcji opisującej zmiany przemieszczeń w czasie. Dzięki temu można wyeliminować z rozważań zależność od czasu i sprowadzić rozpatrywane zadanie do umownego zadania statyki z siłami masowymi.

Przydatność zasad wariacyjnych w analizie konstrukcji jest bezsporna - są one powszechnie stosowane, patrz np. Washizu [2]. Wspomniana tu książka jest jednak poświęcona głównie układom sprężystym i plastycznym. Istnieje również szereg prac dotyczących analizy układów z tłumieniem. Gurtin [3] podał zasady wariacyjne dla ciał lepkosprężystych w przypadku quasistatycznym. Wyniki te uogólnił Leitman [4] na liniowe zagadnienia dyna-

http://rcin.org.pl

miki. W obu tych pracach zostało wykorzystane twierdzenie o splocie funkcji. Podobną metodę zastosowali Senczenkov i Karnauchov [5]. Punktem wyjścia do uzyskania wspomnianych wyżej wyników [3-5] była praca Gurtina [6] dotycząca liniowej dynamiki układów sprężystych, w której podane zasady wariacyjne w pełni charakteryzują problem początkowo-brzegowy (w przeciwieństwie do klasycznej zasady Hamiltona opartej na założeniu o znikaniu odpowiednich wariacji nie tylko w chwili początkowej lecz i końcowej rozpatrywanego ruchu). Brilla [7] zagadnienie quasi-statyczne sformułował w przestrzeni transformat Laplace'a i wyprowadził zasadę minimum chwilowej energii potencjalnej.

Ograniczając się jednak do drgań, można często sformułowanie zadania analizy znacznie uprościć. Zostało tak zrobione w pracy Mroza [8], w której podano zasady minimum energii potencjalnej i ekstremum energii dopełniającej dla wymuszonych drgań harmonicznych układow idealnie sprężystych. Analogiczne sformułowanie, lecz dla układów lepkosprężystych przy użyciu funkcji zespolonych, było wykorzystane przez Lekszyckiego [9]. W niniejszej pracy będą między innymi omówione podstawowe zasady wariacyjne dla wymuszonych drgań harmonicznych sprężystych układów z tłumieniem, podobne do przedstawionych w [9] lecz w sformułowaniu dyskretnym.

Przechodząc do zagadnienia drgań swobodnych należy wspomnieć o szeregu zasad wariacyjnych przytoczonych przez Washizu [2] dla układów sprężystych. Problemowi poszukiwania wartości własnych układów z tłumieniem przekraczającym wartość krytyczną jest poświęcona praca Duffina [10]. Podany tam funkcjonał opisuje rzeczywiste wartości własne układu nadtłumionego i może być traktowany jako szczególny przypadek uogólnionego ilorazu Rayleigh'a opisującego zespolone wartości własne układów z tłumieniem, który będzie omówiony w niniejszej pracy wraz z zasadą ekstremum energii wzajemnej.

Wreszcie, jako trzeci z kolei, zostanie omowiony ruch i analiza stateczności tłumionych układów z obciążeniami niekonserwatywnymi. W tym miejscu należałoby wspomnieć o niektórych pracach dotyczących układów sprężystych. Leipholtz wykorzystał w [11] do

http://rcin.org.pl

analizy zasadę analogiczną do zasady Hamiltona lecz zbudowaną na polach układów podstawowego i sprzężonego. Prasad i Hermann [12, 13], stosując pojęcie układów sprzężonych, otrzymali zasadę wariacyjną na poszukiwane wartości własne sprężystych układów pod działaniem sił niekonserwatywnych. Dubey i Leipholtz [14] otrzymali analogiczne związki, z których jeden nazwali uogólnionym ilorazem Rayleigh'a. Anderson [15,16] uwzględnił w swych pracach tłumienie. Wykorzystał on zasadę Hamiltona zbudowaną na polach przemieszczeń układów podstawowego i sprzężonego w celu skonstruowania przybliżonej metody, analogicznej do metody Ritza, do analizy układów tłumionych. W niniejszej pracy, po wyeliminowaniu z opisu ruchu zależności od czasu i wprowadzeniu układu sprzężonego, będzie przedstawiona zasada stacjonarności energii wzajemnej, uogólniony iloraz Rayleigh'a oraz zasada opisująca krytyczne obciążenia niekonserwatywne w układach z tłumieniem. Tak jak i w przypadkach omówionych wcześniej, t.zn. dla drgań harmonicznych i dla ruchu swobodnego zasady te, charakteryzujące tym razem zadania analizy tłumionych układów z obciążeniami niekonserwatywnymi, będą zbudowane na zespolonych przemieszczeniach układów podstawowego i sprzężonego. Podobną do pierwszej z tych zasad t.zn. zasadę stacjonarności energii wzajemnej można również znaleźć w pracy Pedersena [17].

2.1. Harmoniczne drgania wymuszone

Zajmiemy się teraz ustalonymi drganiami układów mechanicznych, z liniowym lepkim tłumieniem, wywołanymi przez harmonicznie zmienne w czasie obciążenia zewnętrzne. Rozpatrzmy ruch układu opisanego następujacym równaniem ruchu:

$$M\ddot{\underset{\sim}{X}} + C\dot{\underset{\sim}{X}} + S\underset{\sim}{X} = P_1 \cos\omega t - P_2 \sin\omega t \tag{1}$$

W równaniu tym $\underset{\sim}{X}$ oznacza wektor przemieszczeń, t - czas, M, C, S - odpowiednio macierze mas, tłumienia i sztywnosci, P_1 i P_2 - macierze obciążeń zewnętrznych, ω - częstość drgań zaś kropka

http://rcin.org.pl

nad $\underset{\sim}{X}$ - różniczkowanie po czasie. Ograniczając rozważania do ustalonych drgań harmonicznych rozwiązanie równania (1) można zapisać w postaci:

(2) $\underset{\sim}{X}(t) = Xe^{i\omega t}$

gdzie $X = X_R + iX_I$ jest wektorem zespolonym zaś $i = \sqrt{-1}$. Wykorzystując powyższy związek oraz zapisując obciążenia zewnętrzne w postaci zespolonej $Pe^{i\omega t}$, gdzie $P = P_1 + iP_2$, można przepisać równanie (1) w nastepującej formie:

(3) $LX - P = 0$

L jest symetryczną macierzą zespoloną:

(4) $L = -\omega^2 M + i\omega C + S$

Mnożąc równ. (3) skalarnie przez dopuszczalną wariację przemieszczeń δX otrzymuje się zasadę zespolonych prac przygotowanych:

(5) $\langle LX, \delta\bar{X}\rangle - \langle P, \delta\bar{X}\rangle = 0$

którą słowami można wvrazić następująca:

Suma wszystkich prac wykonanych przez zespolone siły na dopuszczalnych wariacjach zespolonych wektorów przemieszczeń układu jest równa zero.

Użyty w równaniu (5) iloczyn skalarny wektorów zespolonych jest zdefiniowany nastepująco:

$$\langle A,B\rangle = A^T \bar{B} = \sum_{l=1}^{N} a_l \bar{b}_l$$

$$a_l = a_{lR} + ia_{lI} \quad ; \quad \bar{b}_l = b_l - ib_{lI}$$

Wprowadźmy następnie zespoloną energię potencjalną:

http://rcin.org.pl

$$(6)\qquad \Pi(X) = \frac{1}{2}\langle LX,\bar{X}\rangle - \langle P,\bar{X}\rangle$$

Jak łatwo sprawdzić, z warunku stacjonarnosci funkcjonału $\Pi(X)$ wynika równanie równowagi (3):

$$(7)\qquad \delta\Pi(X) = \langle LX-P,\delta\bar{X}\rangle = 0$$

Jest to treścią zasady stacjonarności zespolonej energii potencjalnej:

> Sposród kinematycznie dopuszczalnych zespolonych wektorów przemieszczeń X, wektory spełniające równanie równowagi (3) zapewniają stacjonarność energii potencjalnej (6). (Więcej na temat tej zasady można znaleźć w Dodatku A)

Omawiany tu przypadek wymuszonego ruchu harmonicznego, podobnie jak i swobodny ruch tłumiony, są prostsze w analizie od trzeciej grupy zadań, o której będzie mowa w końcowej części tej pracy. Wynika to stąd że mimo iż wszystkie trzy problemy są niesamosprzężone, jednak dla dwóch pierwszych macierz L jest symetryczna. Dzięki temu, przy budowaniu zasad wariacyjnych dla wymuszonych drgań harmonicznych i swobodnego ruchu tłumionego, można wykorzystać związek pomiędzy wektorami przemieszczeń analizowanego układu oraz pewnego fikcyjnego układu zwanego sprzężonym i zrezygnować z wprowadzania sprzężonego układu do rozważań. Układ ten jest opisany równaniem:

$$(8)\qquad L^{a}Y - \bar{P} = 0$$

Wyprowadzenie tego równania jak również zasady (7) zostało podane w Dodatku A. L^{a} wynika z definicji operatora sprzężonego:

$$(9)\qquad \langle Lu,v\rangle = \langle u,L^{a}v\rangle$$

i w omawianym tu przypadku jest równy:

http://rcin.org.pl

(10) $$L^a = \overline{L^T} = \bar{L}$$

Stąd wynika że:

(11) $$Y = \bar{X}$$

Dlatego właśnie w zasadzie zespolonych prac przygotowanych i w zasadzie stacjonarności zespolonej energii potencjalnej występuje wektor sprzężony $\bar{X}$. Niestety w ostatnim z przypadków omawianych w tej pracy t.zn. dla ruchu układów z tłumieniem obciążonych siłami niekonserwatywnymi takiego uproszczenia nie daje się już zrobić.

