Jan K. Frąckowiak
Stanisław Przeździecki
Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych

POTENCJAŁY DEBYE'A DLA OŚRODKA SFERYCZNIE ŻYROTROPOWEGO

Skalarne potencjały Hertza dla ośrodków żyrotropowych zostały wprowadzone w pracy [1] . Jak wiadomo [2, 3, 4, 5] w ośrodku izotropowym dla zagadnień o symetrii kulistej rólę analogiczną do roli skalarnych potencjałów Hertza odgrywają dwie pomocnicze funkcje skalarne zwane potencjałami Deby'e'a [4] lub radialnymi potencjałami Hertza [5] . Łatwo zauważyć, że symetria kulista pozostaje zachowana również w przypadku gdy kierunek radialny staje się kierunkiem lokalnie wyróżnionym dla tensorów konstytutywnych $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\mu}$. Ogólnie w takim przypadku, w odpowiednim układzie współrzędnych sferycznych ϑ , φ , r, tensory te przybierają następującą postać:

$$/1a/ \qquad \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -i\varepsilon_q & 0 \\ i\varepsilon_q & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r \end{pmatrix} , \qquad /1b/ \qquad \underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & -i\mu_q & 0 \\ i\mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_r \end{pmatrix}$$

Wielkości $\varepsilon, \varepsilon_q, \varepsilon_r ; \mu, \mu_q, \mu_r$ są zwykle funkcjami r. Ośrodek opisywany tensorami o postaci /1/ nazywać będziemy sferycznie żyrotropowym, jeżeli $\varepsilon_q \neq 0$ oraz /lub/ $\mu_q \neq 0$.

Przedmiotem tej pracy jest uogólnienie potencjałów Debye'a na przypadek ośrodka sferycznie żyrotropowego. Postępowanie prowadzące do tego celu jest w pełni analogiczne do zastosowanego w pracy [1] dla skalarnych potencjałów Hertza. Fizycznie rola ośrodków opisywanych tensorami o postaci /1/ wydaje się raczej ograniczona. Przykładem o pewnym znaczeniu może być plazma w pobliżu biegunów dipola magnetycznego. Model taki znalazł praktyczne zastosowanie dla opisu propagacji fal bardzo długich wokół ziemi i w jonosferze, na średnich i dużych szerokościach geograficznych [6] . Gdy $\varepsilon_q = \mu_q$ ośrodek sferycznie żyrotropowy redukuje się do ośrodka radialnie jednoosiowo anizotropowego.

1. Oznaczenia

Jeśli przez $\underline{q}_0$, $\underline{p}_0$, $\underline{r}_0$ oznaczone są wersory sferycznego układu współrzędnych ϑ, φ, r a dowolny wektor $\underline{A}$ zostanie zapisany w postaci

$$\underline{A} = A_r \underline{r}_0 + A_\varphi \underline{p}_0 + A_\vartheta \underline{q}_0 = A_r \underline{r}_0 + \underline{a} ,$$

można operator rotacji wyrazić formułą

$$/2/ \qquad \underline{\nabla} \times \underline{A} = \underline{r}_0 \, \underline{\nabla}_t \cdot (\underline{a} \times \underline{r}_0) + \underline{r}_0 \times \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{a}) - \underline{r}_0 \times \underline{\nabla}_t A_r .$$

Będziemy też oznaczać

$$\underline{\nabla}_t \psi = \underline{\nabla} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial r} \underline{r}_0 ,$$

$$/3/ \qquad \underline{\nabla}_t \cdot \underline{A} = \underline{\nabla}_t \cdot \underline{a} = \underline{\nabla} \cdot \underline{A} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) ,$$

$$\underline{\nabla}_t^2 \psi = \underline{\nabla}_t \cdot (\underline{\nabla}_t \psi) = \underline{\nabla}^2 \psi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) ,$$

gdzie ψ jest funkcją skalarną.

