

19 / 1982

J. Bajkowski
W. Szemplińska-Stupnicka

ZAGADNIENIE
REZONANSÓW WEWNĘTRZNYCH
W NIELINIOWYCH
UKŁADACH DRGAJĄCYCH



P. 269

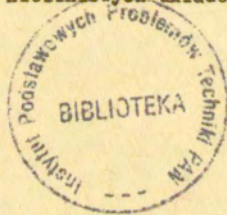
WARSZAWA 1982

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 15 stycznia 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 19/1982

Opracowanie wykonano w ramach programu prac
problemu węzłowego 05.12 - "Analiza i optymalna
synteza nieliniowych układów drgających"



57055



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 140 egz. Ark.wyd. 2,2. Ark. druk.2,75
Oddano do drukarni w maju 1982 r.
Nr zamówienia 229/82 Z-108.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Józef Bajkowski
Wanda Szemplińska-Stupnicka
Zakład Układów Mechanicznych
IPPT PAN

ZAGADNIENIE REZONANSÓW WEWNĘTRZNYCH
W NIELINIOWYCH UKŁADACH DRGAJĄCYCH

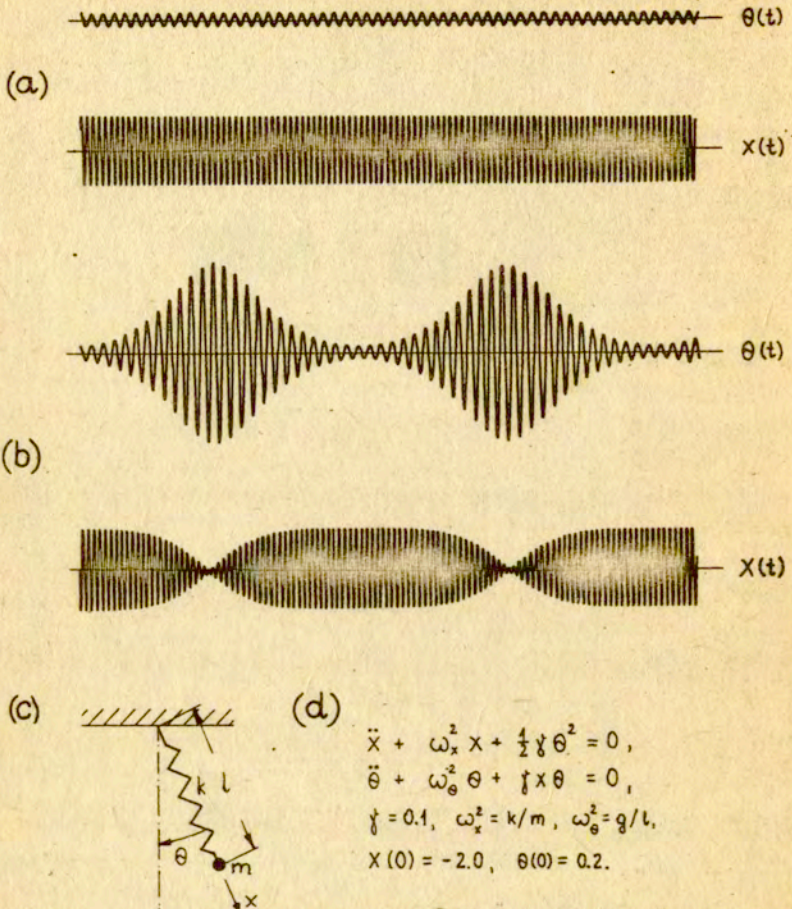
1. Wstęp

Terminem "rezonans wewnętrzny" przyjęto określać te szczególne zjawiska, które pojawiają się w drgających układach nieliniowych o n stopniach swobody, wtedy gdy istnieją liczby całkowite k_s , $s = 1, 2, \dots, p$, nie wszystkie równe zero takie, że między częstościami własnymi układu $\omega_1, \dots, \omega_p$ zachodzi związek typu:

$$/1.1/ \quad \sum_{s=1}^p k_s \omega_s = 0, \quad p \leq n,$$

tzn. gdy są one współmierne. W teorii pierwszego przybliżenia częstości ω_s są częstościami własnymi układu liniowego, tj. układu w którym człony nieliniowe zostały odrzucone.

Efekty współmierności częstości własnych w nieliniowym autonomicznym, zachowawczym układzie o dwóch stopniach swobody zostały po raz pierwszy zbadane przez Gorelika i Witta [8] w roku 1933. Układem tym było wahadło matematyczne zawieszone na sprężynie - rys. 1c, a opisane układem dwóch równań drugiego rzędu - rys. 1d, sprzężonych tylko poprzez człon nieliniowy. Stwierdzili oni, że gdy między częstościami drgań: ω_x w kierunku współrzędnej x i częstością drgań obrotowych - ω_θ zachodzi związek $\omega_x = 2\omega_\theta$, charakter drgań ulega jakościowej zmianie i pojawiają się drgania, w których następuje przepływ



Rys. 1.1. Model układu, równania ruchu oraz charakter drgań $x/t/$ i $\theta/t/$, a/ bez rezonansu wewnętrznego $\omega_\theta = 1$ i $\omega_x = 1.9$, b/ przy rezonansie wewnętrznym $\omega_\theta = 1$ i $\omega_x = 2$.

energii z jednego układu /współrzędna $x/$ do drugiego/współrzędna $\theta /$ i z powrotem. Na rys. 1.1 przedstawiono charakter drgań układu $x/t/$ i $\theta/t/$ gdy w układzie nie występuje rezonans wewnętrzny $\omega_x \neq 2\omega_\theta$ /rys. 1a/ i przy występowaniu rezonansu wewnętrznego $\omega_x = 2\omega_\theta$ /rys. 1b/.

Układ ten analizowało teoretycznie i doświadczalnie wielu autorów między innymi Van Der Burgh [32], Srinirasan i Sanaker [24], Ewan-Iwanowski [7]. Zjawisko przepływu energii między poszczególnymi postaciami wywołane współmiernością częstości własnych i znane w literaturze również pod nazwą „drżania autoparametryczne” badane było również dla innych układów autonomicznych np. układ belki i wahadła matematycznego - Sevin [24], Struble i Heinbockel [27], Baïr [2].

Ogólniejszą teorię i klasyfikację w oparciu o metody perturbacyjne znaleźć można w pracach Czeszankowa [4,5,6], Samojlenki i Momota [17,18], Sethny [19,20,21,22].

Odmienne efekty współmierności częstości własnych występują w układach dysypacyjnych nieautonomicznych, przy czym szczególnej analizie poddano układy wzbudzone siłami harmonicznymi. Szczególnie interesującym jest przypadek kiedy w układzie występuje jednocześnie rezonans zewnętrzny, tj. gdy istnieją liczby całkowite m_1, \dots, m_p nie wszystkie równe zero i liczba m_j takie że spełniony jest warunek:

$$/1.2/ \quad \sum_{s=1}^p m_s \omega_s + m_j \nu = 0, \quad p \leq n,$$

gdzie ν - częstość siły wzbudzającej,
 $m_j = 1, 2, 3, \dots,$

oraz gdy wśród częstości $\omega_1, \dots, \omega_p$ są częstości współmierne:

$$/1.3/ \quad \sum_{s=1}^p k_s \omega_s = 0.$$

W przypadku gdy rezonansem zewnętrznym jest rezonans główny, tj. gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu jednej z częstości własnych:

$$/1.4/ \quad \nu \approx \omega_k,$$

efektem współmierności częstości własnych jest „wciąganie” do rezonansu oprócz współrzędnej normalnej rezonansowej ξ_k ,

również innych współrzędnych \sum_S odpowiadających częstościom własnym ω_s , współmiernym z ω_k .

Badaniem ustalonej odpowiedzi układu będącego w stanie rezonansu zewnętrznego i wewnętrznego zajmowali się między innymi Sethna [19,21], Tondl [29,30], Piszczek [16], Baar i Nelson [2], Haxton i Bayr [9], Nayfeh, Mook i Sridhar [14,15], Yamamoto, Yasuda i Nagasaka [34], Yamamoto i Yasuda [33]. Analizowali oni nieliniowe układy drgające dyskretne [9,10,19,21,29,30,33] i ciągłe [2,14,15,16] a sprowadzające się przeważnie do układów o dwóch stopniach swobody z nieliniowościami typu kwadratowego [2,7,16,21,29,30], sześciennego [14,15,19,30] lub mieszanego - kwadratowego i sześciennego [30,33,34].

Teoretyczne badania przeprowadzane były za pomocą przybliżonych metod analitycznych - w pierwszym przybliżeniu za pomocą metody uśredniania.

Stosowane przez różnych autorów różne procedury, oznaczenia i współrzędne utrudniały w znacznej mierze zestawienie, porównanie i analizę uzyskanych wyników.

Celem obecnego opracowania jest:

- przedstawienie jednolitej procedury badania efektów rezonansów wewnętrznych w układach o n stopniach swobody przy zewnętrznym rezonansie głównym za pomocą metody uśredniania,
- pokazanie w oparciu o metodę uśredniania próby klasyfikacji typów rezonansów wewnętrznych wielopostaciowych i wskazanie kierunków dalszych badań,
- przegląd i analiza wyników prac nad rezonansami wewnętrznymi omawianymi we współczesnej literaturze /w oparciu o jednolity system oznaczeń i metodę uśredniania/, przegląd w większości obejmuje tylko te prace, w których oprócz rozważań teoretycznych przeprowadzone były badania doświadczalne, przy czym do badań doświadczalnych zaliczone została numeryczna lub analogowa symulacja równań ruchu układu.

2. Ogólne równania i badanie rezonansów wewnętrznych metodą uśredniania

Rozważamy układy dysypacyjne wzbudzone siłami harmonicznymi opisane układami równań różniczkowych drugiego rzędu:

$$/2.1/ \quad A\ddot{q} + C\dot{q} + \mu f/q/ + \varphi/q, \dot{q}/ - P \cos \nu t = 0,$$

gdzie $q = \text{col } [q_1, \dots, q_n]$ - współrzędne uogólnione, $A = \text{diag } [m_1]$ - macierz bezwładności, C - macierz sztywności, kwadratowa, symetryczna, dodatnio określona, $f = \text{col } [f_1, \dots, f_n]$ - reprezentuje nieliniową część sił sprężystych, $\varphi = \text{col } [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ reprezentuje siły tłumienia.

Układy ciągłe opisane będą równaniami cząstkowymi w postaci:

$$/2.2/ \quad m/x/ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + L/w/ + L_1/w/ + N/w/ - p/x/ \cos \nu t = 0,$$

z warunkami brzegowymi $B/w/ = 0$ na brzegu Γ , gdzie $L/w/$ i $L_1/w/$ odpow. liniowy i nieliniowy operator zmiennych przestrzennych odpowiadający liniowej i nieliniowej części sił sprężystych, $N/w/$ - operator tłumienia, $p/x/$ - amplituda siły wymuszającej.

Obie odmiany modeli /2.1/ i /2.2/ sprowadzamy do jednego przez wprowadzenie współrzędnych normalnych ξ_1, \dots, ξ_n . Tak więc dla układu /2.1/ przez wprowadzenie transformacji:

$$/2.3/ \quad q_1/t/ = \sum_{j=1}^n b_{1j} \xi_j/t/,$$

gdzie b_{1j} , $1, j = 1, 2, \dots, n$ są współczynnikami postaci własnych układu /2.1/, oraz dla układów ciągłych /2.2/ przez zastosowanie przybliżenia:

$$/2.4/ \quad w/x, t/ = \sum_{j=1}^n \psi_j/x/ \xi_j/t/ ,$$

gdzie $\psi_j/x/$ - znane liniowe funkcje x /postacie własne układu liniowego przy $L_1/w/ = N/w/ = p/x/ = 0/$.

Dla obu układów /2.1/ i /2.2/ otrzymamy równania ruchu w formie:

$$/2.5/ \quad M\ddot{\xi} + \Omega^2 \xi + F/\xi, \dot{\xi}/ - Q \cos \nu t = 0,$$

gdzie

$$M_j = \sum_{j=1}^n m_1 b_{1j}^2 - \text{dla } /2.1/,$$

$$M_j = \int_0^1 m/x/ \psi_j^2/x/ dx - \text{dla } /2.2/.$$

Tak więc układ równań /2.5/ traktujemy jako wspólny przy opisie zarówno drgań układów o skupionych masach jak i układów o ciągłym rozkładzie mas i będzie przedmiotem dalszych badań.

Założmy, że spełniony jest warunek zewnętrznego rezonansu głównego tj. $\nu \approx \omega_k$ i rozważmy najpierw typowy przypadek bez rezonansu wewnętrznego, tj. gdy częstości własne układu nie są współmierne. Wówczas rozwiązanie układu /2.5/ w pierwszym przybliżeniu zakładamy w postaci:

$$\xi_k = a_k \cos \nu t + \psi /$$

/2.6/

$$\xi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n,$$

gdzie a_k, ψ - pewne stałe wyznaczone metodą uśredniania.

