Wiktor Gambin

TECHNIKA JEDNEGO KROKU W ANALIZIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

WARSZAWA 1981

ISSN 0208 - 5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 23 stycznia 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 1/1981

IPPT PAN

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 130 egz. Ark.wyd.0,75. Ark.druk. 1,25
Oddano do drukarni w lutym 1981 r.
Nr zamówienia 155/0

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Wiktor Gambin
Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych

1.12 - elementy skończone

TECHNIKA JEDNEGO KROKU W ANALIZIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

1. Wprowadzenie.

Będziemy zajmować się obliczaniem pól przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w ciałach sprężysto-plastycznych, metodą elementów skończonych. Ograniczymy się do procesów quasi-statycznych, wzmocnienia izotropowego oraz małych odkształceń. Powszechnie stosowanym sposobem rozwiązywania, tego typu zadań, jest technika przyrostowa [1] .
Polega ona na znajdowaniu rozwiązań, dla kolejno zadawanych, małych przyrostów obciążenia zewnętrznego. Dokładność obliczeń jest ściśle związana z wielkością przyrostów.
Wielkość przyrostów rzutuje na liczbę kroków obliczeniowych, a w rezultacie na długość czasu trwania obliczeń.

Okazuje się że można znacznie zwiększyć długość kroku obliczeniowego, jeżeli rozwiązywać zadanie w oparciu o inne, rozszerzone sformułowanie przyrostowe. Dotychczasowe sformułowanie zakłada liniową zmianę pól przemieszczeń $\underset{\sim}{u}$, odkształceń $\underset{\sim}{\varepsilon}$ i naprężeń $\underset{\sim}{\sigma}$, na kroku odpowiadającym przyrostowi czasu Δt . Założenie to powoduje, że równanie konstytutywne $\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \underset{\sim}{C} \cdot \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ można zapisać w postaci przyrostowej $\Delta\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C}_o \cdot \Delta\underset{\sim}{\varepsilon}$, w której $\underset{\sim}{C}_o$ jest wartością operatora konstytutywnego na początku kroku Δt . W pracy wykażemy, że o ile założenie o liniowej zmianie pola przemieszczeń i pola małych odkształceń nie ma większego wpływu na dokładność obliczeń, to w przypadku pola naprężeń silnie ogranicza długość kroku obliczeniowego.

. Przyjęcie sformułowania przyrostowego, w którym pole naprężeń jako funkcja czasu opisane jest wielomianem odpowiednio wysokiego stopnia N, umożliwi przeprowadzenie wszystkich obliczeń w ramach jednego kroku Δt . Obliczenia te przedstawimy w postaci procedury iteracyjnej, dla N=1,2,3,... .

Zagadnienie zwiększenia kroku obliczeniowego pojawia się coraz częściej w literaturze. W pracy [2] autorzy zaproponowali przyjęcie operatora $\underset{\sim}{C}_0$ jako wartości $\underset{\sim}{C}$ obliczonej dla średniego pola naprężeń, na początku i końcu kroku Δt .

Podobnie w pracy [3] jako macierz sztywności przyjęto średnią arytmetyczną macierzy na końcach przedziału Δt .

Okazuje się, że ta intuicyjnie przyjęta postać macierzy sztywności pojawia się w proponowanej procedurze iteracyjnej, jeżeli ograniczymy się do aproksymacji pola naprężeń wielomianem stopnia drugiego.

2. Podstawowe równania opisujące duże deformacje sprężysto-plastyczne.

Punktem wyjścia naszych rozważań będzie opis pól związanych z dużymi deformacjami ciała sprężysto-plastycznego. Podejście takie zagwarantuje poprawne postawienie zagadnienia dla małych deformacji.

Ustalmy pewien kartezjański układ współrzędnych. W układzie tym, w chwili t^* , cząstki ciała pozbawionego naprężeń wewnętrznych mają współrzędne Y_α , dla α =1,2,3. Jeżeli przyjmiemy je jako zmienne niezależne od opisu pól mechanicznych, to opis ten nazwiemy <u>pierwotnym opisem Lagrange'a</u>.

W ramach tego opisu położenie cząstek w chwili $t>t^*$ zadadane będzie funkcjami $X_\alpha = X_\alpha(Y_\beta, t)$, dla α, β =1,2,3. Wartości tych funkcji, dla pewnej chwili t^0, oznaczone przez X_I , dla I=1,2,3, można traktować jako zmienne niezależne w <u>uaktualnionym opisie Lagrenge'a</u>. Ostateczne wyniki naszych rozważań przedstawione będą w tym opisie. Wszystkie wielkości wektorowe i tensorowe indeksowe będą, w tym przypadku, dużymi literami łacińskimi.

Załóżmy, że w chwili t^{o} mamy dane pole przemieszczeń U^{o}_{I}, pole sił masowych F^{o}_{I} oraz pole sił powierzchniowych P^{o}_{I}. Poza tym, dane są pola tensorowe: odkształceń E^{o}_{IJ} i naprężeń S^{o}_{IJ}. Będziemy je interpretować jako tensor odkształceń Greena i II tensor Pioli-Kirchhoffa.

