

15 / 1980

Tadeusz Sawicki

**PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA  
TEORII PRZYSTOSOWANIA  
DO ANALIZY RUSZTU PŁASKIEGO**

P. 269



**WARSZAWA 1980**

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 4 lutego 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 15/1980



57158



Na prawach rękopisu.

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,4. Ark.druk. 2,25  
Oddano do drukarni w maju 1980 r.  
Nr zamówienia 368/80

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8

PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA TEORII PRZYSTOSOWANIA  
DO ANALIZY RUSZTU PŁASKIEGO

Każda prawidłowo zaprojektowana konstrukcja powinna spełniać wymogi bezpieczeństwa jak i ekonomiki. Oczywiście wydaje się być więc dążenie do nadawania konstrukcjom "lekkich" a zarazem bezpiecznych form. Wynikiem tendencji oszczędnego a zarazem bezpiecznego projektowania jest coraz szersze przenikanie pojęć teorii plastyczności do praktyki inżynierskiej. Teoria konstrukcji plastycznych obejmuje kilka odrębnych grup zagadnień jak np. nośność graniczna, przystosowanie, optymalne projektowanie, niestateczność plastyczna, analiza zjawisk sprężysto-plastycznych przy uwzględnieniu wzmocnienia materiału. Elementem łączącym w pewnym sensie powyższe grupy zagadnień jest tutaj sprężysto-plastyczny model odkształcenia.

Teoria przystosowania rozpatruje zachowanie się konstrukcji w przypadkach występowania złożonych układów obciążeń zmieniających się niezależnie od siebie w sposób niemonotoniczny. Należy zaznaczyć, że z takimi właśnie obciążeniami mamy zwykle do czynienia w praktyce. Konstrukcja poddana takim obciążeniom może ulec zniszczeniu nie tylko na skutek przekształcenia się w mechanizm, ale również wskutek:

- 1/ narastania odkształceń trwałych przy kolejnych zmianach obciążeń,
- 2/ pękania materiału przy występowaniu naprzemiennych cykli odkształceń plastycznych.

Ważnym jest, że zjawiska te mogą wystąpić przy obciążeniach

niższych od obciążenia niszczącego obliczonego według teorii nośności granicznej. Zjawiska powyższe [4/12/] nie występują w konstrukcji poddanej obciążeniom cyklicznym zmiennym, która pracuje w fazie wyłącznie sprężystej. Konstrukcja taka może się jednak okazać "przewymiarowana" w stosunku do konstrukcji odkształcającej się plastycznie rzędu do kilkudziesięciu nawet procent. Faktem przemawiającym za wyjściem z pracą konstrukcji poza zakres sprężysty jest możliwość jej przystosowania. Oznacza to, że po wystąpieniu pewnych odkształceń trwałych przy początkowych zmianach obciążeń, na dalsze ich zmiany konstrukcja reagować będzie już czysto sprężysto. Gdy ten efekt wystąpi to mówimy, że konstrukcja się przystosowała do zadanego programu obciążeń. Istotnym elementem tego zjawiska jest pojawienie się naprężeń resztkowych. W obecności odkształceń plastycznych zależność naprężenie-odkształcenie nie jest jednoznaczna i zależy między innymi od tego czy lokalnie materiał jest obciążany czy odciążany. Zatem po zdjęciu sił zewnętrznych i sprężystym odciążeniu, pozostaną w konstrukcji na ogół pewne naprężenia zwane resztkowymi. Towarzyszą im pewne resztkowe stany odkształceń. Może zatem w konstrukcji w czasie pierwszych cykli jej obciążania ustalić się taki stan samonaprężeń, że przy następnych cyklach obciążeń, będzie się ona zachowywać sprężysto /nastąpi przystosowanie/. Rozważanie modelu obciążeń narastających proporcjonalnie do jednego parametru aż do wartości maksymalnej ma sens w aspekcie oceny nośności granicznej konstrukcji. Dysponując bowiem wartościami obciążenia granicznego /obliczonego w oparciu o teorię nośności granicznej/ oraz maksymalnym obciążeniem działającym na konstrukcję, można obliczyć współczynnik bezpieczeństwa. Praktyka pokazuje, że wartości dopuszczalnych obciążeń obliczone raz z teorii sprężystości a następnie z teorii nośności granicznej mogą przybierać wartości znacznie odbiegające od siebie. Teoria przystosowania wypełnia poniekąd lukę pomiędzy wynikami uzyskiwanymi przy stosowaniu obojga metod /sprężystość - nośność graniczna/. Dotychczas chcąc wyjść poza zakres sprężysty przyjmowaliśmy pewny współczynnik bezpieczeństwa w stosunku do nośności granicznej. Jak wiemy nie zabezpiecza to przy obciążeniach wielo-

parametrycznych zmiennych od wystąpienia zjawisk opisanych w 1/ i 2/ /zniszczenie przyrostowe, zmęczenie niskocykliczne/. Znane są z praktyki przypadki, że współczynnik bezpieczeństwa konstrukcji był większy od jedności a mimo to groziło jej zniszczenie.

Przyjęcie współczynnika bezpieczeństwa większego od jedności, nie jest więc jednoznaczne z tym, że współczynnik bezpieczeństwa względem przystosowania będzie również większy od jedności. Wychodząc więc z konstrukcją poza zakres sprężysty, dla większości przypadków niezbędnym jest sprawdzenie jej na przystosowanie. Naturalnym wydaje się więc coraz powszechniej przyjmowany pogląd, że jednym z warunków bezpieczeństwa konstrukcji projektowanej z uwzględnieniem odkształceń plastycznych jest gwarancja jej przystosowania do dowolnych zmian obciążeń określonych przez normy obciążeń. Przyjęto go również w nowej normie PN-76/B-3200 "Konstrukcje Stalowe - Obliczenia Statyczne i Projektowane".

Literatura dotycząca różnych przypadków teorii przystosowania jest stosunkowo obszerna [9] + [15]. Odpowiednio sformułowane twierdzenia o przystosowaniu możemy stosować do różnych rodzajów konstrukcji /belki, ramy, płyty, powłoki, układy prętowe/ jak i do różnych rodzajów obciążeń /siły, momenty, temperatura/. Istnieje możliwość uwzględnienia takich czynników jak: wzmocnienie materiału, zmiana modułów sprężystych, oddziaływania dynamiczne. Skromniej w stosunku do prac teoretycznych przedstawiają się badania doświadczalne w tej dziedzinie [1], [6], [16]. Przypadkiem rozważanym w niniejszej pracy jest przypadek rusztu płaskiego poddanego działaniu obciążeń poprzecznych. Rozważono dwa przypadki: 1/ uwzględniając wpływ skręcania, 2/ nie uwzględniając wpływu skręcania. W celu umożliwienia konfrontacji wyników jak i ich poprawności, obliczono również, nośność graniczną dla dwóch przypadków jak powyżej. Głównym celem pracy jest ukazanie wielkości wpływu skręcania na adaptację rusztów.

## 1. UWAGI WSTĘPNE

Przy obciążeniach wieloparametrowych zmiennych działających na konstrukcję, bardzo istotnym w aspekcie teorii przystosowania jest początkowy okres funkcjonowania konstrukcji. Decyduje on bowiem o powstaniu pola odkształceń plastycznych, skutkiem których jest powstanie z reguły pola naprężeń resztkowych. Oznacza to, że po zdjęciu obciążenia pozostaną w konstrukcji pewne samorzównoważalne stany naprężeń.