2. Ośrodek izotropowy

Podstawowe fakty dotyczące potencjałów Debye'a /radialnych potencjałów Hertza/ dla ośrodka izotropowego można zreasumować w następujących dwóch twierdzeniach.

Twierdzenie 1

Pole elektromagnetyczne $\underline{E}$, $\underline{H}$ utworzone w obszarze D ośrodka izotropowego z dwóch funkcji skalarnych u, v przy pomocy następujących wzorów

/4a/ $$\underline{E} = \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times r u \underline{r}_0 + i\omega\mu \underline{\nabla} \times r v \underline{r}_0$$

/4b/ $$\underline{H} = -i\omega\varepsilon \underline{\nabla} \times r u \underline{r}_0 + \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times r v \underline{r}_0$$

spełnia jednorodny układ równań Maxwella

/5a/ $$\underline{\nabla} \times \underline{H} = -i\omega\varepsilon \underline{E}$$

/5b/ $$\underline{\nabla} \times \underline{E} = i\omega\mu \underline{H} ,$$

jeśli funkcje u i v spełniają równanie Helmholtza

/6/ $$(\underline{\nabla}^2 + k^2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

gdzie $k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu$.

Prosty dowód tego twierdzenia wynika z podstawienia wyrażeń /4/ do równań /5/.

Funkcje u, v nazywać będziemy potencjałami Debye'a. Z formuł /4/ widać, iż ru i rv są składowymi radialnymi odpowiednio elektrycznego i magnetycznego wektora Hertza.

Konsekwencją Twierdzenia 1 są następujące dwa wnioski.

a. Pole $\underline{E}^e, \underline{H}^e$ utworzone z funkcji u jest poprzeczne magnetycznie /TM/ względem kierunku radialnego $\underline{r}_0$, tzn. $\underline{H}^e \cdot \underline{r}_0 = 0$ zaś pole $\underline{E}^m, \underline{H}^m$ utworzone z funkcji v jest poprzeczne elektrycznie względem tego samego kierunku, tzn. $\underline{E}^m \cdot \underline{r}_0 = 0$

b. Każde z pól $\underline{E}^e, \underline{H}^e$ i $\underline{E}^m, \underline{H}^m$ spełnia oddzielnie układ równań Maxwella /5/.

Twierdzenie 1 można uważać za odwrotne względem twierdzenia następującego.

Twierdzenie 2

Dowolne pole elektromagnetyczne $\underline{E}$, $\underline{H}$ określone w obszarze D i spełniające tam równania Maxwella /5/ można w tym obszarze wyrazić przez dwie funkcje skalarne u, v w postaci formuł /4/, jeśli funkcje u, v spełniają równania Helmholtza /6/.

Powyższe można także sformułować w postaci twierdzenia o podziale pola elektromagnetycznego:

Twierdzenie 2'

Dowolne bezźródłowe pole elektromagnetyczne $\underline{E}$, $\underline{H}$ w obszarze D można podzielić na pola typu TE i TM ze względu na kierunek radialny w układzie współrzędnych sferycznych, /albo ze względu na dowolny kierunek w układzie współrzędnych kartezjańskich/. Każde z tych pól TE i TM spełnia równania Maxwella /5/ i może być wyrażone przez jedną funkcję skalarną spełniającą równanie Helmholtza /6/.

Dowód Twierdzenia 2 /albo 2'/ z różnymi warunkami narzuconymi na obszar D został podany w [5] i [9]. Dowód ten nie sprowadza się jednak do tak prostego postępowania, jak w przypadku Twierdzenia 1.

Twierdzenia 1, 2 i 2' można łatwo uogólnić dla przypadku ośrodka jednoosiowo anizotropowego, w którym podział na pola TE i TM przeprowadza się ze względu na wyróżnioną oś, /skierowaną wzdłuż wersora $\underline{r}_0$ dla ośrodka radialnie jednoosiowo anizotropowego/. Odpowiednie formuły są wtedy szczególnym przypadkiem związków, jakie zostaną wyprowadzone dla ośrodka żyrotropowego.

