

7.71 — Identyfikacja w układach dynamicznych

Zofia Kowalska

ANALIZA BŁĘDÓW
IDENTYFIKACJI PARAMETRÓW
NA PODSTAWIE
AMPLITUDOWYCH CHARAKTERYSTYK
CZĘSTOTLIWOŚCIOWYCH OBIEKTU

5/1986

P.269



WARSZAWA 1986

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 października 1985 r.



56872



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,53 Ark.druk. 2,25

Oddano do drukarni w marcu 1986 r.

Nr zamówienia 170/86

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Zofia Kowalska

Zakład Układów Mechanicznych

ANALIZA BŁĘDÓW IDENTYFIKACJI PARAMETRÓW
NA PODSTAWIE AMPLITUDOWYCH CHARAKTERYSTYK
CZĘSTOTLIWOŚCIOWYCH OBIEKTU

Streszczenie

Przedmiotem pracy jest analiza dokładności wartości parametrów fizycznych modelu matematycznego wyznaczonych w drodze identyfikacji na podstawie pomiarów amplitudowych charakterystyk częstotliwościowych obiektu. Omówiono przypadek identyfikacji deterministycznej i identyfikacji metodą najmniejszej sumy kwadratów.

Parametrami fizycznymi są nazywane takie parametry modelu, które reprezentują własności fizyczne rzeczywistych lub zredukowanych elementów obiektu. Amplitudowe charakterystyki częstotliwościowe modelu są nieliniowymi funkcjami parametrów fizycznych.

Wprowadzone w rozdziale 1 wzory na macierz kowariancji oraz maksymalne i średniokwadratowe błędy estymat parametrów mają charakter ogólny i zastosowanie dla różnych metod identyfikacji parametrów.

W rozdziałach 2 i 3 podano sposób praktycznego wykorzystania wyprowadzonych wzorów w przypadku identyfikacji parametrów na podstawie amplitudowych charakterystyk częstotliwościowych obiektu, metodą deterministyczną (rozdział 2) i metodą najmniejszej sumy kwadratów (rozdział 3).

W rozdziale 4 przeprowadzono analizę błędów maksymalnych i średniokwadratowych różnych estymat parametrów wybranych obiektów mechanicznych. Na tej podstawie wyprowadzono wnioski o przydatności stosowania przybliżonej analizy błędów przed rozpoczęciem identyfikacji w celu sformułowania najlepszego,

ze względu na dokładność identyfikacji, kryterium identyfikacji oraz właściwego przygotowania eksperymentu identyfikacji.

1. Linearyzowana analiza błędów estymat parametrów

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

\mathbf{p} - m-wymiarowy wektor parametrów,

$\hat{\mathbf{p}}$ - m-wymiarowy wektor estymat parametrów (estymata wektora \mathbf{p}),

\mathbf{z} - n-wymiarowy wektor dyskretnych obserwacji (wielkości mierzonych),

\mathbf{v} - n-wymiarowy wektor błędów pomiarów obserwacji \mathbf{z} .

Jeżeli przy wektorze \mathbf{p} , $\hat{\mathbf{p}}$ lub \mathbf{z} występuje indeks r , 0 lub s , to wektor reprezentuje zbiór konkretnych wartości parametrów, estymat parametrów lub wielkości mierzonych ("obserwowanych"), w szczególności:

\mathbf{p}_r - wektor rzeczywistych wartości parametrów,

\mathbf{p}_s - wektor oszacowanych wartości parametrów,

\mathbf{z}_0 - wektor zmierzonych wartości wielkości "obserwowanych",

$\hat{\mathbf{p}}_0$ - wektor estymat parametrów wyznaczonych w drodze identyfikacji na podstawie pomiarów \mathbf{z}_0 .

W dalszej części pracy element dowolnego wektora jest oznaczany zawsze tą samą literą co wektor, z tym że w jego symbolu występuje dodatkowy indeks liczbowy lub literowy, który wskazuje na konkretny element w zbiorze.

Założmy, że między wektorem parametrów \mathbf{p} a wektorem obserwacji \mathbf{z} zachodzi zależność:

$$(1.1) \quad \mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{p}) + \mathbf{v},$$

gdzie

$\mathbf{h}(\mathbf{p})$ - znana n-wymiarowa funkcja wektorowa.

Identyfikacja (estymacja) parametrów polega na znalezieniu wartości m-wymiarowej nieliniowej funkcji n-wymiarowego wektora obserwacji \mathbf{z} dla argumentu \mathbf{z}_0 . Przekształcenie nieliniowe wektora \mathbf{z} na $\hat{\mathbf{p}}$ można zapisać w postaci:

$$(1.2) \quad \hat{\beta} = w(z) .$$

Przekształcenie w nie jest na ogół znane w postaci jawnej.

Po podstawieniu (1.1) do (1.2) i rozwinięciu $w(z)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu $z_r = h(p_r)$ otrzymujemy:

$$(1.3) \quad \hat{\beta} = w(h(p_r)) + \left. \frac{\partial w(z)}{\partial z} \right|_{z=h(p_r)} v + \dots$$

Dla uproszczenia zapisu macierz pochodnych $\frac{\partial w(z)}{\partial z}$ o wymiarze $m \times n$ będzie oznaczana przez U :

$$(1.4) \quad U(z) = \frac{\partial w(z)}{\partial z} .$$

Jeśli błędy pomiarów v są dostatecznie małe, w rozwinięciu (1.3) można pominąć wyrazy wyższego rzędu. Przy tym założeniu wartość przeciętna estymaty

$$(1.5) \quad E\{\hat{\beta}\} = w[h(p_r)] + U[h(p_r)] E\{v\},$$

a błąd obciążenia estymaty

$$(1.6) \quad b = E\{\hat{\beta}\} - p_r = w[h(p_r)] + U[h(p_r)] E\{v\} - p_r .$$

W analizowanych w rozdziałach 2 i 3 przypadkach identyfikacji deterministycznej i identyfikacji metodą najmniejszej sumy kwadratów zachodzi równość:

$$(1.7) \quad w[h(p_r)] = p_r .$$

Błąd obciążenia estymaty jest zatem równy:

$$(1.8) \quad b = U[h(p_r)] E\{v\} .$$

Wzór (1.8) nie ma bezpośredniego, praktycznego zastosowania, ponieważ nie są znane dokładne wartości elementów wektorów $h(p_r)$ i $E\{v\}$. Wzór ten natomiast daje wyobrażenie o wpływie błędów poszczególnych pomiarów na błędy estymat parametrów. Element u_{ij} i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy U można traktować jako współczynnik wpływu błędu j-tego pomiaru na błąd estymaty i-tego parametru.

Przyjmując, że:

$$(1.9) \quad U[h(p_r)] \approx U(z_0),$$

można wyznaczyć oszacowania maksymalnych teoretycznie możliwych błędów estymat parametrów p_i ($i = 1, \dots, m$) według wzoru:

$$(1.10) \quad s_i = \sum_{j=1}^n |u_{ij}(z_0)| v_{maxj},$$

gdzie:

s_i - maksymalny bezwzględny błąd estymaty parametru p_i ,

v_{maxj} - oszacowana maksymalna wartość bezwzględna błędu j-tego pomiaru.

Błędy estymat parametrów są w rzeczywistości mniejsze od wyznaczonych według wzoru (1.10), ponieważ błędy składowe $u_{ij}(z_0)v_j$ wywołane błędami poszczególnych pomiarów mogą mieć dla różnych wartości j przeciwne znaki i kompensować się wzajemnie. Z praktyki wiadomo, że w przypadku pomiarów pośrednich, szczególnie przy dużej liczbie pomiarów składowych, tzw. błąd średniokwadratowy jest lepszym oszacowaniem błędu pomiaru od błędu maksymalnego. W przypadku statystycznej identyfikacji parametrów liczba pomiarów jest na ogół bardzo duża i dlatego celowe jest liczenie średniokwadratowych błędów estymat parametrów według wzoru:

$$(1.11) \quad \bar{s}_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n u_{ij}^2(z_0) v_{maxj}^2},$$

gdzie

\bar{S}_i - błąd średniokwadratowy estymaty i-tego parametru.