Po powtórnym obciążeniu rozkład naprężeń będzie zwykle inny od obliczonego dla czysto sprężystej pracy konstrukcji. W rezultacie granica plastyczności może nie zostać osiągnięta, mimo, że bez naprężeń własnych przy tych samych obciążeniach zostałyby przekroczona. Mówimy, że naprężenia resztkowe /powstałe w trakcie początkowych cykli zmiany obciążeń/ redukują aktualne naprężenia do wielkości poniżej granicy plastyczności. W rezultacie konstrukcja może przenosić obciążenia niekiedy znacznie przewyższające odpowiednie wartości odnoszące się do pierwszego uplastycznienia. Nie każda jednak deformacja plastyczna musi wywołać skutki opisane powyżej. Może się bowiem zdarzyć, że naprężenia resztkowe nie będą dostatecznie przeciwdziałały naprężeniom powstającym w poszczególnych cyklach obciążeń. W rezultacie, w trakcie każdego cyklu obciążeń, powstawać będą niemające przyrosty odkształceń plastycznych. Po dostatecznie wielu cyklach, ugięcia konstrukcji mogą osiągnąć dowolnie wielką wartość, grożąc zniszczeniem wskutek utraty stateczności, a w każdym razie przekreślając jej użyteczność. Przypadek taki określamy jako zniszczenie przyrostowe. Drugi przypadek prowadzący również do zniszczenia, będzie miał miejsce wówczas, gdy odkształcenia plastyczne powstają w trakcie każdego cyklu obciążania ale w taki sposób, że odkształcenie z pierwszej części cyklu redukuje się z odkształceniem z jego drugiej części. W rezultacie odkształcenia trwale pozostają ograniczone. Jednakże cykle odkształceń plastycznych przeciwnych znaków prowadzą po odpowiedniej liczbie cykli do zmęczenia plastycznego /zniszczenie następuje po kilku do kilku tysięcy cykliach/. Zjawiska zniszczenia przyrostowego oraz zmęczenia niskocyklowego /plastycznego/ nie wystąpią jeśli energia zużyta na dokonanie odkształceń plastycznych w ciągu pracy konstrukcji w każdym punkcie ciała i dla dowolnie

długiego czasu, przyjmie pewną skończoną wartość. To znaczy gdy spełniona będzie nierówność

$$/1/ \int_0^{\infty} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P dt < \infty$$

gdzie:

$\sigma_{ij}$  - naprężenie,  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$  - prędkość odkształceń plastycznych,  $t$  - czas. Eliminując w ten sposób wystąpienie dwóch niebezpiecznych zjawisk prowadzących do zniszczenia konstrukcji lub jej elementu, powodujemy "wejście" konstrukcji na drogę opisaną wcześniej, to znaczy przystosowanie się. W praktyce żądamy aby po pewnej skończonej liczbie cykli obciążeń /praktycznie od kilku do kilkunastu/ nastąpiła stabilizacja odkształceń plastycznych. Przytoczony warunek skończonej energii odkształceń plastycznych jest zarazem kryterium przystosowania się konstrukcji.

## 2. ZWIĄZKI PODSTAWOWE

Istnieją dwa zasadnicze twierdzenie teorii przystosowania pozwalające zależnie od sformułowania problemu znaleźć maksymalną wartość współczynnika obciążenia lub minimalną wartość porównawczego momentu granicznego.

- Twierdzenie statyczne Bleicha [8]

Jeżeli istnieje stałe w czasie pole naprężeń reszkowych

$\sigma_{ij}(x)$  i taka liczba  $m > 1$ , że suma:

$$/2/ m [\sigma_{ij}^E(x,t) + \sigma_{ij}(x)]$$

nigdy nie narusza warunku plastyczności w żadnym punkcie ciała, to energia zużyta na odkształcenie plastyczne pozostaje skończona, czyli konstrukcja przystosowuje się do zadanego programu obciążeń. Wartość  $\sigma_{ij}^E(x,t)$  jest zakresem zmienności naprężeń sprężystych.

- Twierdzenie Koitera [12]

Konstrukcja nie przystosowuje się do zadanego programu obciążenia, jeśli znaleźć można taki cykl prędkości odkształceń plastycznych  $\dot{\epsilon}_{ij}^P(x,t)$  i taki cykl obciążeń zewnętrznych

$p_i(x,t)$  i  $F_i(x,t)$ , z zadanego programem obciążenia, że w pewnym przedziale czasowym  $(t_0, t_0 + T)$  zachodzi nierówność:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \left[ \int_{Sp} p_i(x,t) \dot{u}_i(x,t) ds + \int_V F_i(x,t) \dot{u}_i(x,t) dV \right] dt > \quad /3/$$

$$> \int_{t_0}^{t_0+T} \int_V \sigma_{ij}(x,t) \dot{\epsilon}_{ij}^P(x,t) dV dt$$

gdzie  $\sigma_{ij}$  jest polem naprężeń określonym przez prędkość odkształcenia plastycznego  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ . Człon  $F_i(x,t) \dot{u}_i(x,t)$  związany z siłami masowymi pominięto w dalszych rozważaniach, zakładając, że zmienność wszystkich obciążeń jest wystarczająco powolna.

Bezpośrednie wykorzystanie twierdzeń o przystosowaniu do bardziej złożonych problemów napotyka w praktyce znaczne trudności matematyczne, podobnie jak w przypadku trójwymiarowych problemów teorii sprężystości i plastyczności. Dlatego też uzasadnionym wydaje się być przeprowadzanie analizy konstrukcji prętowej na szczeblu "półintegralnym" to znaczy na szczeblu przekroju poprzecznego. Wiąże się to z budowaniem teorii spełniających podstawowe zależności ośrodka ciągłego w sposób przybliżony. Pozwala to znacznie uprościć rozpatrywane problemy kosztem stosunkowo niewielkich niedokładności. Rozpatrywanie zagadnienia przystosowania na szczeblu przekroju poprzecznego wiąże się z przejściem od tensora naprężenia do naprężenia uogólnionego i od tensora odkształcenia do odkształcenia uogólnionego. Pojawiają się więc uogólnione naprężenia w postaci: siły  $P$  /będącej wypadkową siły podłużnej  $N$  i dwóch wzajemnie ortogonalnych sił poprzecznych  $T, T_1$ /, oraz momentu  $M$  /będącego wypadkową momentu skręcającego  $M_s$  i dwóch wzajemnie prostopadłych momentów zginających  $M_g, M_{g1}$ /. Wymienionym 6 uogólnionym siłom wewnętrznym odpowiada 6 parametrów odkształceniowych/uogólnionych odkształceń/. Są to : jednostkowe wydłużenie, dwa jednostkowe przesunięcia



poprzeczne, jednostkowy kąt skręcenia, dwie krzywizny osi pręta. W przypadku rusztu poddanego działaniu obciążeń w postaci sił skupionych działających w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rusztu, wpływ sześciu wymienionych czynników wyężenia /uogólnionych naprężeń/ redukuje się do trzech /  $M_g, M_s, T$  /, z których to wpływ zasadniczy na pracę dźwigara liniowego ma moment gnący.

Obok założeń wynikających z samej formy konstrukcji, należy wspomnieć o przyjętych założeniach analizy sprężysto-plastycznej rusztu. Są to:

- 1/ Zakładamy że materiał jest idealnie sprężysto-plastyczny.
- 2/ Posługujemy się zależnościami teorii geometrycznie liniowych.
- 3/ Przy czystym zginaniu przyjmujemy założenie płaskich przekrojów również w obecności odkształceń plastycznych.
- 4/ Zakładamy symetrię przekrojów prętów konstrukcji.
- 5/ Przekroje prętów są odcinkami stałe.
- 6/ Przyłożone obciążenia są obciążeniami skupionymi.
- 7/ Deformacja koncentruje się w przekrojach w których został osiągnięty moment graniczny.
- 8/ Pomijamy wpływ sił poprzecznych na przystosowanie.

