

Jan Holnicki-Szulc

**STRUKTURY NAJSZTYWNIERSZE,
NAJLŹEJSZE I NAJMOCNIEJSZE**

35 / 1983

WARSZAWA 1983

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 czerwca 1983 r.



57002



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 150 egz. Ark. wyd. 1 . Ark. druk. 1,5
Oddano do drukarni w sierpniu 1983 r.
Nr zamówienia 578/83 M-10 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Struktury najsztwniejsze, najlżejsze i najmocniejsze

Wstęp

Przedmiotem rozważań jest optymalizacja rozkładu materiału /optymalne modelowanie kształtu/ ustrojów kratowych o określonym wyjściowym zbiorze węzłów i geometrii ich połączeń. W trakcie procedury optymalizacji poszczególne pręty mogą zniknąć. Pośrednio optymalizacji podlega zatem także topologia układu kratowego. Reprezentantami bogatej literatury analizującej zagadnienia optymalnego kształtowania w różnych sformułowaniach mogą być prace [1 ÷ 10] .

Celem niniejszej pracy jest badanie związków pomiędzy rozwiązaniami uzyskiwanymi dla różnych funkcji celu. Analizowane będą opisane wcześniej problemy optymalizacji ze względu na maksymalizację sztywności, minimalizację ciężaru oraz maksymalizację nośności. Optymalne rozwiązania zostaną nazwane odpowiednio strukturami najsztwniejszymi, najlżejszymi oraz najmocniejszymi.

Na podstawie badania związków pomiędzy tymi rozwiązaniami można wyodrębnić zbiór stowarzyszonych zagadnień modelowania optymalnego, dla których topologia otrzymanych struktur jest identyczna. Jedno rozwiązanie może być otrzymane z innego przez skalowanie. Z drugiej strony można wyodrębnić zbiór zagadnień odwrotnych modelowania optymalnego prowadzących do rozwiązań o innej topologii połączeń.

W rozważaniach przyjęto, że układ obciążeń zewnętrznych jest określony. O ile w przypadku struktur obciążonych układem sił można wyznaczyć topologię optymalną połączeń dla zagadnień sprzężonych oraz inną topologię dla zagadnień odwrotnych, to w

przypadku obciążeń struktury poprzez wymuszone zewnętrznie ruchy węzłów zagadnienia komplementarne modelowania optymalnego prowadzą do rozwiązań otrzymanych przez odpowiednią inwersję rozwiązań poprzednich.

Praca ma charakter studialny i posługuje się wyidealizowanym modelem układu kratowego, bez dodatkowych ograniczeń natury projektowej /np. [3]/. W przypadku ewentualnych zastosowań w praktyce inżynierskiej istotne staje się przede wszystkim zapewnienie rozwiązanom ich geometrycznej niezmienności, co można uzyskać przez formalne wprowadzenie dodatkowych warunków ograniczających wartości pól przekrojów prętów od dołu.

Proponowane w pracy dwie procedury modelowania /modelowania prostego i odwrotnego/ mogą być wykorzystane jako efektywny aparat wyznaczania optymalnych topologii oraz rozkładów materiału struktur prętowych.

1. Globalna energia deformacji jako miara lokalnych redystrybucji materiału.

Przedyskutujemy problem wpływu redystrybucji materiału w ustroju na jego globalną energię deformacji /globalne wyężenie $J = \sum \frac{1}{2} \epsilon^T \sigma$ / - . Parametr J stanowi miarę globalnej odkształcalności ustroju.

Na wstępie zanalizujemy współpracę jednego, wybranego elementu "i" układu z jego otoczeniem, czyli resztą ustroju. Zdefiniujemy w tym celu siłę F_i jaka wywołana zostaje w danym pręcie na skutek wymuszenia w nim jednostkowej dystorsji wstępnej $\epsilon = 1$. /por. [11] /.

Możemy powiedzieć o elemencie "i" że jest izostatyczny jeśli $F_i = 0$, oraz że jest hiperstatyczny jeśli $F_i \neq 0$. Struktury złożone wyłącznie z elementów izostatycznych nazywamy strukturami izostatycznymi, pozostałe natomiast hiperstatycznymi.

Mówimy, że dwa dowolne węzły ustroju połączone prętem są względem siebie geometrycznie niezmiennie. Para węzłów nie połączona prętem jest względem siebie geometrycznie zmienna

jeśli dla dowolnego pręta próbnego "i" wstawionego dodatkowo pomiędzy te węzły otrzymamy $\xi_i = 0$. W przypadku przeciwnym mamy parę węzłów geometrycznie niezmiennych względem siebie. Relacja ta jest relacją równoważności i wyznacza klasy węzłów geometrycznie niezmiennych. Jeśli wszystkie węzły struktury należą do jednej klasy mówimy, że ustrój jest geometrycznie niezmienny. Rozwiązania z klasy struktur izostatycznych i geometrycznie niezmiennych będą odgrywały szczególną rolę w dalszych rozważaniach.