2.2. Swobodny ruch układów bez obciążeń zewnętrznych

Zajmiemy się teraz swobodnym ruchem układów z liniowym, lepkim tłumieniem. Rozpatrzmy układ scharakteryzowany, podobnie jak poprzednio, macierzami mas, sztywnosci i tłumienia M, S, C. Równanie ruchu tego układu ma postać:

(12) $$\underset{\sim}{M}\ddot{X} + \underset{\sim}{C}\dot{X} + \underset{\sim}{S}X = 0$$

rozwiązanie tego równania można przyjąć w postaci następującej sumy:

(13) $$\underset{\sim}{X}(t) = \sum_{j=1}^{n} X_j e^{\Omega_j t} = \sum_{j=1}^{n} e^{\alpha_j t}\left[(X_{jR}\cos\omega_j t - X_{jI}\sin\omega_j t) + i(X_{jR}\sin\omega_j t + X_{jI}\cos\omega_j t)\right]$$

gdzie $X_j = X_{jR} + iX_{jI}$ jest zespolonym wektorem własnym odpowiadającym zespolonej wartości własnej $\Omega_j = \alpha_j + i\omega_j$. Wykorzystując

http://rcin.org.pl

związek (13) w celu wyeliminowania z równania (12) zależności od czasu, otrzymujemy w rezultacie równania równowagi:

(14) $\quad L_j X_j = 0$

odpowiadające j-tym wartościom i wektorom własnym Ω_j i X_j. W równaniu (14) zespolona, symetryczna macierz L jest zdefiniowana następująco:

(15) $\quad L_j = \Omega_j^2 M + \Omega_j C + S$

Wyraz $\Omega_j^2 MX$ w równ. (14) reprezentuje zespolone siły masowe proporcjonalne do przemieszczeń układu i kwadratu zespolonej wartości własnej, wyraz $\Omega_j CX$ odpowiada siłom wywołanym lepkością, zaś SX_j - siłom sprężystym.
Nieraz, podczas rozwiązywania konkretnych zadań można wyróżnić w układzie tłumienie wewnętrzne C_{int} - materiałowe oraz zewnętrzne C_{ext}. W takich przypadkach często jest robione założenie że pierwsze z nich jest proporcjonalne do sztywnosci elementów układu zaś drugie do mas.

(16) $\quad C_{int} = \gamma S \quad ; \quad C_{ext} = \beta M$

Przyjęcie tłumienia wewnętrznego proporcjonalnego do macierzy sztywnosci ma często swoje uzasadnienie, natomiast założenie o tłumieniu zewnętrznym proporcjonalnym do mas może budzić wątpliwości, jednak ze względu na znaczne skrócenie obliczeń numerycznych te uproszczenia są nieraz stosowane. W takim przypadku, po prostych przekształceniach otrzymuje się z równ. (14) następujący związek:

(17) $\quad -\lambda_j^2 MX_j + SX_j = 0$

gdzie

http://rcin.org.pl

$$(18) \qquad \lambda_j^2 = -\frac{\Omega_j^2 + \beta\Omega_j}{1 + \gamma\Omega_j}$$

jest kwadratem j-tej częstości drgań własnych układu bez tłumienia.
Tak więc, analizując układ lepkosprężysty przy założeniach (16) wystarczy ograniczyć się do rozwiązania analogicznego zadania dla problemu idealnie sprężystego, wektory własne w obu przypadkach są jednakowe zaś wartości własne $\Omega_j = \alpha_j + i\omega_j$ wynikają ze związku (18), który po rozpisaniu na część rzeczywistą i urojoną i prostych przekształceniach daje:

$$(19) \qquad \alpha_j = -\frac{\lambda_j^2\gamma + \beta}{2}$$

$$\omega_j^2 = -\frac{\beta^2}{4} + (1 - \frac{\gamma\beta}{2})\lambda_j^2 - \frac{\gamma^2}{4}\lambda_j^4$$

Przejdziemy teraz do omówienia ogólnego przypadku gdy na macierz tłumienia nie nałożone są żadne ograniczenia prócz założenia o jej symetryczności. Poniżej zostaną przedstawione podstawowe zasady wariacyjne rządzące analizą takich układów. W dalszych rozważaniach, dla uproszczenia zapisu, będą pomijane indeksy "j" przy wektorach i wartościach własnych.
Postępując analogicznie jak to było zrobione w Dodatku A dla układów znajdujących się pod działaniem zewnętrznych obciążeń harmonicznych można wyprowadzić funkcjonał $\Pi(X)$ taki że z warunku jego stacjonarności wynikają równania analizy (14). Mnożąc skalarnie przez wektor wirtualnych przemieszczeń δX równanie równowagi (14) oraz dokonując całkowania względem X otrzymuje się następujacy funkcjonał:

http://rcin.org.pl

$$(20) \qquad \Pi(X) = \frac{1}{2}\langle LX,\bar{X}\rangle$$

Jak można sprawdzić, z warunku stacjonarnosci tego funkcjonału, dla dowolnych kinematycznie dopuszczalnych wariacji δX, otrzymuje się równanie równowagi (14), gdyż

$$(21) \qquad \delta\Pi(X) = \frac{1}{2}\langle L\delta X,\bar{X}\rangle + \frac{1}{2}\langle LX,\delta\bar{X}\rangle = \langle LX,\delta\bar{X}\rangle = 0$$

Wprowadzając pojęcie zespolonych energii kinetycznej, dysypacji i sprężystej, zdefiniowanych przez związki

$$(22) \qquad \begin{aligned} T &= \langle MX,\bar{X}\rangle \\ D &= \langle CX,\bar{X}\rangle \\ U &= \langle SX,\bar{X}\rangle \end{aligned}$$

można zapisać funkcjonał Π w postaci:

$$(23) \qquad \Pi(X) = \frac{1}{2}(\Omega^2 T + \Omega D + U)$$

Na podstawie równania (21) można sformułować nastepującą zasadę:

Spośród wszystkich kinematycznie dopuszczalnych zespolonych wektorów przemieszczeń X, wektory własne będące rozwiązaniami równ. (14) zapewniają stacjonarną wartość zespolonej energii potencjalnej Π zdefiniowanej równaniem (23).

Dotychczas jedynie wektory własne X podlegały wariacji. Dopuśćmy teraz taką możliwość, że prócz wektorów X również wartości własne Ω mogą ulegać zmianom i policzmy wariację funkcjonału $\Pi(X,\Omega)$:

http://rcin.org.pl

(24) $$\delta\Pi(X,\Omega) = \frac{1}{2}<\Omega^2\delta T + \Omega\,\delta D + \delta U> + \frac{1}{2}<2\Omega T + D>\delta\Omega$$

Gdyby teraz zażądać spełnienia warunku stacjonarności funkcjonału $\Pi(X,\Omega)$, to prócz równania równowagi (14) należałoby jeszcze spełnić następujący warunek:

(25) $$(2\Omega T + D)\delta\Omega = 0$$

a więc,

(26) $$\Omega = -\frac{D}{2T} \quad \text{lub} \quad \delta\Omega = 0$$

Pierwszy z powyższych związków odpowiada przypadkowi tłumienia krytycznego, natomiast drugi jest przedmiotem uogólnionej zasady Rayleigh'a dla układów z tłumieniem. Okazuje się bowiem, ze można zbudować taki funkcjonał $\Omega(X)$, który osiąga wartość stacjonarną dla wektora własnego X, równą wartości własnej Ω odpowiadającej temu wektorowi.
Do powyżej wypowiedzianego wniosku można dojść w następujący sposób. Pomnóżmy skalarnie równanie równowagi przez dowolną, kinematycznie dopuszczalną wariację wektora X:

(27) $$<MX,\delta\bar{X}> + <CX,\delta\bar{X}> + <SX,\delta\bar{X}> = 0$$

Po wykonaniu całkowania względem $\bar{X}$ otrzymujemy:

(28) $$<MX,\bar{X}> + <CX,\bar{X}> + <SX,\bar{X}> = \theta$$

gdzie θ jest stałą całkowania. Oznaczymy funkcjonał zależny od kinematycznie dopuszczalnych wektorów X znajdujący się po lewej stronie powyższego równania przez $\Pi(X)$:

(29) $$\Pi(X) = \Omega^2<MX,\bar{X}> + \Omega<CX,\bar{X}> + <SX,\bar{X}>$$

http://rcin.org.pl

Przyjmuje on oczywiście różne wartości w zależności od wektorów X. Dla wektorów własnych odpowiadających wartości własnej funkcjonał ten przyjmuje wartość równą zero, o czym łatwo się przekonać mnożąc równanie równowagi przez wektor własny X:

$$\Omega^2 \langle MX,\bar{X}\rangle + \Omega\langle CX,\bar{X}\rangle + \langle SX,\bar{X}\rangle = 0$$

Powyższe równanie jest równaniem bilansu energii rozpatrywanego układu.

Powróćmy jeszcze do równ. (28) i wyznaczmy z niego Ω:

$$\text{(30a)}\qquad \Omega = \frac{-D + \sqrt{D^2 - 4T(U-\Theta)}}{2T}$$

$$\text{(30b)}\qquad \Omega' = \frac{-D - \sqrt{D^2 - 4T(U-\Theta)}}{2T}$$

Jak widac $\Omega(X)$ i $\Omega'(X)$ są funkcjonałami zależnymi od kinematycznie dopuszczalnych wektorów przemieszczeń X . Pokażemy że z warunku stacjonarności funkcjonału $\Omega(X)$ wynika równanie równowagi rozpatrywanego układu. Policzmy pierwszą wariację $\delta\Omega(X)$:

$$\delta\Omega(X) = -\frac{1}{\sqrt{D^2-4T(U-O)}}\left[\frac{2D^2-4T(U-\Theta)+2D\sqrt{D^2-4T(U-\Theta)}}{(2T)}\delta T + \right.$$

$$\left. + \frac{-D+\sqrt{D^2-4T(U-\Theta)}}{2T}\delta D + \delta U\right] =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{D^2-4T(U-\Theta)}}(\Omega^2\delta T + \Omega\,\delta D + \delta U) =$$

http://rcin.org.pl

$$= - \frac{1}{\sqrt{D^2-4T(U-\theta)}} \langle LX,\delta\bar{X}\rangle + \langle \delta X, L^{*}\bar{X}\rangle =$$

$$= - \frac{2}{\sqrt{D^2-4T(U-\theta)}} \langle LX,\delta\bar{X}\rangle$$

Tak więc przy założeniu ze $D^2-4T(U-\theta) \neq 0$ dla dowolnych wariacji δX z warunku stacjonarnosci $\delta\Omega(X) = 0$ wynika równanie równowagi

$$LX = 0$$

Powyżej zostało więc pokazane ze funkcjonał $\Omega(X)$ osiąga wartość stacjonarną dla wektorów własnych X. Natomiast z równ. (29) wynika że ta stacjonarna wartość dla $\theta = 0$ jest równa wartości własnej Ω odpowiadajacej wektorowi własnemu X.
Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla funkcjonału $\Omega'(X)$ (równ.(30b)).
Stąd wynika uogólniona zasada Rayleigh'a dla układów z tłumieniem:

> Sposród kinematycznie dopuszczalnych wektorów przemieszczeń, wektory własne X zapewniają stacjonarną wartość funkcjonału (27) równą wartości własnej Ω odpowiadającej wektorowi X. Wyjątkiem jest sytuacja gdy $D^2 - 4TU = 0$ a więc w przypadku tłumienia krytycznego, wtedy $\Omega = -D/2T$.