Przyjęte założenia w wielu wypadkach warunkują rozwiązanie zagadnienia praktycznego nie powodując jednocześnie znacznych błędów. Dowodem są badania doświadczalne potwierdzające uzyskiwane na drodze teoretycznej wyniki [1], [6], [16] .

Przyjęte Założenia determinują w pewnym sensie rodzaj stosowanego opisu rusztu. Jest nim opis dyskretny. Forma tego opisu wynika bezpośrednio z kształtu rusztu i sposobu obciążenia. Zaletą opisu jest możliwość posługiwania się wielkościami wektorowymi i zapisem macierzowym. Wymiar przestrzeni wektorowej jest równy ilości punktów opisu dyskretnego.

Zgodnie z wcześniej przyjętymi założeniami, rozważania przeprowadza się na szczeblu przekroju poprzecznego pręta, posługując się jednocześnie uogólnionymi naprężeniami / $M_g, M_s$ / i uogólnionymi odkształceniami / $\theta, \varphi$ /. Dlatego też twierdzenia o przystosowaniu należało sformułować w wartościach uogólnionych. Postać równań w nowej formie przedstawiono w dalszej części pracy.

Komentarza wymaga sformułowanie równań równowagi.

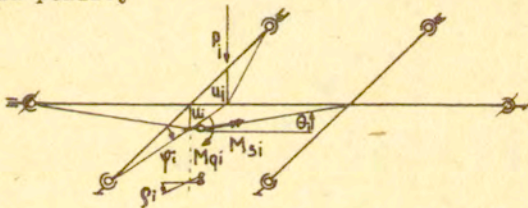
W postaci ogólnej równania mają postać:

$$/4/ \quad P_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} M_i \quad \begin{matrix} j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, n \end{matrix} \quad M_i = \begin{bmatrix} M_{gk} \\ M_{si} \end{bmatrix}$$

Wielkość  $P_j$  oznacza tu obciążenia zewnętrzne przyłożone w  $m$  punktach, natomiast  $M_i$  oznacza momenty działające w  $n$  przekrojach krytycznych. Wielkość  $\alpha_{ij}$  jest macierzą równowagi. Przykład takiej macierzy podano w punkcie 4 pracy. Elementy jej wyznaczono rozpatrując mechanizmy chwilowego ruchu w przypadku utworzenia się przegubów w przekrojach krytycznych. Macierz składa się z dwóch części wiążących odpowiednio momenty zginające  $M_g$  i skręcające  $M_s$  z obciążeniami zewnętrznymi  $P_j$ . Dla mechanizmów chwilowego ruchu obowiązują związki geometryczne. Postać ich jest następująca:

$$/5/ \quad \psi_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} U_j \quad U_j = \begin{bmatrix} u_k \\ \varphi_j \end{bmatrix} \quad \psi_i = \begin{bmatrix} \theta_k \\ \varphi_i \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, n \end{matrix}$$

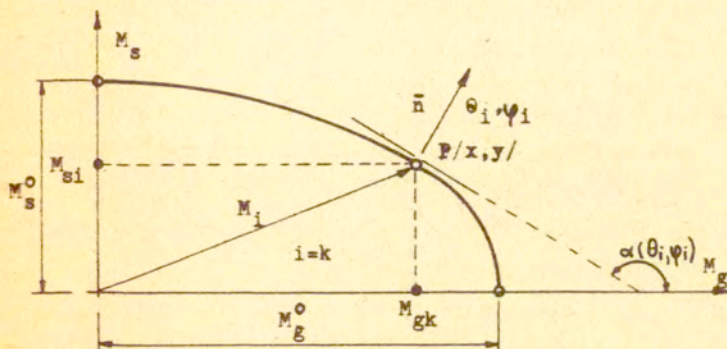
Wielkość  $\psi_i$  oznacza obrót w przekrojach krytycznych/zgięcie lub skręcenie/, natomiast  $U_j$  są przemieszczeniami uogólnionymi. Przykładowy mechanizm chwilowego ruchu z wyeksponowanym  $i$ -tym przegubem, przedstawiającym sens wprowadzonych oznaczeń pokazane na rysunku poniżej



Rys. 1.

W obu przypadkach /4/ i /5/ macierz  $\alpha_{ij}$  jest ta sama. Dla przypadku czystego zginania macierze  $M_i$  oraz  $\psi_i$  redukują się odpowiednio do macierzy  $M_{gk}$  oraz  $\theta_k$ . Znika również człon dotyczący skręcania z macierzy  $\alpha_{ij}$  dając macierz  $\gamma_{ij}$ /patrz punkt 4 pracy/. Pod pojęciem przemieszczenia uogólnionego  $U_j$  należy również rozumieć jednostkowe przemieszczenie w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rusztu i zwrocie zgodnym z kierunkiem działania siły  $u_k$ , oraz jednostkowy obrót węzła rusztu w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rusztu odpowiednio w kierunku danej rodziny prętów  $\varphi_j$ .

Komentarza wymaga sposób w jaki uwzględniono złożony stan naprężenia dla przypadku ze skręcaniem. Potrzebna jest tu znajomość przebiegu krzywej granicznej [3]. Kształt jej przedstawiono na rysunku poniżej



Rys. 2

Krzywą tą jest elipsa/współrzędne wymiarowe-rysunek/ lub okrąg /współrzędne bezwymiarowe/. Jest to dolne oszacowanie nośności granicznej. Dla praktyki jest to podejście wystarczające, tym bardziej, że oszacowanie dolne jest związane z błędem na korzyść obliczeń. Przebieg krzywej granicznej jest potrzebny do sformułowania wzorów na wartość momentu skręcającego i zginającego dla przekroju osiągniętego nośność graniczną/utworzenie się przegubu plastycznego/.

Dla każdego z punktów  $i$ , w których tworzy się przegub plastyczny/przy określonym schemacie ruchu kinematycznego rusztu/, możemy znaleźć wartość odkształceń uogólnionych  $\theta_i$ /kąt zgięcia/ oraz  $\varphi_i$ /kąt skręcenia/. Jest to zarazem jednoznaczne z określeniem wektora  $\bar{n}$  normalnego do krzywej nośności granicznej. Wartości współrzędnych tego wektora zmieniają się wraz z przechodzeniem do kolejnych przegubów i rozważanego schematu kinematycznego rusztu. Tak więc rozważając przekrój  $i$ -ty określamy jednocześnie współrzędne wektora  $\bar{n}$  -  $\theta_i$  oraz  $\varphi_i$ . W ten sposób zadanie sprowadza się do znalezienia współrzędnych punktu  $P(x, y)$  leżącego na krzywej granicznej, dla którego normalna  $\bar{n}/P/$  jest znana. Wykorzystując zależności geometrii analitycznej dla elipsy dochodzimy do poszukiwanych przez nas współrzędnych punktu  $P(x, y)$ , czyli do określenia wartości  $M_{si}$ /moment skręcający w  $i$ -tym przekroju osiągniętym krzywą nośności granicznej/ oraz  $M_{gk}$ /moment zginający w  $k$ -tym przekroju osiągniętym krzywą nośności granicznej/.