Tak więc w tym przypadku tylko współrzędna rezonansowa ξ_k jest różna od zera. Współrzędne nierezonansowe $\xi_j, j \neq k$, w rozwiązaniu w pierwszym przybliżeniu są równe zero. Rozwiązanie takie było dalej badane nazywając je "jednopostaciowym". Powracając bowiem do zmiennych q_1/t i $w/x, t$ otrzymamy wówczas:

$$q_1/t = b_{1k} \xi_k/t \quad - \text{dla /2.3/},$$

/2.7/

$$w/x, t = \psi_k/x / \xi_k/t \quad - \text{dla /2.4/},$$

a więc są to rozwiązania, w których drgania układu scharakteryzowane są jedną postacią ψ_k/x lub b_{1k} , $i = 1, 2, \dots, n$.

Założenie takie stosowane jest przy badaniu drgań rezonansowych szerokiej klasy układów zawierających masy skupione jak i elementów konstrukcji: belek, płyt, powłok itp.

Jeśli jednak choć jedna z częstości własnych jest współmierna z ω_k , wówczas okazuje się, że odpowiedź układu znacznie różni się od odpowiedzi teoretycznej. Odpowiedź układu przestaje być "jednopostaciowa", a do rozwiązania zostaje "wciągnięta" dodatkowo współrzędna $\xi_j, j = 1, 2, \dots, r, r \leq n$.

Zbadajmy więc rozwiązanie ustalone układu /2.5/ przy założeniu, że $r-1$ częstości własnych jest współmiernych z częstością ω_k . Warunek ten zapiszemy ogólnie w postaci:

$$/2.8/ \quad k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + \dots + k_k \omega_k + \dots + k_r \omega_r = 0,$$

gdzie k_1, k_2, \dots, k_r - liczby całkowite; bądź też w postaci:

$$/2.9/ \quad \frac{\omega_1}{\omega_k} = \frac{s_1}{s_k} = s_{k1},$$

gdzie s_1, s_k - liczby całkowite, $s_1, s_k = 1, 2, 3, \dots$

Stosując wprowadzone oznaczenia /2.9/, równania ruchu /2.5/ przekształcimy najpierw do postaci:

$$/2.10/ \quad \begin{aligned} \ddot{\zeta}_k + \nu^2 \zeta_k &= \nu^2 - \omega_k^2 / \zeta_k - \mu_{F_k} / \zeta_1, \dots, \zeta_r, -\dot{\zeta}_1, \dots, \dot{\zeta}_r / \\ &+ Q_k \cos \nu t, \\ \ddot{\zeta}_i + s_{k1}^2 \nu^2 \zeta_i &= s_{k1}^2 \nu^2 - \omega_k^2 / \zeta_i - \mu_{F_1} / \zeta_1, \dots, \zeta_r, -\dot{\zeta}_1, \dots, \dot{\zeta}_r / \\ &+ Q_i \cos \nu t, \\ i &= 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r, \\ \ddot{\zeta}_j + \omega_j^2 \zeta_j &= -\mu_{F_j} / \zeta_{r+1}, \dots, \zeta_n, -\dot{\zeta}_{r+1}, \dots, -\dot{\zeta}_n / + \\ &+ Q_j \cos \nu t, \\ j &= r+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Efekt rezonansu wewnętrznego uzyskano zakładając, że nie tylko współrzędna rezonansowa, lecz i współrzędne ζ_1 odpowiadające częstościom współmiernym z ω_k są różne od zera:

$$/2.11/ \quad \begin{aligned} \zeta_k &= a_k \cos \nu t + \psi_k /, \\ \zeta_i &= a_i \cos / s_{k1} \nu t + \psi_i /, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r, \\ \zeta_j &= 0, \quad j \neq 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

Dla wyznaczenia amplitud a_1, \dots, a_r i kątów fazowych ψ_1, \dots, ψ_r stosujemy metodę uśredniania. W tym celu najpierw traktujemy te wielkości jako nowe zmienne w czasie $a_1 = a_1 / t$, $\psi_1 = \psi_1 / t$ i przekształcimy równania /2.10/ do postaci:

$$\begin{aligned}
 \frac{da_1}{dt} &= \frac{1}{s_{k1} \dot{\psi}} \left[-/s_{k1}^2 \dot{\psi}^2 - \omega_1^2 / a_1 \cos \theta_1 - Q_1 \cos \dot{\psi} t + \right. \\
 &\quad \left. + \mu \bar{F}_1 / a_1, \dots, a_r, \theta_1, \dots, \theta_r / \right] \sin \theta_1 dt, \\
 /2.12/ \quad \frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{1}{a_1 s_{k1} \dot{\psi}} \left[-/s_{k1}^2 \dot{\psi}^2 - \omega_1^2 / a_1 \cos \theta_1 - Q_1 \cos \dot{\psi} t + \right. \\
 &\quad \left. + \mu \bar{F}_1 / a_1, \dots, a_r, \theta_1, \dots, \theta_r / \right] \cos \theta_1 dt,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\theta_1 = s_{k1} \dot{\psi} t + \psi_1,$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_1 / a_1, \dots, a_r, \theta_1, \dots, \theta_r / &= F_1 / a_1 \cos \theta_1, \dots, a_r \cos \theta_r, \\
 -a_1 \dot{\psi} s_{k1} \sin \theta_1, \dots, -a_r \dot{\psi} s_{kr} \sin \theta_r / &.
 \end{aligned}$$

Uśredniając w czasie prawe strony równań /2.12/ otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \frac{da_1}{dt} &= \frac{1}{s_{k1} \dot{\psi}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[-/s_{k1}^2 \dot{\psi}^2 - \omega_1^2 / a_1 \cos \theta_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \mu \bar{F}_1 / a_1, \dots, a_r, \theta_1, \dots, \theta_r / - Q_1 \cos \dot{\psi} t \right] \sin \theta_1 dt, \\
 /2.13/ \quad \frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{1}{a_1 s_{k1} \dot{\psi}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[-/s_{k1}^2 \dot{\psi}^2 - \omega_1^2 / a_1 \cos \theta_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \mu \bar{F}_1 / a_1, \dots, a_r, \theta_1, \dots, \theta_r / - Q_1 \cos \dot{\psi} t \right] \cos \theta_1 dt.
 \end{aligned}$$

Po częściowym całkowaniu otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 \frac{da_1}{dt} &= \frac{1}{s_{k1} \dot{\psi}} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mu \bar{F}_1 / a_1, \dots, a_r, \theta_1, \dots, \theta_r / \sin \theta_1 dt - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \delta_{k1} Q_1 \sin \psi_1 \right], \\
 /2.14/ \quad \frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{1}{a_1 s_{k1} \dot{\psi}} \left[\frac{1}{2} /s_{k1}^2 \dot{\psi}^2 - \omega_1^2 / a_1 - \frac{1}{2} \delta_{k1} Q_1 \cos \psi_1 + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mu \bar{f}_i / a_1, \dots, a_r, \theta_1, \dots, \theta_r / \cos \theta_i dt ,$$

gdzie δ_{ki} - delta Kroneckera, $i, k = 1, 2, \dots, r$.

Rozważmy szczegółowiej równania /2.14/ dla amplitud współrzędnych nierezonansowych ζ_i , $i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots$. Możemy zapisać je następująco:

$$\begin{aligned} /2.15/ \quad \frac{da_i}{dt} &= \frac{1}{s_{ki}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mu \bar{f}_i / a_1, \dots, a_r, \theta_1, \dots, \theta_r / \sin \theta_i dt \equiv \\ &= A_i / a_1, \dots, a_r, \psi_1, \dots, \psi_r / , \\ & \quad i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r. \end{aligned}$$

Aby zgodnie z założeniami amplitudy współrzędnych ζ_i , $i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r$, mogły być różne od zera, prawe strony /2.15/ muszą być równe zero. Warunek ten jest równoważny następującemu warunkowi:

$$/2.16/ \quad A_i / 0, \dots, 0, \psi_1, \dots, \psi_r / \neq 0.$$

Celem zbadania warunku:

$$/2.17/ \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mu \bar{f}_1 / a_1, \dots, a_r, \theta_1, \dots, \theta_r / \sin \theta_1 dt = 0,$$

przedstawimy funkcję \bar{f}_1 w formie uogólnionego szeregu Fouriera:

$$\begin{aligned} /2.18/ \quad \bar{f}_1 &= P_0^{(i)} + P^{(i)} \cos \theta_1 + G^{(i)} \sin \theta_1 + \\ &+ \sum_m P_{1, m_1, m_2, \dots} \cos / m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2 + \dots + m_k \theta_k + \\ &+ \dots + m_r \theta_r / + \sum_m G_{1, m_1, m_2, \dots} \sin / m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2 + \\ &+ \dots + m_k \theta_k + \dots + m_r \theta_r / , \end{aligned}$$

gdzie \sum_m oznacza sumę po wszystkich $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_r =$

$= 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ za wyjątkiem przypadku, kiedy $m_k = \pm 1$ a pozostałe m_i , $i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r$ są równe zero.

Zauważmy, że współczynniki $G^{(i)}$ przy $\sin \theta_i$ są w rozważanych układach dysypacyjnych różne od zera jeśli tylko $a_i \neq 0$. Zatem,

aby warunek $A_i = 0$ mógł być spełniony, w rozwinięciu w szereg Fouriera funkcji \bar{F}_1 muszą znaleźć się dodatkowe człony z $\sin \theta_1$. Człony takie uzyskamy, jeśli wśród kombinacji współczynników m_1, \dots, m_r występujących w /2.18/ znajdują się takie, że spełniony będzie warunek:

$$\begin{aligned} /2.19/ \quad m_1 \theta_1 + \dots + m_k \theta_k + \dots + m_r \theta_r &= \bar{\tau} \theta_1 + \varphi, \\ i &= 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r, \end{aligned}$$

warunek ten odpowiada zależności między częstotliwościami:

$$/2.20/ \quad m_1 \omega_1 + \dots + m_k \omega_k + \dots + m_r \omega_r = \bar{\tau} \omega_1$$

lub

$$/2.21/ \quad m_1 \omega_1 + \dots + m_k \omega_k + \dots + /m_1 \bar{\tau} + 1/ \omega_1 + \dots + m_r \omega_r = 0.$$

Tak więc widzimy, że warunek $A_i = 0$ dla współrzędnych nierezonansowych sprowadza się do warunku aby częstotliwości $\omega_1, \dots, \omega_r$ były współmierne /gdyż związek /2.21/ jest równoważny zależności /2.8//, lecz współczynniki m_1, \dots, m_r nie są tu już dowolne, zależą one od formy funkcji nieliniowej. Zależność ta pozwala więc na wyznaczenie wartości współczynników k_1, \dots, k_r w /2.8/, dla których dla danego typu nieliniowości może wystąpić rezonans wewnętrzny.

Jeżeli założymy, że warunki /2.19 - 2.21/ są spełnione, wówczas otrzymamy w rozwinięciu /2.18/ dodatkowe człony z $\sin \theta_1$ i $\cos \theta_1$, $i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r$, które oznaczymy symbolami $G_c^{(i)}$ i $F_c^{(i)}$, tak że /2.18/ zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} /2.22/ \quad \bar{F}_1 &= F_o^{(i)} + [F^{(i)} + F_c^{(i)}] \cos \theta_1 + [G^{(i)} + G_c^{(i)}] \sin \theta_1 + \\ &+ \text{wyższe harmoniczne.} \end{aligned}$$

Równanie $A_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r$ sprowadzamy wtedy do prostej postaci:

$$/2.23/ \quad G^{(i)} + G_c^{(i)} = 0,$$

które łącznie z /2.9/ zapewnia istnienie niezerowych amplitud a_1, \dots, a_r współrzędnych nierezonansowych.

Zależności /2.19/ mogą stanowić podstawę do wyznaczenia wszystkich typów rezonansów wewnętrznych jakie mogą się pojawić przy danej formie funkcji nieliniowej. Rozważmy to szczególnie dla trzech przykładów, gdy nieliniowa część sił sprężystych opisana jest funkcją typu ζ^2 , ζ^3 lub ζ^5 .

Przykład I.

Załóżmy, że nieliniowa część sił sprężystych opisana jest funkcją typu kwadratowego, a więc:

$$f_1' = \sum_{l,j=1}^r \zeta_l \zeta_j,$$

a po podstawieniu /2.11/ otrzymamy:

$$\begin{aligned} /2.24/ \quad f_1' &= \frac{1}{2} \left[a_k^2 + \sum_{l=1, l \neq k}^r a_l^2 \right] + \frac{1}{2} \left[\sum_{l=1, l \neq k}^r a_l^2 \cos 2\theta_l + a_k^2 \cos 2\theta_k \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{l,j=1 \\ l \neq j; l,j \neq k}}^r a_l a_j \cos / \theta_l \pm \theta_j / + \frac{1}{2} \sum_{l=1, l \neq k}^r a_k a_l \cos / \theta_k \pm \theta_l /. \end{aligned}$$

Analizując /2.24/ stwierdzamy, że możliwe są następujące typy rozwiązań:

1. Rozwiązania dwupostaciowe.

Jedna z częstotści ω_1 jest współmierna z częstotścią rezonansową ω_k . Otrzymamy wówczas rozwiązanie dwupostaciowe, tj. oprócz $A_k = 0$ również $A_i = 0$ dla następujących przypadków:

a/ $s_{k1} = \omega_1 / \omega_k = 1/2$.