Jeśli pole $\underline{E}$, $\underline{H}$ zapiszemy w postaci

$$\underline{E} = E_r \underline{r}_o + \underline{e} , \qquad \underline{H} = H_r \underline{r}_o + \underline{h} ,$$

gdzie $\underline{e} \cdot \underline{r}_o = 0$, $\underline{h} \cdot \underline{r}_o = 0$, formuły /4/ można podać w następującej formie

/7a/
$$\underline{e} = \nabla_t \frac{\partial}{\partial r} ru - i\omega\mu \underline{r}_o \times \nabla_t rv .$$
$$\underline{h} = i\omega\varepsilon \underline{r}_o \times \nabla_t ru + \nabla_t \frac{\partial}{\partial r} rv$$

/7b/
$$E_r = -\nabla_t^2 ru , \qquad H_r = -\nabla_t^2 rv .$$

3. Ośrodek sferycznie żyrotropowy

Ośrodek sferycznie żyrotropowy opisują tensory /1/. Jeżeli $\varepsilon_q = \mu_q = 0$, lecz ε_r i μ_r nie są równocześnie równe odpowiednio ε i μ , ośrodek nazwiemy radialnie anizotropowym. Przyjmiemy, że $\varepsilon, \varepsilon_q, \varepsilon_r ; \mu, \mu_q, \mu_r$ zależą od r, to znaczy, że rozpatrywany ośrodek może być niejednorodny w kierunku radialnym.

Zajmiemy się obecnie uogólnieniem Twierdzenia 1. na przypadek ośrodka sferycznie żyrotropowego. Równania Maxwella przybierają teraz postać

/8a/
$$\nabla \times \underline{H} = -i\omega\underline{\varepsilon} \cdot \underline{E}$$

/8b/
$$\nabla \times \underline{E} = i\omega\underline{\mu} \cdot \underline{H} .$$

Wykorzystując /3/ i formuły

/9/
$$\underline{\varepsilon} \cdot \underline{E} = \varepsilon_r E_r \underline{r}_o + \underline{\varepsilon} \cdot \underline{e}$$
$$\underline{\mu} \cdot \underline{H} = \mu_r H_r \underline{r}_o + \underline{\mu} \cdot \underline{h} ,$$

równania /8/ można rozbić na dwie części - zawierające wektory równoległe i prostopadłe do $\underline{r}_o$:

$$-i\omega\varepsilon_r E_r = \nabla_t \cdot (\underline{h} \times \underline{r}_0) \tag{10}$$
$$i\omega\mu_r H_r = \nabla_t \cdot (\underline{e} \times \underline{r}_0)$$

$$\underline{r}_0 \times \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{h}) = -i\omega\underline{\varepsilon}\cdot\underline{e} + \underline{r}_0 \times \nabla_t H_r \tag{11}$$
$$\underline{r}_0 \times \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{e}) = i\omega\underline{\mu}\cdot\underline{h} + \underline{r}_0 \times \nabla_t E_r .$$

Mnożąc /11/ wektorowo przez $\underline{r}_0$ oraz po wykorzystaniu /10/ i formuł

$$\underline{\varepsilon}\cdot\underline{e} = \varepsilon\underline{e} + i\varepsilon_q(\underline{r}_0 \times \underline{e}) \tag{12}$$
$$\underline{\mu}\cdot\underline{h} = \mu\underline{h} + i\mu_q(\underline{r}_0 \times \underline{h})$$

otrzymamy

$$\frac{i\omega\mu_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{h}) = \omega^2\varepsilon\mu_r\underline{e}\times\underline{r}_0 + i\omega^2\varepsilon_q\mu_r\underline{e} + \nabla_t\left[\nabla_t\cdot(\underline{e}\times\underline{r}_0)\right] \tag{13}$$
$$-\frac{i\omega\varepsilon_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{e}) = \omega^2\mu\varepsilon_r\underline{h}\times\underline{r}_0 + i\omega^2\mu_q\varepsilon_r\underline{h} + \nabla_t\left[\nabla_t\cdot(\underline{h}\times\underline{r}_0)\right].$$