Wzory na te wartości mają postać:

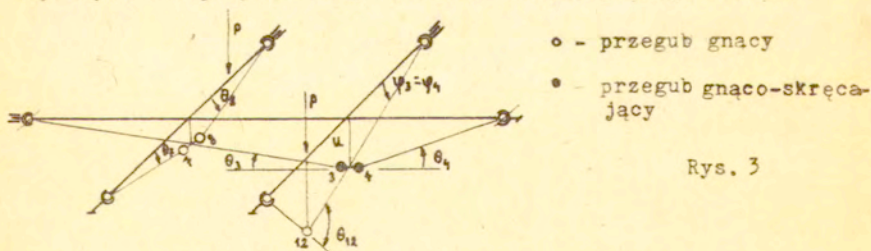
$$/6/ \quad M_{Si} = \frac{M_{Si}^0}{\sqrt{1 + \frac{|\theta_i|^2}{|\varphi_i|^2} \frac{M_{gi}^0}{M_{Si}^0}}}, \quad M_{gk} = \frac{(M_{gk}^0)^2}{M_S^0 \sqrt{\frac{|\varphi_k|^2}{|\theta_k|^2} + \frac{M_{gk}^0}{M_{Sk}^0}}}$$

gdzie:

- $M_{Si}^0$  - wartość momentu granicznego skręcającego w i-tym przekroju
- $M_{gi}^0$  - wartość momentu granicznego zginającego w i-tym przekroju,
- $\varphi_i$  - kąt wzajemnego obrotu skręcającego elementów pręta po obu stronach i-tego przegubu plastycznego
- $\theta_i$  - kąt wzajemnego obrotu zginającego elementów pręta po obu stronach i-tego przegubu plastycznego.

Przy czym wskaźniki i oraz k odpowiadające numerom kolejnych przegubów plastycznych przybierają tą samą wartość, to znaczy  $i = k$  /rozważamy ten sam przegub/.

Poniżej przedstawiono przykład wykorzystania otrzymanych zależności dla obliczenia pracy/W/ naprężeń uogólnionych na przemieszczeniach uogólnionych w chwili utworzenia się przegubów plastycznych dla przykładowego schematu kinematycznego rusztu.



Rys. 3

$$W = M_{g7}^0 \cdot e_7 + M_{g8}^0 \cdot e_8 + M_{g12}^0 \cdot e_{12} + \left[ (M_{g3}^0)^2 : (M_{s3}^0 \cdot \sqrt{(\varphi_3 : \theta_3)^2 + (M_{g3}^0 : M_{s3}^0)^2}) \right] \cdot e_3 + \left[ M_{g3}^0 : \sqrt{1 + (\theta_3 : \varphi_3)^2 \cdot (M_{g3}^0 : M_{s3}^0)^2} \right] \cdot \varphi_3 + \left[ (M_{g4}^0)^2 : (M_{s4}^0 \cdot \sqrt{(\varphi_4 : \theta_4)^2 + (M_{g4}^0 : M_{s4}^0)^2}) \right] \cdot e_4 + \left[ M_{g4}^0 : \sqrt{1 + (\theta_4 : \varphi_4)^2 \cdot (M_{g4}^0 : M_{s4}^0)^2} \right] \cdot \varphi_4$$

### 3.1. PRZYPADEK BEZ SKRĘCANIA

Dla zadania rozważanego w opracowaniu, to znaczy przy zadanych charakterystykach przekroji i zadanych granicach zmienności obciążeń z dokładnością do mnożnika  $\lambda$ , zagadnienie przystosowania w wielkościach uogólnionych sprowadza się przy podejściu statycznym do sformułowania następującego [ 1 ] :

Znaleźć  $\lambda_S = \max. \lambda$  przy ograniczeniach

$$\bar{M}_i + \lambda \max M_i^E \leq M_{oi} \quad \bar{M}_i + \lambda \min M_i^E > -M_{oi}$$

$$\begin{aligned} /7/ \quad \lambda &\leq 2a_i M_{oi} / [\max. M_i^E - \min. M_i^E] \\ & \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \sum \alpha_{ij} \bar{M}_i &= 0 \quad \quad \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Przy podejściu kinematycznym problem jest sformułowany następująco [ 1 ] :

Znaleźć  $\lambda_S = \min. [ \lambda(a), \lambda(i) ]$

gdzie:

$$\lambda(a) = \min_{\{i\}} \frac{2a_i M_{oi}}{\max M_i^E - \min M_i^E}$$

/8/

$$\lambda(i) = \lambda(\alpha) = \min_{\{\alpha\}} \frac{\sum_{i=1}^n M_{oi} |\theta_i^\alpha|}{\sum_{i=1}^n N_i \theta_i^\alpha}$$

przy ograniczeniu  $\theta_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} u_j$

Symbol  $\alpha$  oznacza liczbę mechanizmów ruchu kinematycznego. Macierz  $\alpha_{ji}$  jest macierzą zgodności między przemieszczeniami przekrojów niebezpiecznych a kątami obrotu wzajemnego elementów pręta po obu stronach przekroju niebezpiecznego. Przykład takiej macierzy dla przypadku rusztu przedstawiono w dalszej części pracy. Wielkość  $\bar{M}_i$  jest polem momentów resztkowych. Symbole  $\max. M_i^E$  oraz  $\min. M_i^E$  oznaczają obwiednię momentów sprężystych, określoną jednoznacznie przez granice zmien-

ności, obciążeń. Wielkości  $a_i = M_{ei}/M_{oi}$  oznaczają stosunek największego momentu  $M_{ei}$ , jaki  $i$ -ty przekrój może przenieść bez odkształceń plastycznych, do momentu granicznego  $M_{oi}$ . Wartość  $N_i$  należy rozumieć następująco:

$$N_i = \begin{cases} \max. M_i^E & \text{jeżeli } e_i > 0 \\ \min. M_i^E & \text{jeżeli } e_i < 0 \end{cases}$$

Oba podejścia statyczne i kinematyczne są dualne i prowadzą do problemów programowania liniowego, przy czym problem kinematyczny wymaga dodatkowo linearyzacji. Ze względu na przyjętą metodę kinematyczną należy zastosować związki /8/ celem uzyskania rozwiązania problemu. Kompletność rozwiązania zapewni nam skonstruowanie wszystkich liniowo niezależnych mechanizmów ruchu. Są one mechanizmami o jednym stopniu swobody. Dla problemów nośności granicznej jak i dla teorii przystosowania, jest to wystarczające. Mechanizmy o większej liczbie stopni swobody nie wnoszą nic nowego [1]. Tak więc dla zadanego rusztu o  $n$  przekrojach niebezpiecznych i  $k$ -krotnej statycznej niewyznaczalności, wprowadzając w  $k+1$  przekrojach niebezpiecznych przeguby plastyczne, możemy otrzymać pewien mechanizm ruchu. Nie w każdym jednak przypadku otrzymamy mechanizm dopuszczalny /to znaczy taki który może praktycznie wystąpić/. Jest to związane z występowaniem mechanizmów o liczbie przegubów mniejszej niż wartość  $k + 1$  / tzw. mechanizmy lokalne /. Niemniej jednak postępowanie takie pozwala nam wyłonić wszystkie mechanizmy o jednym stopniu swobody. W tym celu należy rozważyć  $\binom{n}{k+1}$  możliwości rozkładu w ruszcie przegubów plastycznych/ wartości  $n$  oraz  $k$  jak poniżej/. W oparciu o to rozumowanie otrzymałem równanie na liczbę liniowo niezależnych schematów ruchu kinematycznego dla prostego przypadku rusztu rozważanego w punkcie 4 pracy. Ma ono postać następującą:

$$/9/ \quad N = \binom{n}{k+1} - l_1 \cdot (n - 3) - l_2 \cdot (n - 4)$$

gdzie:

$n$  - ilość przekrojów niebezpiecznych

- k - krotność statycznej niewyznaczalności
- $l_1$  - ilość mechanizmów belkowych z dwoma przegubami
- $l_2$  - ilość mechanizmów belkowych z trzema przegubami
- N - liczba liniowo niezależnych schematów kinematycznych rusztu.

