

2/81
Michał Basista

DOLNA OCENA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ
OŚRODKÓW
PLASTYCZNIE ANIZOTROPOWYCH
W PŁASKIM STANIE ODKSZTAŁCENIA



P. 269

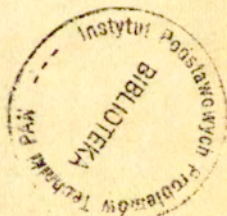
WARSZAWA 1981

ISSN 0208 - 5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 listopada 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 2/1981

57138



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 130 egz. Ark. wyd. 1,2. Ark. druk. 2.
Oddano do drukarni w lutym 1981 r.
Nr zamówienia

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

DOLNA OCENA NOŚNOSCI GRANICZNEJ OŚRODKÓW PLASTYCZNIE
ANIZOTROPOWYCH W PŁASKIM STANIE ODKSZTAŁCENIA

1. WSTĘP

Uzyskanie ścisłych rozwiązań dotyczących nośności granicznej elementów konstrukcji jest w większości przypadków bardzo trudne ze względu na nieliniowość występujących równań różniczkowych. Opracowano więc metody przybliżone pozwalające oszacować wielkość obciążenia granicznego od góry i od dołu. Jeżeli oszacowania te są dostatecznie bliskie, to z punktu widzenia praktycznych zastosowań znajomość rozwiązania dokładnego nie jest konieczna.

Metoda poszukiwania dolnej oceny obciążenia granicznego oparta jest na twierdzeniu statycznym teorii nośności granicznej. Twierdzenie to mówi, że obciążenie, dla którego można znaleźć pole naprężeń spełniające równania równowagi, statyczne warunki brzegowe i nigdzie nie przekraczające warunku plastyczności, jest mniejsze lub co najwyżej równe obciążeniu powodującemu ruch plastyczny konstrukcji. Każde takie pole określa dolną granicę obciążenia niszczącego i nosi nazwę statycznie dopuszczalnego pola naprężeń. W praktyce, określenie dolnej granicy obciążenia polega na konstruowaniu odpowiednich układów statycznie dopuszczalnych pól naprężeń. Najczęściej, rozważany ośrodek plastyczny dzieli się na kilka obszarów o nieskomplikowanej geometrii przyjmując, że w każdym z nich panuje jednorodny, prosty stan naprężenia spełniający warunki równowagi wewnętrznej, warunki brzegowe oraz warunek plastyczności. Granicą dwóch sąsiadujących obszarów jest linia nieciągłości naprężeń. Zastąpienie rzeczywistego rozkładu

naprężeń w obciążonej konstrukcji układem specjalnie dobranych statycznie dopuszczalnych, jednorodnych pól naprężeń powoduje, że różniczkowe równania równowagi przechodzą w równania algebraiczne. Zbudowany układ pól naprężeń może przy tym wykazywać niewiele podobieństwa do stanu rzeczywistego. W konkretnych zagadnieniach nośności granicznej składanie takich pól związane jest z występowaniem "stref wspólnych" powstałych w wyniku nałożenia się dwóch lub więcej pól prostych. W strefach wspólnych warunek plastyczności nie może być przekroczony, jednakże poszukiwane oszacowanie dolne będzie tym lepsze, im więcej takich obszarów będzie w stanie plastycznym.

Metoda statycznie dopuszczalnych pól naprężeń jest od dawna z powodzeniem stosowana do oceny obciążenia granicznego konstrukcji lub elementów konstrukcyjnych zbudowanych z materiałów izotropowych. Celem niniejszej pracy jest zastosowanie tej metody do oszacowania nośności granicznej ośrodka plastycznego z pierwotną anizotropią w warunkach płaskiego stanu odkształcenia.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

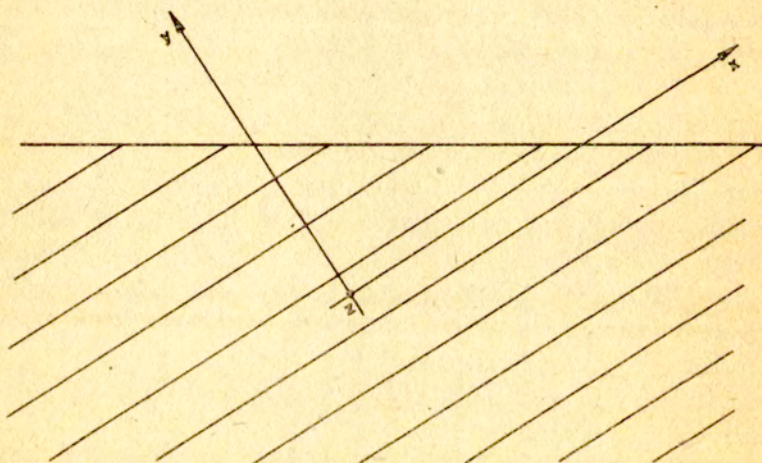
Anizotropię pierwotną, będącą wynikiem budowy molekularnej materiału lub efektem działań projektowo-konstrukcyjnych /zbrojenie, żebra/, należy rozumieć jako zależność własności wytrzymałościowych od kierunku i uważać za "wrodzoną" cechę materiału, w odróżnieniu od anizotropii wywołanej samym procesem odkształcenia plastycznego. Granica plastyczności materiału anizotropowego, np. w prostych stanach naprężenia nie będzie zatem wielkością skalarną jak w przypadku izotropii, lecz funkcją kierunku. Kierunkowość własności wytrzymałościowych takiego materiału jest ujęta przez warunek plastyczności. Istnieją różne warunki plastyczności dla ośrodków anizotropowych. Niektóre z nich są uogólnieniami kryteriów Hubera-Misesa [4] lub Treski [6] zakładających, że osiągnięcie

stanu plastycznego jest związane z pewną funkcją od podstawowych niezmienników tensora naprężenia. W innych wprowadza się pojęcie tensora anizotropii plastycznej A_{ijkl} , który wraz z tensorem naprężenia prowadzi do niezmienniczej postaci warunku plastyczności w sensie transformacji układu współrzędnych [8]. Związki między tensorami naprężenia, prędkości odkształcenia oraz anizotropii plastycznej można traktować jako funkcje tensorowe od argumentów tensorowych. Takie podejście pozwala uzyskać zarówno ogólną postać warunku plastyczności jak i prawa fizycznego [2].