Zgodnie ze wzorem (1.10) maksymalny względny błąd estymaty i-tego parametru, wyrażony w procentach jest równy:

$$(1.12) \quad e_i = 100\% \frac{S_i}{\hat{\beta}_{0i}} = \frac{100\%}{\hat{\beta}_{0i}} \sum_{j=1}^n |u_{ij}(z_0)| v_{\max j} = \sum_{j=1}^n |u_{ij}(z_0)| \frac{|z_{0j}| d_j}{\hat{\beta}_{0i}} = \\ = \sum_{j=1}^n \left| \frac{u_{ij}(z_0) z_{0j}}{\hat{\beta}_{0i}} \right| d_j = \sum_{j=1}^n |\tilde{u}_{ij}(z_0)| d_j,$$

gdzie:

e_i - maksymalny względny błąd estymaty i-tego parametru,
 d_j - wyrażony w procentach, maksymalny względny błąd j-tego pomiaru,

\tilde{u}_{ij} - element i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy \tilde{U} , przy czym między elementem \tilde{u}_{ij} oraz elementem u_{ij} macierzy U zachodzi związek:

$$(1.13) \quad \tilde{u}_{ij}(z_0) = \frac{\partial \ln w_i}{\partial \ln z_j} \Big|_{z_0} = \frac{\partial w_i / w_i}{\partial z_j / z_j} \Big|_{z_0} = \frac{\partial w_i}{\partial z_j} \frac{z_{0j}}{\hat{\beta}_{0i}} = u_{ij}(z_0) \frac{z_{0j}}{\hat{\beta}_{0i}}.$$

Błąd względny średniokwadratowy jest natomiast równy:

$$(1.14) \quad \bar{e}_i = \frac{\bar{S}_i}{\hat{\beta}_{0i}} 100\% = \frac{1}{\hat{\beta}_{0i}} \sqrt{\sum_{j=1}^n u_{ij}(z_0)^2 v_{\max j}^2} 100\% = \sqrt{\sum_{j=1}^n \tilde{u}_{ij}(z_0)^2 d_j^2}.$$

Inną ważną własnością estymat parametrów jest ich wariancja. Niekiedy celowe jest też znalezienie kowariancji błędów estymat parametrów. Wartości wariancji i kowariancji błędów estymat parametrów są elementami macierzy kowariancji Σ zdefiniowanej jako

$$(1.15) \quad \Sigma = \text{cov}\{\hat{\beta}\}^{\text{dł}} = E\{(\mathbf{p}_r - \hat{\beta})(\mathbf{p}_r - \hat{\beta})^T\} - E\{(\mathbf{p}_r - \hat{\beta})\}E\{(\mathbf{p}_r - \hat{\beta})^T\}.$$

Jeśli pominiemy wyrazy wyższego rzędu w rozwinięciu (1.3) i przyjmiemy założenie (1.9), to macierz kowariancji Σ jest określona wzorem:

$$(1.16) \quad \Sigma = U(z_0) R U^T(z_0),$$

gdzie

$$(1.17) \quad R = E\{v v^T\} - E\{v\} E\{v^T\}$$

jest macierzą kowariancji błędów pomiarów.

Wzór 1.16 wynika z ogólnej zależności między macierzami kowariancji dowolnych liniowo zależnych wektorów x , y .

Jeśli

$$(1.18) \quad y = Ax + b,$$

to między macierzą kowariancji wektora x i macierzą kowariancji wektora y zachodzi związek:

$$(1.19) \quad \text{cov}\{y\} = A \text{cov}\{x\} A^T.$$

Jeśli przed rozpoczęciem identyfikacji znane są przybliżone wartości parametrów, można obliczyć błędy maksymalne i średniokwadratowe według wzorów (1.10), (1.11), (1.12), (1.14) oraz macierz kowariancji według wzoru (1.16), przyjmując jako argument macierzy U i \bar{U} zamiast wektora z_0 wektor obserwacji $z_s = h(p_s)$.

W dalszej części pracy błędy: s , \bar{s} , e , \bar{e} oraz macierz kowariancji Σ obliczone dla oszacowanych wartości parametrów p_s i wektora obserwacji $z_s = h(p_s)$ będą oznaczane indeksem s .

Można przypuszczać, że jeśli oszacowanie wartości parametrów jest wystarczająco dokładne, to analiza wartości błędów s_s , \bar{s}_s , e_s , \bar{e}_s i macierzy Σ_s dla różnych kryteriów identyfikacji

umożliwia przed rozpoczęciem identyfikacji wybór odpowiedniego, ze względu na dokładność identyfikacji, kryterium identyfikacji, a w szczególności właściwy wybór wektora obserwacji Z . Ma to wielkie znaczenie praktyczne, szczególnie w przypadkach gdy do przeprowadzenia eksperymentu identyfikacji konieczne jest wykonanie specjalistycznej aparatury pomiarowej.

2. Identyfikacja deterministyczna

Jeśli struktura modelu jest dobrze dobrana, a błędy pomiaru charakterystyk-małe, estymatę wektora parametrów modelu można wyznaczyć w drodze identyfikacji deterministycznej. Identyfikacja deterministyczna wektora parametrów o wymiarze m polega na ułożeniu i rozwiązaniu układu m równań niezależnych liniowo, które powstają przez porównanie wartości wybranych charakterystyk amplitudowych modelu dla określonych wartości częstotliwości do odpowiednich wartości mierzonych.

Równania te można zapisać w postaci:

$$(2.1) \quad \begin{array}{l} h_1(\beta) - z_1 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ h_i(\beta) - z_i = 0, \\ \dots \dots \dots \\ h_m(\beta) - z_m = 0, \end{array}$$

gdzie:

$h_i(\beta)$ - moduł wybranej transmitancji modelu dla określonej wartości częstotliwości,

z_i - odpowiedni do $h_i(\beta)$ moduł transmitancji obiektu, zmierzony.

Układ (2.1) można uważać za uwikłaną postać nieliniowej m -wymiarowej. funkcji (1.2) n -wymiarowego wektora obserwacji Z , jeśli równania układu spełniają założenia twierdzenia o istnieniu jednoznacznej funkcji uwikłanej [1]. Zgodnie z tym twierdzeniem w pewnym otoczeniu punktu $(z_{01}, \dots, z_{0m}, \hat{\beta}_{01}, \dots, \hat{\beta}_{0m})$, spełniającym równania (2.1), układ (2.1) określa $\hat{\beta}$ jako

jednoznacznie funkcję wektorową $W(Z)$, jeśli jacobian

$$(2.2) \quad J = \frac{D(h_1, \dots, h_m)}{D(p_1, \dots, p_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial p_1} \Big|_{\hat{p}_0} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial p_j} \Big|_{\hat{p}_0} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial p_m} \Big|_{\hat{p}_0} \\ \frac{\partial h_i}{\partial p_1} \Big|_{\hat{p}_0} & \dots & \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \Big|_{\hat{p}_0} & \dots & \frac{\partial h_i}{\partial p_m} \Big|_{\hat{p}_0} \\ \frac{\partial h_m}{\partial p_1} \Big|_{\hat{p}_0} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial p_j} \Big|_{\hat{p}_0} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial p_m} \Big|_{\hat{p}_0} \end{vmatrix}$$

nie jest równy zero.

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial \hat{p}_i(z)}{\partial z_j} = \frac{\partial w_i(z)}{\partial z_j}$ ($i = 1, \dots, m$), oznaczane w rozdziale 1 jako elementy macierzy U przez u_{ij} , wyznacza się, zgodnie z ogólnymi zasadami różniczkowania funkcji uwikłanych, różniczkując układ równań (2.1) po Z_j . W wyniku różniczkowania otrzymujemy następujący układ równań:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial h_1}{\partial p_1} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial z_j} + \dots + \frac{\partial h_1}{\partial p_i} \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial z_j} + \dots + \frac{\partial h_1}{\partial p_m} \frac{\partial \hat{p}_m}{\partial z_j} = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & \frac{\partial h_i}{\partial p_1} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial z_j} + \dots + \frac{\partial h_i}{\partial p_i} \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial z_j} + \dots + \frac{\partial h_i}{\partial p_m} \frac{\partial \hat{p}_m}{\partial z_j} = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & \frac{\partial h_m}{\partial p_1} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial z_j} + \dots + \frac{\partial h_m}{\partial p_i} \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial z_j} + \dots + \frac{\partial h_m}{\partial p_m} \frac{\partial \hat{p}_m}{\partial z_j} = 0. \end{aligned}$$

Wyniki różniczkowania układu (2.1) po wszystkich elementach z_j ($j=1, \dots, m$) wektora obserwacji \mathbf{z} można zapisać w zwartej macierzowej postaci:

$$(2.4) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \hat{p}_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial \hat{p}_i} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial \hat{p}_m} & \frac{\partial p_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial z_j} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial z_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_j}{\partial \hat{p}_1} & \dots & \frac{\partial h_j}{\partial \hat{p}_i} & \dots & \frac{\partial h_j}{\partial \hat{p}_m} & \frac{\partial p_j}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial p_j}{\partial z_j} & \dots & \frac{\partial p_j}{\partial z_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_m}{\partial \hat{p}_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial \hat{p}_i} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial \hat{p}_m} & \frac{\partial p_m}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial p_m}{\partial z_j} & \dots & \frac{\partial p_m}{\partial z_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} .$$

Równanie (2.4) w notacji macierzowej zapisujemy jako

$$(2.5) \quad G(\hat{p}) U(z) = E ,$$

gdzie:

E - macierz diagonalna, jednostkowa ,

natomiast

$$(2.6) \quad G(\hat{p}) = \frac{\partial h(\hat{p})}{\partial \hat{p}} , \quad U(z) = \frac{\partial w(z)}{\partial z} .$$

Aby wyznaczyć macierz $U(z)$ dla argumentu $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$, trzeba rozwiązać układ równań:

$$(2.7) \quad G(\hat{p}_0) U(z_0) = E .$$

Błędy estymat parametrów: maksymalne (1.10) , (1.11) i średniokwadratowe (1.12) , (1.14) oraz macierz kowariancji (1.16) zależą od wartości elementów macierzy $U(\mathbf{z}_0)$. Z równania (2.7) wynika, że macierz $U(\mathbf{z}_0)$ jest macierzą odwrotną do $G(\hat{\beta}_0)$.