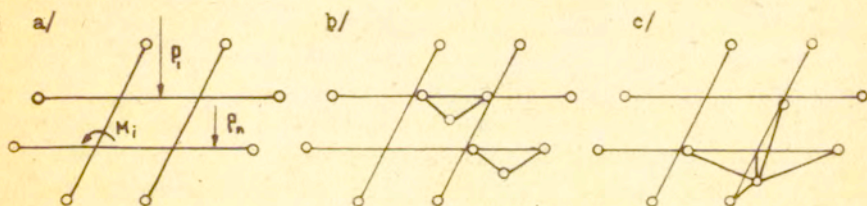
Dla każdego rusztu istnieje skończony układ /baza/ mechanizmów podstawowych, to jest takich, że dowolny mechanizm /pole obrotów plastycznych/ jest kombinacją liniową tych mechanizmów. Wielkość tej bazy /liczbę mechanizmów podstawowych/ możemy poprzez analogię do ram [ 1 ] obliczyć za pomocą prostej równości:

$$/11/ \quad N_p = n - k$$

gdzie:

- $N_p$  - liczba mechanizmów podstawowych /baza/
- n - ilość przekrojów niebezpiecznych w ruszcie
- k - krotność statycznej niewyznaczalności rusztu.

Dla rusztów o regularnej budowie /rys.3a / można wyróżnić dwie grupy mechanizmów podstawowych, a mianowicie: a/ mechanizmy belkowe /rys. 3b / oraz mechanizmy dwu-belkowe /rys. 3c /



Rys. 4

Wychodząc z mechanizmów podstawowych możemy budować kolejno złożone, liniowo niezależne mechanizmy ruchu /superpozycja wybranych mechanizmów bazy/. Wynika stąd kolejny sposób otrzymania pełnego zbioru tych mechanizmów. Nie każda jednak superpozycja schematów kinematycznych bazy, daje mechanizm dopuszczalny. Niemniej należy rozważyć każdą z możliwości /jest ich  $N_1$  - objaśnienie poniżej/ celem wyłonienia wszystkich mechanizmów mogących wystąpić w praktyce. Pełny zbiór schematów ruchu jest niezbędny, bowiem niemożliwym jest określenie z góry który z nich okaże się decydu-

jący dla nośności granicznej a który dla przystosowania. Liczbę takich superpozycji /nie mechanizmów/ można obliczyć z zależności :

$$N_1 = \sum_{l=1}^{N_p} \binom{N_p}{l}$$

/10/  
gdzie :

$$l = 1, 2, 3, \dots, N_p$$

$N_1$  - liczba superpozycji

Zależność ta wynika wprost z zasad kombinatoryki /ilość możliwości wybrania podzbioru l-elementowego ze zbioru  $N_p$ -elementowego/. W punkcie 4 pracy podano graficznie bazę mechanizmów podstawowych, jak również kilka przykładów mechanizmów złożonych. Pełen komplet schematów ruchu podano w macierzy  $k_{ij}$  /jednej kolumnie odpowiada 1 mechanizm/. Elementy jej są współczynnikami kombinacji liniowej mechanizmów podstawowych. Wartość ich wynika bezpośrednio z tworzenia konkretnych mechanizmów ruchu.

Po skonstruowaniu pełnego zbioru schematów kinematycznych, dalszym krokiem w analizie przystosowania /metoda kinematyczna/ jest obliczenie pola ekstremalnych momentów zginających. Są one liniową kombinacją pól od poszczególnych obciążeń. Następnie stosujemy dla każdego z mechanizmów wzór /8/. W ten sposób otrzymamy pewien zbiór N-elementowy /równy liczbie mechanizmów/ wartości współczynników liczbowych. Wybranie ze zbioru N wartości  $P_p$  takiej która przyjmuje wartość minimalną jest rozwiązaniem zagadnienia. Nie przekraczanie wielkości tej siły gwarantuje nam przystosowanie się rusztu. To znaczy zapobieżenie zjawisku nieograniczonego narastania odkształceń plastycznych i zapobieżenie wystąpienia zjawiska zmęczenia plastycznego.

### 3.2. PRZYPADEK ZE SKRĘCANIEM

Analiza zagadnienia jest bardziej złożona niż w przypadku poprzednim. Należy bowiem uwzględnić fakt złożonego stanu naprężenia oraz większą liczbę kombinacji schematów kinematycznych rusztu. Również pojęcie adaptacji wymaga odmiennego sformułowania, w przeciwieństwie do poprzedniego przypadku, który niemal niczym nie odbiegał od sformułowania dla ram czy belek. Z ogólnego twierdzenia metody kinematycznej /2/ wynika następujący wzór, w oparciu o który możemy sprawdzić zabezpieczenie konstrukcji przed zniszczeniem przyrostowym :



$$/12/ \quad \sum_{i=1}^n [ M_{g_i}^E \theta_i + M_{s_i}^E \psi_i ] \leq \sum_{i=1}^n [ J_i ]$$

$$\text{gdzie} \quad J_i = \max. [ M_{g_i}^E \theta_i + M_{s_i}^E \psi_i ]$$

Wartości  $M_{g_i}^E$  oraz  $M_{s_i}^E$  dobrane są zgodnie ze wzorami /6/.  
Wartości  $M_{g_i}^E$  oraz  $M_{s_i}^E$  oznaczają momenty sprężyste gnący i skręcający dobrane z kryterium maksimum wyrażenia na  $J_i$

$$M_{g_i}^E = f_1(P_1, P_2, \dots, P_n) \quad M_{s_i}^E = f_2(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

gdzie:  $P_1, P_2, \dots, P_n$  - obciążenia zewnętrzne.

Wyłonienie wartości maksymalnej spośród wyrażenia na  $J_i$ , sprowadza się do poszukiwania maksimum iloczynu skalarnego wektorów o składowych odpowiednio  $[ M_{g_i}^E, M_{s_i}^E ]$  oraz  $[ \theta_i, \psi_i ]$ . Składowe pierwszego wektora są funkcjami obciążeń, natomiast składowe drugiego wektora zależne są od przyjętego schematu ruchu kinematycznego. Praktyczne rozwiązanie zagadnienia sprowadzi się do znalezienia iloczynu macierzy jak poniżej:

$$/13/ \quad \begin{bmatrix} M_{g_{i1}}^E & M_{s_{i1}}^E \\ M_{g_{i2}}^E & M_{s_{i2}}^E \\ \dots & \dots \\ M_{g_{il}}^E & M_{s_{il}}^E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_i \\ \psi_i \end{bmatrix}$$

gdzie:

1 - kolejny przekrój krytyczny.

Liczby 1,2,...,l oznaczają kolejne działające niezależnie obciążenie zewnętrzne. Uwagę należy zwrócić na to aby moment

/skręcający lub zginający/ wykonywał dodatnią pracę na odpowiednim przemieszczeniu uogólnionym /skręcenie, zgięcie/. W przeciwnym wypadku wyrażeniu przyporządkujemy znak minus. Maksymalną wartość wyrażenia na  $J_i$  otrzyma się sumując elementy macierzy /13/ takie, które przyjmują wartość dodatnią. Przeprowadzając powyższy algorytm dla każdego z przekroji krytycznych i sumując otrzymane wartości otrzyma się prawą stronę nierówności /12/ dla odpowiedniego schematu kinematycznego rusztu. Rozwiązaniem problemu jest wyłonienie wartości  $P_{MIN}$  spośród  $P_k$  reprezentujących odpowiednie schematy ruchu kinematycznego rozpatrywanego rusztu. Obliczenia przystosowania rusztu dla przypadku ze skręcaniem przeprowadzono w aspekcie zniszczenia przyrostowego.