Jak wspomniano, anizotropia materiału zmienia rozkład naprężeń w rozważanej konstrukcji w porównaniu z przypadkiem izotropowym. Wydaje się, że efektem tego będą, inne niż w izotropii, geometryczne kształty konstruowanych układów statycznie dopuszczalnych pól naprężeń. Należy także oczekiwać wpływu anizotropii na własności i geometrię linii nieciągłości naprężeń, które są istotnym elementem analizowanej metody. Chcąc stosować metodę statyczną do oceny obciążenia granicznego ośrodków z pierwotną anizotropią trzeba sprawdzić te przypuszczenia oraz sformułować zasady i zależności, jakie będą obowiązywać w tym przypadku przy konstruowaniu pól statycznie dopuszczalnych. Analiza zostanie przeprowadzona dla materiału ortotropowego w płaskim stanie odkształcenia i szczególnego warunku plastyczności. Funkcjonowanie metody będzie pokazane na przykładach.

3. WARUNEK PLASTYCZNOŚCI

Rozważmy sztywnoplastyczny ośrodek ortotropowy bez wzmocnienia. Układ głównych kierunków ortotropii x, y, z , przedstawiony na rysunku 1, będzie kartezjańskim układem odniesienia. Najprostszym warunkiem plastyczności dla tego ośrodka jest warunek redukujący się do kryterium Hubera-Misesa w chwili, gdy materiał staje się izotropowy



Rys. 1

$$(3.1) \quad 2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z + \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1$$

F, G, H, L, M, N to parametry charakteryzujące anizotropię. Warunek ten został podany przez Hilla [4] dla materiału, którego uplastycznienie nie zależy od ciśnienia hydrostatycznego. Obrazem geometrycznym (3.1) w przestrzeni naprężeń głównych jest nieskończenie długi walec eliptyczny, o ile stałe anizotropii spełniają warunek wypukłości powierzchni plastyczności $GH + FG + HF > 0$.

Rozważmy płaski stan odkształcenia w płaszczyźnie x, y przyjmując stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia. Wprowadzając dla wygody obliczeń współczynnik "c" określony wzorem, por. Hill, [4]

$$(3.2) \quad c = 1 - \frac{N(F+G)}{2(FG+GH+HF)} \quad (-\infty < c < 1) .$$

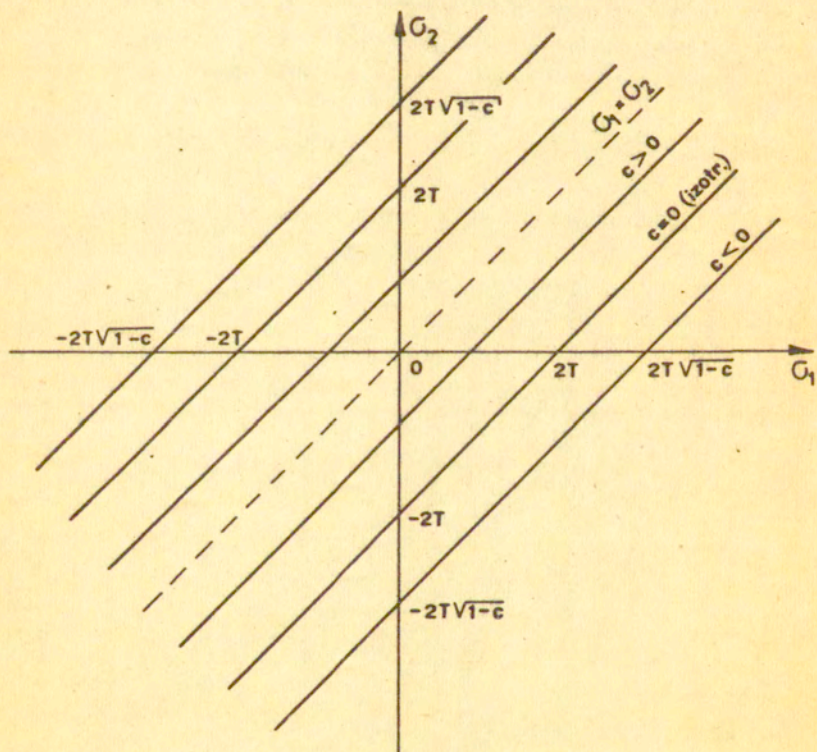
warunkowi plastyczności można nadać postać

$$(3.3) \quad \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4(1-c)} + \tau_{xy}^2 = T^2 . .$$

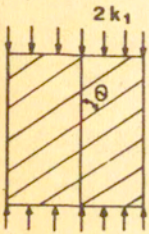
gdzie T oznacza granicę plastyczności przy czystym ścinaniu w płaszczyźnie x, y.

Interpretację geometryczną tego warunku na płaszczyźnie naprężeń głównych przedstawia rysunek 2. Jest to potwierdzenie znanego faktu, że każdy warunek plastyczności niezależny od ciśnienia średniego daje na płaszczyźnie naprężeń głównych dwie równoległe proste.