Dodatkowe człony $G_c^{(i)}$ uzyskamy z harmonicznych typu:

$$\theta_k - \theta_1 = \omega_k t / 1 - s_{k1} / + \psi_k - \psi_1 = \theta_1 + \psi_k - 2\psi_1$$

b/ $s_{k1} = \omega_1 / \omega_k = 2$.

Dodatkowe człony $G_c^{(i)}$ uzyskamy z wyrażeń:

$$2\theta_k = 2\omega_k t + 2\psi_k = \theta_1 + 2\psi_k - \psi_1$$

2. Rozwiązanie trzypostaciowe - dwie częstości ω_1 i ω_j są współmierne z ω_k .

Warunki $A_i = 0$ i $A_j = 0$ będą spełnione jeśli:

a/ $s_{k1} = \omega_1/\omega_k = 1/2$, $s_{kj} = \omega_j/\omega_k = 3/2$.

Dodatkowe człony $G_c^{(i)}$ i $G_c^{(j)}$ otrzymamy z:

$$\theta_k - \theta_i = \omega_k t/1 - s_{k1}/ + \psi_k - \psi_1 = \theta_i + \psi_k - 2\psi_1, s_{k1} = \frac{1}{2},$$

$$\theta_k + \theta_i = \theta_j + \psi_k + \psi_1 - \psi_j, s_{kj} = 3/2.$$

b/ $s_{k1} = \omega_1/\omega_k = 2$, $s_{kj} = \omega_j/\omega_k = 3$.

Dodatkowe człony $G_c^{(i)}$ i $G_c^{(j)}$ otrzymamy z:

$$2\theta_k = \theta_i + 2\psi_k - \psi_1, s_{k1} = 2,$$

$$\theta_k + \theta_i = \theta_j + \psi_k + \psi_1 - \psi_j, s_{kj} = 3.$$

c/ $s_{k1} = \omega_1/\omega_k = 1/2$, $s_{kj} = \omega_j/\omega_k = 2$.

Dodatkowe człony $G_c^{(i)}$ i $G_c^{(j)}$ otrzymamy z:

$$\theta_k - \theta_i = \theta_i + \psi_k - 2\psi_1, s_{k1} = 1/2,$$

$$2\theta_k = \theta_j + 2\psi_k - \psi_j, s_{kj} = 2.$$

3. Rozwiązanie czteropostaciowe - trzy częstości ω_1 , ω_j i ω_l są współmierne z ω_k .

Warunki $A_i = 0$, $A_j = 0$ i $A_l = 0$ będą spełnione jeśli:

a/ $s_{k1} = \omega_1/\omega_k = 2$, $s_{kj} = \omega_j/\omega_k = 3$, $s_{kl} = \omega_l/\omega_k = 5$.

Dodatkowe człony $G_c^{(i)}$, $G_c^{(j)}$ i $G_c^{(l)}$ otrzymamy z:

$$2\theta_k = \theta_i + 2\psi_k - \psi_1, s_{k1} = 2,$$

$$\theta_k + \theta_i = \theta_j + \psi_k + \psi_1 - \psi_j, s_{kj} = 3,$$

$$\theta_i + \theta_j = \theta_l + \psi_1 + \psi_j - \psi_l, s_{kl} = 5.$$

b/ $s_{k1} = 1/2$, $s_{kj} = 3/2$, $s_{kl} = 2$,

$$\theta_k - \theta_i = \theta_i + \psi_k - 2\psi_1, s_{k1} = 1/2,$$

$$\theta_k + \theta_i = \theta_j + \psi_k + \psi_1 - \psi_j, s_{kj} = 3/2,$$

$$\theta_i + \theta_j = \theta_l + \psi_1 + \psi_j - \psi_l, s_{kl} = 2.$$

c/ $s_{k1} = 1/2$, $s_{kj} = 2$, $s_{kl} = 5/2$,

$$\theta_k - \theta_i = \theta_i + \psi_k - 2\psi_1, s_{k1} = 1/2,$$

$$2\theta_k = \theta_j + 2\psi_k - \psi_j,$$

$$s_{kj} = 2,$$

$$\theta_i + \theta_j = \theta_1 + \psi_i + \psi_j - \psi_1,$$

$$s_{k1} = 5/2.$$

Reasumując wyniki możemy stwierdzić, że w rozważanym przykładzie, tj. przy nieliniowości sprężystej typu kwadratowego dodatkowe człony $G_c^{(i)}$, $G_c^{(j)}$ i $G_c^{(k)}$ warunkujące istnienie rezonansów wewnętrznych mogą wystąpić przy spełnieniu warunków:

$$1. \quad k_k \omega_k + k_i \omega_i = \mp \omega_i, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{rozwiązanie} \\ \text{dwupostaciowe} \end{array}$$

$$k_k, k_i = 0, \mp 1, \mp 2, \quad |k_k| + |k_i| = 2, \quad i \neq k.$$

$$2. \quad k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_k \omega_k = \mp \omega_i, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{rozwiązanie} \\ \text{trzypostaciowe} \end{array}$$

$$k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_k \omega_k = \mp \omega_j, \quad i \neq j \neq k,$$

$$k_i, k_j, k_k = 0, \mp 1, \mp 2, \quad |k_i| + |k_j| + |k_k| = 2.$$

$$3. \quad k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_l \omega_l + k_k \omega_k = \mp \omega_i, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{rozwiązanie} \\ \text{czteropostaciowe} \end{array}$$

$$k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_l \omega_l + k_k \omega_k = \mp \omega_j,$$

$$k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_l \omega_l + k_k \omega_k = \mp \omega_l,$$

$$k_i, k_j, k_l, k_k = 0, \mp 1, \mp 2, \quad i \neq j \neq k \neq l,$$

$$|k_i| + |k_j| + |k_l| + |k_k| = 2.$$

Przykład II.

Nieliniowa część sił sprężystych opisana jest funkcją typu sześciennego tj.:

$$/2.25/ \quad f'_1 = \sum_{l=1, j, k=1}^r S_l S_j S_k =$$

$$= \frac{1}{4} a_k \cos 3\theta_k + \frac{3}{4} a_k^3 \cos \theta_k + \frac{1}{4} \sum_{l=1, l \neq k}^r a_l^3 \cos 3\theta_l + \frac{3}{4} \sum_{l=1, l \neq k}^r a_l^3 \cos \theta_l$$

$$+ \frac{3}{2} a_k \sum_{l=1, l \neq k}^r a_l^2 \cos \theta_k + \frac{3}{4} \sum_{l=1, l \neq k}^r a_l^2 a_k \cos / \theta_k \mp 2\theta_l / + \frac{3}{2} a_k^2 \times$$

$$\times \sum_{l=1, l \neq k}^r a_l \cos \theta_l + \frac{3}{4} a_k^2 \sum_{l=1, l \neq k}^r a_l \cos / 2\theta_k \mp \theta_l / + \frac{3}{8} a_k \sum_{l=1, l \neq k}^r a_l a_j \times$$

$$\times \cos / \theta_l \mp \theta_j \mp \theta_k / + \frac{1}{4} \sum_{m, l, j=1, m \neq l \neq j \neq k}^r a_m a_j a_l \cos / \theta_m \mp \theta_j \mp \theta_l /.$$

Analizując /2.25/ pod kątem istnienia dodatkowych członów $G_c^{(i)}$, $G_c^{(j)}$ i $G_c^{(k)}$ warunkujących istnienie rezonansów wewnętrznych możemy stwierdzić, że mogą one wystąpić przy spełnieniu poniższych warunków:

1. $k_i \omega_i + k_k \omega_k = \mp \omega_i$,
 $k_i, k_k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3$,
 $|k_i| + |k_k| = 3, \quad i \neq k$.
 } dla rozwiązań dwupostaciowych
2. $k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_k \omega_k = \mp \omega_i$,
 $k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_k \omega_k = \mp \omega_j$,
 $k_i, k_j, k_k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3$,
 $|k_i| + |k_j| + |k_k| = 3, \quad i \neq j \neq k$.
 } dla rozwiązań trzypostaciowych
3. $k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_l \omega_l + k_k \omega_k = \mp \omega_i$,
 $k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_l \omega_l + k_k \omega_k = \mp \omega_j$,
 $k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_l \omega_l + k_k \omega_k = \mp \omega_l$,
 $k_i, k_j, k_l, k_k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3$,
 $|k_i| + |k_j| + |k_l| + |k_k| = 3, \quad i \neq j \neq k \neq l$.
 } dla rozwiązań czteropostaciowych

Powyżej przedstawiono ogólne warunki współmierności częstości przy nieliniowości sprężystej typu sześciennego dla rozwiązań dwu-, trzy- i czteropostaciowych. Przykłady konkretnych wartości liczbowych na s_{ki} , s_{kj} i s_{kl} przedstawiono w Tab. I.

Przykład III.

Załóżmy jeszcze, że nieliniowa część sił sprężystych przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
 /2.26/ \quad f_i' &= \sum_{j, k, l, m, n=1}^r \zeta_j \zeta_k \zeta_l \zeta_m \zeta_n = \\
 &= \frac{1}{16} a_k^5 \left[\cos 5\theta_k + 10 \cos \theta_k + 5 \cos 3\theta_k \right] + \frac{5}{4} a_k^3 \sum_{j=l, j \neq k}^r a_j^2 \cos 3\theta_k +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{5}{16} a_k^4 \left\{ \sum_{j=1, j \neq k}^r a_j \left[\cos/4\theta_{k\mp} \theta_j/ + 4\cos/2\theta_{k\mp} \theta_j/ + 6\cos\theta_j \right] \right\} + \\
 & + \frac{5}{8} a_k^3 \sum_{j=1, j \neq k}^r a_j^2 \cos/2\theta_j \mp 3\theta_{k\prime} + \frac{15}{8} a_k^3 \sum_{j=1, j \neq k}^r a_j^2 \cos/2\theta_j \mp \theta_{k\prime} + \\
 & + \frac{15}{4} a_k^3 \sum_{j=1, j \neq k}^r a_j^2 \cos\theta_k + \frac{5}{8} a_k^3 \sum_{j=1, j \neq k}^r a_j a_1 \left[\cos/\theta_j \mp \theta_1 \mp 3\theta_{k\prime} + \right. \\
 & + \left. 3\cos/\theta_j \mp \theta_1 \mp \theta_{k\prime} \right] + \frac{5}{4} a_k^2 \sum_{j, m=1, j, m \neq k}^r a_j a_1 a_m \left[\cos/\theta_j \mp \theta_1 \mp \theta_m/ + \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2} \cos/\theta_j \mp \theta_1 \mp \theta_m \mp 2\theta_{k\prime} \right] + \frac{5}{16} a_k \sum_{j, l, m, n=1, j, l, m, n \neq k}^r a_j a_1 a_m a_n \cos/\theta_j \mp \theta_1 \\
 & \theta_m \mp \theta_n \mp \theta_{k\prime} + \frac{1}{16} \sum_{j, l, m, n, p=1, j, l, m, n, p \neq k}^r a_j a_1 a_m a_n a_p \cos/\theta_j \mp \theta_1 \mp \theta_m \mp \theta_n \mp \theta_{p\prime} / .
 \end{aligned}$$

Podobnie jak dla przykładu II, analizując rozwinięcie /2.26/ stwierdzamy, że dodatkowe czony $G_c^{(i)}$, $G_c^{(j)}$ i $G_c^{(k)}$ warunkujące możliwość istnienia rezonansów wewnętrznych, mogą wystąpić przy spełnieniu poniższych warunków:

1. Rozwiązania dwupostaciowe.

$$k_i \omega_i + k_k \omega_k = \mp \omega_i,$$

$$k_i, k_k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 4, \mp 5, \quad |k_i| + |k_k| = 3 \text{ lub } 5, \quad i \neq k.$$

2. Rozwiązania trzypostaciowe.

$$k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_k \omega_k = \mp \omega_i,$$

$$k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_k \omega_k = \mp \omega_j, \quad i \neq j \neq k,$$

$$k_i, k_j, k_k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 4, \mp 5, \quad |k_i| + |k_j| + |k_k| = 3 \text{ lub } 5.$$

3. Rozwiązania czteropostaciowe.

$$k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_l \omega_l + k_k \omega_k = \mp \omega_i,$$

$$k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_l \omega_l + k_k \omega_k = \mp \omega_j,$$

$$k_i \omega_i + k_j \omega_j + k_l \omega_l + k_k \omega_k = \mp \omega_l, \quad i \neq j \neq l \neq k,$$

$$k_i, k_j, k_l, k_k = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 4, \mp 5, \quad |k_i| + |k_j| + |k_l| + |k_k| = 3 \text{ lub } 5.$$

Przykłady konkretnych wartości na s_{kl} , s_{kj} i s_{kl} dla rozwiązań dwu-, trzy- i czteropostaciowych przedstawiono w Tab. I.

Tabela I.