Poszukiwać będziemy pól: przemieszczeń U_{I}, odkształceń E_{IJ} i naprężeń S_{IJ}, w chwili bieżącej $t>t^{o}$ różniącej się od t^{o} o pewien przyrost czasu Δt. Pola te, powstałe pod wpływem przyłożonych sił masowych F_{I} i powierzchniowych P_{I}, powinny spełniać zależności:

$$
\begin{aligned}
&U_{I}(X_{J},t)=U^{o}_{I}(X_{J}),\\
&E_{IJ}(X_{K},t)=E^{o}_{IJ}(X_{K}),\\
&S_{IJ}(X_{K},t)=S^{o}_{IJ}(X_{K}),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

jeżeli:

$$
\begin{aligned}
&F_{I}(X_{J},t)=F^{o}_{I}(X_{J}),\\
&P_{I}(X_{J},t)=P^{o}_{I}(X_{J}),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

dla I,J=1,2,3.

Współrzędne cząstek ciała w chwili t zadane będą funkcjami $x_{I}=x_{I}(X_{J},t)$. Funkcje te definiują przyrost pola przemieszczeń:

$$\Delta U_{I}=U_{I}-U^{o}_{I}=x_{I}-X_{I} \tag{3}$$

oraz przyrost pola odkształceń:

$$\Delta E_{IJ}=E_{IJ}-E^{o}_{IJ}=\tfrac{1}{2}(x_{K,I}\cdot x_{K,J}-\delta_{IJ}). \tag{4}$$

Wprowadzimy pole prędkości $V_{I}=V_{I}(X,t)$:

$$V_{I}=\partial x_{I}/\partial t=\dot{x}_{I}=\dot{U}_{I}=\Delta\dot{U}_{I} \tag{5}$$

oraz pole prędkości deformacji $\dot{E}_{IJ}=\dot{E}_{IJ}(X_{K},t)$:

$$\dot{E}_{IJ}=\tfrac{1}{2}(V_{K,I}\,x_{K,J}+x_{K,I}V_{K,J})=\Delta\dot{E}_{IJ}. \tag{6}$$

To ostatnie można rozłożyć na część liniową oraz nieliniową względem $\Delta U_{I,J}$ i $V_{I,J}$:

$$\dot{E}_{IJ}=\dot{\varepsilon}_{IJ}+\dot{\eta}_{IJ}, \tag{7}$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\varepsilon}_{IJ}=\tfrac{1}{2}(V_{I,J}+V_{J,I}),\\
&\dot{\eta}_{IJ}=\tfrac{1}{2}(V_{K,I}\,\Delta U_{K,J}+\Delta U_{K,J}V_{K,I}).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Przejdziemy teraz do przedstawienia trzeciego opisu pól mechanicznych, zwanego przestrzennym opisem Eulera. W opisie tym postulowane jest prawo konstytutywne materjału sprężysto-plastycznego. Jako zmienne niezależne przyjmowane są tu wartości funkcji $x_I(X_J,t)$, dla ustalonej chwili t . Wartości te oznaczać będziemy przez x_i , dla $i=1,2,3$. Podobnie, wszystkie wielkości wektorowe i tensorowe indeksowane będą w tym przypadku małymi literami łacińskimi.

Wprowadzimy pole prędkości $v_i = v_i(x_j,t)$.
Z polem v_i związane jest następujące pole prędkości deformacji:

/9/ $$d_{ij} = \tfrac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i}).$$

Pola $\dot{E}_{IJ}$ oraz d_{ij} związane są zależnością [4]:

/10/ $$\dot{E}_{IJ} = d_{rs}\, x_{r,I}\, x_{s,J}$$

Jako pole naprężeń w opisie Eulera przyjmowany jest tzw rzeczywisty tensor naprężeń Cauchy'ego σ_{ij} . Jest on związany z II symetrycznym tensorem Pioli-Kirchhoffa S_{IJ}, w następujący sposób:

/11/ $$S_{IJ} = \det[x_{k,L}]\, \sigma_{rs}\, X_{I,r}\, X_{J,s} .$$

Wprowadzone przez nas pola F_I oraz P_I po przetransformowaniu do opisu Eulera przyjmą oznaczenia f_i oraz p_i .

Pole naprężeń i pole prędkości deformacji w chwili t związane są z polem prędkości i polami sił zewnętrznych równaniem bilansu energii [5]:

/12/ $$\int_{\Omega} \sigma_{ij} d_{ij}\, d\Omega = \int_{\Omega} f_i v_i\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} p_i v_i\, d(\partial\Omega) ,$$

gdzie Ω jest objętością elementarnej części ciała, a $\partial\Omega$ jej powierzchnią w chwili t . Powyższe równanie można przetransformować do uaktualnionego opisu Lagrange'a [6]:

/13/ $$\int_{\Omega^o} S_{IJ} \dot{E}_{IJ}\, d\Omega^o = \int_{\Omega^o} F_I V_I\, d\Omega^o + \int_{\partial\Omega^o} P_I V_I\, d(\partial\Omega^o) ,$$

gdzie Ω_o jest objętością elementarnej części ciała, a $\partial\Omega_o$ jej powierzchnią w chwili t_o .