#### 4. PRZYKŁAD

Do obliczeń przyjęto ruszt jak na rysunku 5a/. Obciążenia działają w trzech punktach a zakres ich zmienności określają nierówności:

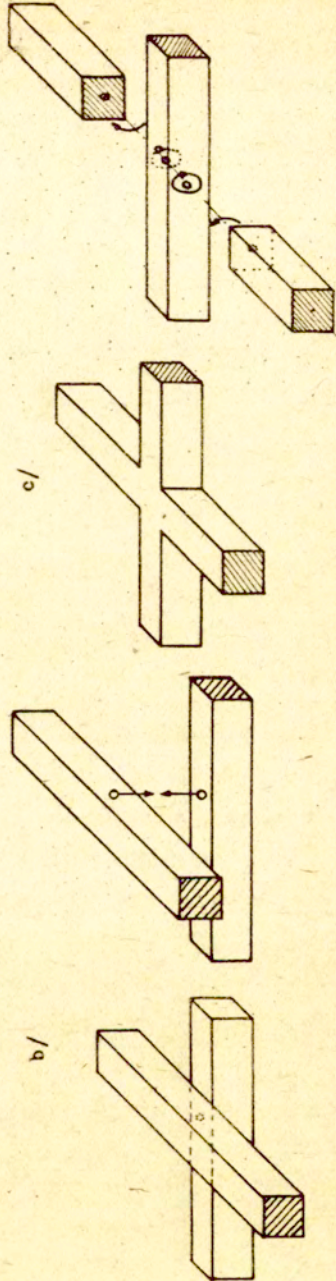
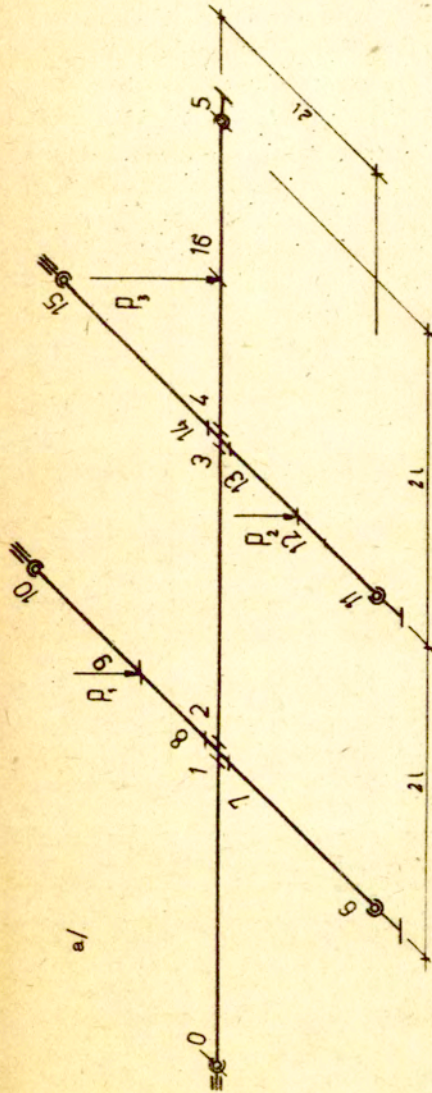
$$\begin{aligned}0 &\leq P_1 \leq P \\0 &\leq P_2 \leq P \\0 &\leq P_3 \leq 2P\end{aligned}$$

Rozwiązanie sprężyste przeprowadzono dla następujących przypadków:

- ruszt swobodnie podparty, w węzłach występuje jedna składowa oddziaływania belek z sąsiednich kierunków /ruszt bez skręcania/,
- ruszt swobodnie podparty z wyjątkiem punktów 0 i 5 /Rys. 5a/ gdzie nie występuje możliwość obrotu pręta i połączenie belek z sąsiednich kierunków jest sztywne /ruszt ze skręcaniem - Rys.5c/.

Maksymalna różnica momentów zginających dla obu rozważanych przypadków wyniosła 20.% /patrz tabela 1 rozwiązań sprężystych/. Dalszym etapem było zbudowanie mechanizmów ruchu kinematycznego. Zgodnie ze wzorem /9/ liczba tych mechanizmów dla przypadku zginania wyniesie:

$$N = \binom{7}{3} - 3 \cdot (7 - 3) - 0 \cdot (7 - 4) = 23$$



Węzeł ze skręcaniem

Rys. 5

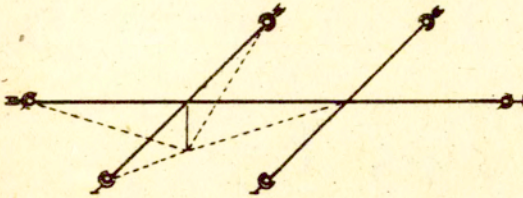
Węzeł bez skręcania

T A B E L A N R 1

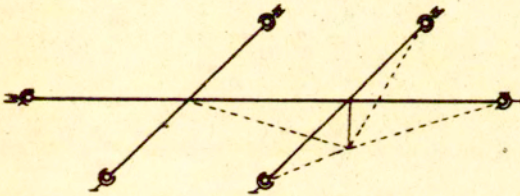
PRZEKRÓJ	1	2	3	4	7	8	9	12	13	14
		286	286	-057	-057	185	185	592	100	201
M <sub>g</sub>	P <sub>1</sub>	286	-057	-057	185	185	592	100	201	201
	P <sub>2</sub>	-057	-057	286	286	201	100	592	185	185
	P <sub>3</sub>	-146	-146	229	229	260	130	349	698	698
M <sub>g</sub>	P <sub>1</sub>	286	286	-057	-057	222	148	574	185	216
	P <sub>2</sub>	-057	-057	286	286	216	185	092	148	222
	P <sub>3</sub>	-146	-146	229	229	260	130	349	698	698
M <sub>s</sub>	P <sub>1</sub>	-039	035	035	004	-	-	-	-	-
	P <sub>2</sub>	004	035	035	-039	-	-	-	-	-
	P <sub>3</sub>	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BEZ SKRĘCANIA										
ZE SKRĘCANIEM										

U W A G A : Wartości z tabeli należy przemnożyć przez P·1/100

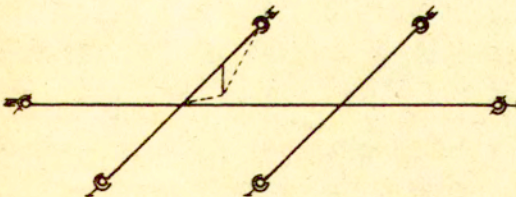
Są to mechanizmy o jednym stopniu swobody. Są one kombinacją liniową mechanizmów podstawowych przedstawionych na rysunkach 6 ÷ 10.



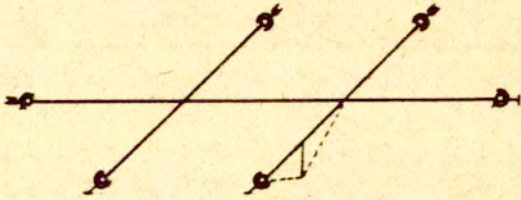
Rys. 6



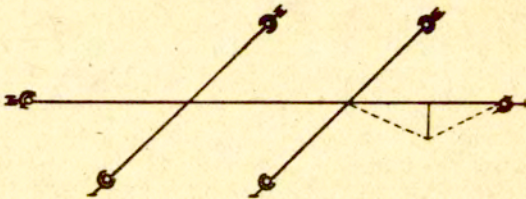
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