Problem wzajemnego związku pomiędzy funkcjonałami (30a) i (30b) nie jest jeszcze w pełni jasny i powinien być wyjaśniony w przyszłości. Wydaje się, że dla zespolonych wartości własnych funkcjonały te odpowiadają sprzężonym wartościom Ω . Natomiast w przypadku gdy rozpatrywany jest układ nadtłumiony sprawa ta została szerzej omówiona w pracy Duffina [10].

http://rcin.org.pl

2.3. Stateczność układów z tłumieniem obciążonych siłami niekonserwatywnymi

Zajmiemy się ruchem układu opisanego, podobnie jak poprzednio, macierzą mas M, tłumienia C i macierzą sztywności S. Tym razem jednak, układ będzie pod działaniem zewnętrznych sił niezachowawczych, scharakteryzowanych niesymetryczną macierzą K. Założymy ponadto że poziom tych sił określony jest przy pomocy parametru p. W rezultacie otrzymujemy następujące równanie ruchu:

(31) $$M\ddot{\underset{\sim}{X}} + C\dot{\underset{\sim}{X}} + (S + pK)\underset{\sim}{X} = 0$$

W przeciwieństwie do przypadku omówionego wcześniej, gdzie mieliśmy do czynienia z zanikającym w czasie ruchem oscylacyjnym lub aperiodycznym, teraz trzeba uwzględnić również i inne możliwości. Tak więc, prócz wspomnianego powyżej ruchu zanikającego z upływem czasu, może rownież zaistnieć sytuacja że układ jest niestateczny i wtedy przemieszczenia rosną do nieskończoności. Wszystkie te przypadki dadzą się prosto opisać jeśli rozwiązanie, tak jak poprzednio, przyjmiemy w postaci (13) i Ω jest zespoloną wartością własną. Mamy wtedy:

$\alpha < 0$	$\omega \neq 0$	oscylacyjny ruch tłumiony
$\alpha < 0$	$\omega = 0$	aperiodyczny ruch tłumiony
$\alpha > 0$	$\omega \neq 0$	niestateczność typu "flatterowego"
$\alpha > 0$	$\omega = 0$	niestateczność "divergentna"

Stan w którym $\alpha = 0$ nazwiemy "stanem krytycznym". Jeśli dodatkowo $d\alpha/dp > 0$ jest to stan krytyczny utraty stateczności. Po wyeliminowaniu z równania (31) zależności od czasu otrzymujemy

(32) $$LX = 0$$

gdzie L jest zespolonym operatorem niesamosprzężonym, takim że

http://rcin.org.pl

$$L = \Omega^2 M + \Omega C + S + pK \tag{33}$$

Aby zbudować zasady wariacyjne analogiczne do zaprezentowanych wcześniej, trzeba wprowadzić pojęcie sprzężonego układu analizy. Ten fikcyjny układ jest opisany równaniem:

$$L^a Y = 0 \tag{34}$$

gdzie L^a jest operatorem sprzężonym z operatorem L, zaś Y jest wektorem własnym układu sprzężonego. Ze związków (9) i (33) wynika ze układ sprzężony jest podobny do układu podstawowego i różni się od niego jedynie obciążeniami niekonserwatywnymi. Aby wyprowadzić zasadę stacjonarności energii wzajemnej można postąpić podobnie jak było zrobione w Dodatku A. Mnożąc skalarnie równanie równowagi (32) przez wirtualne przemieszczenia sprzężonego układu analizy δY, całkując otrzymane wyrażenie względem Y a następnie przyjmując że wyraz niezależny od Y, który pojawił się po całkowaniu jest równy tożsamościowo zero, otrzymujemy funkcjonał:

$$\Pi(X,Y) = \Omega^2 T + \Omega D + U - pW \tag{35}$$

gdzie wzajemne energie kinetyczna, dysypacji, sprężysta i obciążeń zewnętrznych są zdefiniowane nastepująco:

$$\begin{aligned} T &= \langle MX,Y\rangle \\ D &= \langle CX,Y\rangle \\ U &= \langle SX,Y\rangle \\ W &= -\langle KX,Y\rangle \end{aligned} \tag{36}$$

Funkcjonał $\Pi(X,Y)$, zwany dalej energią wzajemną, reprezentuje dla wektorów własnych X i Y oraz odpowiadającej im wartości własnej Ω prace sił występujących w układzie podstawowym na przemieszczeniach układu sprzężonego, lub odwrotnie, po przekształceniu go do innej postaci:

$$\Pi(X,Y) = \langle LX,Y\rangle = \langle X,L^a Y\rangle \tag{37}$$

http://rcin.org.pl

- prace sił w układzie sprzężonym na przemieszczeniach układu podstawowego.

Z warunku stacjonarności funkcjonału (37), przy założeniu że wariacje δX i δY są dowolne i od siebie niezależne, otrzymuje się równania równowagi (32) układu podstawowego i (33) układu sprzężonego analizy. Zasadę stacjonarności energii wzajemnej można więc sformułować następująco:

> Spośród wszystkich kinematycznie dopuszczalnych wektorów przemieszczeń X i Y układu podstawowego i sprzężonego, wektory własne odpowiadające wartości własnej Ω zapewniają stacjonarną wartość energii wzajemnej (35).

$$\delta\Pi(X,Y) = \langle LX,\delta Y\rangle + \langle \delta X, L^{*} Y\rangle = 0$$

Wykorzystując własność stacjonarności energii wzajemnej można udowodnić również inną zasadę. Okazuje się bowiem, że można uogólnić zasadę Rayleigh'a na przypadek układów z tłumieniem pod działaniem obciazeń niekonserwatywnych i zbudować taki funkcjonał, który dla ścisłych rozwiązań X i Y przyjmuje wartość stacjonarną równą odpowiedniej wartości własnej Ω. Można go przedstawić w postaci:

$$(38)\qquad \Omega(X,Y) = -\frac{D + \sqrt{D^2 - 4T(U-pW)}}{2T}$$

Otrzymuje się go w analogiczny sposób jak funkcjonał $\Omega(X)$ (równ.(30a)) omawiany w poprzednim rozdziale. Wspomniana powyżej zasada brzmi nastepująco:

> Spośród wszystkich kinematycznie dopuszczalnych wektorów X i Y, wektory własne będące ścisłymi rozwiązaniami rownań równowagi (32) i (34) zapewniają stacjonarną wartość funkcjonału (38). Wartość ta jest równa wartości własnej Ω odpowiadającej wektorom

http://rcin.org.pl

własnym X i Y.

O prawdziwości tego twierdzenia łatwo się przekonać biorąc pod uwagę fakt że dla ścisłych rozwiązań X i Y równań równowagi (32) i (34) energia wzajemna $\Pi(X,Y) = 0$ oraz licząc pierwszą wariację funkcjonału $\Pi(X,Y)$.

$$(39) \qquad \delta\Omega(X,Y) = - \frac{\langle LX,\delta Y\rangle + \langle \delta X, L^{a} Y\rangle}{\sqrt{D^2 - 4T(U-pW)}} = 0$$

(Wyprowadzenie równ. (39) jest podane w Dodatku B). Podobnie jak było w przypadku swobodnych drgań układów z tłumieniem, zasada ta obowiązuje z wyjątkiem sytuacji gdy

$$(40) \qquad D^2 - 4T(U - pW) = 0$$

Można rownież wypowiedzieć analogiczne twierdzenie do twierdzenia o stacjonarności funkcjonału (38) lecz odnoszące się do funkcjonału o postaci:

$$(41) \qquad \Omega'(X,Y) = - \frac{D - \sqrt{D^2 - 4T(U-pW)}}{2T}$$

A zatem omówiono powyżej zasady stacjonarności energii wzajemnej i uogólnionej energii potencjalnej odpowiednio dla układów z obciążeniami niekonserwatywnymi i bez nich oraz uogólnioną zasadę Rayleigh'a dla tych układów. Należy podkreślić ze terminu "stacjonarność" użyto tu umownie, gdyż w ogólnym przypadku wszystkie funkcje występujące w wyżej przytoczonych związkach mają wartości zespolone, tak więc należałoby raczej mówić o stacjonarnosci części rzeczywistej i urojonej rozpatrywanego funkcjonału.

Zostanie teraz omówiona jeszcze jedna zasada, być może najciekawsza i najważniejsza z praktycznego punktu widzenia. Pozwoli ona opisać wartość "p" krytycznych obciążeń

http://rcin.org.pl

niekonserwatywnych oraz odpowiadającą im częstość drgań. Jak było wcześniej wspomniane przez obciążenia krytyczne rozumiemy tu takie obciążenia przy których część rzeczywista zespolonej wartości własnej zmienia znak ($\alpha = 0$). Jeśli dodatkowo jest spełniony warunek $d\alpha/dp > 0$ można wtedy powiedzieć że przy tym obciążeniu układ traci stateczność, (Rozpatrujemy tu przypadek gdy $\omega \neq 0$, czyli mamy do czynienia z niestatecznością typu flatterowego).