Ponieważ interesuje nas związek dla przyrostów wprowadzonych pól, równanie /13/ przedstawimy w postaci:

/14/ $$\int_{\Omega^o} \Delta S_{IJ} \dot{\varepsilon}_{IJ}\, d\Omega^o + \int_{\Omega^o} S^o_{IJ} \dot{\eta}_{IJ} = \int_{\Omega^o} \Delta F_I V_I\, d\Omega^o + \int_{\partial\Omega^o} \Delta P_I V_I\, d(\partial\Omega^o) - (R_1 + R_2),$$

gdzie:

/15/ $$R_1 = \int_{\Omega^0} \Delta S_{IJ}\, \dot{\eta}_{IJ}\, d\Omega^0 ,$$

opisuje wpływ nieliniowego członu pola odkształceń na bilans energii, a

/16/ $$R_2 = \int_{\Omega^0} S^0_{IJ}\, \dot{\varepsilon}_{IJ}\, d\Omega^0 - \int_{\Omega^0} F^0_I V_I\, d\Omega^0 - \int_{\partial\Omega^0} P^0_I V_I\, d(\partial\Omega^0),$$

znika w przypadku małych odkształceń, ponieważ pola S^0_{IJ} , F^0_I , P^0_I , spełniają zasadę prac wirtualnych.

Równania /14/-/16/ stanowią punkt wyjścia przy analizie nieliniowych zagadnień mechaniki ciał stałych metodą elementów skończonych [5].

Jeżeli ograniczymy się do analizy małych deformacji, dla których można zastąpić wielkości $\Omega^0, \partial\Omega^0, \Delta S_{IJ}, \dot{\varepsilon}_{IJ}, \Delta F_I, \Delta P_I, V_I$, wielkościami $\Omega, \partial\Omega, \Delta\sigma_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \Delta f_i, \Delta p_i$, v_i , a także można zaniedbać człony zawierające $\dot{\eta}_{IJ}$, to równanie /14/ przyjmie postać:

/17/ $$\int_{\Omega} \Delta\sigma_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{ij}\, d\Omega = \int_{\Omega} \Delta f_i v_i\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \Delta p_i v_i\, d(\partial\Omega).$$

Wprowadzimy teraz związek konstytutywny dla materiału sprężysto-plastycznego doznającego małych odkształceń w zakresie sprężystym i dużych w zakresie sprężysto-plastycznym. Równania opisujące taki związek zaproponowano w pracy [7].

Zanim je przedstawimy, wprowadzimy pojęcie tensora Kirchhoffa:

/18/ $$\tau_{ij} = J \cdot \sigma_{ij} ,$$

gdzie J jest stosunkiem objętości w pewnej konfiguracji odniesienia, do objętości w konfiguracji aktualnej. Tensor τ_{ij} , będziemy odnosić do konfiguracji bieżącej, zatem: J =1.

Jako miarę prędkości zmiany tego tensora przyjmiemy jego pochodną Zaremby-Jaumanna:

/19/ $$\overset{*}{\tau}_{ij} = \dot{\tau}_{ij} - \omega_{ik}\tau_{kj} + \tau_{ik}\omega_{kj} ,$$

gdzie:

/20/ $$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$$

jest tensorem prędkości chwilowego obrotu cząstki ciała.

Tego rodzaju miara nie zależy od chwilowych obrotów tensora τ_{ij} i dlatego nazywana jest współobrotową prędkością zmiany naprężenia. Zwracamy uwagę, że:

/21/ $$J^{*} = d_{kk}$$

mimo, że $J = 1$. Zatem:

/22/ $$\tau_{ij}^{*} = \sigma_{ij}^{*} + \sigma_{ij} d_{kk} ,$$

mimo, że: $\tau_{ij} = \sigma_{ij}$.

Możemy teraz, zgodnie z [7], przyjąć następujące związki Prandtla-Reussa, uogólnione na zakres dużych deformacji sprężysto-plastycznych:

/23/ $$\tau_{ij}^{*} = \frac{E}{1+\nu}\left[\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} - \alpha\,\frac{3\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}\left(\frac{E}{1+\nu}\right)}{2\bar{\sigma}^{2}\left(\frac{2}{3}h + \frac{E}{1+\nu}\right)}\right] d_{kl} ,$$

gdzie: $\alpha = 1$ przy obciążeniu plastycznym, $\alpha = 0$ przy obciążeniu sprężystym, lub dowolnym odciążeniu, E jest modułem Younga, ν - współczynnikiem Poissona, h - nachyleniem krzywej wiążącej naprężenie Cauchy'ego z logarytmiczną miarą odkształceń plastycznych w jednoosiowej próbie rozciągania, δ_{ij} jest symbolem Kroneckera. Ponadto, przez:

/24/ $$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} ,$$
$$\bar{\sigma}^{2} = \frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}$$

oznaczono dewiator tensora Cauchy'ego i jego intensywność.

Użycie wielkości τ_{ij}^{*} zamiast σ_{ij}^{*} w równaniach /23/ podyktowane zostało potrzebą korzystania ze sprzężonych miar prędkości naprężenia i odkształcenia, w sensie wprowadzonym przez Hilla [8]. Takimi miarami są τ_{ij}^{*} oraz d_{kl}, ponieważ ([7]) istnieje dla nich potencjał skalarny $U(d_{ij})$, taki że:

/25/ $$\tau_{ij}^{*} = \frac{\partial^{2} U}{\partial d_{ij}\,\partial d_{kl}}\, d_{kl} = C_{ijkl}\, d_{kl} ,$$

z operatorem konstytutywnym:

/26/ $$\mathcal{C}_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu}\left[\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} - \alpha\,\frac{3\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}\left(\frac{E}{1+\nu}\right)}{2\bar{\sigma}^{2}\left(\frac{2}{3}h + \frac{E}{1+\nu}\right)}\right],$$

symetrycznym ze względu na zmianę par wskaźników ij oraz kl.