Przykład	Typ rozwiązania Typ nieliniowości	dwupostaciowe		trzypostaciowe			czteropostaciowe			
		$\frac{\omega_1}{\omega_k}$	$\frac{\omega_k}{\omega_k}$	$\frac{\omega_1}{\omega_k}$	$\frac{\omega_j}{\omega_k}$	$\frac{\omega_k}{\omega_k}$	$\frac{\omega_1}{\omega_k}$	$\frac{\omega_j}{\omega_k}$	$\frac{\omega_l}{\omega_k}$	$\frac{\omega_k}{\omega_k}$
I	$\sum_{j,k=1}^r s_j s_k$	1/2	1	1/2	3/2	1	2	3	5	1
		2	1	2	3	1	1/2	3/2	2	1
II	$\sum_{j,k,l=1}^r s_j s_k s_l$	1/3	1	1/3	5/3	1	1/3	5/3	7/3	1
		3	1	1/3	2/3	1	1/3	2/3	4/3	1
				1/3	7/3	1	2	3	4	1
				3	5	1	3	5	7	1
			
III	$\sum_{j,k,l,m,n=1}^r s_j s_k s_l s_m s_n$	1/3	1	1/5	3/5	1	2	3	4	1
		1/5	1	1/5	9/5	1	3	5	7	1
		2	1	1/3	5/3	1	3	5	9	1
		3	1	3	5	1	1/5	3/5	7/5	1
			

3. Przykłady układów z rezonansem wewnętrznym

W punkcie tym przedstawimy niektóre wyniki prac autorów poruszających kwestię rezonansów wewnętrznych w nieliniowych, nieautonomicznych układach drgających.

W ostatnich latach szczegółowo zbadano rezonans wewnętrzny typu $2\omega_1 = \omega_j$ przy nieliniowości typu kwadratowego. Wymień tu należy prace P.R.Sethny [21], A.Tondla [29,30], R.M. Evan-Iwanowskiego [7], K.Piszozka [16], A.D.S.Barra i D.J. Nelsona [2]. W większości przypadków były to układy o dwóch

stopniach swobody, rozważania ograniczały się do rozwiązań dwupostaciowych, a możliwymi rezonansami wewnętrznymi okazały się być: $2\omega_1 \approx \omega_j$ /Tab. I/. Z analizą tego samego typu rezonansu wewnętrznego przy nieliniowościach sprężystych typu kwadratowego i sześciennego łącznie, spotykamy się w pracach A.Tondla [30] i T.Yamamoto, K.Yasuda i I.Nagasaka [33,34] .

Tylko w nielicznych z prac badano rezonans wewnętrzny typu $3\omega_1 \approx \omega_j$, w układach z nieliniowością typu sześciennego /niektóre z możliwych rezonansów wewnętrznych dla tej nieliniowości podano w Tab.I / . Wymknijmy tu prace P.R.Sethny [19] , A.H.Nayfeh, Dean T.Mook i S.Sridhar [14] oraz A.H.Nayfeh, Dean T.Mook i D.W.Lobitz [15] .

W wymienionych powyżej pracach mieliśmy do czynienia z rozwiązaniami dwupostaciowymi. W układach o więcej niż dwu stopniach swobody mogą występować rozwiązania wielopostaciowe - tzw. kombinowane. Jako przykład mogą służyć prace A.D.S.Barra i D.J. Nelsona [2], R.M.Evan-Iwanowskiego [7] oraz A.H.Nayfeh, Dean T.Mooka i S.Sridhara [14] .

3.1. Rezonans wewnętrzny typu $2\omega_1 \approx \omega_j$.

Analizę nieliniowego układu drgającego o dwóch stopniach swobody z nieliniowością typu kwadratowego, a następnie klasyfikację badanych układów pod kątem istnienia rezonansu wewnętrznego przedstawia P.R.Sethna w pracy [20] . Równania ruchu badanego układu są wtedy następujące:

$$\begin{aligned} /3.1/ \quad \ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = & - \left[\sum_{s,t=1}^2 D_{is} \dot{\xi}_s + \sum_{s,t=1}^2 A_{ist} \xi_s \xi_t + \right. \\ & \left. + \sum_{s,t=1}^2 B_{ist} \dot{\xi}_s \dot{\xi}_t - Q_i \cos \nu t \right] , \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

bądź też w formie dogodnej przy metodzie uśredniania:

$$\begin{aligned} /3.2/ \quad \ddot{\xi}_i + s_{11}^2 \nu^2 \xi_i = & \varepsilon \left[\varepsilon^{-1} / s_{11}^2 \nu^2 - \omega_1^2 / \xi_1 - \right. \\ & \left. - f_1 / \xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2 / - Q_i \cos \nu t \right], \end{aligned}$$

gdzie $i = 1, 2$, $s_{11} = \omega_1 / \omega_1 = 1$, $s_{12} = \omega_2 / \omega_1 = 2$.

Zakłada się, że: $|s_{11}^2 \nu^2 - \omega_1^2| < \epsilon$.

W zależności od wartości przyjmowanych przez Q_1 i ν autor klasyfikuje badane układy jako:

- I. Nieautonomiczny z rezonansem wewnętrznym i zewnętrznym, gdy częstość wymuszenia ν jest w pobliżu niższej częstości własnej i $Q_1 \neq 0$ /przypadek superharmoniczny/.
- II. Nieautonomiczny z rezonansem wewnętrznym i zewnętrznym, gdy częstość wymuszenia ν jest w pobliżu wyższej częstości własnej i $Q_1 \neq 0$ /przypadek subharmoniczny/.
- III. Autonomiczny z rezonansem wewnętrznym albo nieautonomiczny z rezonansem wewnętrznym bez rezonansu zewnętrznego: $Q_1 = 0$ albo ν nie jest ani w pobliżu niższej ani wyższej częstości własnej.

Przy spełnieniu zależności: $\nu = \omega_1 + 0/\epsilon$ i $\omega_2 = 2\omega_1 + 0/\epsilon$, rozwiązanie układu /3.2/ zakładane jest w postaci:

$$/3.3/ \quad S_1/t/ = a_1/t/ \cos [s_{11} \nu t + \psi_1/t/], \quad i = 1, 2,$$

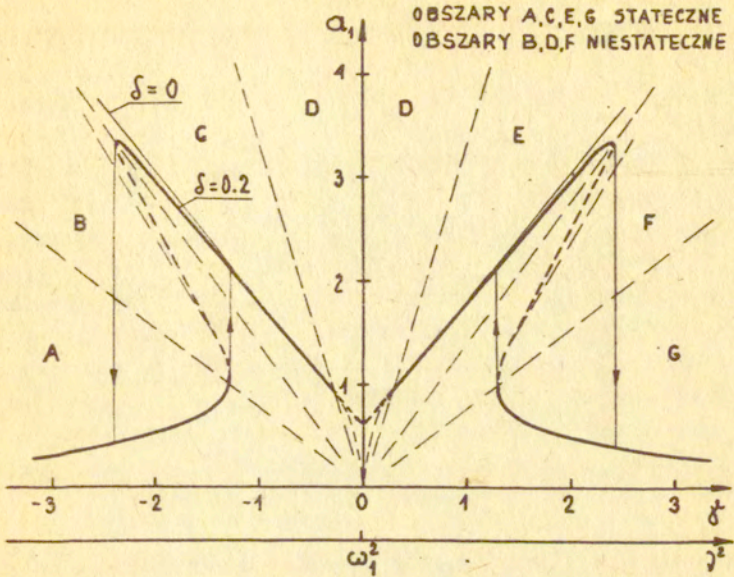
a do rozwiązywania wykorzystywana jest metoda uśredniania.

W dalszej kolejności przedstawimy niektóre wyniki uzyskane dla przypadków I i II. Na rys.3.1 pokazano krzywą rezonansową a_1 w funkcji δ , gdzie $\delta = \alpha/\omega_1^2 - \nu^2$, α - pewna stała, w przypadku gdy ν jest w pobliżu niższej częstości własnej. Badając stateczność założonego rozwiązania /3.3/ rozpatrywano rozwiązanie zaburzone. Na tej podstawie stwierdzono, że statecznymi są obszary A,C,E,G, zaś niestatecznymi obszary B,D,F.

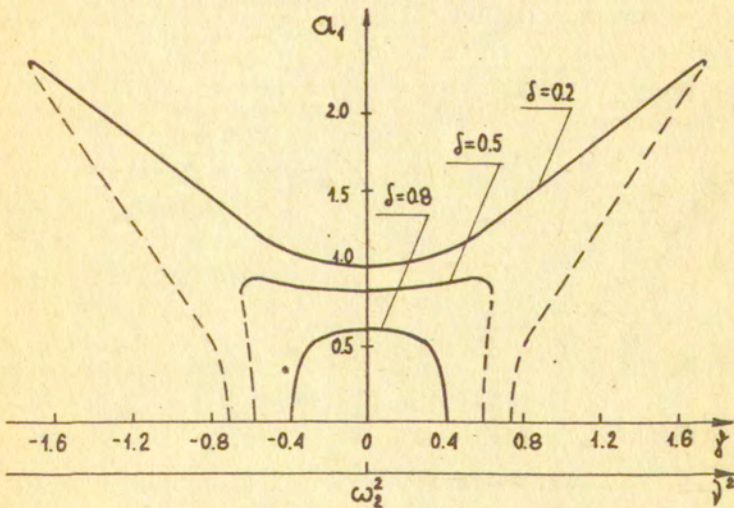
Przebieg krzywej rezonansowej a_1 zasadniczo różni się od dobrze znanej bez rezonansu wewnętrznego. Dla małego tłumienia /np. $\delta = 0.2$ / mamy dwa piki oraz dwa skoki amplitudy, zarówno dla częstości wymuszenia rosnącej jak i malejącej. Także amplituda współrzędnej "wciążanej" a_2 jest różna od zera:

$a_2^2 = a_1^4 / [\delta^2 + 4\delta^2]$, podczas gdy bez rezonansu wewnętrznego z dokładnością pierwszego przybliżenia $a_2 = 0$. Tak więc w przypadku kiedy $\nu \approx \omega_1$ zarówno a_1 jak i a_2 są różne od zera.

Nieco inaczej zachowywać się może układ w przypadku kiedy ν jest w pobliżu wyższej częstości własnej. Możliwe są wtedy dwa typy rozwiązań: 1. $a_1 = 0$ i $a_2 \neq 0$, a więc tak jak bez rezonansu wewnętrznego, 2. $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$, rezonansową jest te-



Rys. 3.1. Krzywa rezonansowa a_1 w przypadku gdy $\nu \approx \omega_1$.



Rys. 3.2. Krzywa rezonansowa a_1 w przypadku gdy $\nu \approx \omega_2$.

raz współrzędna ξ_2 z amplitudą a_2 , "wciąganą" w rezonans jest współrzędna ξ_1 z amplitudą a_1 . Na rys.3.2 pokazano przebieg amplitudy a_1 w przypadku kiedy ν jest bliskie ω_2 . Na amplitudę a_2 mamy zależność: $a_2^2 = \delta^2 + \gamma^2$. Przedstawione rezultaty na rys.3.1 i rys.3.2 są wynikami teoretycznymi.

Podobne wyniki, do tych uzyskanych przez Sethnę możemy znaleźć w pracy K.Piszczka [16]. Rozpatruje on drgania ustalone płaskiej belki, podpartej na końcach przy pomocy sztywnych podpór, sprężystość zamocowanych do podłoża. W środku belki umieszczono obciążenie oraz masę na mimośrodku. W tym przypadku także nieliniowość jest typu kwadratowego, a stosunek odpowiednich częstotliwości jak 1:2.

Także układ o dwóch stopniach swobody z nieliniowością typu kwadratowego i rezonansem wewnętrznym $2\omega_1 \approx \omega_2$ bada Tondl [29]. Równania ruchu są wtedy następujące:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + o_1/q_1 - q_2/ + \mu [k_1/\dot{q}_1 - \dot{q}_2/ - \alpha/q_1 - q_2/{}^2] &= \\ /3.4/ &= m_1 \varepsilon \nu^2 \cos \nu t, \\ m_2 \ddot{q}_2 + o_1/q_2 - q_1/ + o_2 q_2 + \mu [k_1/\dot{q}_2 - \dot{q}_1/ + /q_1 - q_2/{}^2] &= 0. \end{aligned}$$

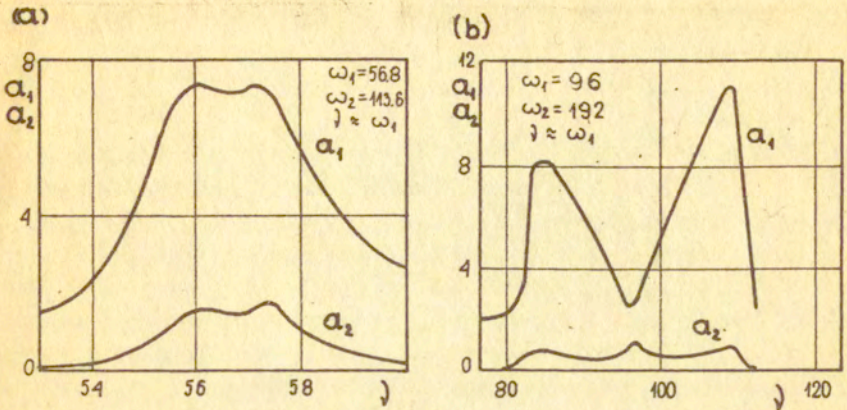
Przybliżone rozwiązanie układu /3.4/ zakłada się w postaci:

$$\begin{aligned} /3.5/ \quad q_1 &= a_1 \cos \nu t + \psi_1/ + a_2 \cos 2\nu t + \psi_2/, \\ q_2 &= a_1 b_{21} \cos \nu t + \psi_1/ + a_2 b_{22} \cos 2\nu t + \psi_2/, \end{aligned}$$

jeśli badamy układ w pobliżu niższej częstotliwości własnej.