Dzięki temu, że E_r i H_r są explicite wyrażone przez $\underline{e}$ i $\underline{h}$ w /10/, układ /11/ jest równoważny układowi /8/. Oznacza to, iż każde rozwiązanie $\underline{e}$ i $\underline{h}$ spełniające równania /11/ daje także rozwiązanie równań /8/, jeśli tylko E_r i H_r są określone przez /10/. Jednakże odpowiednie warunki brzegowe dla równań /11/ należy - w razie potrzeby - wyprowadzić posługując się równaniami Maxwella /8/.

Wypiszemy jeszcze dodatkowe relacje pomiędzy transwersalnymi i radialnymi częściami pól $\underline{E}$ i $\underline{H}$. Relacje te wynikają z równań spełnianych w obszarze bezźródłowym:

/14/
$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{\varepsilon}\cdot\underline{E}) = 0$$
$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{\mu}\cdot\underline{H}) = 0.$$

Wykorzystując /12/ i /10/ otrzymamy z /14/

/15/
$$\underline{\nabla}_t\cdot\underline{e} = -\frac{1}{\varepsilon r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\varepsilon_r E_r) - \frac{\omega\varepsilon_g\mu_r}{\varepsilon}H_r$$
$$\underline{\nabla}_t\cdot\underline{h} = -\frac{1}{\mu r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\mu_r H_r) + \frac{\omega\mu_g\varepsilon_r}{\mu}E_r.$$

Pomnóżmy teraz skalarnie obydwa równania /13/ przez $r\underline{\nabla}_t\cdot$ i wykorzystajmy /15/ oraz /10/ by uzyskać równania na E_r i H_r:

/16/
$$\left(\underline{\nabla}_t^2 + \frac{\varepsilon_r}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r}r^2 + k_e^2\right)\varepsilon_r E_r = -\omega\varepsilon_r\left[\frac{\tau_g}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon}\right)\right]\mu_r H_r$$
$$\left(\nabla_t^2 + \frac{\mu_r}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}r^2 + k_m^2\right)\mu_r H_r = \omega\mu_r\left[\frac{\tau_g}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mu_g}{\mu}\right)\right]\varepsilon_r E_r,$$

gdzie
$$k_e^2 = \omega^2\varepsilon_r\frac{\mu^2-\mu_g^2}{\mu}, \quad k_m^2 = \omega^2\mu_r\frac{\varepsilon^2-\varepsilon_g^2}{\varepsilon}, \quad \tau_g = \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon}\frac{\mu_g}{\mu}.$$

W taki sposób układ równań Maxwella został podzielony na dwa układy /13/ i /16/ zawierające odpowiednio tylko transwersalne i radialne składowe pól $\underline{E}$ i $\underline{H}$. Formuły wiążące te składowe między sobą są dane w /10/ i /15/.

4. Potencjały

Wykorzystując dwie skalarne funkcje u, v skonstruujemy teraz pole elektromagnetyczne, spełniające równania Maxwella /8/.