Kolejny etap naszych rozważań, to transformacja związku /23/ do uaktualnionego opisu Lagrange'a.

Do równania /22/ podstawiamy:

/27/ $$\overset{*}{\sigma}_{ij} = \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ik}d_{kj} + \sigma_{jk}d_{ki} - \sigma_{ij}d_{kk}$$

gdzie $\overset{\nabla}{\sigma}_{ij}$ jest pochodną Truesdella naprężenia Cauchy'ego [9], zdefiniowaną wzorem:

/28/ $$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik}v_{j,k} - \sigma_{jk}v_{i,k} + \sigma_{ij}d_{kk}\,.$$

Dalej, korzystając ze związku:

/29/ $$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \det{}^{-1}[x_{p,q}]\,x_{i,K}\,x_{j,L}\,\dot{S}_{KL}\,,$$

mamy ostatecznie:

/30/ $$\dot{S}_{KL} = \det[x_{P,Q}]\,X_{K,i}X_{j,L}X_{M,r}\left[\mathcal{C}_{ijrs}X_{N,s} + -\left(\sigma_{ir}X_{N,j} + \sigma_{jr}X_{N,i}\right)\right]\cdot\dot{E}_{MN}\,,$$

gdzie:

/31/ $$\sigma_{ij} = \det{}^{-1}[x_{p,q}]\,x_{i,K}\,x_{j,L}\,S_{KL}\,.$$

Wyrażenie $\sigma_{ir}X_{N,j} + \sigma_{jr}X_{N,i}$ po prawej stronie wzoru /30/ opisuje wpływ lokalnego obrotu cząstki ciała na zmianę operatora konstytutywnego. Jeżeli mamy do czynienia z małymi odkształceniami, wyrażenie to ma postać: $\sigma_{ir}\delta_{Nj} + \sigma_{jr}\delta_{Ni}$. W zakresie sprężystym można je pominąć jako małe w porównaniu z wyrażeniem $\mathcal{C}_{ijrs}\delta_{Ns}$. Nie można tego uczynić w przypadku małych deformacji sprężysto-plastycznych, ponieważ składowe $\mathcal{C}_{ijrs}\delta_{Ns}$, przy niewielkim wzmocnieniu materiału, mogą być tego samego rzędu co $\sigma_{ir}\delta_{Nj} + \sigma_{jr}\delta_{Ni}$. Zjawisko wpływu lokalnego obrotu cząstek na zmianę operatora konstytutywnego dla małych deformacji sprężysto-plastycznych, można było przedstawić tylko w ramach opisu dużych odkształceń.

W dalszym ciągu, ograniczając rozważania do zakresu małych deformacji, utożsamimy tensory $\dot{S}_{IJ}$, $\dot{E}_{IJ}$ z tensorami $\dot{\sigma}_{ij}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}$, używając wyłącznie małych liter łacińskich jako indeksów.

Równania /30/ przyjmą wtedy postać związku:

/32/ $$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \cdot \dot{\varepsilon}_{kl}$$

w którym:

/33/ $$C_{ijkl} = \mathcal{C}_{ijkl} - \alpha(\sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{jk}\delta_{il}).$$

3. Przyrostowy związek konstytutywny materiału o charakterystyce nieliniowej, dla dużych przyrostów czasu.

Dotychczasowe rozważania doprowadziły nas do przyrostowego równania bilansu energii /17/ oraz różniczkowego równania konstytutywnego /32/. Kolejnym zadaniem jest zastąpienie związku:

/34/ $$\dot{\underline{\sigma}} = \underset{\sim}{C} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}},$$

związkiem postaci:

/35/ $$\Delta\underline{\sigma} = \underset{\sim}{K} \cdot \Delta\underline{\varepsilon},$$

w którym przyrosty $\Delta\underline{\varepsilon}$ pozostają małe, ale odpowiadają dowolnie dużym przyrostom czasu Δt. O operatorze $\underset{\sim}{C}$ założymy tylko to, że:

/36/ $$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{C}(\underline{\sigma}) \quad , \quad \underline{\sigma} = \underline{\sigma}(t).$$

Przyjmiemy że siły zewnętrzne działające na ciało zależą od pewnego parametru obciążenia γ, który zmienia się monotonicznie w czasie Δt - rośnie lub maleje. W zakresie małych deformacji oznacza to monotoniczną zmianę pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń. Wtedy to, wszystkie składowe wektora przemieszczenia oraz tensora odkształcenia zmieniają się proporcjonalnie. Biorąc to pod uwagę oraz pamiętając, że ograniczyliśmy się do zagadnień quasi-statycznych, możemy wprowadzić założenie o liniowej zmienności pola przemieszczeń i pola odkształceń na kroku Δt :

$$\text{/37/} \qquad \Delta \underline{u} = \underline{v} \cdot \Delta t\,, \qquad \Delta \underline{\varepsilon} = \underline{\dot{\varepsilon}} \cdot \Delta t\,,$$

gdzie $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x})$ jest stałym polem prędkości, a $\underline{\dot{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{v} + \underline{v}^T)$ - stałym polem prędkości małych odkształceń.