Wprowadźmy funkcję ξ_i , która dla każdego pręta "i" opisuje stosunek parametru sztywności r'' otoczenia do parametru sztywności r' samego pręta. Jeśli określony jest parametr sztywności pręta $E_i A_i$ /gdzie E - moduł Younga, A - pole przekroju poprzecznego pręta/ to wymuszając jego jednostkową dystorsję wstępną $\xi = 1$ /por. rys.1/, stan równowagi z otoczeniem ustali się przy deformacji końcowej $1 - \xi_i/E_i A_i$ odpowiadającej za oddziaływanie otoczenia oraz $\xi_i/E_i A_i$ odpowiadającej za siłę w pręcie i. Zdefiniujemy funkcję ξ_i :

$$1) \quad \xi_i = \frac{r''}{r'} = \frac{\frac{\xi_i}{E_i A_i}}{1 - \frac{\xi_i}{E_i A_i}} = \frac{1}{E_i A_i} \left(\frac{\xi_i}{1 - \xi_i} \right)$$

gdzie:

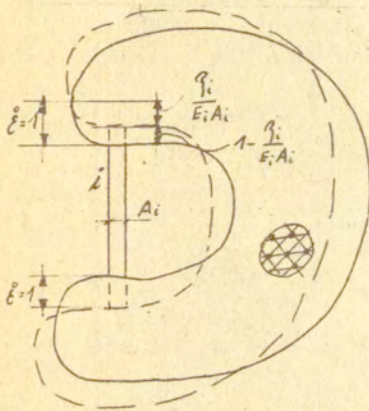
$$r' = \frac{\xi_i}{\xi_i/E_i A_i} = E_i A_i$$

$$r'' = \frac{\xi_i}{1 - \frac{\xi_i}{E_i A_i}} = E_i A_i \left(\frac{\xi_i}{1 - \frac{\xi_i}{E_i A_i}} \right)$$

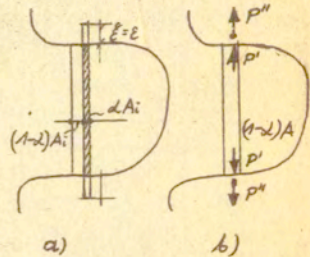
Widać, że $0 \leq \xi_i \leq \infty$. Prawe ograniczenie osiągnięte zostaje gdy np. $A_i = 0$ zaś lewe gdy np. $E_i = \infty$.

Przeanalizujemy jak zmienia się globalna miara J wyciężenia ustroju na skutek usunięcia części materiału z elementu "i" /rys.2a/. Posłużymy się w tym celu następującym rozumowaniem. Wymuszając w usuwanej części αA_i ($0 \leq \alpha \leq 1$) przekroju dystorsję wstępną ξ równą co do wartości deformacji ξ

pełnego pręta "1" pod wpływem działania obciążenia zewnętrznego i wstawiając go do układu, otrzymamy w strukturze zdeformowanej nieobciążoną część αA_i elementu, którą można usunąć bez naruszenia stanu równowagi. Redystrybucję sił wewnętrznych spowodowaną usunięciem części elementu można zatem opisać za pośrednictwem stanu naprężeń wstępnych wywołanych w pełnym układzie przez dystorsję wstępną $\bar{\epsilon} = \epsilon$ wymuszoną w części αA_i elementu. Z teorii stanów dystorsyjnych /np. [11] /



Rys. 1



Rys. 2

wiadomo, że globalna miara wyężenia \int wzrośnie w wyniku tej operacji o część związaną ze stanem naprężeń wstępnych, ortogonalnym do stanu pochodzącego od siłowych obciążeń zewnętrznych.

W wyniku wprowadzenia dystorsji wstępnej $\bar{\epsilon} = 1$ w części αA_i przekroju, na połączenia elementu z jego otoczeniem działa siła $P = E \bar{\epsilon} \alpha A$ przenoszona częściowo przez pręt (P^i) oraz resztę układu (P^{ii}). Zatem /rys.2b/ $P^i + P^{ii} = E \bar{\epsilon} \alpha A$. Znając parametry sztywności pozostającej części pręta $r^i = (1 - \alpha) E_i A_i$ oraz jego otoczenia r^{ii} , można określić

deformację wstępną $\bar{\epsilon}_i$ elementu "1" :

$$2) \quad \bar{\epsilon} = \frac{P}{r' + r''} = \epsilon \frac{\alpha}{1 + \alpha + \beta^0}$$

gdzie β^0 wyznaczone jest przez formułę (1) dla pełnego przekroju wyjściowego A_i pręta.

Można teraz obliczyć wzrost globalnego wyteżenia ΔJ , związany z wprowadzonym wyżej stanem naprężeń wstępnych. Rozkładając ΔJ na część związaną z usuwanym materiałem (ΔJ_2) oraz z układem pozostającym /część $(1-\alpha)A_i$ pręta oraz jego otoczenie/ przy wykorzystaniu zasady prac wirtualnych mamy:

$$3) \quad \Delta J = \Delta J_1 + \Delta J_2 = \frac{1}{2} P \bar{\epsilon} L + \frac{1}{2} \frac{P}{\alpha A} \epsilon \alpha A L = \frac{1}{2} \sqrt{E \epsilon} \frac{\alpha^2}{1 - \alpha + \beta^0} + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{E \epsilon} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{E \epsilon} \alpha \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha + \beta^0} + 1 \right) = \frac{1}{2} \sqrt{E \epsilon} \alpha \frac{1 + \beta^0}{1 + \beta^0 - \alpha}$$

gdzie: $V = A L$

Można zauważyć, że w przypadku $\alpha = 0$ mamy $\Delta J = 0$ zaś w przypadku $\alpha = 1$ mamy $\Delta J = \frac{1}{2} \sqrt{E_i} \epsilon_i^2 \left(\frac{1}{\beta^0} + 1 \right) = \frac{1}{2} \sqrt{E_i} \epsilon_i^2 \left(\frac{E_i A_i}{\gamma_i} \right)$. Wyrażenie ostatnie opisuje wzrost miary J całego układu na skutek usunięcia całego elementu "1". ΔJ dąży do nieskończoności gdy usuwamy element izostacyjny /dla którego $\beta_i = 0/$.