Przykładowo na rys.3.3 pokazano krzywe rezonansowe: a_1 - składowa o okresie $2\pi/\nu$ i a_2 - składowa o okresie π/ν , dla częstotliwości wymuszenia w pobliżu $\nu \approx \omega_1$, przy dwóch różnych częstotliwościach własnych: $\omega_1 = 56.8$ i $\omega_1 = 96$, oraz przy następujących danych liczbowych:

$$\omega_1^2 = o_1/m_1 = 10^{-4} [\text{sek}^{-2}], \frac{k_1/m_1}{\omega_1} = 0.1, m_1/m_2 = 0.2, \frac{m\alpha\varepsilon}{o_1} = 0.14.$$



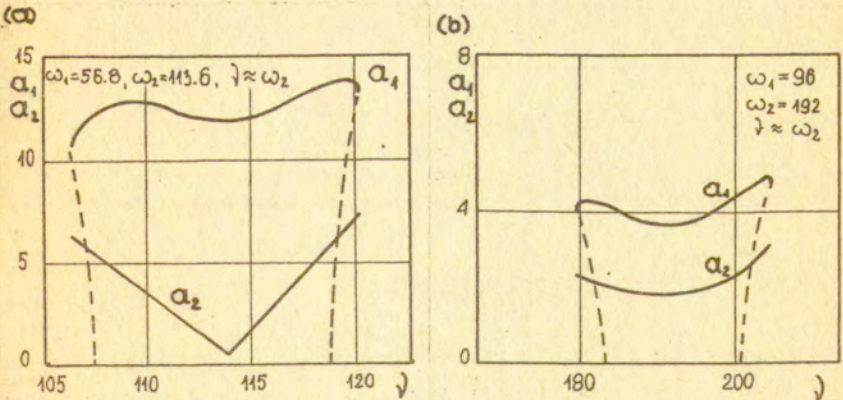
Rys. 3.3. Krzywe rezonansowe w przypadku kiedy $\nu \approx \omega_1$.

W przypadku drugim, kiedy $\nu \approx \omega_2$, rozwiązanie zakładamy w postaci:

$$a_1 = a_1 \cos \left[\nu/2 \cdot t + \psi_1 \right] + a_2 \cos \left[\nu t + \psi_2 \right],$$

/3.6/

$$a_2 = a_1 b_{21} \cos \left[\nu/2 \cdot t + \psi_1 \right] + a_2 b_{22} \cos \left[\nu t + \psi_2 \right].$$

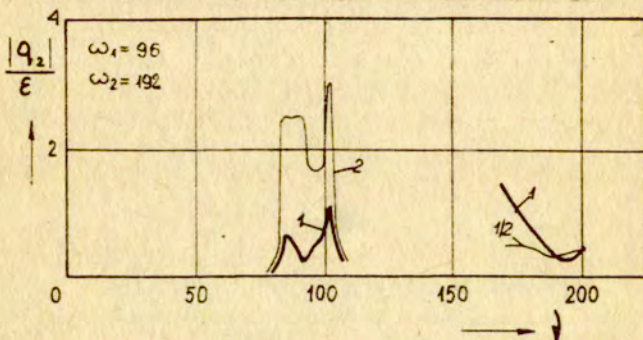


Rys. 3.4. Krzywe rezonansowe w przypadku kiedy $\nu \approx \omega_2$.

Na rys.3.4 pokazano krzywe rezonansowe: a_1 - składowa o okresie $4\pi/\omega$ i a_2 - składowa o okresie $2\pi/\omega$, w przypadku kiedy częstość wymuszenia jest w pobliżu wyższej częstości własnej $\omega \approx \omega_2$.

Krzywe rezonansowe przedstawione na rys.3.3 i 3.4 wyznaczono teoretycznie. Liniami ciągłymi zaznaczono część stateczną, przerywanymi część niestateczną / stateczność rozwiązań sprowadzono do zbadania rozwiązań zaburzonych, a następnie wykorzystano kryterium Hurwitza/.

Podsumowując: drgania przy rezonansie wewnętrznym typu $2\omega_1 = \omega_2$ w przypadku kiedy $\omega \approx \omega_1$, charakteryzują się "wciągnięciem" w rezonans zewnętrzny składowej rzędu drugiego, a w przypadku kiedy $\omega \approx \omega_2$ - składowej rzędu 1/2. Przykładowo na rys.3.5 pokazano udziały w amplitudzie $|q_2|$ składowych harmonicznych rzędu 1, 2 i 1/2.



Rys. 3.5. Udziały w amplitudzie $|q_2|$ harmonicznych rzędu 1, 2 i 1/2 przy częstości wymuszenia w pobliżu ω_1 i ω_2 .

Prześledźmy jeszcze za Tondlem [30] przykład innego układu o dwóch stopniach swobody, z nieliniowością typu kwadratowego, z rezonansem wewnętrznym $2\omega_1 = \omega_2$, wzbudzanego siłą periodyczną zawierającą pierwszą i drugą harmoniczną. Równania ruchu są wtedy następujące:

$$/3.7/ \quad \ddot{\xi}_1 + \delta_1 \dot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 + \beta \xi_1 \xi_2 = 0,$$

$$\ddot{\xi}_2 + \delta_2 \dot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 + \mu \xi_1^2 = P \cos \nu t + Q \cos 2\nu t,$$

gdzie $\omega_1^2 = 1$, $\omega_2^2 = 4$.

Rozpatrując rezonans przy niższej częstotliwości własnej rozwiązanie układu /3.7/ zakładane jest w postaci:

$$/3.8/ \quad \xi_1 = a_1 \cos \nu t + \psi_1 /,$$

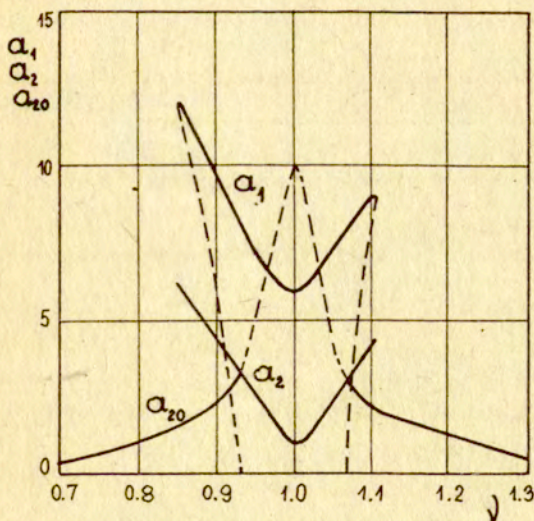
$$\xi_2 = \bar{a}_1 \cos \nu t + \varphi / + a_2 \cos 2\nu t + \psi_2 /.$$

Możliwe są dwa typy rozwiązań:

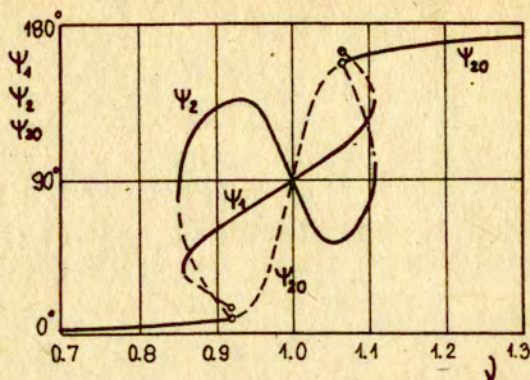
1. Rozwiązanie półtrywialne:

$$/3.9/ \quad \xi_1 = 0,$$

$$\xi_2 = \bar{a}_1 \cos \nu t + \varphi / + a_{20} \cos 2\nu t + \psi_{20} /.$$



Rys. 3.6. Krzywe rezonansowe dla $\nu \approx 1.0$.



Rys.3.7. Kąty przesunięć fazowych dla $\nu \approx 1.0$.

2. Rozwiązanie nietrywialne tj. $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ i $\bar{a}_1 \neq 0$.

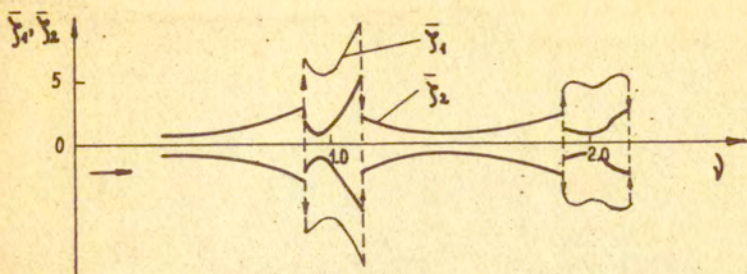
W analizie teoretycznej wyznaczono amplitudy a_1 , a_2 i a_{20} , zmiany kątów fazowych ψ_1 , ψ_2 i ψ_{20} w funkcji ν oraz wyznaczono obszary stateczności rozwiązań. Wyniki przedstawiono na rys.3.5 i 3.6, na których linią przerywaną zaznaczono rozwiązania niestateczne, ciągłą - stateczne. Do obliczeń przyjęto następujące dane:

$$\delta_1 = 0.05, \quad \delta_2 = 0.1, \quad \beta = 0.1, \quad P = 1.0, \quad Q = 2.0.$$

Przechodząc do analizy rezonansu w pobliżu wyższej częstotliwości własnej rozwiązania układu /3.7/ poszukuje się w postaci:

$$\begin{aligned} /3.10/ \quad \zeta_1 &= a_1 \cos [1/2\nu \cdot t + \psi_1], \\ \zeta_2 &= a_2 \cos [\nu t + \psi_2] + \bar{a}_1 \cos [2\nu t + \psi]. \end{aligned}$$

Dalsza analiza jest analogiczna jak dla przypadku kiedy $\nu \approx 1$ i nie będziemy jej przedstawiali. Warto zaznaczyć, że zarówno w rozwiązaniu /3.8/ jak i /3.10/ $\bar{a}_1 \ll a_1, a_2$. Jeśli tłumienie nie jest zbyt duże, to dla każdego rezonansu istnieje przedział częstotliwości ν , na brzegach którego jedno rozwiązanie przechodzi w drugie /półtrywialne w nietrywialne/.



Rys. 3.8. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe uzyskane na maszynie analogowej.

Dla weryfikacji rozważań teoretycznych zamodelowano równania /3.7/ na maszynie analogowej, a wyniki przedstawiono na rys.3.8. Warto podkreślić dobrą zgodność wyników teoretycznych z analogowymi.

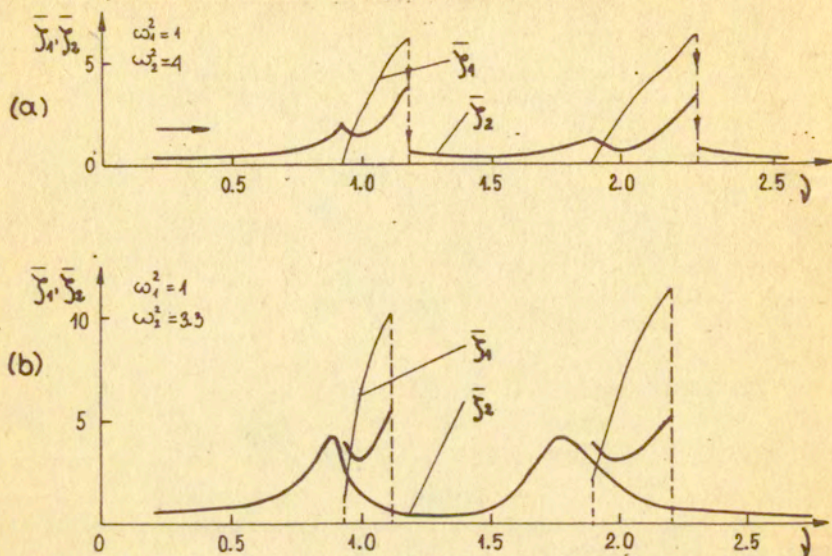
Przedstawimy jeszcze za Tondlem [30], odpowiedzi układu uzyskane na maszynie analogowej, którego równania ruchu różnią się od równań /3.7/ tylko rodzajem nieliniowości. Zamiast $\dot{\zeta}_1^2$ mamy obecnie $|\zeta_1|\zeta_2$, a więc:

$$\begin{aligned}
 /3.11/ \quad & \ddot{\zeta}_1 + \delta_1 \dot{\zeta}_1 + \omega_1^2 \zeta_1 + \beta \zeta_1 \zeta_2 = 0, \\
 & \ddot{\zeta}_2 + \delta_2 \dot{\zeta}_2 + \omega_2^2 \zeta_2 + \mu |\zeta_1| \zeta_2 = P \cos \nu t + Q \cos 2\nu t.
 \end{aligned}$$

Na rys.3.9 pokazano charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe uzyskane przy następujących danych:

$$\omega_1^2 = 1, \quad \beta = \delta_1 = \delta_2 = 0.1, \quad P = Q = 1.0, \quad \mu = 0.2 \quad \text{oraz} \\
 \omega_2^2 = 4 \quad - \text{rys.3.9a} \quad \text{i} \quad \omega_2^2 = 3.3 \quad - \text{rys.3.9b.}$$

Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe przedstawione na rys.3.9b odpowiadają układowi, w którym rozwiązanie nietrywialne można otrzymać nadając odpowiednie warunki początkowe. W przeciwnym razie uzyskamy rozwiązanie półtrywialne, a więc takie jak bez rezonansu wewnętrznego / w całym zakresie częstotliwości ν /.