Przyjmijmy, że radialne składowe E_r i H_r są dane wyrażeniami

$$\varepsilon_r E_r = -\underline{\nabla}_t^2 ru \,, \qquad\qquad /17/$$
$$\mu_r H_r = -\underline{\nabla}_t^2 rv \,.$$

Jeżeli /17/ podstawimy do /16/ okaże się, że ten ostatni układ równań będzie spełniony, gdy

$$\left(\underline{\nabla}_t^2 + \frac{\varepsilon_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r}r + k_e^2\right)u = -\omega\varepsilon_r\left[\frac{\tau_g}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon}\right)\right]v \qquad /18/$$
$$\left(\underline{\nabla}_t^2 + \frac{\mu_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}r + k_m^2\right)v = \omega\mu_r\left[\frac{\tau_g}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mu_g}{\mu}\right)\right]u \,.$$

Przez podstawienie /17/ do /15/ otrzymamy

$$\underline{\nabla}_t\cdot\underline{e} = \frac{1}{\varepsilon}\underline{\nabla}_t^2\frac{\partial}{\partial r}ru + \frac{\omega\varepsilon_g}{\varepsilon}\underline{\nabla}_t^2 rv \qquad /19/$$
$$\underline{\nabla}_t\cdot\underline{h} = \frac{1}{\mu}\underline{\nabla}_t^2\frac{\partial}{\partial r}rv - \frac{\omega\mu_g}{\mu}\underline{\nabla}_t^2 ru \,,$$

a stąd

$$\underline{\nabla}_t\cdot\left(\underline{e} - \frac{1}{\varepsilon}\underline{\nabla}_t\frac{\partial}{\partial r}ru - \frac{\omega\varepsilon_g}{\varepsilon}\underline{\nabla}_t rv\right) = 0 \qquad /20/$$
$$\underline{\nabla}_t\cdot\left(\underline{h} - \frac{1}{\mu}\underline{\nabla}_t\frac{\partial}{\partial r}rv + \frac{\omega\mu_g}{\mu}\underline{\nabla}_t ru\right) = 0 \,.$$

Przy użyciu pewnych pomocniczych funkcji φ i ψ równania /20/ można zapisać w postaci

$$\underline{e} - \frac{1}{\varepsilon}\underline{\nabla}_t\frac{\partial}{\partial r}ru - \frac{\omega\varepsilon_g}{\varepsilon}\underline{\nabla}_t rv = \underline{\nabla}_t\varphi\times\underline{r}_0 \qquad /21/$$
$$\underline{h} - \frac{1}{\mu}\underline{\nabla}_t\frac{\partial}{\partial r}rv + \frac{\omega\mu_g}{\mu}\underline{\nabla}_t ru = \underline{\nabla}_t\psi\times\underline{r}_0 \,.$$

Podstawiając teraz /21/ do /10/ i wykorzystując /17/, dostaniemy

/22/
$$\begin{aligned} &\underline{\nabla}_t^2 (\varphi - i\omega r v) = 0 \\ &\underline{\nabla}_t^2 (\psi + i\omega r u) = 0 . \end{aligned}$$

Wybierzemy szczególne całki równań /22/ tak, by

/23/
$$\begin{aligned} &\varphi = i\omega r v \\ &\psi = -i\omega r u . \end{aligned}$$

Dzięki temu związkowi /21/ można teraz zapisać w postaci

/24/
$$\begin{aligned} &\underline{e} = \frac{1}{\varepsilon} \underline{\nabla}_t \frac{\partial}{\partial r} r u + \frac{\omega \varepsilon_g}{\varepsilon} \underline{\nabla}_t r v + i\omega \underline{\nabla}_t r v \times r_0 \\ &\underline{h} = \frac{1}{\mu} \underline{\nabla}_t \frac{\partial}{\partial r} r v - \frac{\omega \mu_g}{\mu} \underline{\nabla}_t r u - i\omega \underline{\nabla}_t r u \times r_0 . \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że pola /24/ spełniają /13/ jeżeli u, v spełniają /18/.