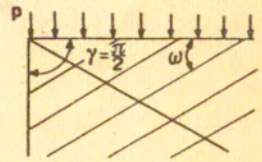
W rozdziale poprzednim zostało powiedziane, że granica plastyczności w przypadku materiałów anizotropowych zależy od kierunku. Weźmy pod uwagę stan jednoosiowego naprężenia pokazany na rysunku 3a. Zależność granicy plastyczności $2k_1$ od kąta orientacji materiału θ przedstawia równanie (3.4)



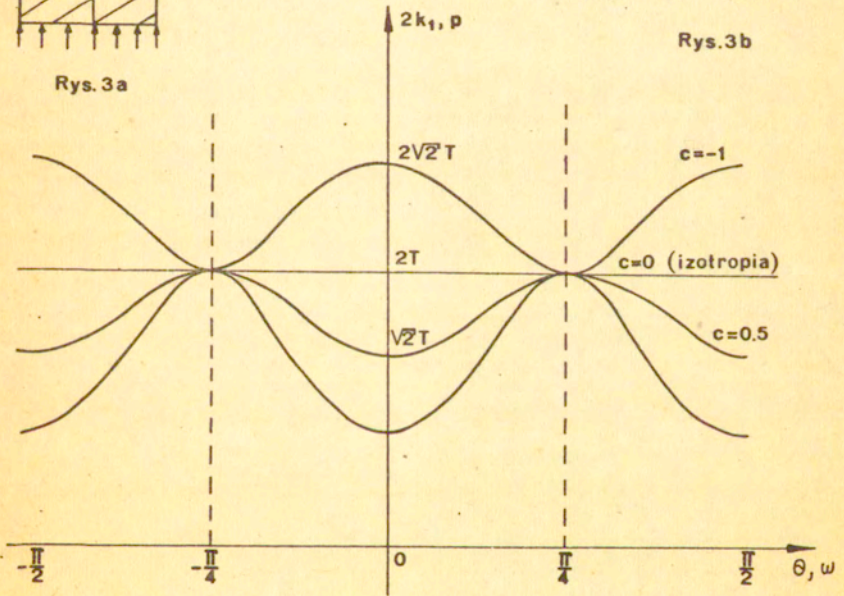
Rys. 2



Rys. 3a



Rys. 3b



Rys. 3

oraz rysunek 3.

$$(3.4) \quad 2k_1 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2\theta}}$$

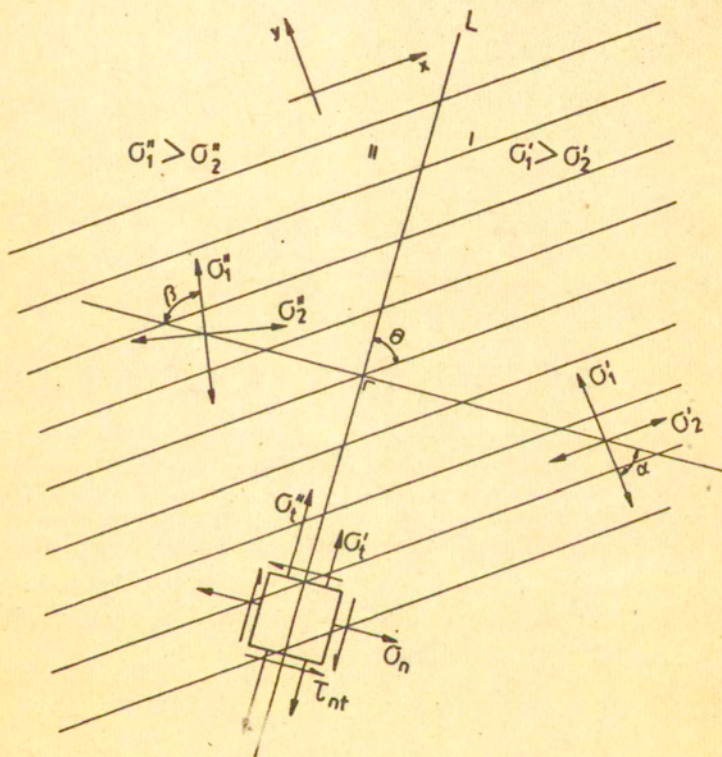
4. LINIE NIECIĄGŁOŚCI NAPRĘŻEŃ W PŁASKIM STANIE ODKSZTAŁCENIA

Zbadamy teraz, w jaki sposób ortotropia materiału wpływa na własności - występujących w metodzie statycznej - linii nieciągłości naprężeń. Niech prosta L przedstawiona na rysunku 4 będzie linią nieciągłości naprężeń rozgraniczającą jednorodne pola I i II. Załóżmy, że po obu stronach tej linii materiał ortotropowy uległ uplastycznieniu. Stany naprężenia w obszarach I i II można odwzorować przy pomocy konstrukcji Mohra /rys.5/. Naprężenia σ_n i τ_{nt} odwzorowuje punkt M przecięcia obu kół. Różne długości promieni tych kół są skutkiem ortotropii materiału. Naprężenie σ_t odwzorowują odpowiednio punkty N i P . Ciągłość składowych σ_n i τ_{nt} można wyrazić za pomocą równań:

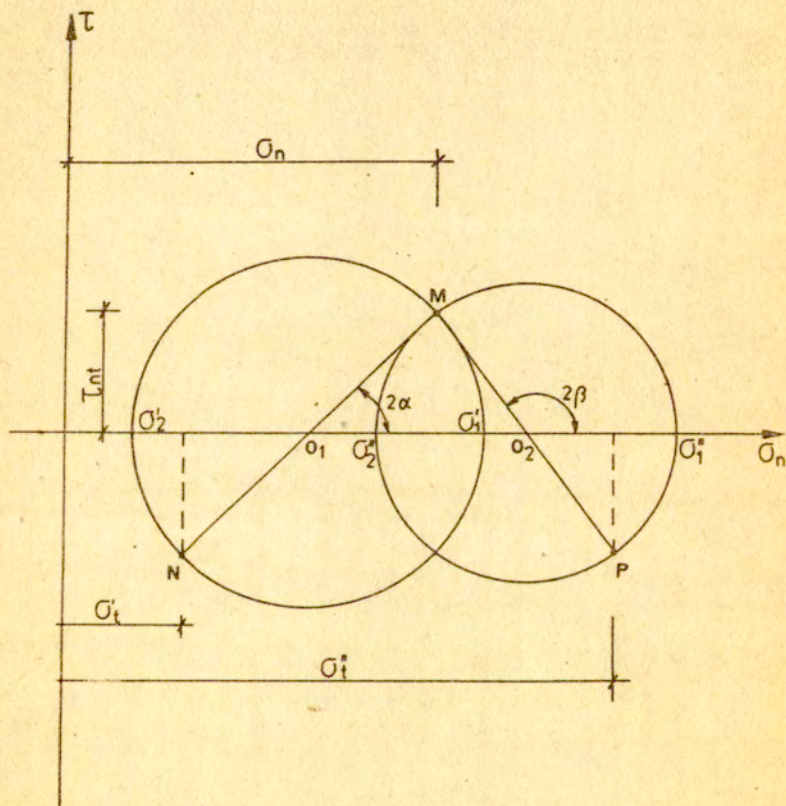
$$(4.1) \quad [\sigma_n] = 0 \rightarrow (\sigma_1' + \sigma_2') + (\sigma_1' - \sigma_2') \cos 2\alpha = (\sigma_1'' + \sigma_2'') + (\sigma_1'' - \sigma_2'') \cos 2\beta$$

$$(4.2) \quad [\tau_{nt}] = 0 \rightarrow (\sigma_1' - \sigma_2') \sin 2\alpha = (\sigma_1'' - \sigma_2'') \sin 2\beta$$