Przyrost tensora naprężenia można formalnie zapisać w postaci:

$$\text{/38/} \qquad \Delta \sigma = \int_0^{\Delta t} \dot{\sigma}\, d\tau$$

gdzie wielkość $0 \leq \tau \leq \Delta t$ jest miarą czasu na kroku Δt.

Podstawiając do /38/ równania /34/ i /37/, otrzymamy:

$$\text{/39/} \qquad \Delta \underline{\sigma} = \underset{\sim}{K} \cdot \Delta \underline{\varepsilon}$$

gdzie operator konstytutywny $\underset{\sim}{K}$, ma postać funkcjonału:

$$\text{/40/} \qquad \underset{\sim}{K} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \underset{\sim}{C}\, d\tau\,, \quad \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{C}(\underline{\sigma})\,, \quad \underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\tau)\,.$$

Do istnienia tego funkcjonału wystarcza aby operator $\underset{\sim}{C}$ był ograniczoną i odcinkami ciągłą funkcją czasu τ na kroku Δt. Dla materiałów sprężysto-plastycznych warunek ten jest spełniony.

Założymy teraz, że operator $\underset{\sim}{C}$ jest ciągłą funkcją czasu w całym przedziale $0 \leq \tau \leq \Delta t$. Przypadek ten dotyczy, na przykład, wyłącznie sprężystego, lub wyłącznie uplastycznionego zachowania się materiału na kroku Δt. Przejście od stanu sprężystego do stanu uplastycznienia będzie rozpatrzone osobno.

Przyjmiemy teraz aproksymację pola $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\tau)$ wielomianami potęgowymi stopnia N=1,2,3,... . Gdy N=1, otrzymamy powszechnie stosowaną liniową aproksymację pola naprężeń.

Postępowanie takie jest możliwe na mocy twierdzenia o aproksymacji funkcji $\bar{\Phi} = \Phi(\tau)$, ciągłej w przedziale $0 \leq \tau \leq \Delta t$, wielomianem potęgowym [10].

Wprowadzając oznaczenie:

$$\text{/41/} \qquad \overset{(N)}{\bar{\Phi}} = \sum_{n=0}^{N} \Phi_n \tau^n\,, \quad \Phi_n = \text{const}\,, \quad \overset{(N)}{\bar{\Phi}} = \overset{(N)}{\bar{\Phi}}(\tau)\,,$$

gdzie Φ_n są współczynnikami wielomianu aproksymującego, mamy:

/42/ $$\Phi = \lim_{N\to\infty} \overset{(N)}{\Phi} .$$

Powracając do równań /39/ i /40/, widzimy że N-temu przybliżeniu pola naprężeń:

/43/ $$\overset{(N)}{\Delta \underline{\sigma}} = \sum_{n=1}^{N} \underline{\sigma}_n \cdot (\Delta t)^n , \quad \underline{\sigma}_n = \underline{\sigma}_n(\underline{x}) , \quad \overset{(N)}{\Delta \underline{\sigma}} = \overset{(N)}{\Delta \underline{\sigma}}(\underline{x}, \Delta t),$$

odpowiada (N-1)-sze przybliżenie operatora :

/44/ $$\overset{(N-1)}{\underset{\sim}{C}} = \sum_{n=0}^{N-1} \underset{\sim}{C}_n \tau^n , \quad \underset{\sim}{C}_n = \underset{\sim}{C}_n(\underline{x}) , \quad \overset{(N-1)}{\underset{\sim}{C}} = \overset{(N-1)}{C}(\underline{x}, \tau)$$

oraz 1-sze przybliżenie pola odkształceń:

/45/ $$\overset{(1)}{\Delta \underline{\varepsilon}} = \underline{\dot{\varepsilon}} \cdot \Delta t , \quad \underline{\dot{\varepsilon}} = \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{x}) , \quad \overset{(1)}{\Delta \varepsilon} = \overset{(1)}{\Delta \varepsilon}(\underline{x}, \Delta t)$$

Podstawiając /44/ do /39/ i /40/ , otrzymujemy:

/46/ $$\overset{(N)}{\Delta \underline{\sigma}} = \overset{(N-1)}{\underset{\sim}{\mathcal{K}}} \cdot \overset{(1)}{\Delta \underline{\varepsilon}} .$$

gdzie:

/47/ $$\overset{(N-1)}{\underset{\sim}{\mathcal{K}}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{\sim}{C}_{n-1} (\Delta t)^{n-1} , \quad \overset{(N-1)}{\underset{\sim}{\mathcal{K}}} = \overset{(N-1)}{\underset{\sim}{\mathcal{K}}}(\underline{x}, \Delta t)$$

Wzór /46/ wiąże N-te przybliżenie przyrostu naprężenia $\overset{(N)}{\Delta \underline{\sigma}}$ z przyrostem odkształcenia $\overset{(1)}{\Delta \underline{\varepsilon}}$.