Przeanalizujemy analogicznie, jak zmienia się globalna miara J na skutek lokalnego zwiększenia przekroju pręta z $(1-\alpha)A$ do A /por. rys. 2/. Widzimy z powyższych rozważań, że globalne wyteżenie J maleje o wartość ΔJ wyrażoną przez (3) policzoną w stosunku do końcowego stanu układu materiału i sił wewnętrznych. Aby wyrazić ją przez wielkości stanu wyjściowego przekroju i sił wewnętrznych należy wyrazić deformację ϵ pręta o przekroju A poprzez deformację ϵ' pręta o przekroju $(1-\alpha)A$ współpracującego z otoczeniem. Dokonamy tego przyrównując do siebie dwa wyrażenia na siłę w pręcie "1". Z jednej strony siłę w pręcie / o przekroju $(1-\alpha)A$ / można przedstawić jako sumę siły związanej ze wstępnym stanem defor-

macji $\bar{\epsilon}$: $\bar{P} = EA(1-\alpha)\bar{\epsilon}$ oraz siły związanej z obciążeniem zewnętrznym $\bar{P} = EA(1-\alpha)\bar{\epsilon}$ przypadającej na część $(1-\alpha)A$ przekroju:

$$4) P = EA(1-\alpha)(\bar{\epsilon} + \epsilon) = EA(1-\alpha)\epsilon \left(\frac{\alpha}{1-\alpha+\epsilon^0} + 1 \right).$$

Z drugiej strony siła w przecie o przekroju $(1-\alpha)A$ może być wyrażona bezpośrednio poprzez jego deformację ϵ' :

$$5) P = EA(1-\alpha)\epsilon'.$$

Przyrównując do siebie dwa wyrażenia (4) i (5) tej samej wielkości mamy:

$$6) \epsilon = \frac{1+\epsilon^0-\alpha}{1+\epsilon^0} \epsilon'$$

Podstawiając (6) do (3) oraz wyrażając wielkości ϵ^0 i V przez ich odpowiedniki związane z konfiguracją wyjściową : $\epsilon^0 = (1-\alpha)\epsilon'$, $V = \frac{V'}{1-\alpha}$ otrzymujemy wyrażenie na spadek wyężenia globalnego ustroju ΔJ związany ze zwiększeniem przekroju $(1-\alpha)A$ pręta do wartości A :

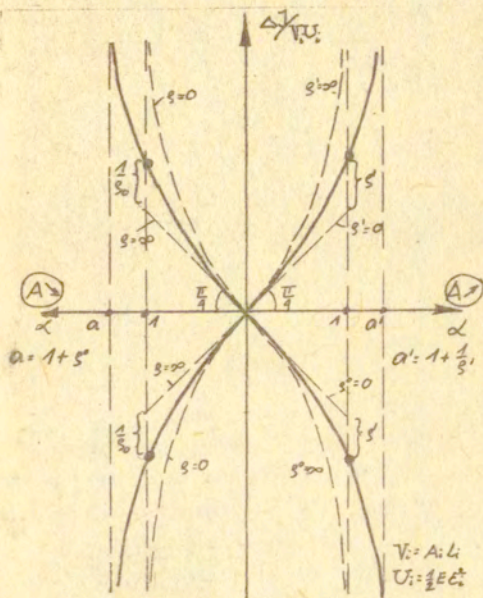
$$7) \Delta J = \frac{1}{2} N' E (\epsilon')^2 \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1+\epsilon'}{1+\epsilon'+\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{1}{2} N' E (\epsilon')^2 \frac{1+\epsilon'}{1+\epsilon'+\alpha'}$$

gdzie: $\alpha' = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

W przypadku granicznym, gdy zwiększamy przekrój pręta nieskończenie, czyli gdy $\alpha' \rightarrow \infty$ zaś $\alpha \rightarrow 1/\infty$ odpowiada usztywnieniu pręta/ $\Delta J \rightarrow \frac{1}{2} N' E (\epsilon')^2 (1+\epsilon')$.

Na rys. 3 naszkicowano funkcję ΔJ w zależności od lokalnych zmian przekroju pręta. Gałąź funkcji przechodząca przez pierwszą i trzecią ćwiartkę układu współrzędnych odpowiada

przypadkowi przemieszczeniowych obciążeń zewnętrznych /por. § 5/.
 Na wykresie występują ograniczniki odpowiadające przypadkowi
 gdy modulowany element jest izostaticzny /wtedy $s^0 = 0$ / oraz
 gdy jego otoczenie jest sztywne /wtedy $s^0 = \infty$ /.



Rys. 3.

Dodajmy na zakończenie, że usunięcie pręta z ustroju zwiększa globalne wyężenie /jak to obliczone powyżej/ o $\Delta J = \sqrt{E \epsilon^2} \frac{1 + s^0}{2 s^0}$. Analogicznie, wstawienie pręta pomiędzy dwa węzły zmniejsza globalne wyężenie o powyższą wartość obliczoną w konfiguracji końcowej z elementem dodatkowym.

Formuła (7) wyraża ilościowo to, co publikowane było w różnych pracach /np. [10] / jako jakościowa zasada wzrostu wyężenia globalnego przy lokalnym ujęciu materiału i odwrotnie; spadku wyężenia globalnego przy lokalnym wzmocnieniu ustroju.

2. Struktura o maksymalnej sztywności

Postawmy problem optymalizacji geometrii struktury ze względu na minimalizację jej globalnego wyężenia J przy ograniczeniach nierównościowych narzuconych na objętość materiału konstrukcyjnego V oraz intensywność obciążenia zewnętrznego α_p :

$$8) \quad \min J$$

przy

$$9) \quad \begin{aligned} V &\leq \bar{V} \\ \alpha_p &\geq \bar{\alpha}_p \end{aligned}$$

i przy oczywistym założeniu, że otrzymany układ jest zdolny do przeniesienia obciążenia zewnętrznego.