Rys.3.9. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe:
 a/ dla $\omega_2^2 = 4.0$, b/ dla $\omega_2^2 = 3.3$.

W przedstawionych do tej pory przykładach nieliniowość była typu kwadratowego. Omówimy obecnie dwa przykłady, w których nieliniowość jest typu kwadratowego i sześciennego łącznie [30,33,34] .

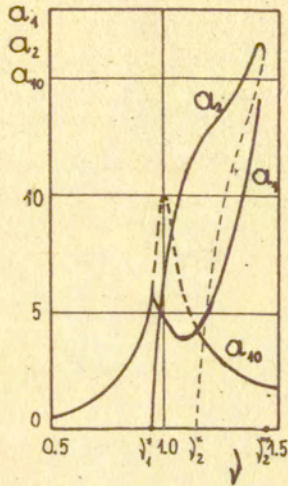
W pierwszej kolejności przedstawimy pracę Tondla [30] .
 Równania ruchu analizowanego układu mają postać:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + D_1 \dot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 + \beta_0 y_1 y_2^2 &= \nu^2 \cos \nu t, \\ \ddot{y}_2 + D_2 \dot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 + \gamma_0 y_1 y_2 &= \nu^2 \sin \nu t, \end{aligned} \quad /3.12/$$

gdzie $\omega_1^2 = 1$, $\omega_2^2 = 1/4$. Autor bada rezonans wewnętrzny typu $2\omega_2 = \omega_1$, a więc tak jak przy nieliniowości typu kwadratowego. Rozwiązanie /3.12/ w pobliżu $\omega_1 / \nu \approx 1/$ poszukiwane jest w postaci:

$$/3.13/ \quad \xi_1 = a \cos \nu t + b \sin \nu t = a_1 \cos [\nu t - \psi_1],$$

$$\xi_2 = c \cos 1/2 \nu t + d \sin 1/2 \nu t = a_2 \cos [1/2 \nu t - \psi_2].$$



Rys.3.10. Krzywe rezonansowe dla $\nu \approx 1.0$.

Przechodząc do analizy stanów ustalonych stwierdza, że możliwe są następujące typy rozwiązań:

1. $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$.
2. Istnieje półtrywialne rozwiązanie $| a_1 = a_{10} \neq 0$ i $a_2 = 0$ dla wszystkich ν , natomiast nietrywialne rozwiązanie $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$ istnieje tylko w pewnym przedziale częstości ν .
Warto zaznaczyć, że w zależności na a_{10} człony nieliniowe nie występują.

Rozważania teoretyczne, tj. wyznaczenie krzywych rezonansowych - rys.3.10, zbadanie stateczności rozwiązań, a także wyznaczenie obszarów przyciągania rozwiązań: półtrywialnego i nietrywialnego wykonano dla przykładu o następujących danych liczbowych:

$$\omega_1^2 = 1, \quad \omega_2^2 = 0.3, \quad D_1 = D_2 = 0.1, \quad \gamma_0 = 3 \cdot 10^{-2}, \quad \beta_0 = 0.8 \cdot 10^{-2}.$$

Jeśli krzywe a_1 i a_{10} przecinają się, rozwiązanie ze wzrostem ν wędruje po krzywej a_{10} do punktu ν_1^* z okresem $2\pi/\nu$. W przedziale $\nu_1^* < \nu < \nu_2^*$ mamy drgania dwuczęstotliwościowe z okresem $4\pi/\nu$. Po osiągnięciu ν_2^* rozwiązanie dalej porusza się po krzywej a_1 do punktu ν_2^{**} , gdzie znowu przechodzi na a_{10} .

W dalszej kolejności omówimy prace T.Yamamoto i K.Yasuda [33] oraz T.Yamamoto, K.Yasuda i I.Nagasaka [34]. Analizują oni nieliniowy układ drgający o dwóch stopniach swobody, z nieliniowością typu kwadratowego i sześciennego łącznie, z rezonansem wewnętrznym typu $\omega_2 = 2\omega_1$. Stany ustalone badane są w przypadku, kiedy częstość wymuszenia jest w pobliżu jednej i drugiej częstości własnej. Równania ruchu przedstawiają się następująco:

$$\ddot{S}_1 + S_1 = q_1 \cos \nu t - o_{11} \dot{S}_1 - o_{12} \dot{S}_2 - \varepsilon [S_1 + S_2]^2 - 2/3\beta [S_1 + S_2]^3, \quad /3.14/$$

$$\ddot{S}_2 + 4S_2 = q_2 \cos \nu t - o_{21} \dot{S}_1 - o_{22} \dot{S}_2 - \varepsilon [S_1 + S_2]^2 - 2/3\beta [S_1 + S_2]^3.$$

Zakładając, że $\nu \approx \omega_1$, rozwiązanie układu /3.14/ zakładane jest w postaci:

$$S_1 = a_1 \cos \nu t + \psi_1/, \quad /3.15/$$

$$S_2 = a_2 \cos 2\nu t + \psi_2/.$$

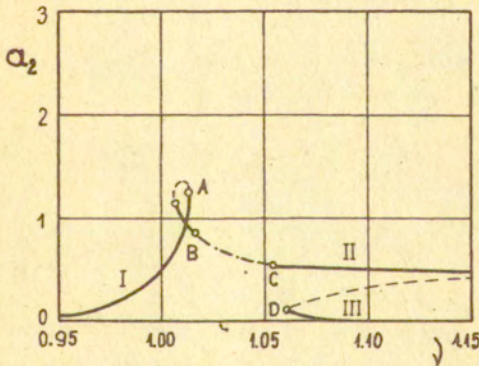
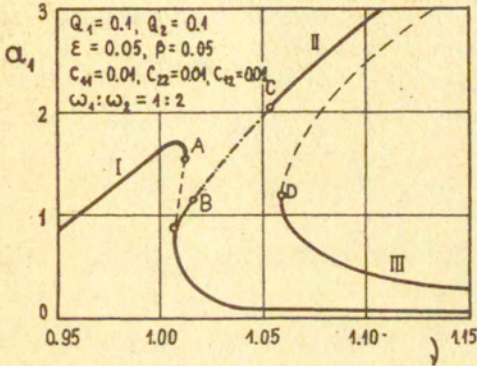
W dalszej kolejności zbadano stateczność rozwiązań i znaleziono krzywe rezonansowe a_1 i a_2 w funkcji częstości ν , w przypadku kiedy $\nu \approx 1$ - rys.3.11.

Śledząc amplitudy rozwiązań w funkcji rosnącej częstości ν możemy zaobserwować, że:

- jeśli ν jest mniejsze niż rezonansowa wartość $\omega_1 = 1$, wówczas a_1 przyjmuje duże wartości, podczas gdy $a_2 \ll 1$ i amplituda różni się mało od tej jak bez rezonansu wewnętrznego,
- z dalszym wzrostem ν aż do punktu A/, następuje szybki wzrost a_2 i pojawienie się drugiej harmonicznej /gałąź I/, w punkcie A

następuje skok amplitudy,

- zwiększając ω dalej spotykamy pewien przedział BC, w którym nie istnieją stateczne, stałe amplitudy a_1 i a_2 , a pojawiają się drgania prawie - okresowe, które są bardzo wrażliwe na tłumienie i dla tłumienia większego niż pewna wartość krytyczna są zastępowane przez drgania okresowe.



Rys. 3.11. Krzywe rezonansowe a_1 i a_2 w układzie z rezonansem wewnętrznym

- z dalszym wzrostem ω zanikają drgania prawie - okresowe i znowu pojawiają się drgania okresowe z częstościami ω i 2ω /gałąź II/,
- kiedy ω osiągnie punkt D, pojawiają się drgania o innej

postaci, dla których $a_2 \ll 1$ /gałąź III/.

- dalszy wzrost częstości nie prowadzi do nowych zmian, a układ drga tak, jak bez rezonansu wewnętrznego.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na wpływ β na przebieg krzywych rezonansowych. Dla β małych, a więc kiedy dominuje nieliniowość typu kwadratowego, dają się zauważyć wyraźnie 2 maksima w amplitudzie a_1 , co jest zgodne z wynikami prac poprzednich, kiedy w układzie występowała tylko nieliniowość kwadratowa.

Badając układ w pobliżu wyższej częstości własnej rozwiązanie układu /3.14/ zakładane jest w postaci:

$$\xi_1 = a_1 \cos \sqrt{1/2} \nu t + \psi_1 /,$$

/3.16/

$$\xi_2 = a_2 \cos \nu t + \psi_2 /.$$

Na rys.3.12 pokazano krzywe rezonansowe a_1 i a_2 w funkcji częstości wymuszenia ν , gdy $\nu \approx \omega_2 / \omega_2 = 2/$. Problem stateczności rozwiązań zbadano podobnie jak poprzednio, tj. poprzez rozwiązania zaburzone, równania w wariacjach i kryterium Hurwitza.

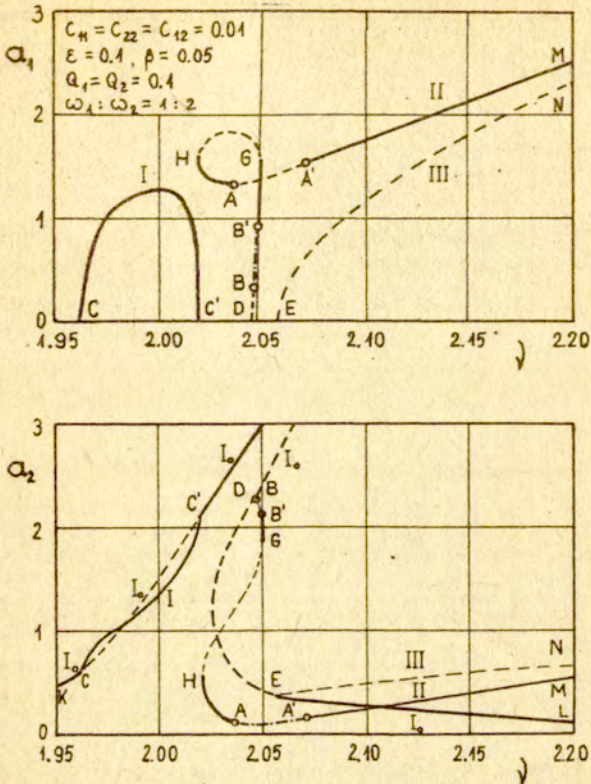
Analizując wyniki stwierdzamy, że:

- odmiennie niż w przypadku poprzednim możliwe są dwa typy rozwiązań, jedno $a_1 = 0$ i $a_2 \neq 0$, drugie $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$,
- zależnie od częstości wymuszenia i warunków początkowych w układzie mogą wystąpić różne typy odpowiedzi:

- a/ może to być odpowiedź harmoniczna o częstości ν , tak jak w układzie bez rezonansu wewnętrznego /gałąź I₀ poniżej punktu C, powyżej C' aż do osiągnięcia maksimum oraz przedział EL/,
- b/ inną może być odpowiedź okresowa dwuczęstościowa o częstościach $\nu/2$ i ν /gałąź I przedział CC', gałąź II przedział HA i AM/,
- c/ odpowiedź prawie-okresowa /przedziały AA' i BB' /.

Tak więc dla pewnej wartości ν w układzie mogą wystąpić dwie bądź trzy różne odpowiedzi, zależnie od warunków początkowych.

Dla porównania wyników teoretycznych z doświadczalnymi modelowano równania /3.14/ na maszynie analogowej i znaleziono krzywe rezonansowe. Należy podkreślić dobrą zgodność wyników teoretycznych z analogowymi dla wybranych wartości parametrów.



Rys.3.12. Krzywe rezonansowe w układzie z rezonansem wewnętrznym w przypadku $\nu \approx \omega_2$.

3.2. Rezonans wewnętrzny typu $\omega_1 = 3\omega_2$.

Przedstawimy obecnie przykłady układów, w których ma miejsce rezonans wewnętrzny typu $\omega_1 = 3\omega_2$ przy nieliniowości typu sześciennego /typy rezonansów wewnętrznych dla tej nieliniowości podane są w Tab.I/.

W pierwszej kolejności przedstawimy pracę P.R.Sethny [19]. Analizuje on drgania nietłumione pewnej klasy dyskretnych układów drgających o wielu stopniach swobody. Rozważania szczegółowe ogranicza do przypadku układu o dwóch stopniach swobody z nieliniowością typu sześciennego, w którym $\omega_2/\omega_1 = 3$, a któ-

rego równania ruchu mają postać:

$$\begin{aligned} /3.17/ \quad \ddot{q}_1 + q_1 + k_1/q_1 - q_2/ + \mu q_1^3 &= P \cos \nu t, \\ q_2 - k_1/q_1 - q_2/ &= 0. \end{aligned}$$

W analizie teoretycznej autor wykorzystuje metodę perturbacyjną, a uzyskane wyniki porównuje z wynikami analogowymi.