Wykorzystując równania /18/ można składowe radialne pól $\underline{E}$ i $\underline{H}$, wyrażone przez /17/, podać w postaci następującej

/25/
$$\begin{aligned} &E_r = \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\varepsilon_r} k_e^2 \right) r u + \omega \left[\tau_g \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon} \right) \right] r v \\ &H_r = \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\mu_r} k_m^2 \right) r v - \omega \left[\tau_g \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\mu_g}{\mu} \right) \right] r u . \end{aligned}$$

Wyrażenia /17/ i /24/ można sprowadzić do jednolitej formy wektorowej

$$\underline{E} = \left(\frac{1}{\varepsilon} \underline{\nabla}_t \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\varepsilon_r} \underline{\nabla}_t^2 \underline{r}_0 \right) ru + \left[\frac{i\omega}{\varepsilon} \underline{\tilde{\varepsilon}} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{r}_0) \right] vr$$

$$\underline{H} = \left(\frac{1}{\mu} \underline{\nabla}_t \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu_r} \underline{\nabla}_t^2 \underline{r}_0 \right) rv - \left[\frac{i\omega}{\mu} \underline{\tilde{\mu}} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{r}_0) \right] ur , \tag{26}$$

gdzie tylda oznacza macierz transponowaną.

Nietrudno teraz zauważyć, że dla ośrodka izotropowego formuły /26/ redukują się do /4/ z dokładnością do współczynników ε i μ, co wynika z różnic w definicjach potencjałów u i v. Funkcje u i v, wprowadzone przez /17/, można uważać za uogólnione /dla ośrodków żyrotropowych/ skalarne potencjały Debye'a /radialne potencjały Hertza/.

Otrzymane wyżej wyniki dotyczące potencjałów u i v można podsumować w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3

Poprzeczne pole elektromagnetyczne $\underline{e}$, $\underline{h}$, utworzone z dwóch funkcji skalarnych u, v przy pomocy formuł /24/, spełnia układ równań /13/ jeżeli u i v spełniają /18/. Innymi słowy, pole $\underline{E}$, $\underline{H}$ określone przez /26/ spełnia równania Maxwella /8/, jeśli u, v spełniają /18/.

Można jednakże łatwo spostrzec, że twierdzenie o podziale pola /Twierdzenie 2'/ nie jest prawdziwe dla ośrodka żyrotropowego. Ogólnie biorąc nie istnieje pole TE albo TM, które spełnia równania Maxwella i może być otrzymane przy pomocy jednej funkcji skalarnej u albo v.

5. Superpotencjały

Idea wprowadzenia pomocniczych funkcji /potencjałów/, które generują pole elektromagnetyczne, może zostać rozszerzona przez określenie dalszych funkcji zwanych superpotencjałami, generującymi potencjały [10] . Na ogół konieczne jest użycie dwóch superpotencjałów, lecz w przypadku ośrodka żyrotropowego obydwa potencjały u, v można utworzyć posługując się jedną tylko funkcją skalarną. Taką funkcję wprowadził A.G. Gurewicz [11] , dochodząc do niej bez definiowania potencjałów. Obecnie określimy superpotencjał dla ośrodka sferycznie żyrotropowego w sposób podobny do użytego w [1] .

Zdefiniujemy następujące operatory różniczkowe .

/27/
$$\underline{\nabla}_e^2 = \underline{\nabla}_t^2 + \frac{\varepsilon_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r} r + k_e^2$$
$$\underline{\nabla}_m^2 = \underline{\nabla}_t^2 + \frac{\mu_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial r} r + k_m^2$$
$$R_e = \varepsilon_r \left[\frac{I_g}{r}\frac{\partial}{\partial r} r + \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon}\right)\right]$$
$$R_m = \mu_r \left[\frac{I_g}{r}\frac{\partial}{\partial r} r + \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mu_g}{\mu}\right)\right].$$

Korzystając z tych oznaczeń można zapisać równania /18/ na potencjały u, v w zwięzłej formie

/28/
$$\underline{\nabla}_e^2 u = -\omega R_e v$$
$$\underline{\nabla}_m^2 v = \omega R_m u .$$

Ponieważ u i v są związane układem dwóch równań różniczkowych drugiego rzędu, można znaleźć jedną funkcję skalarną /superpotencjał/, spełniającą równanie czwartego rzędu i określającą oba potencjały u i v.