Parametrami optymalizacji są przekroje prętów struktury, które mogą znikać, zmieniając w ten sposób topologię układu. Jest oczywiste, że ograniczenie (9) ² jest aktywne, tzn., że intensywność obciążenia przyjmie najmniejszą dopuszczalną wartość $\alpha_p = \bar{\alpha}_p$. Znając zmienność funkcjonału J w zależności od zmian rozkładu materiału (7) opisanego przez przekroje prętów A_i ; można przyjąć, że dla określonego obciążenia zewnętrznego mamy funkcjonał $J = J(A_i)$. Budując funkcjonał zastępczy wzbogacony o człon odpowiadający ograniczeniu (9) ¹ :

$$10) \quad \min F = \min [J(A_i) + \eta(V - \bar{V})]$$

gdzie

$$V = \sum_i A_i l_i,$$

warunki Kuhna-Tuckera stacjonarności zagadnienia (8), (9) prowadzą do :

$$11) \quad F_{,A_i} = \frac{dJ(A_i)}{dA_i} + \eta l_i = 0$$

$$\eta (V - \bar{V}) = 0$$

$$V - \bar{V} \leq 0$$

$$\eta \geq 0$$

Wykorzystując zależność (3) mamy:

$$12) \quad \frac{dJ(A_i)}{dA_i} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta J}{-\alpha A_i} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{A_i l_i E_i \varepsilon_i^2 \alpha \frac{1+\nu^0}{1+\nu^0 \alpha}}{-\alpha A_i} = -l_i E_i \varepsilon_i^2$$

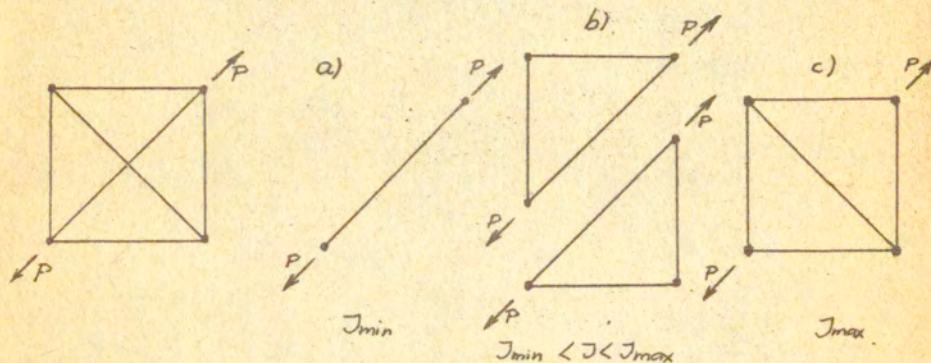
Czyli, z warunku (11)¹ otrzymujemy dla każdego pręta "i":

$$13) \quad -E_i \varepsilon_i^2 + \eta = 0$$

co oznacza, że wszystkie elementy struktury optymalnej muszą być równomiernie wyteżone do wartości $U = \frac{1}{2} \eta \geq 0$. W ogólnym przypadku, jest to możliwe, gdy struktura optymalna jest izostatyczna. Otrzymujemy tu zatem znany rezultat kratownicy izostatycznej, równomiernie wyteżonej /por.tw.Levi [2] /. Z warunków (11)²⁺⁴ wynika, że objętość materiału V struktury optymalnej przyjmuje wartość ograniczającą \bar{V} , czyli że ograniczenie (9)¹ jest aktywne. Widać stąd, że wszystkie struktury izostatyczne, przenoszące dane obciążenie zewnętrzne, o wyrównanych wyteżeniach i globalnej objętości \bar{V} spełniają warunki stacjonarności. Rozwiązanie optymalne /niekiedy jednoznaczne/ opisane jest przez tę spośród struktur izostatycznych dla której wyteżenia lokalne U /a zatem i globalne $J = U \bar{V}$ / są najmniejsze. Istnieją metody wyszukiwania optymalnych struktur izostatycznych /np. [7] /. Zwróćmy uwagę na jedną z nich - metodę polegającą na kolejnym "remodelowaniu" struktur przejściowych, aż do momentu uzyskania rozwiązania optymalnego [8] . Proces ten, zmierzający najkrótszą drogą do celu, nazwijmy modelowaniem prostym. Wróćmy do jego dyskusji

w § 6.

Przykładowo, na rys. 4 pokazano wszystkie możliwe podstruktury izostaticzne / o tej samej objętości \bar{V} / wyjęte ze struktury wyjściowej, przenoszące obciążenie zewnętrzne i uporządkowane według wzrastającej wartości wyężenia globalnego J .



Rys. 4.

3. Zagadnienia stowarzyszone modelowania optymalnego

Przedyskutujemy dwa sformułowania modelowania optymalnego stowarzyszone z zagadnieniem (8), (9). Jak się okaże prowadzą one do tych samych, z dokładnością do skalowania, rozwiązań.

Pierwszy problem polega na minimalizacji objętości materiału, czyli na znalezieniu struktury najlżejszej:

$$14) \quad \min V$$

przy ograniczeniach:

$$J \leq \bar{J}$$

$$15) \quad \alpha_p \geq \bar{\alpha}_p$$

Drugi zaś problem polega na maksymalizacji intensywności obciążenia zewnętrznego, czyli na znalezieniu struktury najmocniejszej:

$$16) \quad \max \alpha_p$$

przy ograniczeniach:

$$17) \quad \begin{aligned} V &\leq \bar{V} \\ J &\leq \bar{J} \end{aligned}$$

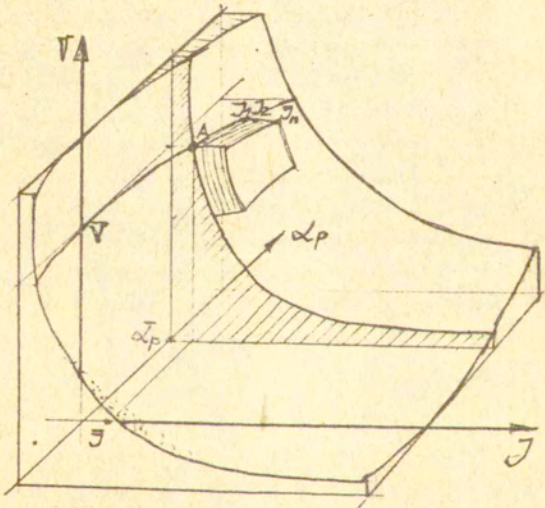
Łatwo sprawdzić, że w zagadnieniu (14), (15) ograniczenie (15)² jest aktywne, podobnie jak to było w zadaniu maksymalizacji sztywności. Zatem $\alpha_p = \bar{\alpha}_p$. Pokażemy, że zadanie (14), (15) jest stowarzyszone z zadaniem (8), (9). Oznacza to, że przyjmując wartość \bar{J}'' /skalowanie/ w ograniczeniu (15)¹ równą wyrażeniu J'_{min} globalnemu / oraz $\bar{\alpha}_p'' = \bar{\alpha}_p'$ / otrzymanemu z rozwiązania problemu (8), (9), rozwiązanie $\min V''$ musi pokrywać się także z objętością \bar{V}' rozwiązania zadania (8), (9) i co za tym idzie obie struktury optymalne są identyczne. Zaprzeczając tezę przyjmijmy, że objętości V' i V'' obu rozwiązań nie są sobie równe. Wtedy, jeśli $V'' < V'$, doszlibyśmy do sprzeczności gdyż oznaczałoby to, że istnieje rozwiązanie zadania (8), (9) o wartości $V < \bar{V}'$, co byłoby sprzeczne ze stwierdzeniem, że ograniczenie (9)¹ jest aktywne. Z drugiej strony, jeśli $V'' > V'$, doszlibyśmy do sprzeczności gdyż oznaczałoby to, że istnieje rozwiązanie zadania (14), (15) lepsze w sensie kryterium (14). Dowodzi to prawdziwości tezy, że jeśli $\bar{J}'' = J'_{min}$ to $V''_{min} = \bar{V}'$. Widać stąd, że w ogólnym przypadku rozwiązaniem zadania (14), (15) jest struktura otrzymana ze sformułowania (8), (9) o identycznych wyrównanych wyrażeniach lokalnych $U' = U''$. Ponieważ rozwiązaniem problemu (14), (15) jest układ izostatyczny o wyrównanych wyrażeniach, zadanie to można sformułować przy lokalnych ograniczeniach (15):

$$18) \quad U \leq \bar{U}$$

Podobnie postępując można pokazać, że przyjmując w sformułowaniu (16), (17) $\bar{V}''' = V_{min}'' = \bar{V}'$ oraz $\bar{J}''' = \bar{J}'' = J'_{min}$ otrzymujemy rozwiązanie identyczne do poprzednich, dla którego $min \alpha_p''' = \alpha_p'' = \alpha_p'$.

Podsumowując można stwierdzić, że trzy powyższe sformułowania prowadzą do rozwiązań o identycznej topologii struktury i takim rozkładzie materiału w elementach, że jedno rozwiązanie otrzymywane jest z drugiego przez skalowanie. W tym sensie zbliżone są określenia: struktura najszybsza, najlżejsza i najmocniejsza.

Zależności pomiędzy trzema parametrami J , V , α_p opisującymi cechy konstrukcji naszkicowano na rysunku 5.



Rys. 5.

Warstwy I_1, I_2, \dots, I_n w przestrzeni rozwiązań $F(J, V, \alpha_p)$ odpowiadają poszczególnym układom topologicznym struktury uporządkowanym według wzrastającej funkcji celu. Punkt "A" na rysunku opisuje rozwiązanie problemów stowarzyszonych modelowania. Widać stąd, że topologia struktury opisana układem I_1 jest optymalna dla wprowadzonego wyżej zbioru zadań. Można w tym sensie mówić o zbiorze zagadnień optymalizacji topologii układu.

Zwróćmy na zakończenie uwagę, że rozwiązanie zagadnienia (8), (9) pokrywa się także z rozwiązaniem pewnych zagadnień modelowania optymalnego o lokalnych, nie zaś całkowych kryteriach. Tak np. problem minimalizacji ekstremalnych wartości wyteżeń lokalnych $\min \max U$ / jest zagadnieniem stowarzyszonym do dyskutowanych powyżej [9].

4. Zagadnienia odwrotne modelowania optymalnego

Postawmy zadanie modelowania optymalnego odwrotne do (8), (9) :

$$19) \quad \max J$$

przy ograniczeniach:

$$20) \quad \begin{aligned} V &\geq \bar{V} \\ \alpha_p &\leq \bar{\alpha}_p \end{aligned}$$

i przy oczywistym założeniu, że otrzymany układ jest zdolny do przeniesienia obciążenia zewnętrznego. W wyniku spodziewamy się otrzymać strukturę najbardziej wiotką, lecz nadal geometrycznie niezmienną.

Prześledziwszy warunki stacjonarności zagadnienia analogicznie do rozważań z § 2 otrzymujemy w wyniku jako układ optymalny strukturę izostatyczną o wyrównanych wyteżeniach. Jest nią ta spośród wszystkich struktur statycznie wyznaczalnych o objętości \bar{V} i intensywności obciążenia zewnętrznego $\bar{\alpha}_p$, dla

której globalne wyciężenie J osiąga maximum /In na rys.5/.