Rozpatrzmy więc sytuację gdy wartość własna Ω posiada jedynie część urojoną różną od zera.

(42) $\Omega = i\,\omega_{cr}$

Wprowadzając oznaczenia:

(43) $T = T_1 + iT_2 \quad ; \quad D = D_1 + iD_2$
$U = U_1 + iU_2 \quad ; \quad W = W_1 + iW_2$

możemy zapisać energię wzajemną , dla krytycznych wartości ω_{cr} oraz p_{cr} i odpowiadających im wektorów własnych X i Y, po rozpisaniu jej na część rzeczywistą i urojoną w postaci:

(44) $\mathrm{Re}(\Pi) = -\omega_{cr}^2 T_1 - \omega_{cr} D_2 + U_1 - p\,W_1 = 0$

(45) $\mathrm{Im}(\Pi) = -\omega_{cr}^2 T_2 + \omega_{cr} D_1 + U_2 - p\,W_2 = 0$

Wykorzystując powyższe związki można wyprowadzić funkcjonały $\omega(X,Y)$ i $p(X,Y)$, które dla odpowiednich wektorów własnych przyjmują odpowiednio wartości ω_{cr} i p_{cr} .

$$\omega\,(X,Y) = \frac{D_1 W_1 + D_2 W_2}{2(T_2 W_1 - T_1 W_2)} +$$

(46)

http://rcin.org.pl

$$- \frac{\sqrt{(D_1 W_1 + D_2 W_2)^2 + 4(W_1 T_2 - W_2 T_1)(W_1 U_2 - W_2 U_1)}}{2(W_1 T_2 - W_2 T_1)}$$

(47) $$p(X,Y) = - \frac{U_2 T_1 - U_1 T_2 + \omega (D_1 T_1 + D_2 T_2)}{W_1 T_2 - W_2 T_1}$$

Można pokazać (Dodatek C) że dla wektorów własnych spełniających równania równowagi funkcjonały te osiagają wartości stacjonarne.

(48) $\delta\omega(X,Y) = 0$; $\delta p(X,Y) = 0$

Otrzymaliśmy więc zasadę wariacyjną dotyczacą stanów krytycznych, która brzmi następująco:

Spośród wszystkich kinematycznie dopuszczalnych wektorów przemieszczeń układu podstawowego i sprzężonego analizy, wektory własne spełniające równania równowagi (32) i (34) zapewniają stacjonarne wartości funkcjonałów $\omega(X,Y)$ i $p(X,Y)$. Ponadto, dla tych wektorów własnych są spełnione równania:

$$\omega(X,Y) = \omega_{cr} \quad ; \quad p(X,Y) = p_{cr}$$

Powyższa zasada może być pomocna przy poszukiwaniu obciążenia krytycznego i odpowiadającej mu częstości drgań. Aby sprawdzić czy ten stan jest stanem utraty stateczności należy zbadać czy jest spełniony warunek $d\alpha/dp > 0$.

Przytoczone wyżej zasady dotyczące analizy wymuszonych drgań harmonicznych, swobodnego ruchu tłumionego oraz ruchu układów z obciążeniami niekonserwatywnymi nie są jedynymi jakie można by wyprowadzić, postępując podobnie można otrzymać inne, pokrewne. Mogą znaleźć one zastosowanie w analizie ruchu układów sprężystych z tłumieniem a niektóre z nich mogą być również przydatne w syntezie i analizie wrażliwości konstrukcji. O tym będzie mowa w następnej części tej pracy.

http://rcin.org.pl

3. Synteza i analiza wrażliwości

3.1. Zagadnienie syntezy dla problemów niesamosprzężonych.

W rozdziale tym będzie mowa o sformułowaniu zagadnienia syntezy konstrukcji dla układów opisanych równaniami w których występują operatory niesamosprzężone. Za przykład może tu posłużyc · zagadnienie dynamiki układów z obciążeniami niekonserwatywnymi omawiane w poprzedniej części pracy. Problem niesamosprzężony charakteryzuje się tym że przy budowaniu dlań zasad wariacyjnych, z których wynikają następnie równania analizy, prócz badanego układu zwanego układem podstawowym, trzeba również rozpatrywać pewien fikcyjny układ zwany tutaj sprzężonym układem analizy. W odróżnieniu od tego układu, w syntezie konstrukcji będą definiowane sprzężone układy syntezy zależne od rozpatrywanego funkcjonału celu i różniące się, w ogólnym przypadku, od układów podstawowego i sprzężonego analizy. Pojęcie sprzężonego układu syntezy i jego interpretacja mechaniczna dla problemów samosprzężonych były wykorzystane w pracach Mroza [18,19,20].

Zajmiemy się teraz ogólnym sformułowaniem zadania syntezy dla problemów niesamosprzężonych. Weźmy pod uwagę układ, którego przemieszczenia opisane są wektorem X, zaś jego cechy zależą od pewnej zmiennej decyzyjnej h. W ogólnym przypadku h może być wektorem zmiennych decyzyjnych. Równanie rownowagi rozpatrywanego układu zapiszemy w postaci:

$$L(h)X = 0 \tag{49}$$

Wynika ono z zasady stacjonarnosci energii wzajemnej $\Pi(X,Y)$

$$\Pi(X^k,Y^k) = \langle L(h)X^k,Y^k\rangle \tag{50}$$

http://rcin.org.pl

gdzie $L(h) \neq L^{a}(h)$, X^k i Y^k - kinematycznie dopuszczalne pola przemieszczeń układu podstawowego i sprzężonego analizy. Przyjmiemy że interesuje nas pewna cecha układu, opisana przy pomocy funkcjonału celu:

(51) $F = F(X,\bar{Y},h)$

Ponieważ na zmienną decyzyjną mogą być nałożone pewne ograniczenia w postaci równań (nierównościowe ograniczenia można sprowadzić do równościowych wprowadzając dodatkowe zmienne), włączymy je do funkcjonału celu przy użyciu metody mnożników Lagrange'a, zaś wektor zmiennych decyzyjnych h rozszerzony o mnożniki Lagrange'a oznaczymy przez h'. Tak więc mamy:

(52) $F' = F'(X,Y,h')$

Wykorzystując (50) można napisać:

$$\delta\Pi(X^k,Y^k) = \langle L(h)X^k,\delta Y^k\rangle + \langle\delta X^k,L^{a}(h)Y^k\rangle = 0$$

i wprowadzając powyższy związek, przy pomocy mnożnika Lagrange'a μ do F' budujemy rozszerzony funkcjonał celu:

(53) $G = F'(X,\bar{Y},h') - \langle LX,Y^{a}\rangle - \langle X^{a},L^{a}Y\rangle$

gdzie przez X^{a} i Y^{a} oznaczone zostały kinematycznie dopuszczalne wariacje przemieszczeń układu podstawowego i sprzężonego układu analizy pomnożone przez mnożnik Lagrange'a μ. W rezultacie, funkcjonał celu G zależy od wektora zmiennych decyzyjnych h', wektorów przemieszczeń X i Y oraz dwóch dodatkowych wektorów X^{a} i Y^{a} proporcjonalnych do kinamatycznie dopuszczalnych wariacji przemieszczeń δX i δY . Te dwa nowe wektory, jak się za chwilę okaże, opisują przemieszczenia pewnych fikcyjnych układów nazywanych tu sprzężonymi układami syntezy. Policzmy pierwszą wariację funkcjonału G:

http://rcin.org.pl

$$
\begin{aligned}
\delta G = {} & \left\langle \delta X, \frac{\delta \overline{F}'}{\delta X} \right\rangle - \left\langle \delta X, L^{\alpha} Y^{\alpha} \right\rangle + \\
(54) \qquad & + \left\langle \frac{\delta F'}{\delta \overline{Y}}, \delta Y \right\rangle - \left\langle L X^{\alpha}, \delta Y \right\rangle + \\
& + \left\langle L X, \delta Y^{\alpha} \right\rangle - \left\langle \delta X^{\alpha}, L^{\alpha} Y \right\rangle + \\
& + \left\langle \frac{\delta F'}{\delta h'}, \delta h' \right\rangle - \left\langle \frac{\delta L}{\delta h'} \delta h' X, Y^{\alpha} \right\rangle - \left\langle X^{\alpha}, \frac{\delta L^{\alpha}}{\delta h'} \delta h' Y \right\rangle
\end{aligned}
$$

W celu uproszczenia powyższego związku można wykorzystać pojęcie sprzężonych układów syntezy. Są to takie dwa fikcyjne układy, których przemieszczenia opisane przez wektory X^{α} i Y^{α} spełniają następujące równania równowagi:

$$
(55) \qquad
\begin{aligned}
L X^{\alpha} &= \frac{\delta F'}{\delta \overline{Y}} \\
L^{\alpha} Y^{\alpha} &= \frac{\delta \overline{F}'}{\delta X}
\end{aligned}
$$

Jak można zauważyć, pierwszy z nich jest taki sam jak układ podstawowy, jednak dodatkowo obciążony siłami zależnymi od pochodnej $\delta F'/\delta \overline{Y}$. Podobnie drugi z nich różni się jedynie od sprzężonego układu analizy obciążeniem zewnętrznym zależnym od $\delta \overline{F}'/\delta X$. O mechanicznej interpretacji sprzężonych układów syntezy można powiedzieć znacznie więcej, jednak to zagadnienie będzie szerzej omówione w następnej pracy dotyczacej układów ciągłych. Dzięki wprowadzeniu pojęcia sprzężonych układów syntezy, można

http://rcin.org.pl

wykorzystać równ.(55) i przedstawić pierwszą wariację funkcjonału G w znacznie prostszej postaci, tak że δG zależy jedynie od wariacji zmiennych decyzyjnych oraz wektorów przemieszczeń układu podstawowego, sprzężonego układu analizy i sprzężonych układów syntezy.

$$\delta G = \left\langle \frac{\delta F'}{\delta h'}, \delta h' \right\rangle - \left\langle \frac{\delta L}{\delta h'} \delta h' X, Y^{a} \right\rangle - \left\langle X^{\alpha}, \frac{\delta L^{\alpha}}{\delta h'} \delta h' Y \right\rangle \tag{56}$$

Powyższe związki mogą być wykorzystane w optymalizacji konstrukcji lub analizie wrażliwosci.