Transformując naprężenia główne σ_1' i σ_2' do układu uprzywilejowanych kierunków ortotropii x , y i podstawiając otrzymane wzory do warunku plastyczności (3.3) uzyskujemy zależność $\sigma_1' - \sigma_2' = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2(\theta - \alpha)}}$.



Rys. 4



Rys.5

Po dokonaniu analogicznych przekształceń dla obszaru II warunków ciągłości τ_{nt} (4.2) przybiera postać

$$(4.3) \quad \sin^2 2\alpha [1 - c \cdot \sin^2 2(\theta - \beta)] = \sin^2 2\beta [1 - c \cdot \sin^2 2(\theta - \alpha)]$$

Jest widoczne, że linia nieciągłości naprężeń nie jest już dwusieczną kątów między kierunkami naprężeń σ'_1 i σ''_2 albo σ''_1 i σ'_2 jak to miało miejsce w przypadku izotropii. Jej położenie zależy od kierunków naprężeń głównych α i β , głównych kierunków ortotropii θ oraz od intensywności ortotropii c . Wykorzystując warunek ciągłości (4.1), równanie (4.3) oraz konstrukcję Mohra, można jeszcze ustalić wielkość skoku naprężenia σ_t , jaką dopuszcza przyjęty warunek plastyczności

$$(4.4) \quad [\sigma_t] = 2T\sqrt{1-c} \left(\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{1-c \cdot \sin^2 2(\theta - \alpha)}} - \frac{\cos 2\beta}{\sqrt{1-c \cdot \sin^2 2(\theta - \beta)}} \right)$$

Przyjmując w wyprowadzonych wzorach $c=0$ otrzymujemy zależności słuszne dla ośrodka izotropowego, [5], [7]:

$$(4.3a) \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$(4.4a) \quad \sigma_t = 4T \cos 2\alpha$$

5. SKŁADANIE PROSTYCH PÓL NAPRĘŻEŃ

Metoda szacowania obciążenia granicznego od dołu polega na konstruowaniu układów statycznie dopuszczalnych pól naprężeń poprzez składanie prostych stanów naprężenia. W celu zilustrowania zasad budowania takich układów w ośrodkach anizotropowych weźmy pod uwagę dwa jednoosiowe pola I i II przed-

stawione na rysunku 6. Warunki brzegowe na swobodnych krawędziach AC i BD oraz na brzegu AB, poddanemu równomiernemu ciśnieniu, pozwalają określić kierunki naprężeń głównych. Zwykle zakłada się, że w polach I i II materiał osiągnął stan plastyczny. Na podstawie (3.4), naprężenia panujące w tych obszarach wynoszą odpowiednio

$$(5.1a) \quad 2k_1 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2\theta_1}}$$

$$(5.1b) \quad 2k_2 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2\theta_2}}$$

Aby uzyskać lepsze oszacowanie obciążenia granicznego przyjmuje się dalej, że uplastyczniał się także obszar wspólny III. Opisuje to następująca zależność

$$(5.2) \quad p-q = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2\omega}}$$

Obszar III powstał z nałożenia pól I i II i musi spełniać wynikające z tego faktu warunki równowagi wewnętrznej ujęte tu jednym równaniem

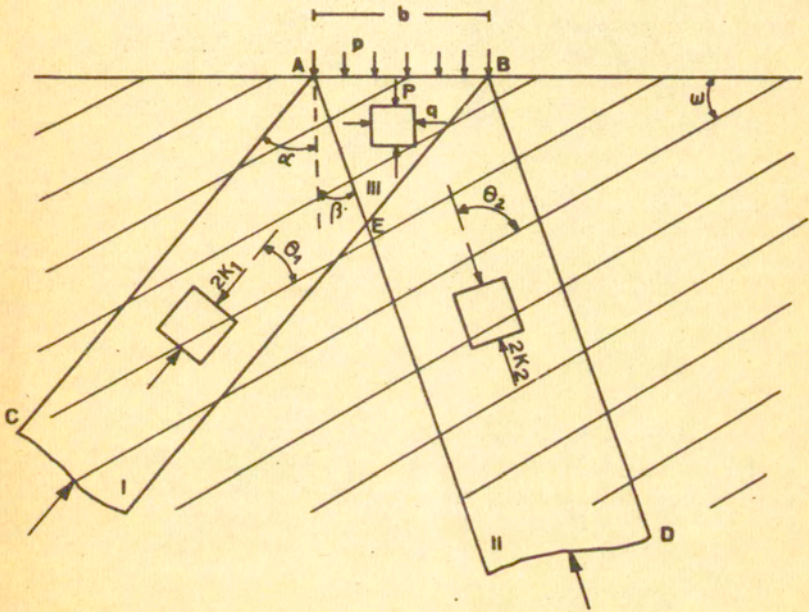
$$(5.3) \quad p+q = 2k_1 + 2k_2$$

Cały układ pól z rysunku 6 powinien znajdować się w równowadze, a zatem spełniać poniższe równania:

$$(5.4a) \quad p \cdot b = 2k_1 \cdot b \cos^2 \alpha + 2k_2 \cdot b \cos^2 \beta$$

$$(5.4b) \quad 2k_1 \cdot b \cos \alpha \sin \alpha - 2k_2 \cdot b \cos \beta \sin \beta = 0$$