Jeśli opis matematyczny (model) obiektu jest podany w postaci macierzowego równania stanu i równania wyjścia, elementy macierzy $G(\hat{\beta}_0)$ można w prosty sposób obliczyć za pomocą EMC. Metodę liczenia pochodnych transmitancji i modułów transmitancji względem parametrów fizycznych opisano w dodatku A.

Przy założeniu, że dla każdego $i=1, \dots, m$ moduł $h_i(\hat{\beta}) \neq 0$, układ (2.4) można przekształcić do postaci:

$$(2.8) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1/h_1}{\partial \beta_1/\beta_1} & \dots & \frac{\partial h_1/h_1}{\partial \beta_i/\beta_i} & \dots & \frac{\partial h_1/h_1}{\partial \beta_m/\beta_m} & \frac{\partial \hat{\beta}_1/\hat{\beta}_1}{\partial z_1/z_1} & \dots & \frac{\partial \hat{\beta}_i/\hat{\beta}_i}{\partial z_i/z_i} & \dots & \frac{\partial \hat{\beta}_m/\hat{\beta}_m}{\partial z_m/z_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_i/h_i}{\partial \beta_1/\beta_1} & \dots & \frac{\partial h_i/h_i}{\partial \beta_i/\beta_i} & \dots & \frac{\partial h_i/h_i}{\partial \beta_m/\beta_m} & \frac{\partial \hat{\beta}_1/\hat{\beta}_1}{\partial z_1/z_1} & \dots & \frac{\partial \hat{\beta}_i/\hat{\beta}_i}{\partial z_i/z_i} & \dots & \frac{\partial \hat{\beta}_m/\hat{\beta}_m}{\partial z_m/z_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_m/h_m}{\partial \beta_1/\beta_1} & \dots & \frac{\partial h_m/h_m}{\partial \beta_i/\beta_i} & \dots & \frac{\partial h_m/h_m}{\partial \beta_m/\beta_m} & \frac{\partial \hat{\beta}_1/\hat{\beta}_1}{\partial z_1/z_1} & \dots & \frac{\partial \hat{\beta}_i/\hat{\beta}_i}{\partial z_i/z_i} & \dots & \frac{\partial \hat{\beta}_m/\hat{\beta}_m}{\partial z_m/z_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

W notacji macierzowej równanie (2.8) zapisujemy w postaci:

$$(2.9) \quad \tilde{G}(\hat{\beta}) \tilde{U}(\mathbf{z}) = E.$$

Element i -tego wiersza i j -tej kolumny macierzy $\tilde{U}(\mathbf{z})$ jest miarą względnego błędu estymaty i -tego parametru wywołanego jednostkowym względnym błędem pomiaru modułu z_j . Aby wyznaczyć wartości pochodnych $\frac{\partial \hat{\beta}_i/\hat{\beta}_i}{\partial z_j/z_j}$ w punkcie $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$,

trzeba rozwiązać równanie macierzowe:

$$(2.10) \quad \tilde{G}(p_0) \tilde{U}(z_0) = E.$$

Jeśli przed rozpoczęciem identyfikacji znane są przybliżone wartości parametrów p_s , można wyznaczyć wartości pochodnych $\frac{\partial p_i / \beta_i}{\partial z_j / z_j}$ w punkcie $z = h(p_s)$ rozwiązując równanie:

$$(2.11) \quad \tilde{G}(p_s) \tilde{U}[h(p_s)] = E.$$

Parametry fizyczne modeli matematycznych mają na ogół różne wymiary fizyczne. Ponadto mierzone moduły transmitancji z_j ($j=1, \dots, m$), przyjęte za podstawę identyfikacji, mogą również mieć różne wymiary fizyczne. Dlatego wydaje się, że przy planowaniu eksperymentu identyfikacji analiza wartości pochodnych względnych $\tilde{U}[h(p_s)]$ daje lepsze wyobrażenie o wpływie poszczególnych pomiarów na dokładność estymacji od analizy pochodnych bezwzględnych $U[h(p_s)]$. Odnosi się to szczególnie do przypadków, gdy można założyć, że pomiary modułów z_j są wykonywane ze stałą względną dokładnością. Przy planowaniu eksperymentu identyfikacji należy dążyć, aby elementy macierzy $\tilde{U}[h(p_s)]$ miały możliwie małe wartości bezwzględne.

Macierz $\tilde{U}[h(p_s)]$ jest macierzą odwrotną do $\tilde{G}(p_s)$. Zależność elementów macierzy \tilde{U} odwrotnej do \tilde{G} od elementów macierzy \tilde{G} ma złożony charakter. Na ogół elementy macierzy \tilde{U} mają małe wartości bezwzględne, jeśli wartości bezwzględne elementów macierzy \tilde{G} są duże. Np. jeśli wszystkie elementy macierzy \tilde{G} pomnożymy przez liczbę $\lambda > 1$, to wartości bezwzględne macierzy odwrotnej do $\lambda \tilde{G}$ zmniejszą się w stosunku do elementów macierzy \tilde{U} λ -krotnie. Trzeba jednakże podkreślić, że elementy macierzy \tilde{U} mogą mieć bardzo duże wartości bezwzględne nawet przy dużych wartościach bezwzględnych elementów macierzy \tilde{G} , jeśli wiersze (kolumny) macierzy są w przybliżeniu liniowo zależne. Te właściwości macierzy odwrotnej trzeba uw-

$\hat{p}_{01}, \hat{p}_{02}, \dots, \hat{p}_{0m}$ wyznacza się numerycznie w drodze optymalizacji (minimalizacji) kryterium identyfikacji (3.1).

Jeśli w punkcie $(z_{01}, \dots, z_{0n}, \hat{p}_{01}, \dots, \hat{p}_{0m})$, spełniającym układ (3.2), jacobian funkcji stanowiących lewe strony równań (3.2) względem parametrów \hat{p} jest różny od zera, to równania (3.2) można uważać za uwikłaną postać funkcji $\hat{p} = w(z)$ w otoczeniu punktu $(z_{01}, \dots, \hat{p}_{0m})$. Element i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy jacobianu G ma postać:

$$(3.3) \quad g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_j} \tau_k \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_i} + \sum_{k=1}^n (h_k - z_k) \tau_k \frac{\partial^2 h_k}{\partial \hat{p}_i \partial \hat{p}_j}.$$

Aby wyznaczyć wektor pochodnych cząstkowych $\frac{\partial \hat{p}}{\partial z_j} = \frac{\partial w(z)}{\partial z_j}$ różniczkujemy układ równań (3.2) po z_j . Po zróżniczkowaniu otrzymujemy nowy układ równań, i-te ($i=1, \dots, m$) równanie tego układu ma postać:

$$(3.4) \quad \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_l} \frac{\partial \hat{p}_l}{\partial z_j} \right) \tau_k \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_i} - \frac{\partial h_i}{\partial \hat{p}_i} \tau_j + \sum_{k=1}^n (h_k - z_k) \tau_k \left(\sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 h_k}{\partial \hat{p}_l \partial \hat{p}_i} \frac{\partial \hat{p}_l}{\partial z_j} \right) = 0.$$

Zmieniając kolejność sumowania, równanie (3.4) można przekształcić do postaci:

$$(3.5) \quad \sum_{l=1}^m \frac{\partial \hat{p}_l}{\partial z_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_l} \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_i} \tau_k + \sum_{k=1}^n (h_k - z_k) \tau_k \frac{\partial^2 h_k}{\partial \hat{p}_l \partial \hat{p}_i} \right) = \frac{\partial h_i}{\partial \hat{p}_i} \tau_j.$$

Równania (3.5) dla $i=1, \dots, m$ tworzą układ równań liniowych ze względu na pochodne $\frac{\partial \hat{p}_l}{\partial z_j}$ ($l=1, \dots, m$).