Powyżej zostało przedstawione ogólne sformułowanie, jednak przeważnie, w przypadku rozwiązywania konkretnego zadania, nawet gdy mamy do czynienia z problemem niesamosprzężonym, daje się uprościć potrzebne równania. Związane jest to przede wszystkim z postacią rozpatrywanego funkcjonału celu. Tak więc, po pierwsze, bardzo często się zdarza ze funkcjonał F nie zależy od Y i wtedy $X^{\alpha} = X$. Drugim przypadkiem, w którym można dokonać uproszczeń rozpatrywanych związków jest sytuacja gdy funkcjonał celu F pokrywa się z funkcjonałem występującym w jednej z zasad wariacyjnych, np. $F = \Omega(X,Y)$. Mamy wtedy,

$$\frac{\delta F'}{\delta X} = 0 \quad ; \quad \frac{\delta F'}{\delta \bar{Y}} = 0 \tag{57}$$

i sprzężone układy syntezy są identyczne jak układ podstawowy i sprzężony układ analizy:

$$X^{\alpha} = X\Psi \quad ; \quad Y^{\alpha} = Y\bar{\Psi} \tag{58}$$

gdzie Ψ jest mnożnikiem wynikającym ze związku:

$$\delta\Omega(X,Y) = \Psi\,\delta\Pi(X,Y)$$

http://rcin.org.pl

3.2. Analiza wrażliwości

Wykorzystamy teraz przykładowo niektóre z wyprowadzonych wcześniej związków w analizie wrażliwości układów z tłumieniem obciążonych zewnętrznymi siłami niekonserwatywnymi.
Jako pierwsze rozpatrzymy zadanie badania wrażliwości zespolonych wartości własnych przy zmianach parametrów układu. Nim to jednak zrobimy będziemy musieli zmodyfikować nieco równ.(54) opisujące wariacje rozszerzonego funkcjonału celu G. W omawianym teraz zadaniu trzeba bowiem uwzględnić fakt że funkcjonał celu F może zależeć również od wartości własnej Ω. Tak więc musimy obecnie policzyć wariację $\delta G(X,Y,\Omega,h')$. Aby to zrobić wykorzystamy związek (38) opisujący wartość własną Ω i włączymy go przy pomocy mnożnika Lagrange'a φ do funkcjonału G, równ.(53).

$$
G = F'(X,\bar{Y},\Omega,h') - \langle LX,Y^{a}\rangle - \langle X^{a},L^{a}Y\rangle + \tag{59}
$$

$$
- \varphi\left(\Omega + \frac{D + \sqrt{D^2 - 4T(U-pW)}}{2T}\right)
$$

Policzmy teraz wariację funkcjonału G. Po zgrupowaniu odpowiednich członów można ją wyrazić nastepująco:

$$
\delta G = \langle \delta X, \frac{\delta F'}{\delta X}\rangle - \langle \delta X, L^{a}Y^{a}\rangle + \varphi\frac{1}{\sqrt{D^2-4T(U-pW)}}\langle \delta X, L^{a}Y\rangle +
$$

$$
+ \langle \frac{\delta F'}{\delta \bar{Y}}, \delta Y\rangle - \langle LX^{a}, \delta Y\rangle + \frac{1}{\sqrt{D^2-4T(U-pW)}}\langle LX, \delta Y\rangle +
$$

$$
- \langle LX, \delta Y^{a}\rangle - \langle \delta X^{a}, L^{a}Y\rangle +
$$

http://rcin.org.pl

$$+ \langle \frac{\delta F'}{\delta h'}, \delta h' \rangle - \langle \frac{\delta L}{\delta h'} \delta h' X, Y^{\alpha} \rangle - \langle X^{\alpha}, \frac{\delta L^{\alpha}}{\delta h'} \delta h' Y \rangle +$$

$$- \varphi \frac{1}{\sqrt{D^{2} - 4T(U-pW)}} \langle \frac{\delta L}{\delta h'} \delta h' X, Y \rangle$$

$$+ \langle \frac{\delta F'}{\delta \Omega}, \delta \bar{\Omega} \rangle - \langle \frac{\delta L}{\delta \Omega} X \delta \Omega, Y^{\alpha} \rangle - \langle X^{\alpha}, \frac{\delta L^{\alpha}}{\delta \Omega} Y \delta \bar{\Omega} \rangle - \langle \varphi, \delta \bar{\Omega} \rangle$$

(60)

$$- \left(\Omega + \frac{D + \sqrt{D^{2} - 4T(U-pW)}}{2T} \right) \delta \varphi$$

Powyższy związek można zastosować w zadaniu o którym była mowa na początku tego rozdziału. Przyjmiemy więc że:

(61) $F'(X, \bar{Y}, \Omega, h') = \Omega$

Po uwzglednieniu (61) rownanie (60) przybiera postac:

$$\delta G = - \langle \delta X, L^{\alpha} Y^{\alpha} \rangle + \varphi \frac{1}{\sqrt{D^{2} - 4T(U-pW)}} \langle \delta X, L^{\alpha} Y \rangle +$$

$$- \langle L X^{\alpha}, \delta Y \rangle + \frac{1}{\sqrt{D^{2} - 4T(U-pW)}} \langle L X, \delta Y \rangle +$$

$$- \langle L X, \delta Y^{\alpha} \rangle - \langle \delta X^{\alpha}, L^{\alpha} Y \rangle +$$

$$- \langle \frac{\delta L}{\delta h'} \delta h' X, Y^{\alpha} \rangle - \langle X^{\alpha}, \frac{\delta L^{\alpha}}{\delta h'} \delta h' Y \rangle +$$

http://rcin.org.pl

(62)

$$- \varphi \frac{1}{\sqrt{D^2 - 4T(U-pW)}} \left\langle \frac{\delta L}{\delta h'} \delta h' X, Y \right\rangle$$

$$+ \langle 1, \delta\bar{\Omega} \rangle - \left\langle \frac{\delta L}{\delta \Omega} X \delta\Omega, Y^{a} \right\rangle - \left\langle X^{a}, \frac{\delta L^{a}}{\delta \Omega} Y \delta\bar{\Omega} \right\rangle - \langle \varphi, \delta\bar{\Omega} \rangle$$

$$- \left(\Omega + \frac{D + \sqrt{D^2 - 4T(U-pW)}}{2T} \right) \delta\varphi$$

Ponieważ dążymy do tego aby wyrazić wariacje badanego funkcjonału bezpośrednio w funkcji wariacji $\delta h'$ musimy wykorzystać dodatkowe związki tak aby wszystkie wyrazy w równ.(62), w których nie występuje $\delta h'$ znikły. Łatwo tego dokonać wykorzystując równania równowagi układów podstawowego, sprzężonego analizy i sprzężonych układów syntezy oraz dodatkowy warunek normalizacyjny. Po przyjęciu że mnożnik Lagrange'a $\varphi = 0$ wspomniane powyżej związki przybierają postać:

(63) $LX = 0$

(64) $L^{a}Y = 0$

(65) $LX^{a} = 0$

(66) $L^{a}Y^{a} = 0$

(67) $$\left\langle \frac{\delta L}{\delta \Omega} X, Y \right\rangle = \frac{1}{2}$$

W ostatnim z przytoczonych tu równań wykorzystano już fakt że na podstawie poprzednich czterech zwiazków mamy:

http://rcin.org.pl

$$X^{a} = X \qquad\qquad Y^{a} = Y$$

Gdybyśmy nadali inną wartość mnoznikowi Lagrange'a φ powyższe równania odpowiednio zmieniłyby swą postać.
W rezultacie na wariację δG otrzymujemy nastepujące równanie:

$$(68) \qquad \delta G = -2\left\langle \frac{\delta L}{\delta h'} X,Y \right\rangle \delta h'$$

Jak można łatwo się przekonać równ.(69) jest w zgodzie z analogicznym związkiem wyprowadzonym w pracy Pedersena [17]. (Pedersen nieco inaczej definiuje sprzężony układ analizy jednak po uwzględnieniu tego faktu można pokazać że otrzymany przez niego związek jest szczególnym przypadkiem równania (62)).

Zbadajmy teraz wrażliwość wartości własnych przy zmianach obciążeń niekonserwatywnych (parametr p podlega wariacji). Postępując analogicznie jak poprzednio otrzymujemy, po wykorzystaniu równ.(62) i faktu że teraz h=p, następujace równanie:

$$(69) \qquad \delta\Omega = \delta G = -\langle K\delta pX,Y^{a}\rangle - \langle X^{a},K^{T}\delta pY\rangle = -2\langle KX,Y\rangle\delta p = 2W\delta p$$

Jak więc widać wrażliwość na zmiany obciążeń niekonserwatywnych jest liniową funkcją zespolonej pracy W. Powyższy związek może być przydatny przy badaniu jaki wpływ (stabilizujacy czy destabilizujacy) mają zmiany obciążeń niekonserwatywnych na ruch układu odpowiadający danym wektorom własnym. Należałoby wtedy zbadać znak rzeczywistej części δG, a więc W .

http://rcin.org.pl

4. Przykłady

Poniżej będą omówione dwa bardzo proste przykłady, w których wykorzystamy do analizy i syntezy konstrukcji niektóre ze związków wyprowadzonych wcześniej.