Geometria układu dostarcza kolejnych zależności



Rys. 6

$$(5.5a) \theta_1 = \frac{\pi}{2} - (\omega + \alpha) \quad ,$$

$$(5.5b) \theta_2 = \frac{\pi}{2} - (\omega - \beta) \quad .$$

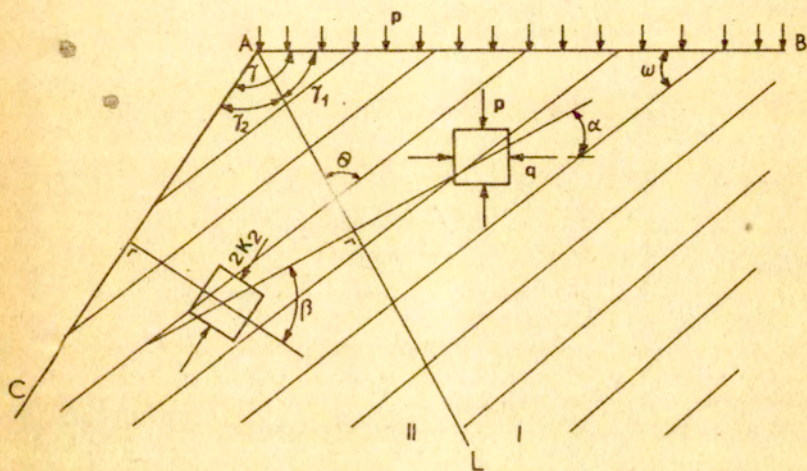
Należy pamiętać, aby zachowana była równowaga na liniach nieciągłości. W rozważanym przykładzie nie ma jednak potrzeby sprawdzania warunków ciągłości na liniach AE i BE, gdyż są one spełnione automatycznie.

W rezultacie, oszacowanie ciśnienia p w tym zadaniu sprowadza się do rozwiązania ośmiu równań algebraicznych (5.1a) - (5.5b) z ośmioma niewiadomymi: $p, q, 2k_1, 2k_2, \alpha, \beta, \theta_1, \theta_2; \omega$ i c - to parametry charakteryzujące materiał ortotropowy. W bardziej skomplikowanych układach, w których liczba pól naprężeń jest większa trzeba sprawdzić, czy w żadnym z obszarów wspólnych nie został naruszony warunek plastyczności. Jeżeli został - naprężenia w polach prostych muszą być obniżone do poziomu gwarantującego nieprzekroczenie warunku plastyczności w strefie wspólnej, powstałej z superpozycji pól prostych.

6. NOŚNOŚĆ GRANICZNA KLINA

W tym i następnym rozdziale zastosujemy metodę statyczną do oszacowania obciążenia granicznego w dwóch zagadnieniach płaskich.

Rozważmy klin z materiału ortotropowego obciążony wzdłuż jednego boku równomiernym ciśnieniem o intensywności p /rys.7/. Zadanie polega na wyznaczeniu obciążenia granicznego jako funkcji kąta nachylenia uwarstwień ω oraz intensywności ortotropii c . W tym celu posłużymy się statycznie dopuszczalnym polem naprężeń przedzielonym prostą nieciągłości L . Po obu stronach tej prostej materiał uplastycznia się według warunku (3.3). Kierunki naprężeń głównych w obszarach I i II są narzucone przez warunki brzegowe. Komplet równań, opisujący zagadnienie klina w sensie metody statycznej, jest następujący:



Rys.7

$$(1) \quad p - q = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2\omega}} ,$$

$$(2) \quad 2k_2 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2(\omega + \gamma)}} ,$$

(6.1)

$$(3) \quad p = 2k_2 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos(\beta - \alpha) ,$$

$$(4) \quad \sin^2 2\alpha [1 - c \cdot \sin^2 2(\omega + \gamma)] = \sin^2 2\beta [1 - c \cdot \sin^2 2\omega] .$$

Równania (1) i (2) wyrażają uplastycznienie obszarów I i II. Zależności (3) i (4) wynikają z równowagi na liniach nieciągłości /por. (4.1) i (4.3)/. Poszukiwana intensywność obciążenia granicznego wynosi

$$(6.2) \quad p = p(\omega, c) = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2(\omega + \gamma)}} \sin \gamma \left(\sin \gamma - \cos \gamma \sqrt{\frac{A(\omega, c) - B(\omega, c)}{A(\omega, c) + B(\omega, c)}} \right)$$

gdzie:

$$A(\omega, c) = \sqrt{2 + 2 \cos 2\gamma \sqrt{[1 - c \cdot \sin^2 2(\omega + \gamma)](1 - c \cdot \sin^2 2\omega)} - c(\sin^2 2\omega + \sin^2 2(\omega + \gamma))} ,$$

$$B(\omega, c) = \sqrt{1 - c \cdot \sin^2 2(\omega + \gamma)} + \sqrt{1 - c \cdot \sin^2 2\omega} \cos 2\gamma .$$

Wielkość c potraktujemy w tym równaniu jako parametr różnicujący rodzinę krzywych $p(\omega)$ przy zadanym kącie rozwarcia klina γ . Dla $\gamma = \frac{\pi}{2}$ /rys.3b/ wzór (6.2) przechodzi w proste wyrażenie $p = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2\omega}}$ / por. 3.4 /. Krzywe $p(\omega, \gamma = \frac{\pi}{2})$

przedstawia rysunek 3. Widoczne jest, że p ma takie same wartości dla $\pm \omega$ i $\pm(\frac{\pi}{2} - \omega)$. Jeśli c jest dodatnie /mniejsze od $1/2$, p osiąga wartość maksymalną $2T$ przy nachyleniu $\omega = \frac{\pi}{4}$, a wartość minimalną równą $2T\sqrt{1-c}$ dla $\omega = 0$ lub $\frac{\pi}{2}$. Jeżeli c jest ujemne, to maksimum wynoszące $2T\sqrt{1-c}$ występuje przy nachyleniu $\omega = 0$ lub $\frac{\pi}{2}$; minimum natomiast - przy $\omega = \frac{\pi}{4}$ i wynosi $2T$, [4]. Rozwiązując (6.1.4) ze względu na $\gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, przy wykorzystaniu związków geometrycznych /rys. 7/, otrzymujemy zależność, która określa położenie linii nieciągłości w zagadnieniu klina ortotropowego

$$(6.3) \quad \gamma_1 = \frac{1}{2} \arccos \frac{B(\omega, c)}{A(\omega, c)} .$$