Ponieważ obliczanie operatora $\overset{(N-1)}{\underset{\sim}{\mathcal{K}}}$, w oparciu o wzór /47/ jest nieefektywne, wzór ten zapiszemy w postaci rekurencyjnej:

$$\overset{(0)}{\underset{\sim}{\mathcal{K}}} = \underset{\sim}{C}_0 = \overset{(0)}{\underset{\sim}{C}} = \underset{\sim}{C}\big|_{\tau=0} ,$$

/48/ $$\overset{(1)}{\underset{\sim}{\mathcal{K}}} = \underset{\sim}{C}_0 + \frac{1}{2} C_1 \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \left[\underset{\sim}{C}_0 + (\underset{\sim}{C}_0 + C_1 \cdot \Delta t) \right] = \frac{1}{2} \left(\overset{(0)}{\underset{\sim}{\mathcal{K}}} + \overset{(1)}{\underset{\sim}{C}}\big|_{\tau=\Delta t} \right),$$

- -

$$\overset{(N-1)}{\underset{\sim}{\mathcal{K}}} = \frac{1}{N}\left(\sum_{n=0}^{N-2} \overset{(n)}{\underset{\sim}{\mathcal{K}}} + \overset{(N-1)}{\underset{\sim}{C}}\Big|_{\tau=\Delta t} \right).$$

Okazuje się, że kolejne przybliżenie operatora $\underset{\sim}{\mathcal{K}}$ jest średnią arytmetyczną wszystkich jego poprzednich przybliżeń i wartości aktualnego przybliżenia operatora $\underset{\sim}{C}$ na końcu kroku Δt . Ostatecznie algorytm obliczania wielkości $\Delta \underline{\sigma}$ wygląda następująco.

1° Jako $\overset{(0)}{\underset{\sim}{\mathcal{K}}}$ przyjmujemy znaną wartość operatora $\underset{\sim}{C}$ na początku kroku obliczeniowego, co pozwala na obliczenie $\overset{(1)}{\Delta \underline{\sigma}}$ zgodnie z /46/.

2° Podstawiając $\overset{(1)}{\Delta \underline{\sigma}}$ do /36/ otrzymamy wielkość $\overset{\langle 1 \rangle}{\underset{\sim}{C}}\Big|_{\tau=\Delta t}$ różniącą się od $\overset{(1)}{\underset{\sim}{C}}\Big|_{\tau=\Delta t}$ wyrażeniem zawierającym człony nieliniowe względem Δt . Zaniedbując tę różnicę możemy znaleźć $\overset{(1)}{\underset{\sim}{\mathcal{K}}}$, a następnie $\overset{(2)}{\Delta \underline{\sigma}}$.

3° Podobnie, znając $\overset{(N)}{\Delta \underline{\sigma}}$, obliczamy $\overset{\langle N \rangle}{C}\Big|_{\tau=\Delta t}$ różniące się od $\overset{(N)}{C}\Big|_{\tau=\Delta t}$ o wyrazy zawierające potęgi Δt stopnia wyższego niż N. Przyjmując założenie:

/49/ $$\overset{\langle N \rangle}{\underset{\sim}{C}}\Big|_{\tau=\Delta t} = \overset{(n)}{\underset{\sim}{C}}\Big|_{\tau=\Delta t} ,$$

obliczamy wartość operatora $\overset{(N)}{\underset{\sim}{\mathcal{K}}}$. Obliczenia zatrzymujemy jeżeli różnica pomiędzy $\overset{(N)}{\Delta \underline{\sigma}}$ a $\overset{(N-1)}{\Delta \underline{\sigma}}$ jest odpowiednio mała.

W przypadku materiałów sprężysto-plastycznych istotne jest zagadnienie przejścia od stanu sprężystego do sprężysto-plastycznego. Wprowadzimy liczbę $0 < r < 1$ taką, że cząstka ciała w czasie $0 \leq \tau < r \cdot \Delta t$ pozostaje w strefie sprężystej, a w czasie $r \cdot \Delta t \leq \tau \leq \Delta t$ znajduje się w strefie uplastycznionej.

W oparciu o wzory /39/ i /40/ $\Delta \underline{\sigma}$ rozkładamy na część sprężystą i sprężysto-plastyczną:

/50/ $$\Delta \underline{\sigma} = \Delta \underline{\sigma}^{e} + \Delta \underline{\sigma}^{ep} ,$$

gdzie

/51/
$$\Delta \underline{\sigma}^{e} = \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{0}^{r \cdot \Delta t} \underset{\sim}{C}\, d\tau \right) \cdot \Delta \underline{\varepsilon} = r \cdot \underset{\sim}{C}\Big|_{\alpha=0} \cdot \Delta \underline{\varepsilon} ,$$

przy czym operator $\underset{\sim}{C}$ dany jest wzorem /26/, natomiast

/52/
$$\Delta \underline{\sigma}^{ep} = \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{r \cdot \Delta t}^{\Delta t} \underset{\sim}{C}\, d\tau \right) \cdot \Delta \underline{\varepsilon} = \underset{\sim}{K}_{r} \cdot \Delta \underline{\varepsilon} .$$

Wprowadzając we wzorze /52/ zamiast τ zmienną:

/53/
$$\bar{\tau} = \frac{\tau - r \cdot \Delta t}{1 - r}$$

i stosując aproksymację:

/54/
$${}^{(N)}\underset{\sim}{C} = \sum_{n=0}^{N} \bar{\underset{\sim}{C}}_{n} \cdot \bar{\tau}^{n} ,$$

otrzymujemy:

/55/
$${}^{(N-1)}\underset{\sim}{K}_{r} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \bar{\underset{\sim}{C}}_{n} (\Delta t)^{n-1} .$$

Powracając do zmiennej τ , wzór /55/ można sprowadzić do następujących, efektywnych wzorów rekurencyjnych:

/56/
$${}^{(0)}\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{C}\Big|_{\tau = r \cdot \Delta t}$$

$${}^{(N-1)}\underset{\sim}{K}_{r} = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-2} {}^{(n)}\underset{\sim}{K} + {}^{(N-1)}\underset{\sim}{C}\Big|_{\tau = \Delta t} \right) .$$

Widzimy więc, że operator ${}^{(N-1)}\underset{\sim}{K}_{r}$ różni się od operatora ${}^{(N-1)}\underset{\sim}{K}$ tym, że jako ${}^{(0)}\underset{\sim}{K}_{r}$ przyjęto wartość operatora $\underset{\sim}{C}$ w chwili uplastycznienia, a nie na początku kroku obliczeniowego Δt .

Sposób wyznaczania współczynnika r opisany został w pracy [11].

4. Równania metody elementów skończonych dla dużych przyrostów czasu.

Równanie bilansu energii /17/ oraz, opisana wyżej, procedura obliczania przyrostu $\Delta\underline{\sigma}$ umożliwiają sformułowanie równań metody elementów skończonych. Przyjmiemy zatem, następującą aproksymację pola przemieszczeń:

/57/ $$\{\Delta u\} = [N]\{\delta\} \ ,$$

gdzie $[N]$ stanowi macierz funkcji kształtu, a $\{\delta\}$ - wektor przemieszczeń węzłowych. Różniczkując po czasie wzór /57/ otrzymujemy pole prędkości:

/58/ $$\{v\} = [N]\{\dot{\delta}\} \ ,$$

takie, że:

/59/ $$\{\delta\} = \{\dot{\delta}\}\cdot\Delta t \ .$$

Pole odkształceń oraz pole prędkości odkształceń dane są wzorami:

/60/ $$\{\Delta\varepsilon\} = [B]\{\delta\} \ ,$$
$$\{\dot{\varepsilon}\} = [B]\{\dot{\delta}\} \ ,$$

gdzie $[B]$ jest macierzą odkształceń.
Równanie /17/ w notacji macierzowej ma postać:

/62/ $$\int\limits_{\Omega}\{\dot{\varepsilon}\}^T\{\Delta\sigma\}\,d\Omega = \int\limits_{\Omega}\{v\}^T\{\Delta f\}\,d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega}\{v\}^T\{\Delta p\}\,d(\partial\Omega).$$

Podstawiając do /62/ równania /58/, /60/ oraz związek:

/63/ $$\{\Delta\sigma\} = [\mathcal{K}]\cdot\{\Delta\varepsilon\} \ ,$$

gdzie $[\mathcal{K}]$ jest przyrostowym operatorem konstytutywnym, otrzymujemy układ równań równowagi metody elementów skończonych:

$$/64/ \qquad \left(\int_{\Omega}[B]^T[\mathcal{K}][B]d\Omega\right)\cdot\{\delta\} = \int_{\Omega}[N]^T\{\Delta f\}\,d\Omega + \int_{\partial\Omega}[N]^T\{\Delta p\}\,d(\partial\Omega).$$

Ponieważ operator $[\mathcal{K}]$ dany jest poprzez wzory rekurencyjne /48/ lub /56/, układ równań /64/ rozwiązujemy iteracyjnie:

$$/65/ \qquad \left(\int_{\Omega}[B]^T[{}^{(N-1)}\mathcal{K}][B]d\Omega\right)\cdot\{{}^{(N)}\delta\} = \int_{\Omega}[N]\{\Delta f\}d\Omega + \int_{\partial\Omega}[N]^T\{\Delta p\}\,d(\partial\Omega),$$

dla N=1,2,3,..., tak długo, aż różnica pomiędzy $\{{}^{(N)}\delta\}$ oraz $\{{}^{(N-1)}\delta\}$ będzie odpowiednio mała.

5. Dokładność obliczeń.

Ponieważ w metodzie elementów skończonych aproksymacja w czasie przebiega niezależnie od aproksymacji po zmiennych przestrzennych, dokładność opisanej wyżej procedury wystarczy zbadać dla zadań o jednorodnym rozkładzie pól.