Przykład 1

Rozpatrzymy ruch kolumny obciążonej na jednym końcu siłą śledzącą P a utwierdzonej na drugim. Jako najprostszy zdyskretyzowany model tej kolumny przyjmiemy podwójne wahadło, rys.1. Składa się ono z dwóch nieważkich prętów o długości l. Na ich końcach umieszczone są dwie masy skupione $m_1=2m$ i $m_2=m$, natomiast w przegubach znajdują się sprężyny o sztywnościach $s_1=s$, $s_2=s$ oraz lepkie tłumiki c_1 i c_2. Równania ruchu tak wybranego układu można zapisać w postaci:

$$3ml^2\ddot{X}_1-(c_1+c_2)\dot{X}_1-(Pl-2s)X_1+ml^2\ddot{X}_2-c_2\dot{X}_2+(Pl-s)X_2=0$$

(70)

$$ml^2\ddot{X}_1-c_2\dot{X}_1-sX_1+ml^2\ddot{X}_2+c_2\dot{X}_2+sX_2=0$$

W przykładzie tym zostanie wykorzystana ostatnia z omawianych w pracy zasad wariacyjnych pozwalająca wyznaczyć przybliżone wartości obciążenia krytycznego i odpowiadającej mu częstości drgań.

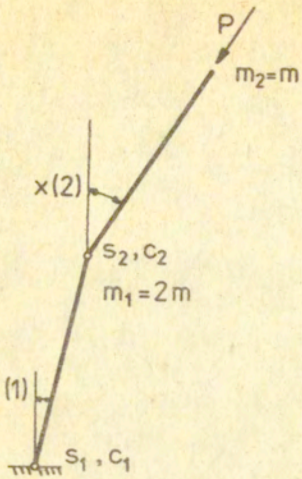
Przepisując równania (70-71) dla bezwymiarowych wielkości otrzymujemy następujące macierze mas, tłumienia, sztywnosci i obciążen niekonserwatywnych:

$$M=\begin{bmatrix}3\ , & 1\\ 1\ , & 1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}c_1+c_2\ , & -c_2\\ -c_2\ , & c_2\end{bmatrix}$$

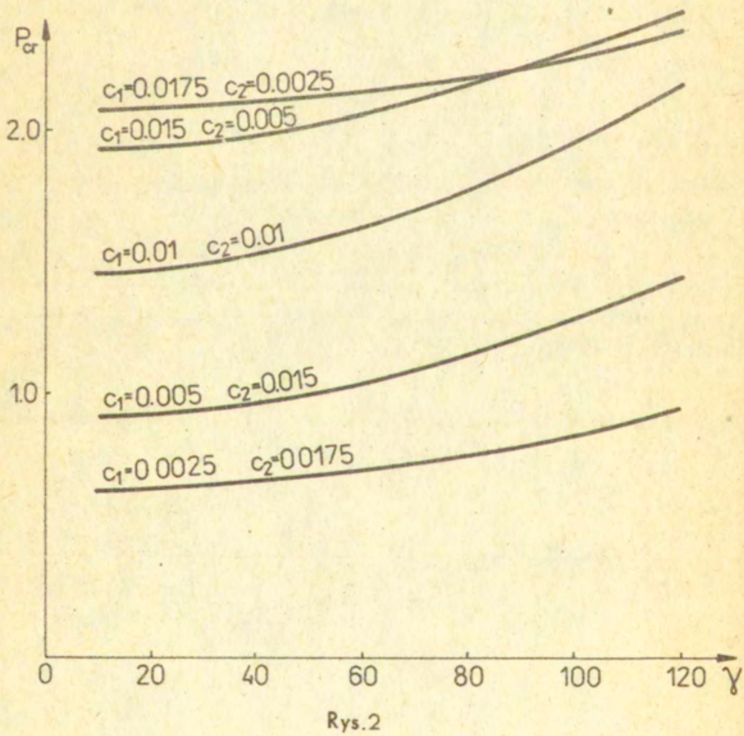
(71)

$$S=\begin{bmatrix}2\ , & -1\\ -1\ , & 1\end{bmatrix}\qquad K=\begin{bmatrix}-1\ , & 1\\ 0\ , & 0\end{bmatrix}$$

http://rcin.org.pl

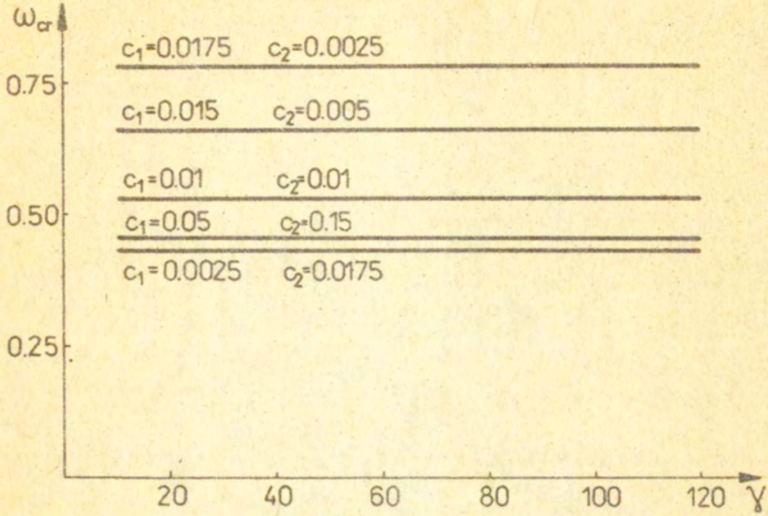


Rys. 1

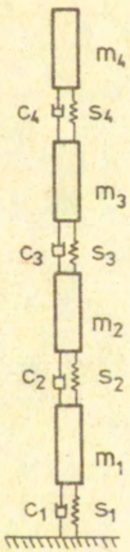


Rys. 2

http://rcin.org.pl



Rys. 3



Rys.4

http://rcin.org.pl

Po wyeliminowaniu z równań ruchu zależnosci od czasu otrzymujemy równanie:

(72) $\Omega^2 MX + \gamma\Omega CX + SX + pKX = 0$

gdzie "p" jest poziomem obciążeń zewnętrznych zaś γ - jest parametrem określającym wielkość tłumienia w układzie.
Jak wspomniano, zostanie tu wykorzystana zasada (48) służąca do określenia krytycznych wartosci $p=p_{cr}$ i $\Omega=i\omega_{cr}$ ($\alpha=0$) w celu zbadania wpływu rozmieszczenia tłumienia w układzie na p_{cr} i ω_{cr}, przy warunku że całkowite tłumienie jest stałe (zmienne c_1 i c_2 zaś c_1+c_2=const) oraz dla różnych wartości parametru γ.
Zadanie analizy było rozwiązane iteracyjnie: po założeniu zerowego przybliżenia na wektory X i Y wyznaczono odpowiadające im wartości krytycznych obciążen i częstości drgań wykorzystując równania (46-47), następnie w oparciu o wyznaczone wartości p_{cr} i ω_{cr} obliczono kolejne przybliżenie wektorów własnych X i Y i.t.d. az do uzyskania zadanej dokładnosci.
Na rys.2 zostały wykreślone wartości p_{cr} w funkcji parametru γ, dla różnych kombinacji wartości współczynników tłumienia c_1 i c_2, natomiast na rys.3 przedstawiono ω_{cr} w funkcji γ. Jak widać obciążenia krytyczne zmieniają się niewiele dla małych wartości tłumienia. Zmiany te rosną wraz ze wzrostem γ. Na rys.2 można również zauważyć nieciągłość funkcji $p_{cr}(\gamma)$ dla $\gamma=0$. Jest to zgodne z wynikami innych prac na ten temat (np. [21])

Przykład 2

Drugi z prezentowanych tu przykładów ilustracyjnych dotyczy analizy wrażliwości. Rozpatrzmy drgania swobodne układu czterech mas skupionych $m_1=m$, $m_2=m$, $m_3=m$, $m_4=m$, rys.4, połączonych sprężynami o sztywnościach $s_1=s$, $s_2=s$, $s_3=s$, $s_4=s$ oraz tłumikami c_1, c_2, c_3, c_4. Równanie równowagi rozpatrywanego układu ma postać:

(73) $(\Omega^2 M + \gamma\Omega C + K)X = 0$

http://rcin.org.pl

gdzie macierze mas, tłumienia i sztywności są zapisane poniżej:

(74)

$$M = \begin{bmatrix} m,0,0,0 \\ 0,m,0,0 \\ 0,0,m,0 \\ 0,0,0,m \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_1+c_2, & -c_2, & 0, & 0 \\ -c_2, & c_2+c_3, & -c_3, & 0 \\ 0, & -c_3, & c_3+c_4, & -c_4 \\ 0, & 0, & -c_4, & c_4 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2s, & -s, & 0, & 0 \\ -s, & 2s, & -s, & 0 \\ 0, & -s, & 2s, & -s \\ 0, & 0, & -s, & 0 \end{bmatrix}$$

Zbadamy wrażliwość pierwszej wartości własnej Ω na zmiany poszczególnych współczynników tłumienia $c_1 \div c_4$ przy różnych wartościach parametru γ. W tym celu wykorzystamy równanie (68)', które możemy dla rozpatrywanego tu zadania, uwzględniając że składowymi wektora zmiennych decyzyjnych k' są współczynniki tłumienia c_1-c_4, zapisać następujaco:

(75) $$\frac{\delta\Omega}{\delta c_i} = -2\frac{\delta D}{\delta c_i}\Omega$$

przy dodatkowym warunku (równ.(67)):