Zdefiniujemy formalnie operatory R_e^{-1} , R_m^{-1} odwrotne do występujących w /27/, tak aby

$$R_e^{-1} R_e = 1 \qquad , \qquad R_m^{-1} R_m = 1 .$$

Niech funkcja skalarna U spełnia równanie różniczkowe

/29/
$$\left(\underline{\nabla}_e^2 R_m^{-1} \underline{\nabla}_m^2 R_m + \omega^2 R_e R_m\right) U = 0 .$$

Wówczas funkcje u, v określone przez funkcję U następująco

/30/ $$u = R_m^{-1} \nabla_m^2 R_m U \quad , \quad v = \omega R_m U$$

spełniają równania /28/. Tak więc wyraziliśmy potencjały u, v przy pomocy jednego superpotencjału U. Podobnie można zdefiniować superpotencjał V spełniający równanie

/31/ $$(\nabla_m^2 R_e^{-1} \nabla_e^2 R_e + \omega^2 R_m R_e) V = 0 .$$

Potencjały u, v wyrażają się przez V w sposób następujący

/32/ $$u = -\omega R_e V \quad , \quad v = R_e^{-1} \nabla_e^2 R_e V .$$

Operatory R_e^{-1}, R_m^{-1} są na ogół skomplikowanymi wyrażeniami całkowymi. Jedynie gdy operatory ∇_e^2 i R_e, albo ∇_m^2 i R_m komutują, równania na U albo V przybierają prostszą postać, podobnie jak i formuły na u, v.

Dla ośrodka żyrotropowego, tzn. gdy ε_g i μ_g nie równają się jednocześnie zeru, operatory ∇_e^2 i R_e, oraz ∇_m^2 i R_m komutują w dwóch szczególnych przypadkach:

a. Tensory $\underline{\varepsilon}$ i $\underline{\mu}$ nie zależą od r /ośrodek jest jednorodny/, natomiast superpotencjały zależą tylko od r / $\nabla_t^2 = 0$/.

b. Tensory $\underline{\varepsilon}$ i $\underline{\mu}$ przybierają taką postać, że

$$\frac{\mu_g}{\mu} = -\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_g}{\mu}\right) = \text{const} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon}\right) = \text{const} .$$

LITERATURA

[1] S. PRZEŹDZIECKI, R.A. HURD - A Note on Scalar Hertz Potentials for Gyrotropic Media, Appl. Phys. 20, 313-317 /1979/.

[2] G. MIE - Ann. der Phys. 25/1908/, No. 3.

[3] P. DEBYE - Ann. der Phys. 30/1909/, No. 11.

[4] L.A. WEINSTEIN - Fale elektromagnetyczne, PWN, Warszawa 1963.

[5] K. BOCHENEK - Metody analizy pól elektromagnetycznych, Monografie Zagadnień Elektrotechniki Teoretycznej, PWN, Warszawa - Wrocław, 1961.

[6] P.E. KRASNUSZKIN, N.A. JABŁOCZKIN - Teoria rasprostranienija swierchdlinnych wołn, AN ZSRR, moskwa 1963.

[7] J.R. WAIT - Electromagnetic Waves in Stratified Media, Pergamon Press 1970.

[8] B. FRIEDMAN - Electromagnetic Waves, ed. by R.E. Langer, 301-309, Madison 1962.

[9] S. PRZEŹDZIECKI - Bull. Acad. Pol. Sc. Ser. Tech. 9/1961/, 175-8.

[10] L.B. FELSEN, N. MARCUVITZ - Radiation and Scattering of Waves, Prentice-Hall 1973.

[11] A.G. GUREWICZ - Ferryty w swierchwysokich czastotach, Moskwa 1960.