Rozważmy pasmo płytowe obciążone na przeciwległych brzegach równomiernie rozłożonym obciążeniem p. Mamy do czynienia z płaskim stanem odkształcenia i jednorodnym rozkładem pola odkształceń $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, 0\}$ i pola naprężeń $\{\sigma_x, 0, \frac{1}{2}\sigma_x\}$. Załóżmy, że pod wpływem obciążenia p_0, pasmo uległo uplastycznieniu. Jeżeli obciążenie przyrośnie o wielkość Δp, w czasie $0 \leq \tau \leq \Delta t$ pole naprężeń pozostanie jednorodne, ale będzie się zmieniać nieliniowo. Na podstawie wzorów /32/, /33/ i /26/ mamy:

$$/66/ \qquad \begin{aligned} \dot{\sigma}_x &= (\mathcal{C}_{xx} - 2\sigma_x)\cdot\dot{\varepsilon}_x + \mathcal{C}_{xy}\dot{\varepsilon}_y,\\ 0 &= \mathcal{C}_{yx}\cdot\dot{\varepsilon}_x + \mathcal{C}_{yy}\cdot\dot{\varepsilon}_y,\end{aligned}$$

gdzie:

$$\mathcal{C}_{xx} = \mathcal{C}_{yy} = \bar{E}\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\bar{E}}{\frac{2}{3}h_1 + \bar{E}}\right),$$

$$\mathcal{C}_{xy} = \mathcal{C}_{yx} = \bar{E}\left(\frac{\nu}{1-2\nu} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\bar{E}}{\frac{2}{3}h_1 + \bar{E}}\right),$$

$$\bar{E} = \frac{E}{1+\nu} ,$$

/67/
$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\delta_x}{a} ,$$

$$\dot{\varepsilon}_y = \frac{\delta_y}{b} ,$$

a δ_x , δ_y oznaczają przyrost szerokości i grubości płyty, które w chwili $\tau = 0$ wynosiły odpowiednio a i b . Przyjęliśmy tu liniową zmienność w czasie pola odkształceń. Ścisłe rozwiązanie układu równań /66/ daje:

/68/
$$\sigma_x(\tau) = \frac{c_{xx}^2 - c_{xy}^2}{2 \cdot c_{xx}} \left(1 - e^{-2\frac{\delta_x}{a}\tau}\right) + p_0 e^{-2\frac{\delta_x}{a}\tau} ,$$

skąd

/69/
$$\delta_x = -\frac{a}{2} \ln\left(\frac{\Delta p}{\sigma_0 - m} + 1\right) , \quad m = \frac{c_{xx}^2 - c_{xy}^2}{2 \cdot c_{xx}} ,$$

$$\delta_y = -\frac{c_{xy}}{c_{xx}} \delta_x .$$

Powyższe zadanie rozwiążemy teraz metodą elementów skończonych stosując wprowadzoną przez nas procedurę. Ze względu na jednorodność pola odkształceń można wprowadzić tylko jeden element, w którym:

/70/
$$\{\Delta u\} = [N] \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix} , \quad [N] = \begin{bmatrix} \frac{x}{a} , & 0 \\ 0 , & \frac{y}{b} \end{bmatrix} ,$$

$$\{\Delta \varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix} , \quad [B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} , & 0 \\ 0 , & \frac{1}{b} \end{bmatrix} ,$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{xx} , & c_{xy} \\ c_{xy} , & c_{xx} \end{bmatrix} - (2 p_0 + \Delta\sigma_x) \begin{bmatrix} 1 , & 0 \\ 0 , & 0 \end{bmatrix} .$$

Przyjęto następujące dane do obliczeń:
$a/b = 1.0$, $\Delta p / p_0 = 0.1$, $E/p_0 = 1000.0$, $\nu = 0.25$, $h = 300.0$.
Korzystając ze wzorów /65/ oraz /48/ obliczono kolejno wartości ${}^{(N)}\delta_x/a$ oraz ${}^{(N)}\delta_y/b$, dla N=1,2,3. Okazało się, że:

/71/
$$\frac{{}^{(3)}\delta_x}{a} = \frac{{}^{(2)}\delta_x}{a} = 2.7431663 \cdot 10^{-3},$$
$$\frac{{}^{(3)}\delta_y}{b} = \frac{{}^{(2)}\delta_y}{b} = -2.6770659 \cdot 10^{-3}.$$

Scisłe rozwiązanie /69/ daje wartości:

/72/
$$\frac{\delta_x}{a} = 2.7432111 \cdot 10^{-3}$$
$$\frac{\delta_y}{b} = -2.6771095 \cdot 10^{-3}$$

Błąd względny, w tym przypadku, wynosi $1.63 \cdot 10^{-5}$.

6. LITERATURA

1. O.C.ZIENKIEWICZ, Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa,1972.

2. J.R.RICE, D.M.TRACEY, Computational fracture mechanica,in Numerical and Computer Methoda in Structural Mechanica,S.J. Fenves et al /Eds/, Academic Press, New York,1973.

3. M.KLEIBER,PLADEP- Statyczna analiza dużych deformacji sprężysto-plastycznych w płaskim stanie naprężenia. Opis programu i instrukcja użytkowania. Prace IPPT, 48, 1977.

4. Y.C.FUNG, Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN,Warszawa,1969.

5. J.T.ODEN, Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw Hill, New York,1972.

6. H.D.HIBBIT, P.V.MARCAL, J.R.RICE, A finite element formulation for problems of large strain and large displacement, Int. J. Solids Structures, 6, 1069-1086,/1970/.

7. R.M.McMEEKING, J.R.RICE, Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformations, Int. J.Solids Structures, 11, 601-616, /1975/.

8. R.HILL, Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time, J.Mech. Phys.Solids, 7, 209,/1959/.

9. W.PRAGER, Introduction to Mechanics of Continua. Ginn.,1961.

10. A.RALSTON, Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa,1971.

11. Y.YAMADA, N.YOSHIMURA,T.SAKURAI, Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method, Int.J. Mech.Sci.,10,343-354,/1968/.