Układy równań otrzymane w wyniku różniczkowania równań (3.2) po z_j dla $j=1, \dots, n$ różnią się między sobą tylko prawą stroną. W notacji macierzowej można te układy zapisać w postaci jednego równania:

$$(3.6) \quad G(\hat{p}) U(z) = M(\hat{p}),$$

przy czym elementy w i -tym wierszu i j -tej kolumnie macierzy G , U oraz M są odpowiednio równe:

$$(3.7) \quad g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial \beta_i} \frac{\partial h_k}{\partial \beta_j} r_k + \sum_{k=1}^n (h_k - z_k) r_k \frac{\partial^2 h_k}{\partial \beta_i \partial \beta_j}, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, m;$$

$$(3.8) \quad u_{ij} = \frac{\partial \beta_i}{\partial z_j}, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n;$$

$$(3.9) \quad m_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial \beta_j} r_j, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n.$$

Wzory (3.6) ÷ (3.9) są prawdziwe także w przypadku, gdy jako kryterium identyfikacji przyjmiemy sumę kwadratów różnic względnych między wartościami charakterystyk amplitudowych modelu i obiektu, tzn. jeśli współczynniki wagowe r_j są równe $1/z_j^2$.

Zgodnie z (3.6), aby wyznaczyć wartości elementów macierzy $U(z_0)$, które występują we wzorach (1.10), (1.11), (1.12), (1.14) na błędy estymat parametrów i we wzorze (1.16) na macierz kowariancji estymat, trzeba obliczyć wartości elementów macierzy $G(\hat{\beta}_0)$ oraz $M(\hat{\beta}_0)$ i rozwiązać n układów równań liniowych, różniących się między sobą wyłącznie prawą stroną. Metodę liczenia wartości pochodnych cząstkowych modułów transmitancji względem estymat parametrów, występujących we wzorze (3.7) na g_{ij} i we wzorze (3.9) na m_{ij} , opisano w dodatku A.

Przed rozpoczęciem identyfikacji, jeśli znane są przybliżone wartości parametrów β_s , można oszacować błędy estymat

parametrów i macierz kowariancji estymat, przyjmując, że wektor obserwacji $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{p}_s)$. W tym przypadku wzór (3.7) na element i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy $G(\mathbf{p}_s)$ upraszcza się do postaci:

$$(3.10) \quad g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_j} \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_i} r_k, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, m.$$

Poniżej zamieszczono rozwiniętą postać równania (3.6) w przypadku, gdy $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{p}_s)$:

$$(3.11) \quad \left[\begin{array}{c} \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_1} \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_1} r_k \dots \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_1} \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_j} r_k \dots \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_1} \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_m} r_k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_j} \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_1} r_k \dots \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_j} \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_j} r_k \dots \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_j} \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_m} r_k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_m} \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_1} r_k \dots \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_m} \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_j} r_k \dots \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_m} \frac{\partial h_k}{\partial \hat{p}_m} r_k \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial z_1} \dots \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial z_j} \dots \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial z_n} \\ \dots \\ \frac{\partial \hat{p}_j}{\partial z_1} \dots \frac{\partial \hat{p}_j}{\partial z_j} \dots \frac{\partial \hat{p}_j}{\partial z_n} \\ \dots \\ \frac{\partial \hat{p}_m}{\partial z_1} \dots \frac{\partial \hat{p}_m}{\partial z_j} \dots \frac{\partial \hat{p}_m}{\partial z_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \hat{p}_1} r_1 \dots \frac{\partial h_j}{\partial \hat{p}_1} r_j \dots \frac{\partial h_n}{\partial \hat{p}_1} r_n \\ \dots \\ \frac{\partial h_1}{\partial \hat{p}_j} r_1 \dots \frac{\partial h_j}{\partial \hat{p}_j} r_j \dots \frac{\partial h_n}{\partial \hat{p}_j} r_n \\ \dots \\ \frac{\partial h_1}{\partial \hat{p}_m} r_1 \dots \frac{\partial h_j}{\partial \hat{p}_m} r_j \dots \frac{\partial h_n}{\partial \hat{p}_m} r_n \end{bmatrix}.$$

Opisaną w tym rozdziale metodę liczenia wartości pochodnych $\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial z_j} |_{\mathbf{z}=\mathbf{h}(\mathbf{p}_s)}$ zastosowano do obliczeń błędów estymat parametrów modeli wybranych układów mechanicznych dla różnych kryteriów identyfikacji na podstawie przybliżonych wartości

parametrów P_5 . Omówione w rozdziale 4 wyniki obliczeń błędów estymat parametrów dają wyobrażenie o przydatności przybliżonej analizy błędów estymat przy planowaniu eksperymentu identyfikacji i formułowaniu kryterium identyfikacji.

4. Przybliżona analiza błędów identyfikacji parametrów modeli matematycznych wybranych układów mechanicznych

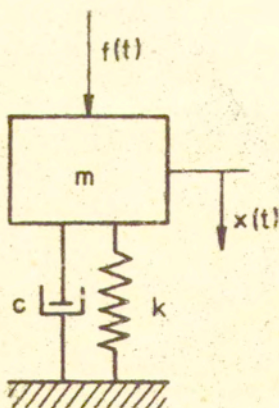
Jako pierwszy omówiony zostanie przypadek identyfikacji metodą najmniejszej sumy kwadratów wektora parametrów $p=(m,c,k)^T$ modelu oscylatora harmonicznego (rys.1) na podstawie amplitudowej charakterystyki częstotliwościowej $h(f)$ transmitancji

$$(4.1) \quad T(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)},$$

gdzie:

$X(j\omega)$ - transformata przemieszczenia $x(t)$,

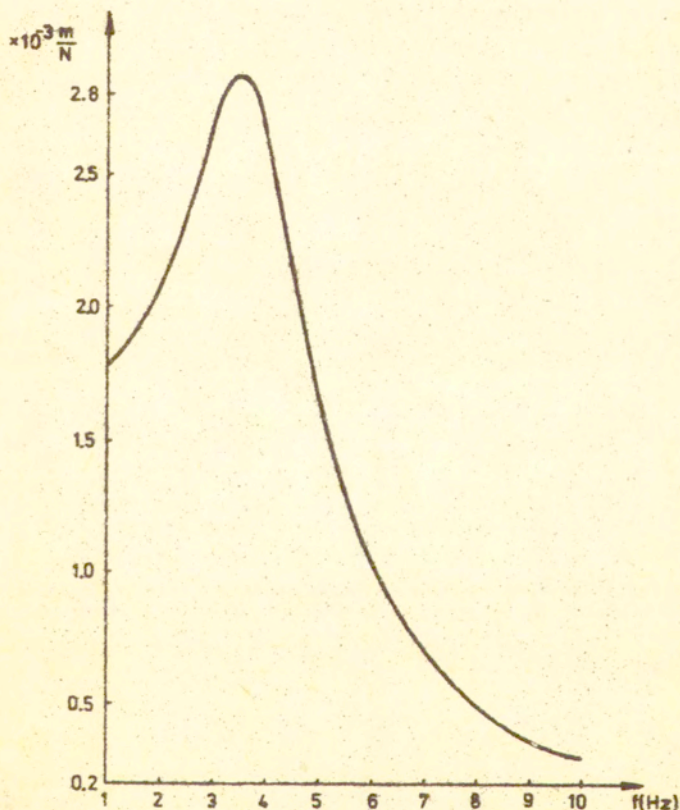
$F(j\omega)$ - transformata siły $f(t)$.



Rys. 1. Model oscylatora harmonicznego.

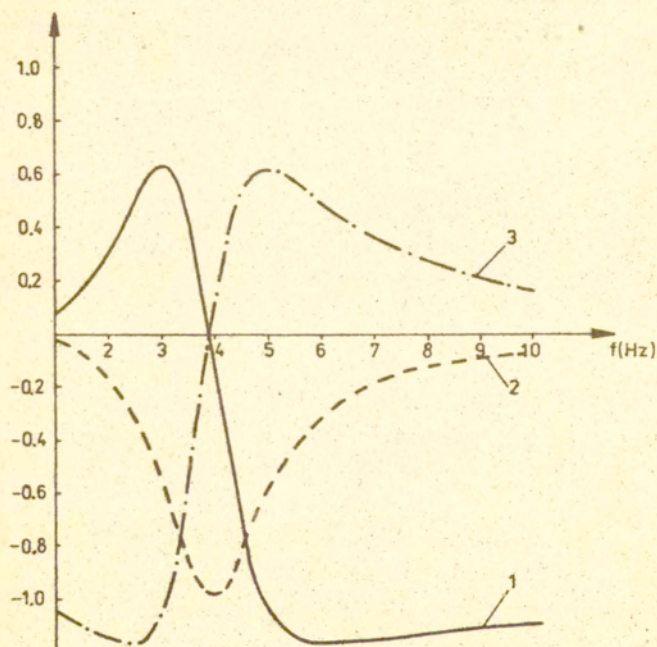
Wykresy charakterystyk częstotliwościowych na rys. 2,3 oraz obliczenia błędów estymat parametrów wykonano dla następujących oszacowanych wartości parametrów:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} m_s &= 1 \text{ kg}, \\ c_b &= 15 \text{ Ns/m}, \\ k_s &= 600 \text{ N/m}. \end{aligned}$$



Rys. 2. Amplitudowa charakterystyka częstotliwościowa transmittancji T (4.1) modelu oscylatora harmonicznego.