Latwo sprawdzić, że wychodząc ze sformułowań (14), (15) i (16), (17) otrzymujemy zagadnienia odwrotne stowarzyszone do (19) (20) :

$$21) \quad \max V$$

przy ograniczeniach:

$$22) \quad \begin{aligned} J &\geq \bar{J} \\ \alpha_p &\leq \bar{\alpha}_p \end{aligned}$$

oraz:

$$23) \quad \min \alpha_p$$

przy ograniczeniach:

$$24) \quad \begin{aligned} V &\geq \bar{V} \\ J &\geq \bar{J}. \end{aligned}$$

Powyższe stowarzyszone zagadnienia odwrotne prowadzą do rozwiązań identycznych z dokładnością do skalowania i opisanych przez ten sam układ topologiczny /In na rys.5 lub rozwiązanie (c) w przykładzie z rys. 4/. Są to struktury najbardziej wiotkie, najcięższe i najszabsze.

Rozwiązania sformułowań odwrotnych mogą być wykorzystane do określenia czułości kryterium prostego. Przykładowo nazwijmy czułością kryterium (8) parametr :

$$25) \quad \lambda = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max}} \quad \text{gdzie} \quad 0 \leq \lambda < 1,$$

który mówi, jakie efekty można uzyskać przez modelowanie optymalne. Jeśli $\lambda \approx 0$ oznacza to, że wpływ zmian topologii układu na zmiany funkcji celu jest znikomy i że można dobrać rozkład materiału na podstawie innych przesłanek.

Można też na podstawie znajomości rozwiązań zagadnień prostych i odwrotnych wypowiedzieć następujące stwierdzenie.

Wyteżenie globalne dowolnej struktury o objętości \bar{V} przenoszącej dane obciążenie zewnętrzne o intensywności α_p mieści się w przedziale $\langle J_{\min}, J_{\max} \rangle$, gdzie J_{\min} jest rozwiązaniem zagadnienia prostego (8), (9) zaś J_{\max} zagadnienia odwrotnego (19), (20).

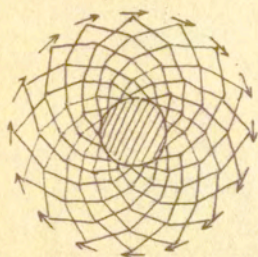
Analogicznie stwierdzenie to można odnieść do szacowania objętości V jak i intensywności obciążenia α_p struktury.

Zwróćmy uwagę na fakt, że tak jak sformułowania proste (8), (9); (14), (15); (16), (17) posiadają sens inżynierski w optymalizacji układów prętowych, tak sformułowania odwrotne (19) + (24) posiadają sens inżynierski w optymalizacji obwodów elektrycznych. Ich istota sprowadza się /np. w przypadku (23), (24) / do takiego zaprojektowania sieci aby przez minimalne zasilanie zewnętrzne uzyskać układ o napięciach i natężeniach lokalnych prądu nie spadających poniżej zadanych wartości ograniczających.

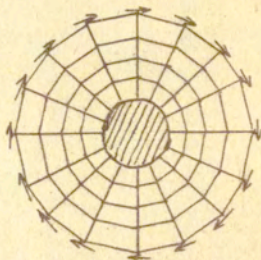
O ile struktury Michell'a [5] są rozwiązaniami zagadnień prostych (8), (9), (14) + (17) zadania uogólnionego, gdzie modelowaniu podlega nie tylko układ prętów ale także i węzłów, to analogiczne rozwiązanie zagadnień odwrotnych (19) + (24) dąży do układów geometrycznie zmiennych i z inżynierskiego punktu widzenia traci sens. Na rys. 6 pokazano układ geometryczny najsztyniejszy struktury Michell'a /6a/ oraz struktury geometrycznie zmiennej /6b/, do której dąży proces minimalizacji sztywności układu.

5. Zagadnienie komplementarne modelowania optymalnego

Powyżej rozważono przypadek układu prętowego obciążonego pewnym układem sił zewnętrznych "p". Zwróćmy uwagę na fakt, że jeśli obciążenie zewnętrzne pojawia się w postaci przemieszczeń "u" zewnętrznie wymuszanych na węzłach układu, to zadanie maksymalizacji intensywności α_u obciążenia zewnętrznego, analogicznie do sformułowania (16), (17), prowadzi do:



a/



b/

Rys. 6

$$26) \quad \max \alpha_u$$

przy ograniczeniach:

$$27) \quad \begin{aligned} V &\geq \bar{V} \\ J &\leq \bar{J} \end{aligned}$$

Można pokazać /por. §§ 2,3/, że rozwiązanie tego zadania realizowane jest przez strukturę izostatyczną o objętości \bar{V} , wytężeniu globalnym \bar{J} i o wyrównanych wytężeniach lokalnych do wartości $\bar{U} = \frac{J}{V}$.

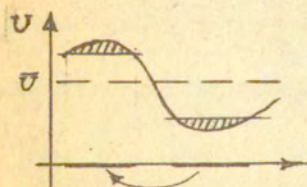
Z zasady prac wirtualnych mamy $J = pU$. Wynika stąd, że otrzymana struktura maksymalizując intensywność zewnętrznie wymuszonych przemieszczeń α_u równocześnie minimalizuje intensywność α_p sił zewnętrznych /reakcji/. Zatem otrzymane tu rozwiązanie pokrywa się z rozwiązaniem konstrukcji najslabszej opisaną przez (23), (24).

Uogólniając, można sprawdzić, że topologia struktury optymalnej poddanej przemieszczeniowym obciążeniom zewnętrznym w sformułowaniu prostym /maksymalizacja intensywności obciąże-

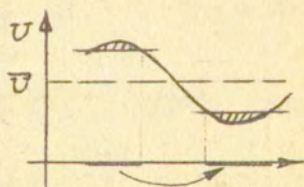
nia/ pokrywa się z topologią struktury optymalnej poddanej siłowemu obciążeniu zewnętrznym w sformułowaniu odwrotnym /minimalizacja intensywności obciążenia/ i vice versa. Przykładowo, topologia rozwiązania (c) na rys. 4 minimalizuje obciążenie siłowe P lecz jednocześnie maksymalizowałaby intensywność przemieszczeń wymuszanych zewnątrz w wierzchołkach przeciwnych. Stwierdzenie powyższe daje dodatkową możliwość wykorzystania topologii odwrotnych rozwiązań optymalnych, jako rozwiązań optymalnych prostych w przypadku obciążeń przemieszczeniowych.