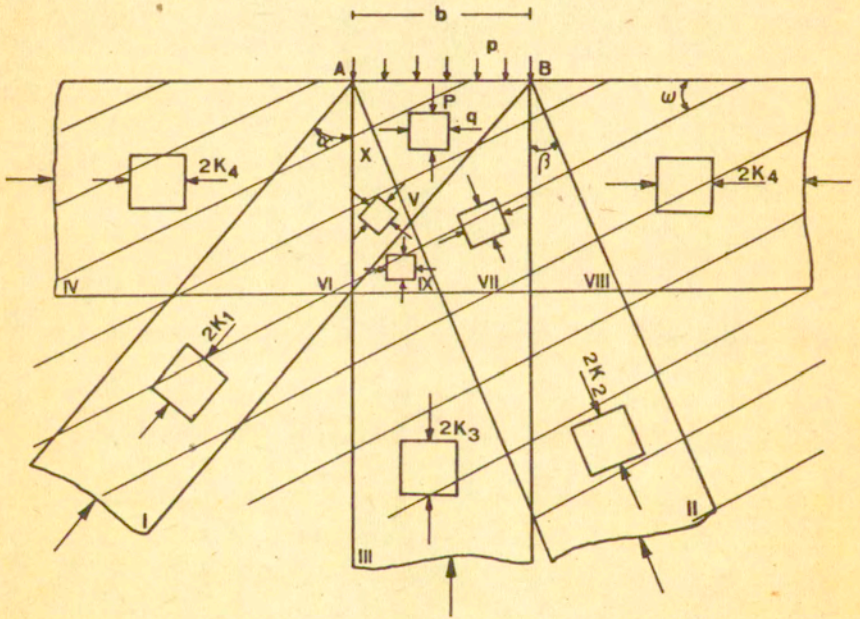
W przypadku, gdy $c = 0$ /izotropia/, to według wzoru (6.2) obciążenie graniczne wynosi $2T(1 - \cos \gamma)$. Jest to rozwiązanie znane z teorii nośności granicznej ciał izotropowych [3], [7].

7. WCISKANIE STEMPŁA W PÓŁPRZESTRZEŃ

Nośność graniczną ortotropowej półprzestrzeni, w którą wciskany jest bez tarcia sztywny stempel można oszacować konstruując układ statycznie dopuszczalnych, nieciągłych pól naprężeń przedstawiony na rysunku 8. Określona w analogiczny sposób nośność graniczna półprzestrzeni izotropowej wynosi $5k$ i jest wystarczająco bliska rozwiązaniu zupełnemu $p = k(2 + \pi)$ podanemu przez Prandtla [3]. Rozważmy jednoosiowe, jednorodne pola naprężeń I, II, III, IV w których osiągnięty został stan plastyczny zgodnie z warunkiem (3.3). Odpowiadające im naprężenia ściskające wynoszą:

$$2k_1 = 2T\sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2(\alpha + \omega)}}, \quad 2k_2 = 2T\sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2(\omega - \beta)}}, \quad 2k_3 = 2k_4 =$$

$$= 2T\sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2\omega}}; \quad \text{równość } 2k_3 \text{ i } 2k_4 \text{ wynika z przyjętego wa-}$$



Rys. 8

runku plastyczności. Równania równowagi, statyczne warunki brzegowe oraz warunek plastyczności są w tych polach spełnione z założenia. Opierając się na zasadach podanych w rozdziale 5 budujemy układ równań, który pozwoli-podobnie jak w zagadnieniu klina-wyznaczyć obciążenie graniczne w zależności od nachylenia uwarstwień oraz intensywności ortotropii

$$(1) \quad p \cdot b = 2k_1 \cdot \cos^2 \alpha \cdot b + 2k_2 \cos^2 \beta \cdot b + 2k_3 \cdot b,$$

$$(2) \quad 2k_1 \cos \alpha \sin \alpha \cdot b - 2k_2 \sin \beta \cos \beta \cdot b = 0,$$

(7.1)

$$(3) \quad 2k_1 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2(\alpha+\omega)}}$$

$$(4) \quad 2k_2 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2(\omega-\beta)}}$$

$$(5) \quad 2k_3 = 2k_4 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2\omega}}$$

$$(6) \quad p - q = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \cdot \sin^2 2\omega}}$$

$$(7) \quad p + q = 2k_1 + 2k_2 + 4k_3$$

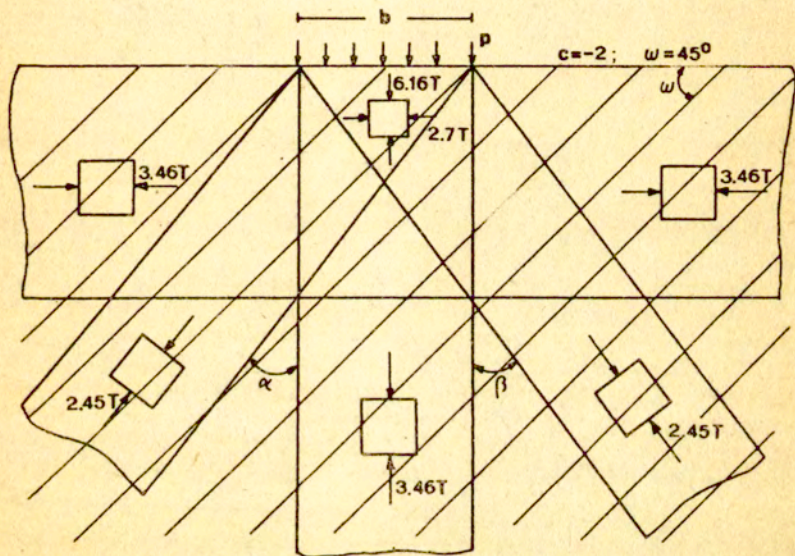
(1) i (2) to równania równowagi, (3), (4), (5), (6) opisują uplastycznienie obszarów I, II, III, IV oraz obszaru wspólnego V. Równanie (7) wyraża równowagę wewnętrzną pola V, które powstało z nałożenia jednoosiowych stanów I, II, III, IV.