(76) $$2T\Omega + D = \frac{1}{2}$$

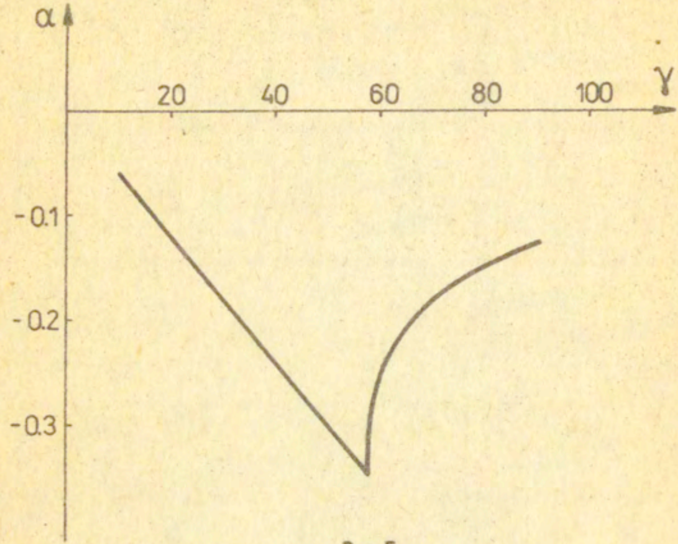
gdzie

D = $\langle\gamma CX,Y\rangle$ - zespolona energia dysypacji

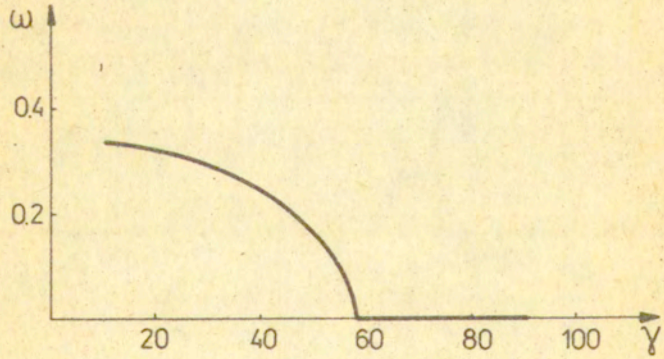
T = $\langle MX,Y\rangle$ - zespolona energia kinetyczna

Na rys.5 i 6 są pokazane zmiany części rzeczywistej i urojonej, zespolonej częstosci drgań Ω w funkcji parametru γ. Jak widać obie krzywe nie są gładkie. Jest to związane z faktem że układ

http://rcin.org.pl

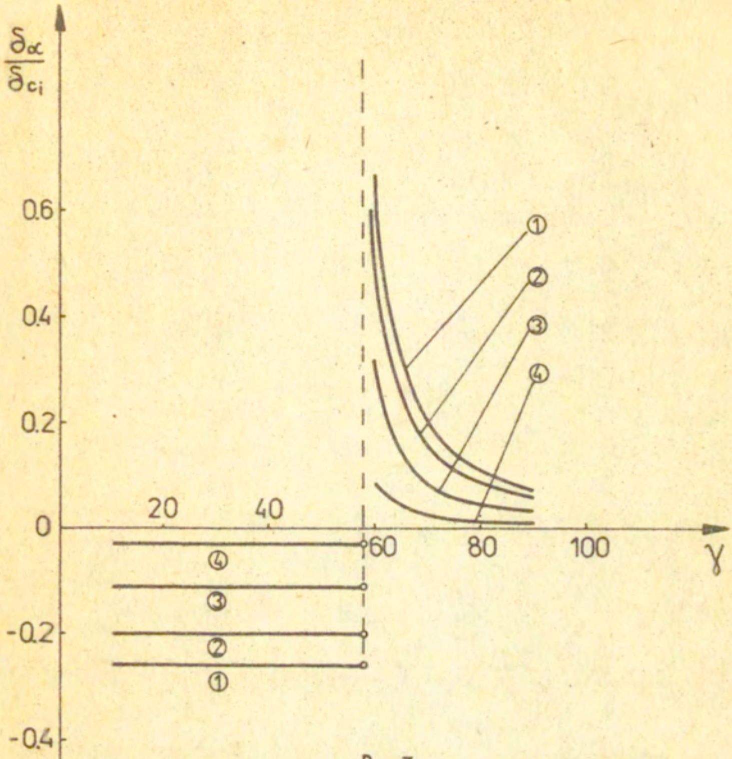


Rys. 5

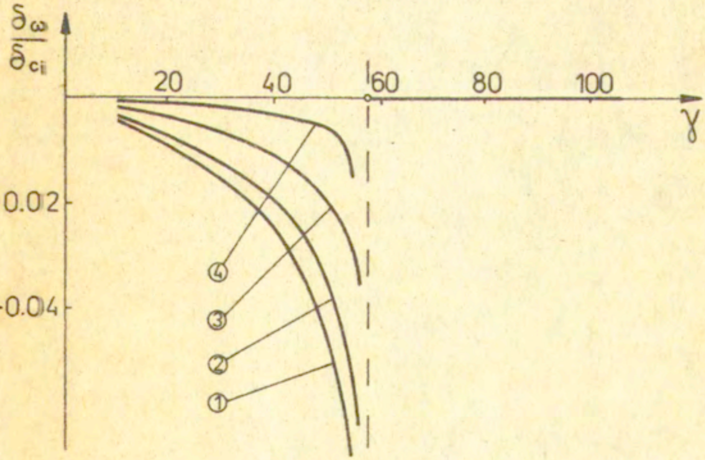


Rys. 6

http://rcin.org.pl



Rys.7



Rys. 8

http://rcin.org.pl

staje się układem nadtłumionym dla tłumienia przekraczającego wartość krytyczną. Dla małych wartości tłumienia w układzie pierwsza częstość drgań własnych zmienia się bardzo niewiele co jest zazwyczaj wykorzystywane w obliczeniach inżynierskich przy poszukiwaniu wartosci własnych. Na rys. 7 i 8 pokazano wrażliwosci $\delta\alpha/\delta c_i$ i $\delta\omega/\delta c_i$ odpowiadajace wariacjom poszczególnych współczynnikow tłumienia c_i w funkcji γ. Pozwalają one ocenić w jakich obszarach opłacalne jest modyfikowanie cech układu poprzez dobór lepkich własności materiału.

5. Podsumowanie

W pracy przedstawiono szereg zasad wariacyjnych dla ważnej klasy ruchów układów z tłumieniem gdy znany jest charakter zmian wektora przemieszczeń w czasie ($X(t)=Xe^{\Omega t}$). Rozpatrywane zadania należą do grupy problemów niesamosprzężonych dlatego w analizie posłużono się pojęciem sprzężonego układu analizy zaś w syntezie wprowadzono sprzężone układy syntezy. Przedstawiono ogólne sformułowanie zagadnienia syntezy układów niesamosprzężonych. Omówione zasady wariacyjne mogą być przydatne przy budowaniu przybliżonych metod analizy oraz w syntezie co zostało pokazane na prostych przykładach ilustracyjnych.

http://rcin.org.pl

DODATEK A

Zasada stacjonarnosci zespolonej energii potencjalnej dla przypadku harmonicznych drgań wymuszonych

Pomnóżmy skalarnie rownanie równowagi (3)

(3) $$LX - P = 0$$

przez wariację pewnego wektora Y

(A.1) $$\langle LX-P,\delta Y\rangle = 0$$

Po dokonaniu całkowania względem Y i oznaczeniu otrzymanego funkcjonału przez $2\tilde{\Pi}(X,Y)$, otrzymamy:

(A.2) $$\Pi(X,Y) = \frac{1}{2}\langle LX-P,Y\rangle - \frac{1}{2}\Psi(X)$$

to Jest ogólna postać wyrażenia definiującego zespoloną energię potencjalną, której odpowiednikiem, w szczególnym przypadku, jest wyrażenie (6). Policzymy następnie wariację funkcjonału $\tilde{\Pi}(X,Y)$:

$$\delta\Pi(X,Y) = \frac{1}{2}\langle LX-P,\delta Y\rangle + \frac{1}{2}\langle\delta X,L^{a}Y\rangle - \frac{1}{2}\langle\delta X,\frac{d\bar{\Psi}}{dX}\rangle$$

Z warunku stacjonarnosci $\delta\tilde{\Pi}(X,Y) = 0$ dla dowolnych wariacji δX i δY otrzymujemy rownania:

$$LX - P = 0$$

http://rcin.org.pl

$$(A.3) \qquad L^{a} Y - \frac{d\overline{\Psi}}{dX} = 0$$

Pierwsze z nich to równanie równowagi (3) opisujące układ podstawowy(analizowany), zaś drugie opisuje sprzężony układ analizy. Ponieważ funkcjonał $\Psi(X)$ jest dowolny (lecz nie równy tożsamosciowo zero), można przyjąć że:

$$(A.4) \qquad \Psi(X) = X^{T} P$$

i wtedy

$$\frac{d\overline{\Psi}}{dX} = \overline{P}$$

a ponieważ, na podstawie definicji operatora sprzężonego mamy

$$L^{a} = \overline{L^{T}} = \overline{L}$$

równanie równowagi układu sprzężonego (A.3) przybiera postać:

$$(A.5) \qquad \overline{L}Y - \overline{P} = 0$$

Stąd wynika że:

$$Y = \overline{X}$$

Uwzględniajac powyższą relację oraz związki (A.2) i (A.4) można zespoloną energię potencjalną $\overline{\Pi}(X)$ zapisać w postaci podanej w równ. (6).

http://rcin.org.pl

DODATEK B

Warunek stacjonarności funkcjonału $\Omega(X,Y)$

Rozpatrzmy funkcjonał $\Omega(X,Y)$ zdefiniowany przy pomocy równ.(38)

$$\Omega(X,Y) = -\frac{D + \sqrt{D^2 - 4T(U-pW)}}{2T} \tag{38}$$

Licząc wariację tego funkcjonału otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\delta\Omega(X,Y) = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{D^2-4T(U-pW)}}\,\frac{2D^2-4T(U-pW)+2D\sqrt{D^2-4T(U-pW)}}{4T}\delta T \\
&+ \frac{-D-\sqrt{D^2-4T(U-pW)}}{2T}\delta D + \delta U - p\delta W = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{D^2-4T(U-pW)}}(\Omega^2 \langle MX,\delta Y\rangle + \Omega^2\langle \delta X, MY\rangle + \\
&+ \Omega\langle CX,\delta Y\rangle + \Omega\langle\delta X, CY\rangle + \langle SX,\delta Y\rangle + \langle\delta X, SY\rangle + \\
&- p\langle KX,\delta Y\rangle - \langle\delta X, K^T Y\rangle) = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{D^2-4T(U-pW)}}(\langle LX,\delta Y\rangle + \langle\delta X, L^a Y\rangle)
\end{aligned} \tag{B.1}$$