6. Algorytmy modelowania optymalnego

W pracy [8] podano efektywną metodę modelowania optymalnego realizującą rozwiązanie zagadnienia (8), (9). Istota metody polega na transporcie materiału z miejsc niedociążonych w miejsca przeciążone /rys. 7/. Proces ten kontynuowany aż do wyrównania wyteżeń lokalnych powoduje znikanie prętów zbędnych i pozostawia optymalną topologię struktury najsztwniejszej, najlżejszej i najmocniejszej. Nazwijmy ten proces modelowaniem prostym /7a/



a) Modelowanie proste



b) Modelowanie odwrotne

Rys. 7

Można pokazać, że proces przeciwny, polegający na transporcie materiału z elementów hiperstatycznych ($\{i \neq 0\}$) przeciążonych

do miejsc niedociążonych /7b/ prowadzony może być aż do powstania struktury izostatycznej, poddającej się wyrównaniu wyteżeń lokalnych.

Otrzymuje się w ten sposób topologię układu najbardziej wiotkiego, najcięższego i najsłabszego. Proces ten nazwijmy modelowaniem odwrotnym. Jak wspomniano powyżej, w algorytmach modelowania należy zabezpieczyć się przed przejściem struktury w układ geometrycznie zmienny. Szczególnie istotne staje się to w przypadku modelowania odwrotnego, którego naturalną tendencją jest przeprowadzenie struktury w łańcuch kinematyczny.

Proces modelowania prostego prowadzi do rozwiązań przenoszących obciążenie "najkrótszą drogą" podczas gdy proces modelowania odwrotnego dąży do przenoszenia obciążenia drogą możliwie najbardziej pośrednią /por. przykłady - § 7/.

Opiszemy na zakończenie propozycję procedury modelowania prostego i odwrotnego. W przypadku modelowania prostego redystrybucja materiału pomiędzy prętami ustroju /przy danym obciążeniu zewnętrznym/ może odbywać się w każdym kroku iteracyjnym według zasady, że nowy, poprawiony przekrój A pręta wyznaczony jest na podstawie zależności:

$$28) \quad A' = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} A$$

gdzie: A - przekrój elementu w poprzednim kroku iteracyjnym
 σ - naprężenie w elemencie

$$\bar{\sigma} = \sqrt{E \bar{U}} \quad \text{naprężenie w elemencie, do którego ma nastąpić wyrównanie.}$$

W wyniku otrzymujemy najbliższą (V_{\min}) strukturę izostatyczną o wyrównanych wyteżeniach lokalnych do wartości \bar{U} .

W przypadku modelowania odwrotnego redystrybucja materiału może odbywać się według zasady iteracyjnej /dla każdego pręta hiperstatycznego e niezerowym przekroju $A \neq 0$ / :

$$29) \quad A' = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} A \quad \text{jeśli } \sigma \neq 0$$
$$A' = 0 \quad \text{jeśli } \sigma = 0$$

W wyniku otrzymujemy najcięższą (V_{max}) strukturę izostatyczną o wyrównanych wyężeniach do wartości $\bar{U} = \frac{1}{\bar{\sigma}^2}$.

Jeśli przyjmiemy jako punkt wyjścia sformułowanie z ograniczeniem wyężenia globalnego (14), (15), wtedy $\bar{\sigma}$ w (28) można przyjąć na pewnym poziomie umownym a następnie przeskalać przekroje "A" rozwiązania w stosunku $\beta = \frac{V_{min} \bar{U}}{\bar{U}}$ uzyskując rozwiązanie struktury o objętości $V = \beta V_{min}$, wyężeniu globalnym \bar{U} i wyężeniu lokalnym $U = \frac{1}{\beta^2} \bar{U}$. Analogicznie można postąpić w przypadku zadania odwrotnego (29).

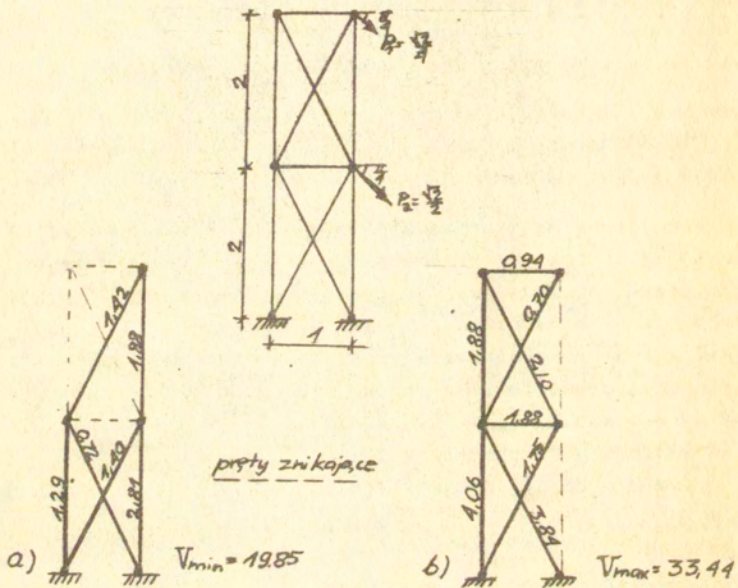
7. Przykład

Przytoczmy na zakończenie za pracę [12] przykład struktury prętowej obciążonej siłami zewnętrznymi /rys.8/. Przyjmując wyężenia dopuszczalne dla dolnego skratowania $\bar{U} = 0,8$ / w jednostkach bezwymiarowych / zaś dla górnego $\bar{U} = 0,4$ otrzymano w wyniku modelowania prostego i odwrotnego rozwiązania optymalne przedstawione na rys. 8a i 8b. Struktura najbliższa związana jest z topologią układu 8a i z objętością $V_{min} = 19,85$ zaś struktura najcięższa z topologią układu 8b i z objętością $V_{max} = 33,44$. Czułość kryterium (25) wynosi $\lambda = \frac{V_{max} - V_{min}}{V_{max}}$
 $= 0,41$.