W obszarze IX występuje hydrostatyczny stan naprężenia, gdyż w polach III i IV działają wzajemnie prostopadłe naprężenia ściskające o tej samej wartości $2k_3$. Stan hydrostatyczny nie ma wpływu na kierunki naprężeń głównych w obszarach VII oraz

X - w VII będą one takie same jak w II, zaś w X takie jak w I. Kierunki główne w polu V wynikają wprost z warunków brzegowych na krawędzi AB. W przypadku materiału izotropowego rozwiązanie układu (7.1) prowadzi do wyniku $\alpha = \beta = 30^\circ$, $p = 5T = 5k$, $q = 3k$; układ pól naprężeń jest wtedy osiowo symetryczny. Dla rozważanego ośrodka ortotropowego przykładowe rozwiązania przedstawiają rysunki 9, 10, 11. Widoczne jest, że ortotropia materiału zmienia geometrię statycznie dopuszczalnych pól naprężeń występujących w tym zadaniu, gdyż położenie pól I i II jest niesymetryczne. Jedynie w przypadku, gdy $\omega = 0, \frac{\pi}{4}$ lub $\frac{\pi}{2}$ otrzymujemy - podobnie jak w izotropii - układ symetryczny, lecz wynika to tylko z założonego warunku plastyczności. Po obliczeniu obciążenia granicznego należy jeszcze określić naprężenia w polach VII, VIII, VI, X i sprawdzić, czy nie został w nich przekroczony warunek plastyczności /por. rys.11/. Rysunek 12 pokazuje, w jaki sposób stosunek $\frac{\alpha}{\beta}$ nachyleń ukośnych pól naprężeń I i II zależy od kąta orientacji materiału ω . Rysunek 13 natomiast, obrazuje relację między dolną granicą obciążenia niszczącego p i kątem orientacji wewnętrznej przy różnych wartościach parametru c . Prosta $\omega = \frac{\pi}{4}$ jest osią symetrii - p ma takie same wartości dla ω i $\frac{\pi}{2} - \omega$. Dla $c = -2$ oznakowano linią przerywaną krzywą ilustrującą rozwiązanie dokładne uzyskane przez Hilla [4] metodą charakterystyk. Różnice między rozwiązaniem dokładnym, a otrzymanym oszacowaniem dolnym są niewielkie i wynoszą około 0,2 T wobec 0,14T dla ośrodka izotropowego.

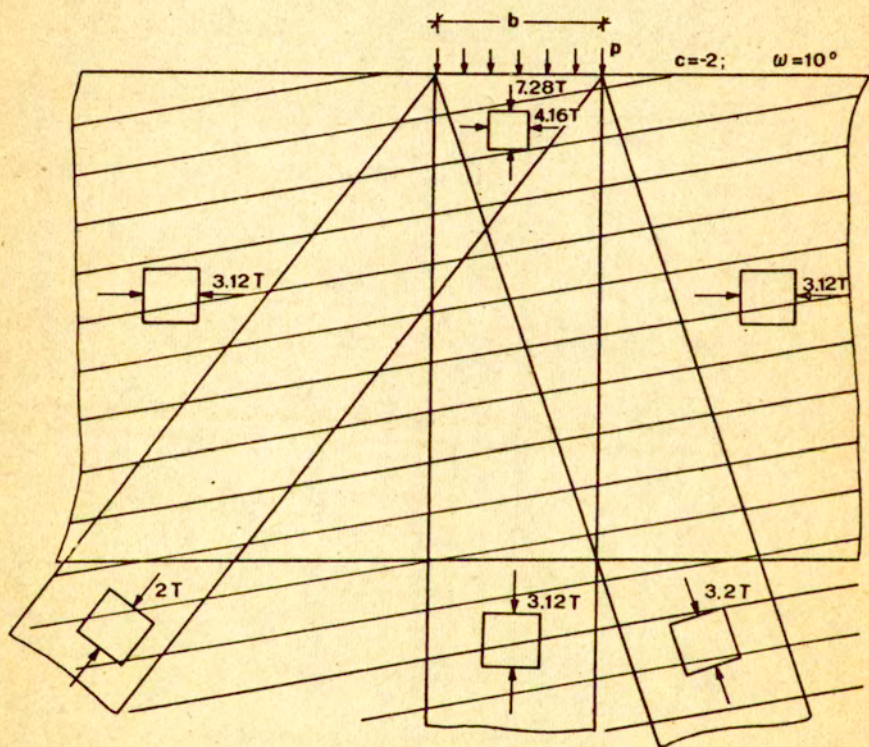
8. UWAGI KOŃCOWE

Analizowana metoda statyczna, znana z teorii ośrodków izotropowych, może być także stosowana, gdy materiał jest anizotropowy. Anizotropia pierwotna, która odzwierciedla się w warunku plastyczności wpływa na wartość granicy plastyczności w zależności od kierunku, zmienia rozkład naprężeń w zadanej konstrukcji, wywołuje inne niż w izotropii - włas-