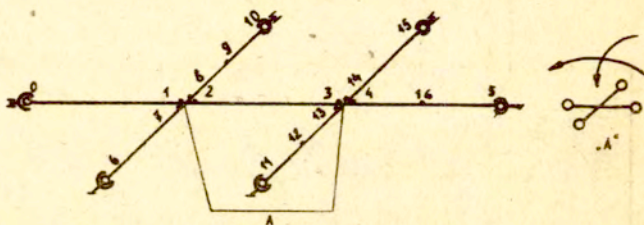
Schematem który okazał się zasadniczy /patrz tabela 2/ zarówno ze względu na nośność graniczną jak i przystosowanie jest schemat powstały z kombinacji liniowej mechanizmów podstawowych /Rysunki 6+10/ dla wartości współczynników  $k_{ij}$  odpowiednio  $k_1=2/5$   $k_2=4/5$ ,  $k_3=0$ ,  $k_4=0$ ,  $k_5=3/5$ /rys. 14 / .Wyniknęło to z przeanalizowania tabeli 2 gdzie przedstawiono komplet współczynników dla każdego ze schematów kinematycznych rusztu.Wartości istotne ze względu na przystosowanie i nośność graniczną /minimalne/ zaznaczono ramkami.Wskaźniki macierzy  $k_{ij}$  należy rozumieć następująco:  $i$  - numer mechanizmu podstawowego/1+5, Rys.6+10/,  $j$  - numer mechanizmu liniowo niezależnego o jednym stopniu swobody /1 + 23/. Mechanizm dający rozwiązanie problemu ma wskaźnik  $j = 20$  / 20-ta kolumna macierzy  $k_{ij}$ /.Wskaźnik ten pominięto podając wartości  $k_{ij}$  powyżej.Pełny zbiór współczynników  $k_{ij}$  podano na stronie 25. Na rysunkach 12,13,15, podano inne przykłady mechanizmów o jednym stopniu swobody.

TABELA NR 2

M E C H A N I Z M R U C H U	1	2	3	4	5	6	7	8
	9 17	10 18	11 19	12 20	13 21	14 22	15 23	16
P R Z Y S T O S O W A N I E	2.077	1.959	2.379	1.728	1.553	2.136	2.431	1.926
	2.736	1.803	1.919	1.260	1.655	2.645	1.276	1.672
	1.551	1.559	1.517	<u>1.213</u>	1.241	1.229	1.251	
N O Ś N O Ś Ć G R A N I C Z N A	6.667	2.222	3.111	1.867	2.000	2.400	4.000	2.095
	8.000	1.926	4.000	1.333	1.818	10.667	1.333	1.714
	1.576	1.630	1.539	<u>1.231</u>	1.255	1.244	1.262	
P R Z Y S T O S O W A N I E	2.077	1.959	2.638	1.912	1.553	2.136	2.431	2.228
	2.736	2.069	1.919	1.260	2.039	3.085	1.345	1.672
	1.800	1.662	1.793	<u>1.213</u>	1.404	1.393	1.462	
N O Ś N O Ś Ć G R A N I C Z N A	6.667	2.222	3.422	2.053	2.000	2.400	4.000	2.464
	8.000	2.197	4.000	1.333	2.137	12.000	1.400	1.714
	1.820	1.681	1.805	<u>1.231</u>	1.419	1.405	1.473	

U W A G A : Wartości z tabeli należy przemnożyć przez  $\zeta_0 R^3/l$

Dla każdego mechanizmu z 23 możliwych sformułowano zależności w oparciu o wzory /8/. Wstawiając konkretne wartości liczbowe uzyskiwano odpowiednio dla każdego mechanizmu konkretną wartość  $\lambda$ . Analizując każdy z 23 mechanizmów w aspekcie możliwości skręcania, wyłoniono z każdego z nich kilka dalszych. W ten sposób powstała rodzina mechanizmów ruchu kinematycznego dla rusztu przenoszącego momenty skręcające. Dla każdego z nich zbudowano zależności zgodnie ze wzorem /12/. Zbudowano macierz zgodności /patrz związki 4 i 5/  $\alpha_{ij}$ , która dla rozważanego przypadku ma postać przedstawioną na stronie 26. Wprowadzenie oznaczenia poszczególnych przekroi są zgodne z rysunkiem Nr 11. Szczegół "A" określa założony zwrot węzłów /S<sub>j</sub>/.



Rys. 11

Macierz  $\alpha_{ij}$  składa się z czterech charakterystycznych obszarów mających następujący sens:

- a/ obszar I, II - przypadek zginania
- b/ obszar III, IV - przypadek skręcania
- c/ obszar I, IV - przypadek przemieszczeń pionowych węzłów
- d/ obszar II, III - przypadek obrotu węzłów.

Zależności wiążące przemieszczenie  $V_j$  z obrotem wzajemnym  $\psi_j$  części przekroju leżących po obu stronach przegubu plastycznego można w formie zwięzłej zapisać następująco:

$$\psi_i = \alpha_{ij} V_j$$



$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\phantom{[ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad ]}}_m \\
 \left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\
 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\
 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$\underbrace{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23}_n$

$k_{ij} =$

Postać macierzy współczynników  $k_{ij}$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \\ \theta_{13} \\ \theta_{14} \\ \theta_9 \\ \theta_{12} \\ \theta_{16} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_7 \\ \varphi_8 \\ \varphi_{13} \\ \varphi_{14} \\ \varphi_9 \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2l & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2l & -1/2l & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2l & 1/2l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2l & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2l & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3l & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3l & 1/3l & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3l & 1/3l & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3l & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/4l & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4l & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1/4l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4l & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3l & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_{16} \\ u_9 \\ u_{12} \\ \alpha_{1,2} \\ \alpha_{7,8} \\ \alpha_{3,4} \\ \alpha_{13,14} \end{bmatrix}$$

macierz  $\alpha_{ij}$



obszary w macierzy  $\alpha_{ij}$

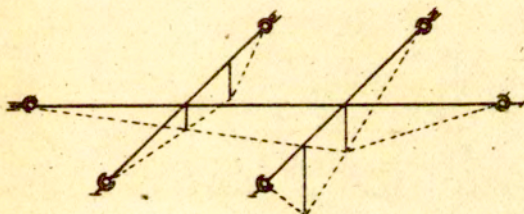
gdzie:

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{ij} \\ \beta_{ij} \end{bmatrix} \quad V_j = \begin{bmatrix} u_k \\ \rho_j \end{bmatrix} \quad \psi_i = \begin{bmatrix} \theta_k \\ \psi_i \end{bmatrix}$$

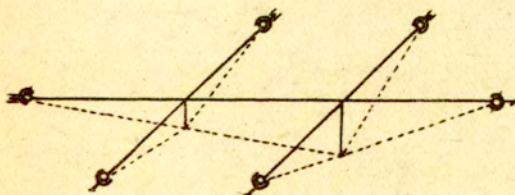
oraz

$$\theta_j = \delta_{ji} V_i \quad \psi_j = \beta_{ji} V_i$$

Należy dodać, że część III i IV macierzy ma sens jedynie dla tych przypadków schematu ruchu kinematycznego dla których pojawiają się skręcania. Macierz  $\alpha_{ij}$  wystąpi w pełnym wymiarze dla przypadku jak na rysunku 12, natomiast zredukuje się do macierzy  $\delta_{ij}$  i związku  $\theta_j = \delta_{ji} V_i$  dla przypadku jak na rysunku 13.



Rys. 12



Rys. 13

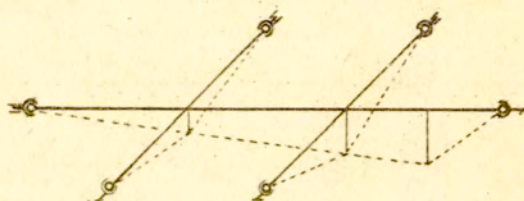
Celem porównania wyników obliczeń uwzględniających i nie uwzględniających wpływ skęcania, założono w obu przypadkach okrągły przekrój prętów, oraz moduły sprężystości odpowiednio:

$$G = 8,1 \times 10^4 \text{ MN/m}^2, \quad E = 10^5 \times 2,1 \text{ MN/m}^2$$

Uzyskano rozbieżności wyników maksymalnie 18,8% przy czym wartość siły przy której konstrukcja się jeszcze przystosowuje jest większa dla przypadku ze skęcaniem.