Śledząc rozwiązania q_1 i q_2 w funkcji częstości wymuszenia ν stwierdza, że kiedy częstość wymuszenia jest bliska niższej częstości własnej $\nu \approx \omega_1$, w rozwiązaniu daje się zauważyć bardzo silny udział trzeciej harmonicznej. Ze wzrostem ν wielkość jej rośnie i osiąga wartość maksymalną bardzo blisko liniowej częstości własnej. W tym momencie trzecia harmoniczna zmienia fazę o π pozostając nadal dużą. Z dalszym wzrostem częstości jej udział maleje, a odpowiedź zbliża się do takiej jak bez rezonansu wewnętrznego.

Wyniki osiągnięte przez autora są zgodne z teorią, która dla nieliniowości typu sześciennego przy stosunku częstości jak 1:3, przewiduje wciąganie w rezonans trzeciej harmonicznej.

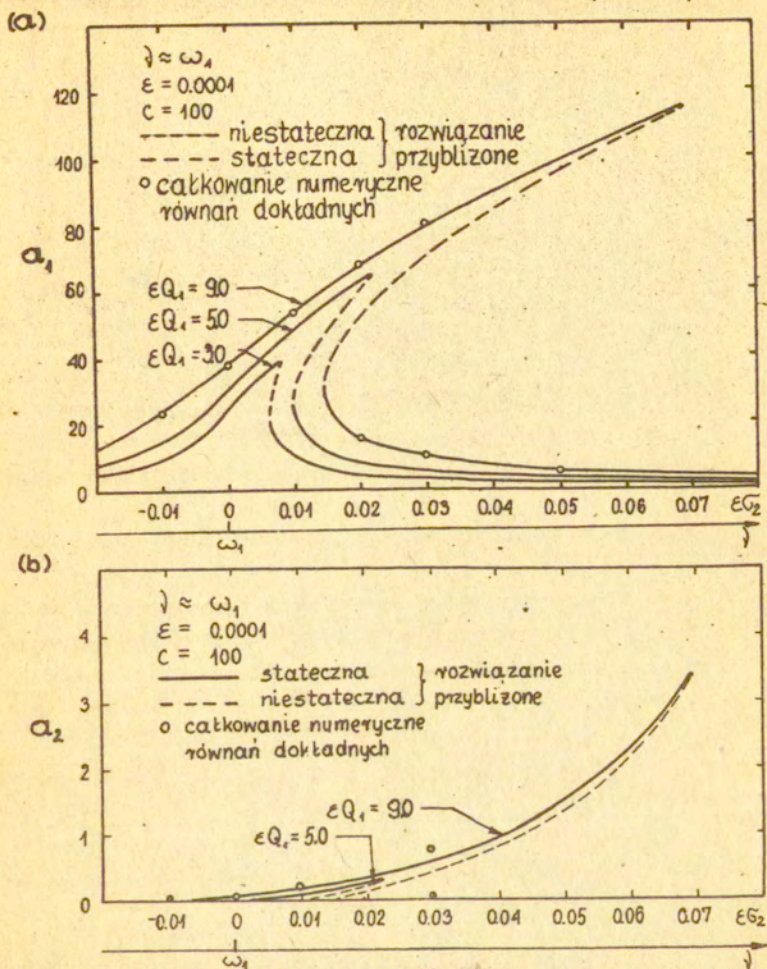
W przypadku gdy częstość wymuszenia jest blisko wyższej częstości własnej - $\nu \approx \omega_2$, autor nie stwierdził istnienia składowej subharmonicznej.

Z wpływem istnienia rezonansu wewnętrznego na poprzeczne drgania belki przy założeniu dużych odkształceń, siły osiowej i wymuszeniu harmonicznym, spotykamy się w pracy A.H.Nayfeh, Dean T. Mook i S.Sridhara [14]. Równania ruchu takiej belki są wtedy następujące:

$$/3.18/ \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \varepsilon \left\{ \left[\frac{\delta}{2(1+\delta l)} \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p - 2c \frac{\partial w}{\partial x} \right\},$$

gdzie: l - długość belki, $2c$ - współczynnik tłumienia, δ - współczynnik określający sposób zamocowania belki, w przypadkach skrajnych $\delta = 0$ dla podpory przesuwnej i $\delta = \infty$ dla utwierdzonego końca belki.

Równanie /3.18/ po założeniu postaci odkształcenia w postaci /2.4/ tzn.:



Rys. 3.13. Zmiany amplitudy a_1 i a_2 dla $\nu \approx \omega_1$.

$$w/x, t/ = \sum_m S_m / t/ \Psi_m / x/,$$

i sprowadzeniu do równań różniczkowych zwyczajnych przedstawiają się następująco:

$$/3.19/ \quad \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} + \omega_1^2 \zeta_1 = \varepsilon \left[-2 \sigma_1 \frac{d\zeta_1}{dt} + Q_1 \cos \nu t + \sum_{m,p,q} \alpha_{1mpq} \zeta_m \zeta_p \zeta_q \right]$$

gdzie $\nu = \frac{\delta}{2 / -1 + \delta 1 /}$, $i = 1, 2, \dots$,

$$\alpha_{1mpq} = \left\{ \int_0^1 \psi_i \frac{d^2 \psi_p}{dx^2} dx \right\} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{d\psi_m}{dx} \frac{d\psi_p}{dx} \right] dx \right\}.$$

Warto dodać, że w przypadku przegubowego zamocowania końców belki występują współmierne częstotliwości własne. Natomiast dla belki utwierdzonej z obu stron sześć pierwszych częstotliwości jest niewspółmiernych.

Rozpatrując układ /3.19/ w przypadku kiedy belka z jednej strony jest utwierdzona, a z drugiej zamocowana przegubowo, pierwszych pięć częstotliwości własnych jest następujących: 15.421, 49.970, 104.24, 178.28 i 272.02. Autor zwraca uwagę na jeden z możliwych przypadków współmierności częstotliwości własnych, a mianowicie $\omega_2 / \omega_1 \approx 3$. W dalszej kolejności badane jest zachowanie się układu gdy częstotliwość wymuszenia jest w pobliżu ω_1 i ω_2 .

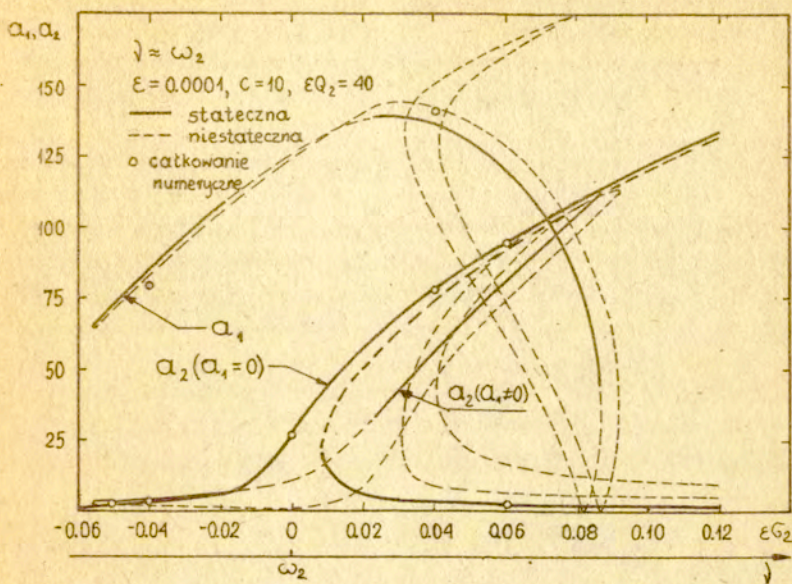
Zmiany amplitud a_1 i a_2 pierwszej i drugiej postaci w funkcji G_2 , gdzie G_2 spełnia zależność:

$$\nu = \omega_n \left[1 + \varepsilon G_2 \right]; \quad n = 1, 2,$$

pokazane są na rys.3.13. Zadanie zbadania stateczności zostało przeprowadzone w podobny sposób jak i w poprzednich pracach i w konsekwencji prowadzi do wyznaczenia obszarów stateczności sprzężonych równań typu Mathieu.

Wynik na a_1 jest podobny jak dla równania Duffinga z nieliniową twardą sprężyną, $a_2 \neq 0$ i w porównaniu z a_1 jest małe i praktycznie w odpowiedzi dominuje pierwsza postać.

W przypadku kiedy ν jest blisko ω_2 , możliwe są dwa typy odpowiedzi: a/ $a_1 = 0$ i $a_2 \neq 0$, b/ $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$.



Rys.3.14. Zmiany a_1 i a_2 w przypadku kiedy $\nu \approx \omega_2$.

Na rys.3.14 pokazano zmiany a_1 i a_2 w funkcji ϵG_2 w przypadku kiedy $\nu \approx \omega_2$.

Warto zauważyć, że jeśli $a_1 \neq 0$, wtedy a_1 może być sześć razy większa niż a_2 , a odpowiedź może być zdominowana przez pierwszą postać, podczas gdy wymuszenie jest w pobliżu drugiej częstości własnej.

Wyniki przedstawione na rys.3.13 i 3.14 uzyskane zostały na drodze teoretycznej i wykazują dobrą zbieżność z wynikami uzyskanymi przez numeryczne scałkowanie równań wyjściowych /3.19/.

Z tego samego typu rezonansem wewnętrznym i podobnymi wynikami możemy spotkać się w pracy A.H.Nayfeh, Dean T.Mook i D.W.Lobitz [15].

3.3. Rezonans wewnętrzny kombinowany typu $\omega_1 = \omega_j + \omega_k$.

Przedstawione w punktach 3.1 i 3.2 przykłady zilustrowały nam rezonans wewnętrzny typu $\omega_1 = 2\omega_j$ i $\omega_1 = 3\omega_j$, a więc

w przypadkach kiedy oprócz współrzędnej rezonansowej w rezonans "wciągana" była jeszcze jedna współrzędna o częstości współmiernej z rezonansową. Mieliśmy więc przypadek rozwiązania dwupostaciowego.

Obecnie przedstawimy przykład układu z rezonansem wewnętrznym kombinowanym typu $\omega_1 = \omega_j + \omega_k$, a więc w przypadku rozwiązania trzypostaciowego. Z problemem tym spotykamy się w pracy A.D.S.Barra i D.J.Nelsona [2]. Badają oni zachowanie się elementów konstrukcji pod działaniem harmonicznego wymuszenia zewnętrznego i nieliniowościach typu kwadratowego. Równania ruchu przedstawiają się wtedy następująco:

$$\ddot{\zeta}_i + s_{ki}^2 \zeta_i = \varepsilon \left\{ \varepsilon^{-1} [s_{ki}^2 \zeta_i^2 - \omega_i^2] \zeta_i - \sum_{j,k=1}^n l_{ijk} \zeta_j \zeta_k - \sum_{j,k=1}^n m_{ijk} \dot{\zeta}_j \dot{\zeta}_k - \omega_i d_{ii} \dot{\zeta}_i - q_i \cos \nu t \right\},$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, zakłada się, że $|s_{ki}^2 - \omega_i^2| < \varepsilon$.

Rozwiązanie układu /3.20/ zakłada się w postaci:

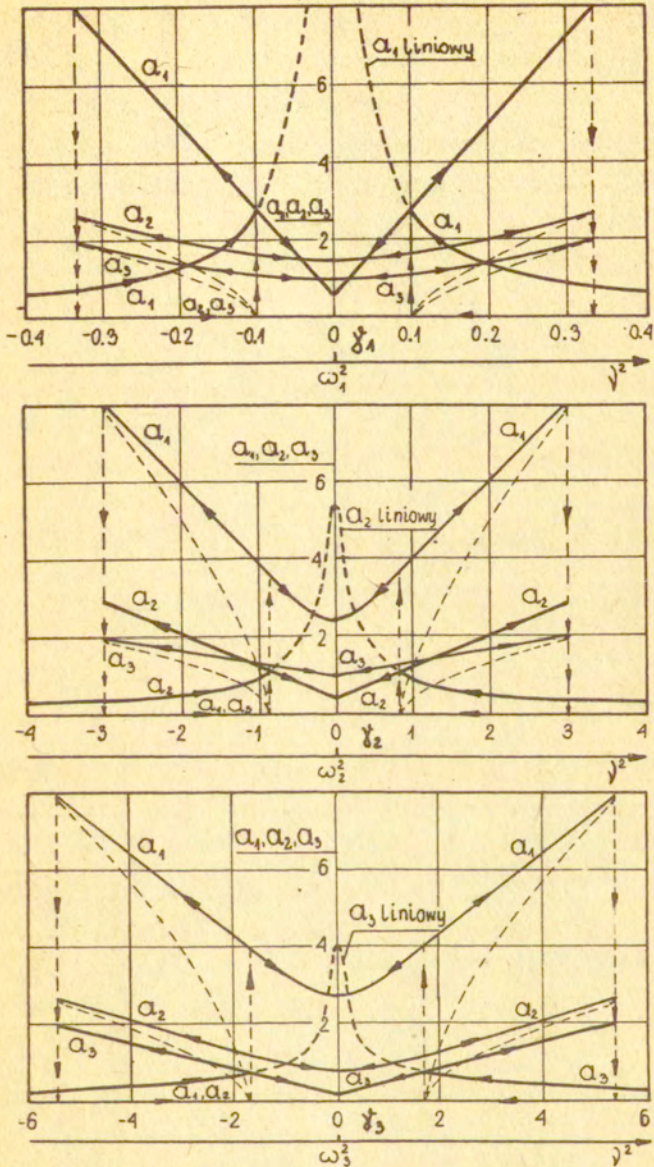
$$/3.21/ \quad \zeta_i/t/ = a_i/t/ \cos[s_{ki} \nu t + \psi_i/t/] + \varepsilon X_i/t/ + \varepsilon^2 Y_i/t/ + \dots$$

Dla nieliniowości typu kwadratowego najistotniejsze rezonanse wewnętrzne pojawiają się wtedy, gdy stosunek częstości jest jak 2:1, albo gdy jedna z częstości jest sumą dwu innych współmiernych z nią tzn. np.: $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$.