$\alpha = \beta = 35.8^\circ$; $p = 6.16T$; $q = 2.7T$

Rys. 9

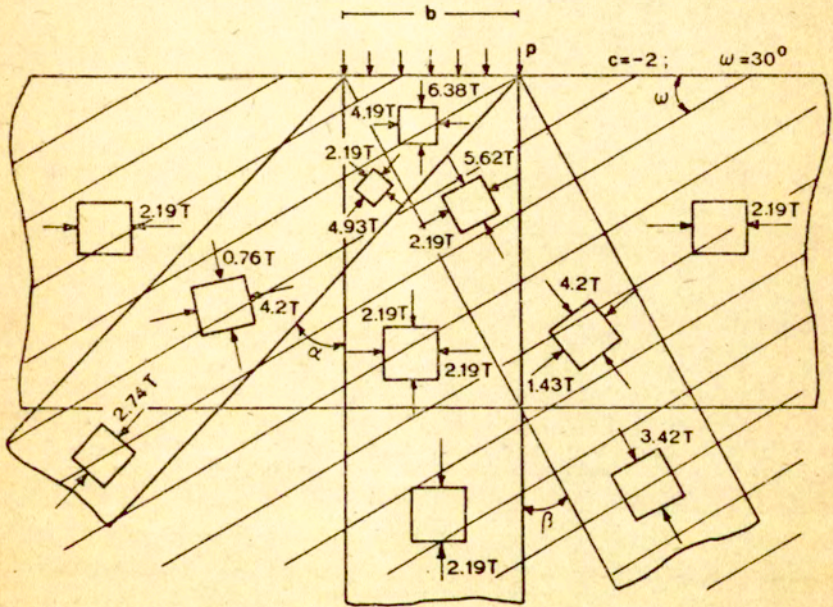


$\alpha=37^\circ$;

$\beta=18.5^\circ$;

$p=7.28T$

Rys. 10

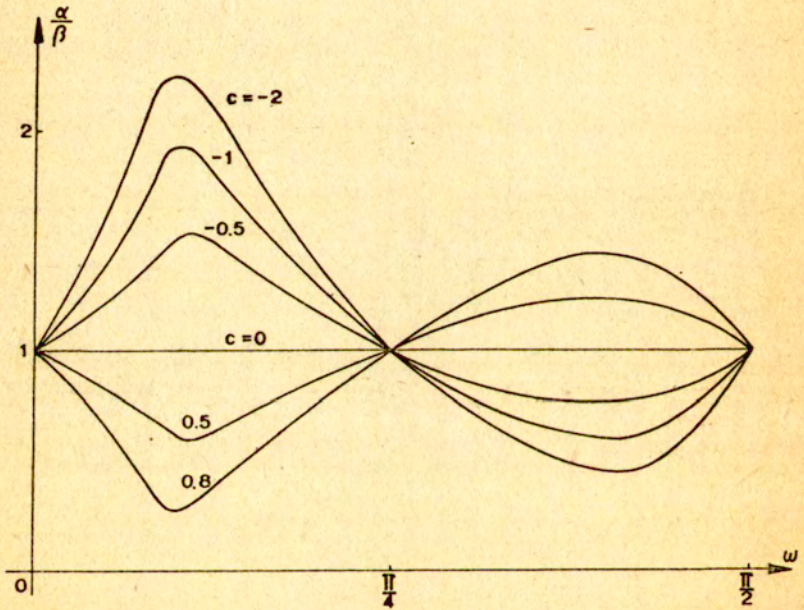


$\alpha = 43.4^\circ$

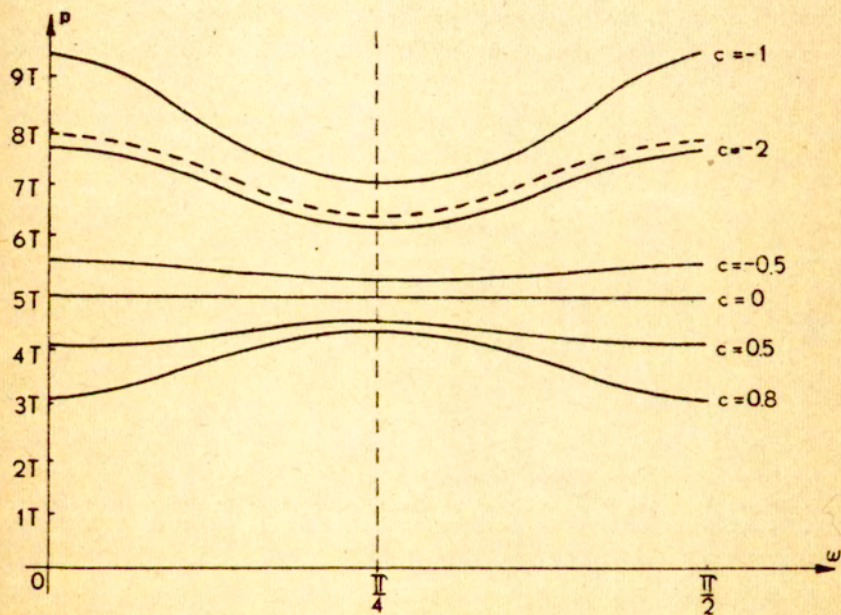
$\beta = 26.6^\circ$

$p = 6.38T$

Rys.11



Rys.12



Rys. 13

ności linii nieciągłości naprężeń. W rezultacie, zmienia się geometria układów statycznie dopuszczalnych pól naprężeń w porównaniu z przypadkiem izotropowym. Zasady dotyczące konstruowania tych układów przedstawiono w rozdziałach 4 i 5. W konkretnych zagadnieniach inżynierskich wpływ anizotropii powoduje trudności rachunkowe przy rozwiązywaniu równań, jednakże są to równania algebraiczne i zbudowanie odpowiedniego programu numerycznego nie powinno przedstawiać trudności.

1. J.M. BEYNET, A. SAWCZUK, On statically admissible stress fields in anisotropic solids, I. Kisiel Anniversary Volume Warsaw 1980 /in prep./
2. J.P. BOEHLER, A. SAWCZUK, Equilibre limite des sols anisotropes, J. Mecanique, 9, 1970, 5-53
3. W.F. CHEN, Limit Analysis and Soil Plasticity, Elsevier, Amsterdam 1975
4. R. HILL, The Mathematical Theory of Plasticity, Clarendon Press, Oxford 1956
5. R. IZBICKI, Z. MRÓZ, Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał, PWN, Warszawa 1976
6. A. SAWCZUK, Linear theory of plasticity of anisotropic bodies, Arch. Mech. Stos., 11, 1959, 541-557
7. S.W. TSAI, E.M. WU, A general theory for anisotropic materials, J. Comp. Materials, 5, 1971, 28-36