Przedstawione na rys. 3 wykresy funkcji wrażliwości względnej $\frac{\partial h/h}{\partial m/m} \Big|_{p_s}$, $\frac{\partial h/h}{\partial c/c} \Big|_{p_s}$, $\frac{\partial h/h}{\partial k/k} \Big|_{p_s}$ modułu transmitancji T na parametry m , c , k obrazują wpływ poszczególnych parametrów na przebieg charakterystyki amplitudowej. Z wykresów wynika, że wpływ ten jest największy w pobliżu rezonansu. Jest to charakterystyczna, znana z praktyki właściwość wielu układów dynamicznych wykorzystywana przy identyfikacji parametrów.



Rys. 3. Wykresy funkcji wrażliwości względnej modułu transmitancji T oscylatora harmonicznego na parametry: a/ masy - m , b/ tłumienia - c , c/ sztywności - k .

Badano wrażliwość względną $\frac{\partial \hat{p}_i / \hat{p}_i}{\partial z_j / z_j} \Big|_{z=h/p_s}$ ($i=1, 2, 3$),
 ($j=1, \dots, n$) estymat parametrów na pomiary z_j oraz błędy

względne maksymalne e_s i średniokwadratowe \bar{e}_s dla czterech różnych kryteriów identyfikacji o tej samej postaci:

$$(4.3) \quad K_l = \sum_{j=1}^n \frac{(h_j(\hat{\beta}) - z_j)^2}{z_j^2} \quad \text{dla} \quad l = 1, \dots, 4,$$

gdzie:

$$(4.4) \quad h_j(\hat{\beta}) = h(\hat{\beta}, f_j).$$

Kryteria $K_1 + K_4$ różnią się między sobą liczbą n i wartościami częstotliwości f_j .

Dla kryterium K_1 : $n=20$, $f_j = 0.5 + (j-1) 0.5$ (Hz).

Dla kryterium K_2 : $n=10$, $f_j = 1.0 + (j-1) 1.0$ (Hz).

Dla kryterium K_3 : $n=5$, $f_j = (1, 2, 3, 4, 10)$ (Hz).

Dla kryterium K_4 : $n=5$, $f_j = (6, 7, 8, 9, 10)$ (Hz).

W tabelicy I podano jako przykład wyznaczone za pomocą EMC wartości elementów macierzy $\tilde{U}[h(p_0)] = \left[\frac{\partial \hat{\beta}_i / \hat{\beta}_i}{\partial z_j / z_j} \right]_{z=h(p_0)}$ dla kry-

terium identyfikacji K_1 .

Tabela I

f_j	$\frac{\partial \hat{m} / \hat{m}}{\partial z_j / z_j} \Big _{z=h(p_0)} \times 10^2$	$\frac{\partial \hat{\epsilon} / \hat{\epsilon}}{\partial z_j / z_j} \Big _{z=h(p_0)} \times 10^2$	$\frac{\partial k / k}{\partial z_j / z_j} \Big _{z=h(p_0)} \times 10^2$
0.5	- 8.81	5.61	-19.89
1.0	- 7.89	3.81	-19.70
1.5	- 6.22	0.43	-18.98
2.0	- 3.26	- 5.77	-16.78
2.5	1.52	-16.21	-11.21
3.0	6.71	-28.45	- 1.07
3.5	7.47	-31.90	8.01
4.0	3.46	-24.50	9.56
4.5	- 0.89	-15.52	6.82

5.0	- 3.94	- 8.93	3.62
5.5	- 5.91	- 4.57	1.02
6.0	- 7.19	- 1.67	- 0.95
6.5	- 8.05	- 0.32	- 2.42
7.0	- 8.66	1.74	- 3.54
7.5	- 9.10	2.78	- 4.41
8.0	- 9.43	3.56	- 5.10
8.5	- 9.69	4.18	- 5.64
9.0	- 9.89	4.66	- 6.10
9.5	- 10.05	5.06	- 6.47
10.0	- 10.18	5.38	- 6.78

Wpływ błędu pomiaru modułu transmitancji na błędy estymat parametrów zależy od częstotliwości. Na podstawie tablicy I można ustalić, które pomiary są najważniejsze z punktu widzenia dokładności estymacji.

W tablicy II zestawiono wartości błędów względnych [maksymalnych i średniokwadratowych] estymat parametrów m , c , k obliczone według wzorów (1.12), (1.14) przy założeniu, że dokładność pomiaru d_j ($j=1, \dots, n$) jest stała i wynosi 1%.

Tablica II

Kryterium	Błąd względny maksymalny			Błąd względny średniokwadratowy		
	masy e_{sm}	tłumienia e_{sc}	szywności e_{sk}	masy \bar{e}_{sm}	tłumienia \bar{e}_{sc}	szywności \bar{e}_{sk}
K_1	1.38	1.75	1.58	0.898	0.912	0.647
K_2	1.38	1.72	1.55	0.475	0.802	0.602
K_3	1.42	1.40	1.35	0.334	0.559	0.446

Błędy estymacji e_s i \bar{e}_s podane w tabelicy II są stosunkowo małe, porównywalne z założonym 1-procentowym błędem pomiaru modułu transmitancji. Można stąd wnioskować, że kryteria K_1 , K_2 , K_3 zostały sformułowane poprawnie, a w szczególności, że uwzględniono w nich częstotliwości istotne z punktu widzenia identyfikacji parametrów.

W kryterium K_2 przyjęto za podstawę identyfikacji ten sam zakres częstotliwości, co w K_1 , ale liczba częstotliwości n jest dwukrotnie mniejsza. Wartości elementów macierzy $\hat{U}[h(p_s)]$ dla kryterium K_2 są większe co do wartości bezwzględnej od podanych w tabelicy I. Podobnie błędy średniokwadratowe e_s dla kryterium K_2 są większe od błędów dla K_1 (tabelica II).

Zmniejszanie się błędów estymacji przy wzroście liczby pomiarów jest własnością, jakiej można oczekiwać w odniesieniu do rzeczywistych błędów identyfikacji, szczególnie gdy błędy pomiarowe o charakterze przypadkowym dominują nad błędami systematycznymi. W takich przypadkach przy planowaniu eksperymentu i formułowaniu kryterium identyfikacji błąd średniokwadratowy daje lepsze (dokładniejsze) od błędu maksymalnego oszacowanie błędu rzeczywistego.

Dla kryterium K_4 macierz jacobianu $G(\hat{p}_s)$, która występuje w równaniu (3.6), jest macierzą osobliwą (nie w znaczeniu dosłownym, ale ze względu na skończoną dokładność obliczeń na EMQ). Osobliwość macierzy $G(\hat{p}_s)$ oznacza w praktyce, że kryterium $K_4(\hat{p})$ przyjmuje taką samą (z dokładnością maszynową) najmniejszą wartość dla różnych wartości argumentu \hat{p} . Niemożliwe jest zatem wyznaczenie jednoznacznych wartości estymat m , c , k w drodze minimalizacji kryterium K_4 .

Problem właściwego wyboru wektora obserwacji i sformułowania kryterium identyfikacji jest szczególnie ważny przy identyfikacji parametrów obiektów trudnodostępnych pod względem pomiarowym, np. w sytuacji, gdy charakterystyki obiektu najbardziej wrażliwe na wartości parametrów są niemierzalne z powodów technicznych, a pomiar innych wymaga zbudowania specjalistycznej aparatury pomiarowej.