A więc, na podstawie zasady stacjonarności energii wzajemnej

http://rcin.org.pl

$$\delta\Pi(X,Y) = \langle LX,\delta Y\rangle + \langle\delta X,L^{a}Y\rangle = 0$$

mamy

$$\delta\Omega(X,Y) = 0 \qquad (B.2)$$

DODATEK C

Stacjonarność funkcjonałów $\omega(X,Y)$, $p(X,Y)$

Poniżej pokażemy że dla wektorów własnych X i Y spełniających równania równowagi funkcjonały $\omega(X,Y)$ i $p(X,Y)$ (równ.46 i 47) osiągają wartości stacjonarne.
Aby to wykazać zajmiemy się na początek funkcjonałami $Re(\Pi)$ i $Im(\Pi)$, równ.44-45. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\Pi_1 = Re(\Pi) \qquad (C.1)$$

$$\Pi_2 = Im(\Pi) \qquad (C.2)$$

przy czym Π_1 i Π_2 sa teraz rzeczywistymi funkcjonałami zależącymi od pol X_R, X_I, Y_R, Y_I. Z warunku stacjonarności funkcjonałów $\Pi_1(X_R,X_I,Y_R,Y_I)$ i $\Pi_2(X_R,X_I,Y_R,Y_I)$ wynikają oczywiście równania równowagi układu podstawowego i sprzężonego układu analizy co zaraz pokażemy. Rozpiszmy równania równowagi (32) i (34) na części rzeczywistą i urojoną:

$$-\omega^2 MX_R - \omega CX_I + SX_R + pKX_R = 0 \qquad (C.3)$$

$$-\omega^2 MX_I + \omega CX_R + SX_I + pKX_I = 0 \qquad (C.4)$$

$$-\omega^2 M^T Y_R + \omega C^T Y_I + S^T Y_R + pK^T Y_R = 0 \qquad (C.5)$$

$$-\omega^2 M^T Y_I - \omega C^T Y_R + S^T Y_I + pK^T Y_I = 0 \qquad (C.6)$$

http://rcin.org.pl

Uwzględniliśmy tu fakt że rozpatrywany jest obecnie stan krytyczny, a więc $\alpha=0$. Korzystając następnie z definicji energii T_1, T_2, D_1, D_2, U_1, U_2, W_1, W_2, por. równ.(43), która przykładowo np. dla energii T_1 i T_2 może być zapisana nastepująco:

$$
\begin{aligned}
T = \langle MX, Y\rangle = X^T M^T \bar{Y} = (X_R^T M^T Y_R + X_I^T M^T Y_I) + \\
+ i(-X^T M^T Y_I + X_I^T M^T Y_R) = T_1 + iT_2
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

policzymy wariacje $\delta\Pi_1$ i $\delta\Pi_2$:

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi_1 = \delta X_R^T(-\omega^2 M^T Y_R + \omega C^T Y_I + S^T Y_R + pK^T Y_R) + \\
+ \delta X_I^T(-\omega^2 M^T Y_I - \omega C^T Y_R + S^T Y_I + pK^T Y_I) + \\
+ (-\omega^2 X_R^T M^T - \omega X_I^T C^T + X_R^T S^T + pX_R^T K^T)\delta Y_R + \\
+ (-\omega^2 X_I^T M^T + \omega X_R^T C^T + X_I^T S^T + pX_I^T K^T)\delta Y_I
\end{aligned}
\tag{C.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi_2 = -\delta X_R^T(-\omega^2 M^T Y_I - \omega C^T Y_R + S^T Y_I + pK^T Y_I) + \\
+ \delta X_I^T(-\omega^2 M^T Y_R + \omega C^T Y_I + S^T Y_R + pK^T Y_R) + \\
- (-\omega^2 X_R^T M^T - \omega X_I^T C^T + X_R^T S^T + pX_R^T K^T)\delta Y_I + \\
+ (-\omega^2 X_I^T M^T + \omega X_R^T C^T + X_I^T S^T + pX_I^T K^T)\delta Y_R
\end{aligned}
\tag{C.9}
$$

Jak widać, po uwzględnieniu równ.C.3-C.6 otrzymujemy:

$$
\delta\Pi_1 = 0 \qquad ; \qquad \delta\Pi_2 = 0
\tag{C.10}
$$

co oczywiście wynikało również bezpośrednio z warunku stacjonarnosci funkcjonału $\Pi(X,Y)$, (równ.37).

http://rcin.org.pl

Rozpatrzmy teraz równ.44 i 45, z których były wyznaczone $p(X,Y)$ i $\omega(X,Y)$. Zapiszemy je dla dopuszczalnych wariacji δX, δY, $\delta\omega$ i δp:

$$(-2\omega T_1 - D_2)\delta\omega - W_1\delta p = -(-\omega^2\delta T_1 - \omega\delta D_2 + \delta U_1 - p\delta W_1) = -\delta\Pi_1 \tag{C.11}$$

$$(-2\omega T_2 + D_1)\delta\omega - W_2\delta p = -(-\omega^2\delta T_2 + \omega\delta D_1 + \delta U_2 - p\delta W_2) = -\delta\Pi_2 \tag{C.12}$$

a następnie wyznaczymy $\delta\omega$ i δp:

$$\delta\omega = \frac{W_2\delta\Pi_1 - W_1\delta\Pi_2}{(2\omega T_1 + D_2)W_2 + (-2\omega T_2 + D_1)W_1} \tag{C.13}$$

$$\delta p = \frac{(2\omega T_1 + D_2)\delta\Pi_2 + (-2\omega T_2 + D_1)\delta\Pi_1}{(2\omega T_1 + D_2)W_2 + (-2\omega T_2 + D_1)W_1} \tag{C.14}$$

Korzystając z C.10 otrzymujemy w rezultacie:

$$\delta\omega(X,Y) = 0 \quad ; \quad \delta p(X,Y) = 0 \tag{C.15}$$

a więc, funkcjonały $\omega(X,Y)$ i $p(X,Y)$ są stacjonarne.

http://rcin.org.pl

LITERATURA

1. H.ZIEGLER "Die Stabilitatskriterien der Elastomechanik", Ingenieur Archiv, vol.20, 1952, pp.49-56

2. K.WASHIZU "Variational Methods in Elasticity and Plasticity" Pergamon Press, sec. ed. 1975

3. M.E.GURTIN "Variational principles in the linear theory of viscoelasticity", Arch. Rational Mech. Anal.,vol.13 No3, 1965, pp.179

4. M.J.LEJTMAN "Variational principles in the linear dynamic theory of viscoelasticity", Quart. Appl. Math., vol. XXIV, No1, 1966, pp.37-46

5. I.K.SENCZENKOV, W.G.KARNAUHOV "Variacjonnyje principy linearizowannoj tieorii wiazkouprugosti", Prikl. mech. Tom XIV, No3, 1978, str.14-20

6. M.E.GURTIN "Variational principles for linear elastodynamics" Arch. Rational Mech. and Analysis, vol.16, No1, 1964, pp.34-50

7. J.BRILLA "Variational principles and methods for viscoelastic plates and shells", ZAMM , 1980

8. Z.MRÓZ "Optimal design of elastic structures subjected to dynamic, harmonically-varying loads", ZAMM, vol.50, 1970, pp.303-309

9. T.LEKSZYCKI "Optymalne projektowanie układów lepkosprężystych", praca dokt. IPPT, 1982

http://rcin.org.pl

10. R.J.DUFFIN "A minimax theory for overdamped networks", J. Rational Mech. and Anal., vol.4, No2, 1955, pp.221 -233

11. H.H.E.LEIPHOLZ "On variational principles for non-conservative mechanical systems with follower forces", Variational Meth. in the Mechanics of Solids, Proc. of the IUTAM Symp., Illinois USA, 11-13 Sept. 1978, Ed. S.Nemat Nasser, pp.151-155

12. S.N.PRASAD and G.HERRMANN" The usefulness of adjoint systems in solving nonconservative stability problems of elastic continua", Int. J. Solid Struct., vol.5, 1969, pp.727-735

13. S.N.PRASAD and G.HERRMANN "Variational methods applied to nonconservative stability problems of elastic continua", Variational Meth. in Engineering, ed. C.A.Brebbia, H Tottenham, repr.1975, pp.36-45

14. R.N.DUBEY and H.H.E.LEIPHOLZ "On application of variational principle", Variational Meth. in Engineering, ed. C.A.Brebbia, H.Tottenham, repr. 1975, pp.21-27

15. G.L.ANDERSON "On the role of the adjoint problem in dissipative, nonconservative problems of elastic stability", Mechanicca, Sept.1972, pp.165-173

16. G.L.ANDERSON "Application of a variational method to dissipative, non-conservative problems of elastic stability", J. of Sound and Vibr., vol.27, No3, 1973, pp.279-296

17 P.PEDERSEN "Sensitivity analysis for non-selfadjoint problems", Proc. of A.M.S. New York Meeting, May 1983 Ed. V.Komkov, 1984, pp.119-130

http://rcin.org.pl

18. Z.MRÓZ "On optimal force action and reaction on structures" Proc. IUTAM Symp. "Control of Structures", Univ. of Waterloo, 1978, Ed. H.Leipholz

19. Z.MRÓZ and A.MIRONOV "Optimal design for global mechanical constraints", Arch. Mech., vol.32, No4, 1980, pp.505

20. Z.MRÓZ and T LEKSZYCKI "Optimal support reactions in elastic frame systems", Computers and Struct., vol.14, No3-4, 1981, pp.179

21. G.HERRMANN and ING-CHANG JONG "On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems", Trans. of the ASME, Journ. of Appl. Mech., Sept., 1965, pp.592-597

http://rcin.org.pl