W omawianym przykładzie rozpatrywane są dwa przypadki: rozwiązanie dwupostaciowe - $\omega_2 = 2\omega_1$ oraz trzypostaciowe - $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$. W przypadku pierwszym wyniki są podobne do tych uzyskanych przez Sethnę i Tondla i nie będziemy ich przedstawiali.

Bardziej zainteresowani jesteśmy przypadkiem drugim, tj. rozwiązaniem trzypostaciowym. Równania /3.20/ dla $i = 1, 2, 3$ będą więc następujące:

$$\ddot{\zeta}_1 + \zeta_1 = -0.1 \zeta_2 \zeta_3 - \dot{\zeta}_2 \dot{\zeta}_3 / 30 - d_1 \dot{\zeta}_1 + q_1 \cos \nu t,$$



Rys. 3.15. Zmiany amplitud a_1 , a_2 i a_3 przy rozwiązaniach trzypostaciowych i częstości $\sqrt{\omega_1}$, ω_2 i ω_3 .

$$\begin{aligned} /3.22/ \quad \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 &= -0.1 \xi_1 \ddot{\xi}_3 - 0.1 \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_3 - d_2 \dot{\xi}_2 + Q_2 \cos \nu t, \\ \ddot{\xi}_3 + \omega_3^2 \xi_3 &= -0.1 \xi_1 \ddot{\xi}_2 - 0.1 \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 - d_3 \dot{\xi}_3 + Q_3 \cos \nu t, \end{aligned}$$

gdzie $\omega_2^2 = 9.0$, $\omega_3^2 = 16.0$.

W zależności od tego, w pobliżu której z częstości jest częstość wymuszenia ν , możemy uzyskać różne typy rozwiązań.

Jeśli np. $\nu \approx \omega_3$ wtedy możliwe są następujące typy rozwiązań:

1. $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, a więc tak jak bez rezonansu wewnętrznego,
2. $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ - oprócz współrzędnej rezonansowej a_3 "wciąganymi" w rezonans są a_1 i a_2 .

Na rys. 3.15 pokazano amplitudy a_1 , a_2 i a_3 w funkcji ν , gdzie $\nu_i = \alpha_i / \omega_i^2 - \nu^2$, $i = 1, 2, 3$, α_i - pewne stałe. Krzywe rezonansowe pokazane na rys. 3.15 uzyskane zostały teoretycznie. Równania /3.22/ także były symulowane w języku CSMP /Continuous System Modeling Program/ na maszynie cyfrowej. Dla pewnych wybranych wartości parametrów stwierdzono zgodność przybliżonych wyników teoretycznych z doświadczalnymi.

4. Podsumowanie

Celem niniejszego opracowania była analiza efektów współmierności częstości własnych w nieliniowych układach o n stopniach swobody przy zewnętrznym rezonansie głównym.

W rozważaniach teoretycznych wykorzystano powszechnie znaną metodę uśredniania /na podstawie pierwszego przybliżenia/, a efekt rezonansu wewnętrznego uzyskano zakładając, że współrzędne, których częstości są współmierne z rezonansową nie są równe zero. Stwierdzono, że warunek niezerowania się amplitud współrzędnych nierezonansowych sprowadza się do tego, aby częstości im odpowiadające były współmierne, zaśo typie rezonansu wewnętrznego decyduje forma funkcji nieliniowych. I tak dla nieliniowości typu kwadratowego podstawowym rozwiązaniem dwupostaciowym jest $\omega_i = 2 \omega_j$, a dla sześciennego $\omega_i = 3 \omega_j$.

W układach o więcej niż dwu stopniach swobody mogą wystąpić rozwiązania wielopostaciowe /więcej niż dwu-/, niektóre z nich wymieniono w Tabeli I.

W oparciu o jednolity system oznaczeń i metodę uśredniania przedstawiono przegląd i analizę wyników prac nad rezonansami wewnętrznymi omawianymi we współczesnej literaturze.

Charakterystyczną dla omawianych przykładów była nieliniowość typu kwadratowego, a tym samym i rezonans wewnętrzny typu $\omega_1 \approx 2\omega_j$. I tak, jeśli układ jest poddawany wymuszeniu harmonicznemu i jeśli częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej częstości własnej, w rezonans zewnętrzny "wciągana" jest druga współrzędna, której odpowiada wyższa częstość własna i jedynym jest rozwiązanie nietrywialne $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$ /przypadek superharmoniczny/. W przypadku kiedy częstość wymuszenia jest w pobliżu wyższej częstości własnej /przypadek subharmoniczny/, możliwe są dwa typy rozwiązań: a/ półtrywialne $a_1 = 0$ i $a_2 \neq 0$, a więc takie jak bez rezonansu wewnętrznego, b/ nietrywialne $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$.

Podobne wyniki uzyskano w przypadku nieliniowości typu kwadratowego i sześciennego łącznie. Badano tu rozwiązania okresowe dwuczęstościowe $\omega_1 \approx 2\omega_j$ /choć teoria przewiduje także możliwość wystąpienia rezonansu $\omega_1 \approx 3\omega_j$ /. W tym przypadku przy pewnych zakresach częstości mogą pojawić się drgania prawie-okresowe, bardzo czułe na wartość tłumienia.

Niewiele jest przykładów, w których analizowany jest rezonans wewnętrzny typu $\omega_1 \approx 3\omega_j$, chociaż możemy przy tym uzyskać wiele interesujących wyników. Dowodem na to może być praca Nayfeha, Mooka i Sridhara [14]. I tak jeśli częstość wymuszenia jest w pobliżu niższej częstości własnej dominującą jest pierwsza postać. Jeśli zaś częstość wymuszenia jest w pobliżu wyższej częstości własnej, udział pierwszej postaci może być bardzo silny, nawet sześciokrotnie wyższy niż podstawowej.

Mało jest jeszcze prac analizujących rezonans wewnętrzny wielopostaciowy /więcej niż dwupostaciowy/, zwany także kombinowanym, mający miejsce w układach o więcej niż dwu stopniach swobody i temat ten należałoby rozwinąć.

Nie jest zbadane także zagadnienie rezonansu wewnętrznego

w przypadku rezonansów zewnętrznych pobocznych, mamy tu na myśli rezonanse subharmoniczne, superharmoniczne i prawie-okresowe zwane kombinowanymi.

L I T E R A T U R A

- [1] A.D.S.BARR, R.P.ASHWORTH: Parametric and nonlinear mode interaction in the dynamics of structures, Interine Scientific Report, APOSR-74-2723B, June 1977.
- [2] A.D.S.BARR, D.J.NELSON: Autoparametric Interactions in Structures, Symposium on nonlinear dynamics, 1975.
- [3] Н.Н.БОГОЛЮБОВ, Ю.А.МИТРОПОЛЬСКИЙ: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Ф-М, Москва 1966.
- [4] B.I.CHEKANKOV: Bi-Frequency Oscillations in the Case Resonance of Arbitrary Rank, VII Internationale Konferenz uber Nichtlineare Schwingungen, 8-13 September 1975 in Berlin.
- [5] Б.И.ЧЕШАНКОВ: Многочастотные резонансные колебания третьего ранга при внешних смещениях, Прикладная мат., мех. 39, вып. 1/1975/.
- [6] Б.И.ЧЕШАНКОВ: Резонансные колебания некоторых механических систем, Успехи механики, май 1980.
- [7] R.M.EVAN-IWANOWSKI: Resonance Oscillations in Mechanical Systems, Amsterdam 1976, Elseviers.
- [8] Г.С.ГОРЕЛИК, А.ВМТТ: Э. Техн. Физ. СССР, 8, 1933.
- [9] R.S.HAXTON, A.D.S.BARR: The Autoparametric Vibration Absorber, Journal of Engineering for Industry, Trans. of the ASME, Paper No. 71-Vibr-49., Sept. 1971.
- [10] И.Г.МАЛИШИН: Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.
- [11] Л.И.МАНДЕЛЬСТАМ, Н.Д.ПАПАЛЕКСИ: Э. Техн. Физ. СССР, 1934.
- [12] N.MINORSKY: Drgenia nieliniowe, PWN Kraków 1967.
- [13] Ю.А.МИТРОПОЛЬСКИЙ: Метод усреднения в нелинейной механике, Наукова думка, Киев 1971.

- [14] ALI H.NAYFEH, DEAN T.MOOK, S.SRIDHAR: Nonlinear analysis of the forced response of structural elements, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 55, No.2, February 1974.
- [15] ALI H.NAYFEH, DEAN T.MOOK, D.W.LOBITZ: Numerical-Perturbation for the Nonlinear Analysis of Structural Vibrations, *AIAA Journal*, Vol. 12, No. 9, Sept. 1974, pp. 1222-1228.
- [16] K.PISZCZEK: Some Problems of Forced Vibrations of Constructions in the Nonlinear Case, *Zagadnienia Drgan Nie liniowych*, PWN 1964.
- [17] А.М.САМОЙЛЕНКО, И.П.МОМОТ: О квазипериодических колебаниях в нелинейных системах второго порядка в случае резонанса - *Мат. Физика, вып. 15 - 1974, стр. 140 - 152.*
- [18] А.М.САМОЙЛЕНКО, И.П.МОМОТ: Стационарные квазипериодические колебания в нелинейных автономных системах второго порядка, *Дин. сист. и вопр. уст. диф. ур.*, Киев 1978.
- [19] P.R.SETHNA: Steady-State Undamped Vibrations of a Class of Nonlinear Discrete Systems, *J. of Appl. Mech.*, March 1960, pp. 187-195.
- [20] P.R.SETHNA: Transients in Certain Autonomous Multiple-Degree-of-Freedom Nonlinear Vibrating Systems, *J. of Appl. Mech.*, Trans. of the ASME, March 1963, pp. 44-50.
- [21] P.R.SETHNA: Vibrations of Dynamical Systems with Quadratic Nonlinearities, *J. of Appl. Mech.*, Trans. of the ASME, Sept. 1965, pp. 576-582.
- [22] P.R.SETHNA, A.K.BAJAJ: Bifurcations in Dynamical Systems with Internal Resonance, *J. of Appl. Mech.*, Trans. of the ASME, Vol. 45, December 1978, pp. 895-902.
- [23] E.SEVIN: On the Parametric Excitation of Pendulum - Type Vibration Absorber, *J. of Appl. Mech.*, Trans. of the ASME, September 1961, pp. 330-334.
- [24] P.SRINIRASAN, T.D.SANKER: Autoparametric self-excited of a pendulum type elastic oscillator, *J. Sound and Vibration* 35, 1974, pp. 549-557.
- [25] R.A.STRUBLE: *Nonlinear Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London 1962.
- [26] R.A.STRUBLE; J.H.HEINBOCKEL: Resonant Oscillations of a Beam-Pendulum System, *J. of Appl. Mech.*, Trans. of the ASME, June 1963, pp. 181-188.
- [27] W.SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA: On the averaging and Ritz methods in the theory of nonlinear resonances in vibrating systems with multiple degrees of freedom, *Archives of Mechanics*, 24, 1, pp. 67-88, Warszawa 1972.

- [28] W.SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA: The modified single mode method in the investigations of the resonant vibrations of non-linear systems, J. of Sound and Vibration, /1979/ 63/4/, 475-489.
- [29] A.TONDL: Some Problems of Rotor Dynamics, Publishing House of the CAS, Prague 1965.
- [30] А.ТОНДЛ: Нелинейные колебания механических систем, Изд. ММП, Москва 1973.
- [31] А.ТОНДЛ: Автоколебания механических систем, Изд. ММП, Москва 1979.
- [32] A.H.P.VAN DER BURGH: Studies in the asymptotic theory of nonlinear resonances, Ph. D. Thesis, Technische Hogeschool Delft, /1974/.
- [33] T.YAMAMOTO, K.YASUDA: On the Internal Resonance in a Nonlinear Two-Degree-of-Freedom System, Bull. of the JSME, Vol. 20, No. 140, February, 1977, pp. 168-176.
- [34] T.YAMAMOTO, K.YASUDA, I.NAGASAKA: On the Internal Resonance in a Nonlinear Two-Degree-of-Freedom System, Bull. of the JSME, Vol. 20, No. 147, September 1977, pp. 1093-1100.

S P I S T R E Ś C I

	str.
1. Wstęp	3
2. Ogólne równania i badanie rezonansów wewnętrznych metodą uśredniania	6
3. Przykłady układów z rezonansem wewnętrznym	18
3.1. Rezonans wewnętrzny typu $2\omega_1 = \omega_j$	19
3.2. Rezonans wewnętrzny typu $\omega_1 = 3\omega_j$	33
3.3. Rezonans wewnętrzny kombinowany typu $\omega_1 = \omega_j + \omega_k$	37
4. Podsumowanie	40
5. Literatura	42