Jako przykład omówiony zostanie przypadek identyfikacji para-

metrów m , c , k układu o 2 stopniach swobody (rys. 4) przy założeniu, że umieszczenie czujnika drgań bezpośrednio na masie m jest niemożliwe ze względów technicznych oraz, że mierzone są wyłącznie moduły następujących transmitancji:

$$(4.5) \quad T_1(j\omega) = X_1(j\omega)/F(j\omega),$$

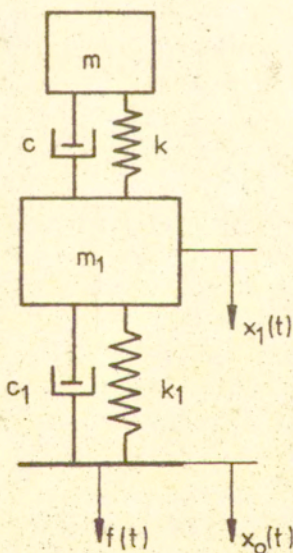
$$(4.6) \quad T_2(j\omega) = X_1(j\omega)/X_0(j\omega),$$

gdzie:

$X_1(j\omega)$ - transformata przemieszczenia $x_1(t)$ masy m_1 ,

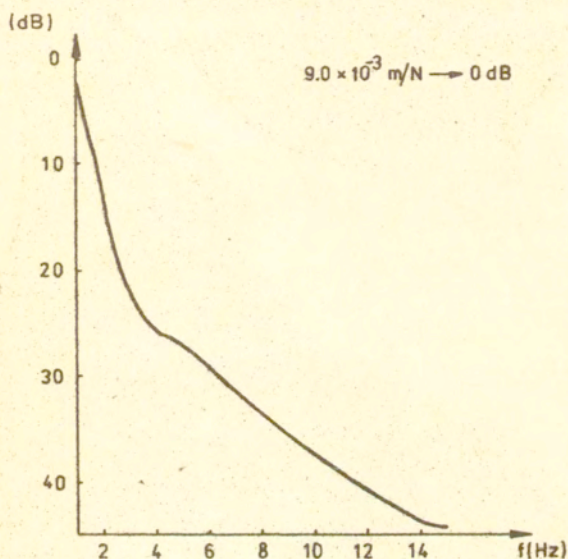
$F(j\omega)$ - transformata siły $f(t)$,

$X_0(j\omega)$ - transformata przemieszczenia (wymuszenia kinematycznego) $x_0(t)$.

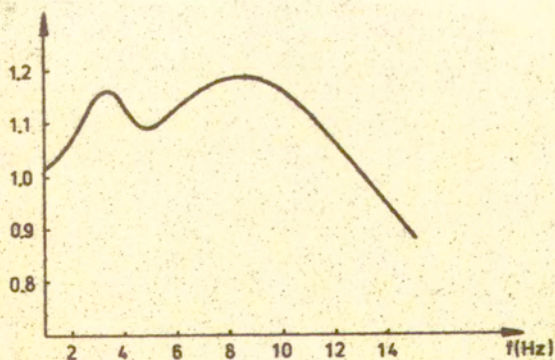


Rys. 4. Model układu dynamicznego o 2 stopniach swobody.

Na rys. 5 i rys. 6 zamieszczono wykresy amplitudowych charakterystyk częstotliwościowych transmitancji T_1 i T_2 .

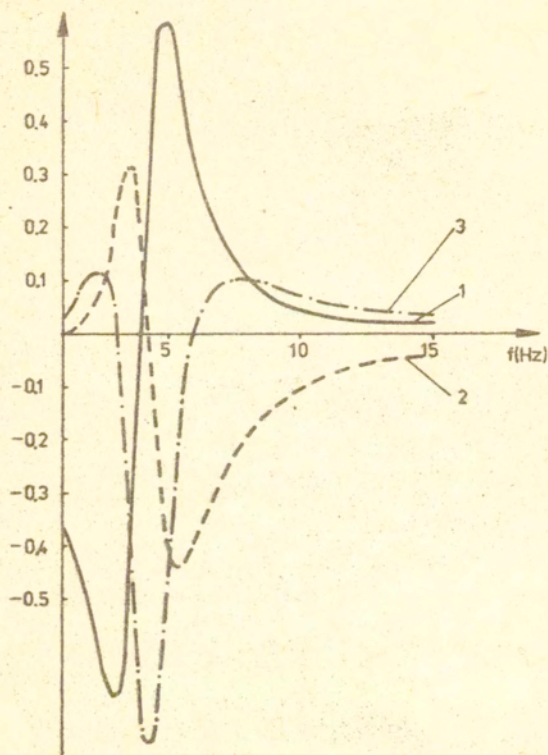


Rys. 5. Amplitudowa charakterystyka częstotliwościowa transmitancji $T_1 = X_4/F$ układu z rys. 4.

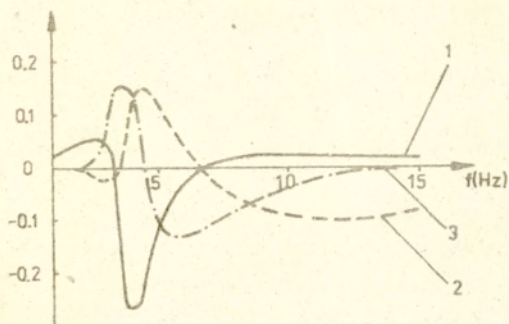


Rys. 6. Amplitudowa charakterystyka częstotliwościowa transmitancji $T_2 = X_4/X_0$ układu z rys. 4.

Rys. 7 przedstawia przebiegi funkcji wrażliwości względnej na parametry m , c , k modułu transmitancji T_1 , a rys. 8 modułu transmitancji T_2 .



Rys. 7. Wykresy funkcji wrażliwości względnej $\frac{\partial h_1/h_1}{\partial p_i/p_i} \Big|_{p_3}$ modułu h_1 transmitancji T_1 na parametr: 1-masy m , 2-tłumienia c , 3-sztywności k .



Rys. 8. Wykresy funkcji wrażliwości względnej $\frac{\partial h_2/h_2}{\partial p_i/p_i} \Big|_{p_0}$ modułu h_2 transmitancji T_2 na parametr: 1-masy m , 2-tłumienia c , 3-sztywności k .

Wykresy na rys. 5-8 wyznaczono dla oszacowanych wartości (4.2) parametrów identyfikowanych m , c , k oraz dla znanych wartości pozostałych parametrów: $m_1 = 2\text{kg}$, $c_1 = 150\text{Ns/m}$, $K_1 = 8000\text{N/m}$.

Przeprowadzono analizę błędów estymat na podstawie oszacowanych wartości parametrów dla dwóch kryteriów identyfikacji:

$$(4.7) \quad K_1 = \sum_{j=1}^{15} \frac{(h_1(\hat{p}, f_j) - z_{1j})^2}{z_{1j}^2},$$

$$(4.8) \quad K_2 = \sum_{j=1}^{15} \frac{(h_2(\hat{p}, f_j) - z_{2j})^2}{z_{2j}^2},$$

przy czym

$$f_j = 1,0 + (j-1) 1,0 \quad (\text{Hz}), \quad j = 1, \dots, 15,$$

a $h_n(\hat{p}, f_j)$ - określona przez model matematyczny zależność modułu transmitancji T_n od parametrów \hat{p} dla częstotliwości $f = f_j$,

- Z_{1j} - zmierzona wartość modułu transmitancji T_1 dla częstotliwości $f = f_j$,
- $h_2(\hat{p}, f_j)$ - określona przez model matematyczny zależność modułu transmitancji T_2 od parametrów \hat{p} dla częstotliwości $f = f_j$,
- Z_{2j} - zmierzona wartość modułu transmitancji T_2 dla częstotliwości $f = f_j$.

W tabelicy III podano wartości błędów estymat parametrów m, c, k obliczone według wzorów (1.12), (1.14) dla założonej dokładności pomiarów d_j ($j=1, \dots, n$) równej 1%.

Tabela III

Kryterium	Błąd względny maksymalny			Błąd względny średniokwadratowy		
	masy	tłumienia	sztynności	masy	tłumienia	sztynności
	e_{sm}	e_{sc}	e_{sk}	\bar{e}_{sm}	\bar{e}_{sc}	\bar{e}_{sk}
K_1	3.10	6.28	3.03	1.32	1.97	1.26
K_2	12.8	13.8	10.5	4.24	4.17	3.76

Błędy względne estymat parametrów, maksymalne i średniokwadratowe, obliczone dla kryterium K_1 są kilkakrotnie większe od błędów estymat obliczonych dla kryterium K_2 . W takim przypadku, pomimo przybliżonego charakteru analizy błędów, można jednoznacznie stwierdzić, że przy jednakowej dokładności pomiarów modułów transmitancji T_1 i T_2 kryterium K_1 jest, ze względu na dokładność estymacji, lepsze od K_2 .

Przy identyfikacji parametrów prostych układów dynamicznych, takich jak na rys. 1 i rys. 4, można sformułować poprawne kryterium identyfikacji kierując się doświadczeniem i intuicją inżynierską. W przypadku identyfikacji złożonych układów dynamicznych myślenie intuicyjne jest zawodne.

Na zakończenie rozpatrzone zostanie przypadek identyfikacji parametrów złożonego elektromechanicznego układu dynamicznego,

jakim jest przekładnia paskowa (rys. 9) z gumowym paskiem klinowym, napędzana magnetoelektrycznym silnikiem prądu stałego. Tego rodzaju przekładnie stosuje się w napędach magnetofonów kasetowych.