Jak wspomniano wcześniej rozwiązaniem problemu jest wyłonienie wartości  $P_{\text{MIN}}$ , spośród  $P_k$  reprezentujących odpowiednie schematy ruchu kinematycznego rusztu.

Wartości  $P_{\text{MIN}}$  dla rozpatrywanego rusztu odpowiadał schemat przedstawiony na rysunku Nr 14.



Rys. 14

Obliczono również nośność graniczną rusztu dla obu przypadków. Uwzględnienie skęcania daje większą wartość siły niszczącej maksymalnie o 14,98%.

Porównanie wartości siły dla której konstrukcja zachowuje się czysto sprężyste z wartością siły dla której zachodzi przystosowanie oraz z wartością siły niszczącej, pozwala stwierdzić fakt małej różnicy między siłą niszczącą i przystosowaniem. Dla obliczanego rusztu wartości tej kształtują się następująco:

$$P_s < P_p < P_o$$

$$0,707 \zeta_o R^3/1 < 1,213 \zeta_o R^3/1 < 1,231 \zeta_o R^3/1$$

gdzie :

$P_s$  - siła wywołująca tylko sprężyste odkształcenia konstrukcji,

$P_p$  - siła przy której następuje przystosowanie się konstrukcji do obciążeń zmiennych,

$P_o$  - siła niszcząca

Na rysunku Nr. 15 przedstawiono jeden z możliwych schematów kinematycznych rusztu. Przypadek ten odpowiada pozycji 22 z tabeli 2 oraz 22 kolumnie macierzy  $k_{ij}$  /strona 25/. Wartości sił

$P_p$  oraz  $P_o$  dla tego schematu kształtują się następująco :

$$P_p = 1.229 \zeta_o R^3 / l,$$

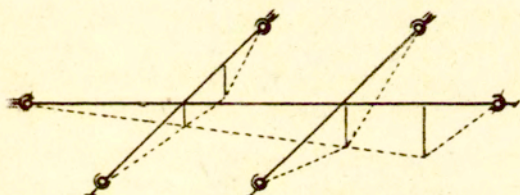
$$P_o = 1.244 \zeta_o R^3 / l,$$

przy nie uwzględnianiu skręcania, oraz :

$$P_p = 1.393 \zeta_o R^3 / l,$$

$$P_o = 1.405 \zeta_o R^3 / l,$$

przy uwzględnianiu skręcania.



Rys. 15

Wyniki liczbowe pozwalają ocenić rozbieżność jaka występuje przy mniej i bardziej dokładnym rozwiązaniu rusztu.

## 5. WNIOSKI

- 1/ Dla rusztu poddanego działaniu obciążeń zmiennych o znacznych amplitudach teoria nośności granicznej jak i klasyczna mechanika budowli nie dają gwarancji wystarczająco ścisłego określenia bezpiecznych granic zmienności obciążeń.
- 2/ Wynik obliczony według teorii adaptacji może być bliski otrzymanemu w oparciu o jedną lub drugą teorię lub zajmować pozycję pośrednią. Zależy to od parametrów geometrycznych, mechanicznych własności prętów oraz parametrów charakteryzujących obciążenie.
- 3/ Przypadek rozważany wykazał znaczną różnicę wyniku uzyskanego z rozwiązania sprężystego oraz z analizy przystosowania/42%/. Podkreśla to celowość wychodzenia z pracą konstrukcji poza zakres sprężysty, co pociągnęłoby za sobą zrozumiałe efekty ekonomiczne.
- 4/ Nakład pracy w przypadku analizy rusztu uwzględniającej skręcanie jest wielokrotnie większy niż w przypadku uwzględniania tylko czystego zginania. Wiąże się to z faktem natychmiastowego wzrostu liczby niewiadomych w układzie równań metody sił, jak też zwiększa się wielokrotnie ilość niezbędnych do rozpatrywania schematów ruchu kinematycznego rusztu. Z kolei rozbieżność wyników w obu wypadkach nie jest znaczna i powoduje jedynie zwiększenie współczynnika bezpieczeństwa na korzyść przystosowania. Powyższe fakty poddają w wątpliwość sensowność przeprowadzania obliczeń konstrukcji rusztowych na przystosowanie uwzględniających skręcanie. Wniosek należy szczególnie zaakcentować w przypadku przeprowadzania obliczeń w sposób tradycyjny bez użycia maszyny cyfrowej.
- 5/ Do obliczeń rusztów bardziej złożonych ekonomicznym może okazać się podejście przybliżone na podstawie którego możemy otrzymać dolną /twierdzenie Bleicha/ i górną /twierdzenie Neala/ ocenę zakresu zmienności obciążeń, umożliwiających przystosowanie. W wielu wypadkach praktycznych ocena taka może być zadowalająca.
- 6/ Istotnym jest odpowiednie przyjęcie schematu statycznego rusztu jak i programu jego obciążania. Zmiany warunków brzo-

wych pociągają za sobą zmianę wartości siły przy której następuje przystosowanie na stronę niebezpieczną lub bezpieczną. Miejsca przyłożenia obciążeń warunkują rodzaj mechanizmu kinematycznego rusztu.

LITERATURA

- 1 J.A. König, A. Sawczuk, W. Grabczyńska, Obliczanie ram i belek na przystosowanie, Warszawa 1974.
- 2 A. Sawczuk, M. Janas, J.A. König, Analiza plastyczna konstrukcji, Warszawa 1972.
- 3 E. Życzkowski, Obciążenia złożone w teorii plastyczności, Warszawa 1973.
- 4 J.A. König, Podstawowe twierdzenia z zakresu teorii dostosowania się konstrukcji sprężysto-plastycznych do obciążeń zmiennych w czasie, Mechanika Teoretyczna i Stosowana 1970.
- 5 W. Olszak, P. Perzyna, A. Sawczuk, Teoria plastyczności, Warszawa 1965.
- 6 K. Piwowski, Z. Kuś, S. Kuś, Badania doświadczalne nośności rusztów żelbetowych, Archiwum Inż.Łąd. 1976.
- 7 Saul J. Gass, Programowanie liniowe, Warszawa 1973.
- 8 H. Bleich, Bemessung statisch unbestimmter Systeme nach der Plastizitätstheorie, Berlin 1936.
- 9 E. Melan, Der Spannungszustand eines Hencky-Mises'schen Kontinuums bei veränderlicher Belastung, Wien 1938.
- 10 W. Prager, Shakedown in elastic-plastic media subjected to cycles of load and temperature, 1957, Bologna.
- 11 E. Melan, Zur Plastizität des räumliche Kontinuums, 1938.
- 12 W. Koiter, A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures, 1956. Proc.Kon.Ned.Ak.Wet., B59, 14+34.
- 13 J.A. König, A shakedown theorem for temperature dependent elastic moduli, Bull.Ac.Pol.Sci.Serie Sci Techn. ,17, 1969.
- 14 J.A. König, Engineering application of shakedown theory, Udine, 1977.
- 15 ГОХФЕЛЬД Д.А., Несущая способность конструкций в условиях температур. Машиностроение, Москва 1970.



- 16 M.R.Askari, Analyse limite des Réseaux de poutres croisées en négligeant leffet de torsion, Construction Metallique, 4-1973, 1-1974.
- 17 J.Heyman, Plastic analysis of structures, 2. Applications, Cambridge University Press, 1971.
- 18 J.Heyman , The limit design of a transversely loaded square grid.Journ.Appli.Mechanics, 19, 1952.