8. Dyskusja

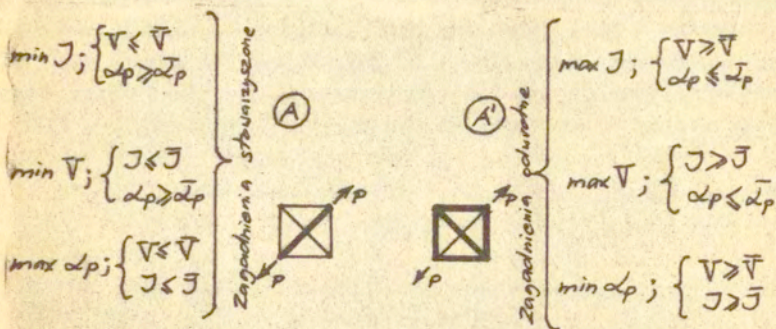
Z przeprowadzonej w pracy analizy wynika, że można określić zbiory stowarzyszonych zagadnień optymalizacji rozkładu materiału w strukturach prętowych, których rozwiązania z topologicznego punktu widzenia są nierozróżnialne zaś z geometrycznego punktu widzenia różnią się jedynie współczynnikami skalującymi.

Podsumowując rozważania zestawmy klasyfikację problemową modelowania optymalnego:

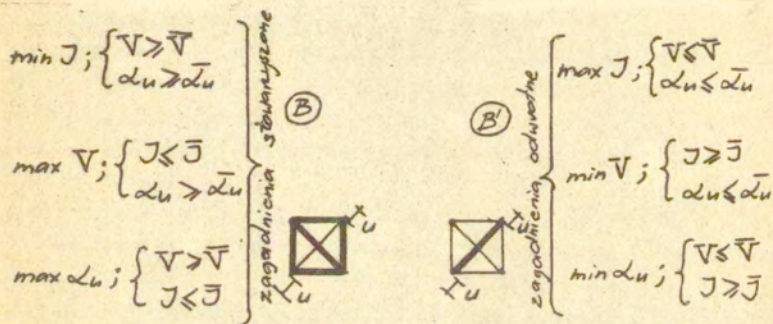


Rys. 8.

Przypadek siłowych obciążeń zewnętrznych



Przypadek przemieszczeniowych obciążeń zewnętrznych /zagadnienia komplementarne/



Zagadnienia modelowania ze zbiorów A oraz B' posiadają wspólną cechę sprawdzania układu do struktury o topologii pozwalającej na przenoszenie obciążeń najkrótszą drogą, podczas gdy rozwiązania zagadnień ze zbiorów A' oraz B związane są z topologią połączeń przenoszących obciążenia drogą jak najbardziej pośrednią.

Zagadnienia ze zbiorów A' oraz B' posiadają sens inżyn-

nierski w optymalizacji sieci elektrycznych związany np. z minimalizacją dostarczonej energii przy lokalnych napięciach i natężeniach nie spadających poniżej pewnych wartości.

Omawiane w pracy problemy mogą posłużyć do badania zagadnień modelowania optymalnego w przypadku wielu stanów obciążeń a także do modelowania wielokryterialnego, rozważającego opcje kształtowania i sprężenia struktur /por. [12] /.

Literatura cytowana w tekście

1. H.L.Cox The Design of Design of Least Weight, Pergamon Press Oxford 1965
2. F.Jevi Sulla valutazione degli effetti dell'elasticità ritardata dei solidi iperstatici, Giorn.Gen.Civ. 7/8 1949
3. W.Marks Optymalizacja elementów zginanych wstępnie naprężonych, Prace IPPT-PAN 52/1978
4. J.C.Maxwell On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames, The Sci.Pap.of J.C.Maxwell, Cambridge Univ. Press.1890
5. A.G.Michell The Limits of Economy of Material in Frame Structures Phil.Mag.Series,vol.8 No 47,London 1904
6. Z.Mróz,W.Kozłowski Optimal Design of Disks Subject to Geometric Constraints, Int.J.Mech.Sci. vol.12,1970
7. A.Niemierko Optymalizacja kratownic metodami programowania matematycznego, Prace IPPT-PAN 2/1978
8. N.E.Olhoff, J.E.Taylor On Optimal Structural Remodeling, J.Opt.Th.Applic. vol.27 No4 April 1979
9. J.E.Taylor, M.P.Bendsøe Modified Mini-Max Problems in Structural Optimization, DCAMM the Technical University of Denmark, Rep.No256, Dec 1982
- 10.Z.Wasiutyński O kształtowaniu wytrzymałościowym, Akad.Nauk Techn. Warszawa 1939
11. J.Holnicki-Szulc Zagadnienia dystorsji sprężystych w wieloelementowych układach konstrukcyjnych-Analiza,Identyfikacja, Sterowanie Prace IPPT-PAN 27/1980
- 12.J.Holnicki-Szulc Minisystem of Optimal Structural Adaptation -Comunicaciones Technicas, IIMAS-UNAM 274/1981 Mexico