Na rys. 9 przedstawiono model części mechanicznej i elektrycznej układu. Przyjęto następujące oznaczenia:

- R_1 - promień bieżni koła napędzającego,
- R_2 - promień bieżni koła napędzanego,
- K - sztywność lepko-sprężystego sprzężenia między kołem napędzanym i napędzającym,
- C - współczynnik tłumienia lepko-sprężystego sprzężenia między kołem napędzanym i napędzającym,
- J_1 - masowy moment bezwładności zespołu napędzającego,
- J_2 - masowy moment bezwładności zespołu napędzanego,
- L - indukcyjność uzwojenia silnika,
- R - rezystancja uzwojenia silnika,
- E - siła elektromotoryczna uzwojenia silnika.

Analizę błędów estymacji przeprowadzono dla wyznaczonych przez autora, w drodze bezpośrednich i pośrednich pomiarów parametrów przekładni paskowej w magnetofonie kasetowym M 531 S. Jako przybliżone wartości parametrów K i C przyjęto zmierzone wartości sztywności dynamicznej i współczynnika tłumienia swobodnych (nie sprzężonych z kołami przekładni) odcinków paska. Masowe momenty bezwładności J_1 , J_2 określono na podstawie pomiarów wymiarów geometrycznych oraz masy elementów zespołu napędzanego i napędzającego.

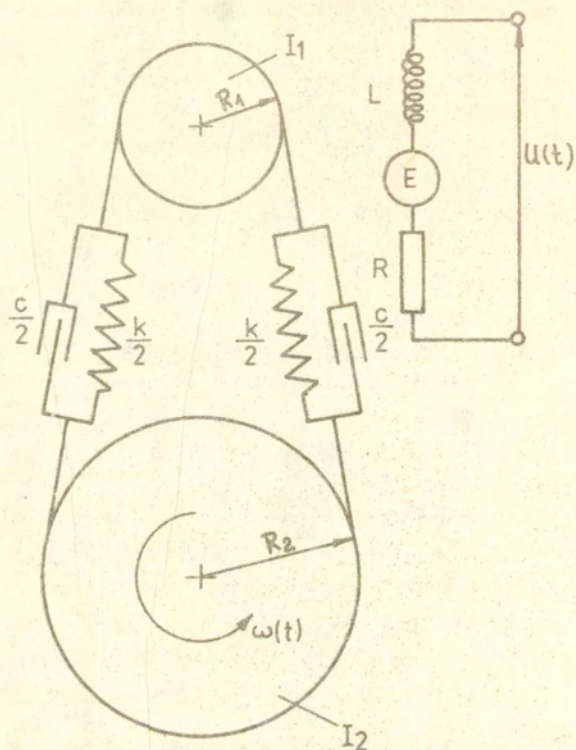
Jako wektor obserwacji Z zdecydowano przyjąć zbiór wartości amplitudowej charakterystyki częstotliwościowej transmitancji:

$$(4.9) \quad T(j\omega) = \frac{\Omega(j\omega)}{U(j\omega)},$$

gdzie:

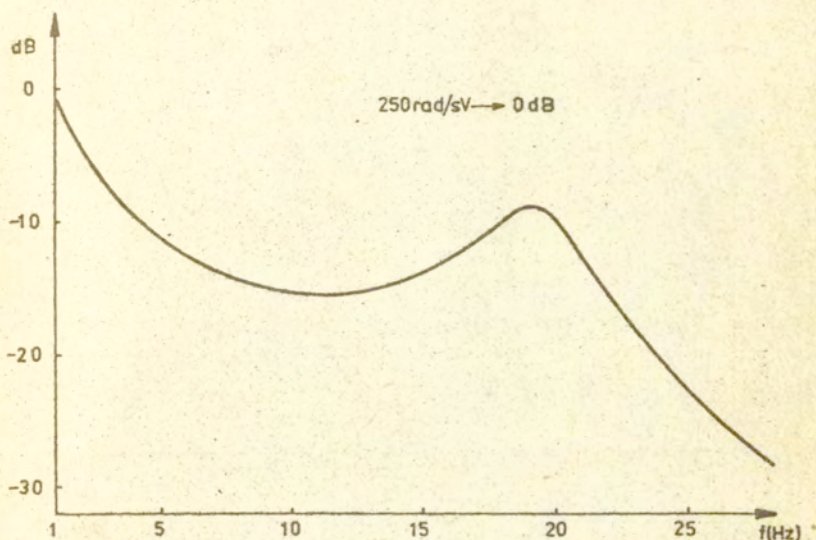
$U(j\omega)$ - transformata składowej zmiennej (zaburzenia) napięcia przyłożonego do zacisków silnika,

$\Omega(j\omega)$ - transformata składowej zmiennej prędkości kątowej ω zespołu napędzanego.



Rys. 9. Model przekładni paskowej.

Wykres amplitudowej charakterystyki częstotliwościowej transmisji T wyznaczony na podstawie modelu matematycznego przekładni dla oszacowanych wartości parametrów przedstawiono na rys. 10.

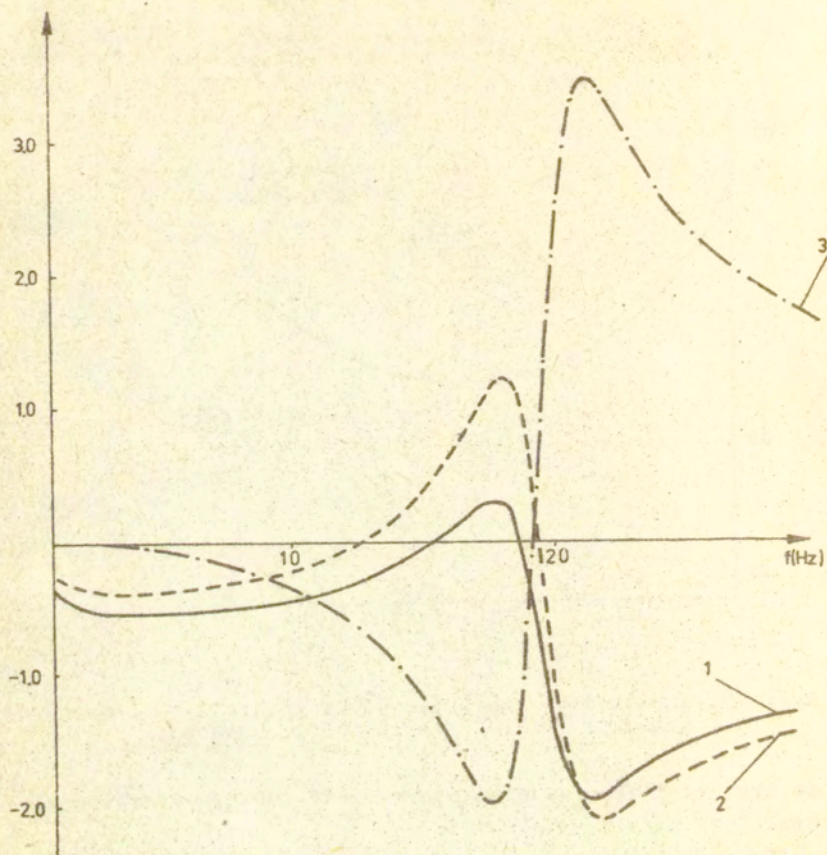


Rys. 10. Amplitudowa charakterystyka częstotliwościowa transmitancji $T = \Omega/U$ przekładni paskowej.

Na rys. 11 i 12 przedstawiono wykresy funkcji wrażliwości względnej modułu h transmitancji T na parametry J_1, J_2, K, C, E, R .

Wrażliwość amplitudowej charakterystyki częstotliwościowej transmitancji T na parametry jest stosunkowo duża, co stanowi przesłankę do przyjęcia jej za podstawę identyfikacji parametrów. Ponadto pomiar tej charakterystyki jest prosty w porównaniu z pomiarem innych charakterystyk układu, nie wymaga bowiem zastosowania specjalnych wzбудników lub czujników drgań.

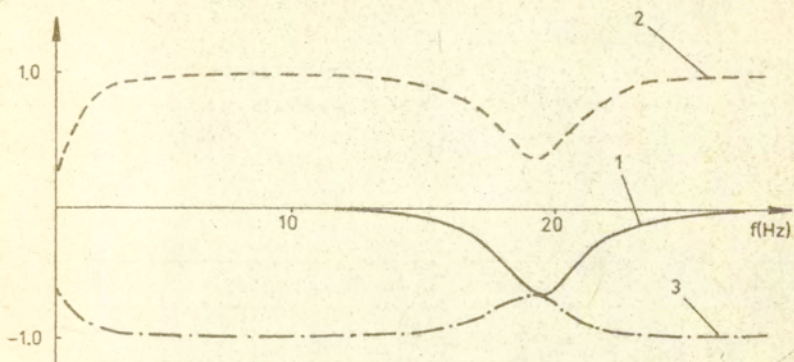
Doświadczalnie stwierdzono, że w zakresie częstotliwości do 30 Hz można, nie wychodząc poza zakres liniowości obiektu, wywołać napięciem harmonicznym takie zaburzenie, aby sygnał elektryczny reprezentujący odpowiedź układu był większy od poziomu szumu o ponad 20 dB. W związku z tym jako kryterium



Rys. 11. Wykresy funkcji wrażliwości względnej $\frac{\partial h/h}{\partial p_i/p_i} \Big|_{P_0}$ modułu h transmitancji T na parametry: 1-moment bezwładności J_4 , 2-moment bezwładności J_2 , 3-sztywność K .

identyfikacji przyjęto funkcjonal:

$$(4.10) \quad K = \sum_{j=1}^{30} \frac{(h(\hat{p}, S_j) - z_j)^2}{z_j^2},$$



Rys. 12. Wykresy funkcji wrażliwości względnej $\frac{\partial h/h}{\partial p_i/p_i} |_{p_s}$ modułu h transmitancji T na parametry: 1- tłumienie C , 2-siłę elektromotoryczną E , 3-rezystancję R .

przy czym

$$f_j = 1,0 + (j-1)1,0 \text{ (Hz)}, \quad j = 1, \dots, 30,$$

a

$h(\hat{p}, f_j)$ - moduł transmitancji modelu T dla częstotliwości $f = f_j$,

Z_j - zmierzona wartość modułu transmitancji T dla $f = f_j$.
 Badano błędy estymacji e_s, \bar{e}_s dla czterech różnych wektorów estymowanych parametrów:

$$p^I = (J_1, J_2, K, C, E, R)^T,$$

$$p^{II} = (J_1, J_2, K, C, E)^T,$$

$$p^{III} = (J_2, K, C, E)^T,$$

$$p^{IV} = (J_2, K, C)^T,$$

We wszystkich czterech przypadkach zakłada się, że wartości pozostałych parametrów modelu matematycznego są znane.

W przypadku gdy wektor estymowanych parametrów $p = p^I$, macierz jacobianu $G(p_s)$ (3.10) jest osobliwa. Oznacza to, że przy skończonej dokładności pomiarów i obliczeń wyznaczenie

jednoznacznych wartości parametrów $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, K, C, E, R$ na podstawie charakterystyki amplitudowej transmitancji T w zakresie częstotliwości 1-30 Hz jest niemożliwe.

Błędy estymat parametrów e_s, \bar{e}_s dla wektorów parametrów p^I, p^{II} i p^{IV} , obliczone według wzorów (1.12), (1.14) przy założonej stałej dokładności $d_j = 1\%$ ($j=1, \dots, 30$), podano w tablicach IV, V.

Tablica IV

Nr wektora parametrów	Błąd względny maksymalny				
	$e_{s\mathcal{J}_1}$	$e_{s\mathcal{J}_2}$	e_{sK}	e_{sC}	e_{sE}
II	95,4	123	36,0	141	5.99
III		11.5	6.67	12.0	5.61
IV		2.75	1.76	3.27	

Tablica V

Nr wektora parametrów	Błąd względny średniokwadratowy				
	$\bar{e}_{s\mathcal{J}_1}$	$\bar{e}_{s\mathcal{J}_2}$	\bar{e}_{sK}	\bar{e}_{sC}	\bar{e}_{sE}
II	19.9	26.2	7.50	27.2	2.33
III		5.14	3.08	4.61	2.19
IV		0.531	0.358	0.968	

Błędy estymacji parametrów obliczone dla wektora parametrów estymowanych p^I są bardzo duże. Można stąd wyprowadzić wniosek, że charakterystyka amplitudowa transmitancji T (4.9) w zakresie częstotliwości 1-30 Hz nie stanowi wystarczającej podstawy do równoczesnej identyfikacji 5-ciu parametrów: $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, K, C, E$. Dla wektora parametrów estymowanych p^{II} o wymiarze 4 błędy estymacji parametrów są znacznie mniejsze. Przy błędzie pomiaru modułu transmitancji rzędu 1-2% estymaty parametrów \mathcal{J}_2, K, C, E można wyznaczyć w drodze minimali-

zacji kryterium K (4.10) z wystarczającą dla praktyki dokładnością. Zmniejszenie liczby identyfikowanych parametrów do 3 (wektor p^v) powoduje dalsze znaczne zmniejszenie błędów estymacji. W przypadku identyfikacji 3-ech parametrów: J_2 , K , C kryterium (4.10) można w pełni uznać za poprawnie sformułowane, gdyż zapewnia dużą dokładność estymowanych parametrów.

Podane w pracy przykłady wskazują na przydatność analizy błędów estymat przy planowaniu eksperymentu identyfikacji i formułowaniu kryterium identyfikacji. Poprawność wniosków wprowadzonych na podstawie analizy błędów estymat dla przybliżonych wartości parametrów zależy między innymi od dokładności oszacowania rzeczywistych wartości parametrów, co stanowi wadę takiej analizy.

Dodatek A. Metoda liczenia wartości pochodnych transmitancji i modułów transmitancji względem parametrów

Opisany zostanie sposób liczenia wartości pochodnych transmitancji w przypadku, gdy model obiektu dynamicznego dany jest w postaci równania stanu i równania wyjścia:

$$(A.1) \quad \dot{\xi} = A(p)\xi + B(p)y,$$

$$(A.2) \quad x = C(p)\xi + D(p)y,$$

gdzie:

ξ - wektor współrzędnych stanu,

x - wektor wyjść obiektu,

y - wektor wejść obiektu,

p - wektor parametrów fizycznych,

A, B, C, D - macierze współczynników.

Po zastosowaniu do równań (A.1), (A.2) transformacji Laplace'a przy założeniu zerowych warunków początkowych $\xi(0) = 0$, otrzymujemy:

$$(A.3) \quad s\xi = A\xi + By$$

$$(A.4) \quad X = C\xi + Dy$$

gdzie ξ , X , Y oznaczają transformaty Laplace'a przebiegów czasowych ξ , x , y .

Jeśli j -ty element wektora Y jest równy 1, a pozostałe są równe 0, to wektor Y jest, zgodnie z definicją transmitancji, wektorem transmitancji między j -tym wejściem a wyjściami obiektu. Dobierając odpowiednio wejścia Y można z równań (A.3), (A.4) wyznaczyć wartości wszystkich transmitancji dla dowolnego $s=j\omega$.

Aby wyznaczyć pochodne transmitancji X względem parametru p_k , trzeba zróżniczkować po p_k wzory (A.3), (A.4). W wyniku różniczkowania otrzymujemy:

$$(A.5) \quad (Es - A) \frac{\partial \xi}{\partial p_k} = \frac{\partial A}{\partial p_k} \xi + \frac{\partial B}{\partial p_k} Y,$$

$$(A.6) \quad \frac{\partial X}{\partial p_k} = C \frac{\partial \xi}{\partial p_k} + \frac{\partial C}{\partial p_k} \xi + \frac{\partial D}{\partial p_k} Y.$$

Obliczenie pochodnej $\frac{\partial X}{\partial p_k}$ sprowadza się do rozwiązania liniowego równania (A.5), i podstawienia rozwiązania $\frac{\partial \xi}{\partial p_k}$ do równania (A.6).

Pochodne drugiego rzędu $\frac{\partial^2 X}{\partial p_k \partial p_l}$ oblicza się w podobny sposób. Aby wyznaczyć $\frac{\partial^2 X}{\partial p_k \partial p_l}$ trzeba zróżniczkować po p_l układ równań (A.5), (A.6) oraz ponownie rozwiązać układ równań liniowych o współczynnikach zespolonych i wykonać konieczne działania na macierzach.

Pochodną modułu h transmitancji X względem parametru p_k można wyznaczyć korzystając z zależności [2]:

$$(A.7) \quad \left. \frac{\partial h/h}{\partial p_k/p_k} \right|_{p_0} = \left. \frac{\partial h}{\partial p_k} \right|_{p_0} \frac{p_{k0}}{h(p_0)} = \operatorname{Re} \left(\left. \frac{\partial X/X}{\partial p_k/p_k} \right|_{p_0} \right),$$

gdzie:

$\operatorname{Re}(x)$ - część rzeczywista zespolonego argumentu x ,

p_0 - wektor nominalnych wartości parametrów.

Literatura

- [1] Fichtenholz G.H., Rachunek różniczkowy i całkowy, Tom I, PWN, Warszawa, 1962.
- [2] Frank P.K., Introduction to system sensitivity theory, Academic Press, New York, 1978.