Andrzej Sławiński

Zakład Układów Mechanicznych

1.12 - Metody numeryczne
17.71 - Ogólna teoria układów mechanicznych

ALGORYTM OBLICZANIA WSKAŹNIKA ZBIEŻNOŚCI WYKŁADNICZEJ UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH LINIOWYCH O STAŁYCH WSPÓŁCZYNNIKACH

Jednym z najważniejszych problemów zarówno w procesie projektowania, jak i badania już istniejących układów technicznych, jest określenie stateczności ich wybranych położeń lub ruchów. Matematyczny model układu technicznego jest najczęściej układem równań o skomplikowanej strukturze i złożonej zależności od parametrów fizycznych. W przypadku układu opisanego modelem dyskretnym o skończonej liczbie stopni swobody mamy układ równań różniczkowych zwyczajnych. Jeśli interesują nas małe drgania takiego układu w pobliżu wybranych punktów równowagi lub rozmaitości ruchu ustalonego, dokonujemy linearyzacji modelu w otoczeniu tych punktów lub rozmaitości. Otrzymujemy wtedy układ równań różniczkowych liniowych o współczynnikach zależnych od parametrów fizycznych. Znanym od dawna warunkiem stateczności asymptotycznej, a co za tym idzie wykładniczej, takiego układu jest ujemna wartość największej spośród części rzeczywistych wartości własnych macierzy układu. Liczba ta wzięta ze znakiem przeciwnym, nazywana w tej pracy wskaźnikiem zbieżności wykładniczej, określa także stopień stateczności układu.

Istnieje wiele metod poszukiwania wartości własnych macierzy: szacowanie i lokalizacja wartości własnych, wyznaczanie współczynników wielomianu charakterystycznego macierzy, a następnie poszukiwanie pierwiastków tych wielomianów, iteracyjne wyznaczanie wartości własnej o największym module, poszukiwanie wszystkich wartości własnych przez sprowadzanie macierzy do określonej postaci. Jednakże, aby określić stateczność układu liniowego o stałych współczynnikach nie trzeba znać wszystkich wartości własnych układu ani nie wystarcza znajomość wartości o największym module. Istniejące dotychczas metody pozwalają na wyznaczenie największej części rzeczywistej wartości własnych tylko dla macierzy symetrycznej. Poniższa praca przedstawia metodę wyznaczania wskaźnika zbieżności wykładniczej układu z dowolną macierzą - bez potrzeby znajdowania wszystkich wartości własnych macierzy.

Spis oznaczeń

R - zbiór liczb rzeczywistych,

C - zbiór liczb zespolonych,

E - macierz jednostkowa,

A^T - macierz transponowana,

$\bar{A}$ - macierz o elementach sprzężonych z A ,

A^* - macierz hermitowsko sprzężona z A ($A^* = \bar{A}^T$),

$\det(A)$ - wyznacznik macierzy A,

$\mathrm{diag}\{a_1 \ldots a_n\}$ - macierz kwadratowa diagonalna o elementach $a_1, \ldots, a_n$ na głównej przekątnej,

$\|A\|$ - norma macierzy A,

$\langle x, y \rangle$ - iloczyn skalarny wektorów x, y,

a_{ij} , $A[i,j]$ - element macierzy A znajdujący się w i-tym wierszu i j-tej kolumnie,

$\mathrm{Sp}(A)$ - ślad macierzy A $\left(\mathrm{Sp}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)$

$M_{mn}(F)$ - zbiór macierzy prostokątnych $m \times n$ o elementach ze zbioru F,

$M_n^{\alpha}(F)$ - zbiór macierzy kwadratowych $n \times n$ o własnościach α , przy czym α jest dowolnym podzbiorem zbioru własności o elementach:

- $\triangledown$ - macierz trójkątna górna $(a_{ij} = 0$ dla $i > j)$,
- $\triangle$ - macierz trójkątna dolna $(a_{ij} = 0$ dla $i < j)$,
- $+$ - macierz dodatnio określona $(\langle x, Ax \rangle > 0$, dla każdego niezerowego wektora $x \in M_{n1}(F))$,
- o - macierz osobliwa $(\det A = 0)$,
- $\not o$ - macierz nieosobliwa $(\det A \neq 0)$,
- H - macierz hermitowska $(A = A^*)$,
- S - macierz symetryczna $(A = A^T)$,
- N - macierz normalna $(AA^* = A^*A)$,
- U - macierz unitarna $(A^{-1} = A^*)$,

$\lambda(A)$ - zbiór wartości własnych macierzy A ,

$X(A)$ - zbiór wektorów własnych macierzy A .

1. Postawienie zagadnienia

Dany jest zlinearyzowany układ równań różniczkowych liniowych o macierzy stałej

$$\dot{x} = Ax, \tag{1}$$

gdzie $A \in M_n(C)$, $x(t) \in M_{n1}(C)$.

Definicja 1.1

Wskaźnikiem zbieżności wykładniczej układu (1) nazywamy największą część rzeczywistą wartości własnych macierzy A układu (1) ze znakiem przeciwnym, to jest

$$\sigma = -\max_{i=1..n} \operatorname{Re} \lambda_i(A) \tag{2}$$

Układ (1) jest wykładniczo stateczny /por.tw.6.1, 6.2/ wtedy i tylko wtedy, gdy wskaźnik zbieżności wykładniczej(2) jest dodatni $(\sigma > 0)$. Wskaźnik (2) określa również zapas stateczności układu (1) w ten sposób, że układ (1) jest tym bardziej stateczny im większy jest wskaźnik (2).

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie algorytmu wyznaczania wskaźnika zbieżności wykładniczej (2) układu (1) z dowolną stałą macierzą $A \in M_n(C)$. Problem ten oczywiście jest równoważny zagadnieniu wyznaczania największej części rzeczywistej wartości własnych macierzy $A \in M_n(C)$.

2. Rozwiązanie zagadnienia

Ogólnie znana jest metoda znajdowania największej wartości własnej macierzy symetrycznej o elementach rzeczy-

wistych za pomocą maksymalizacji ilorazu Rayleigh`a. Ponieważ wszystkie wartości własne macierzy symetrycznej są rzeczywiste, więc optymalizacja ilorazu Rayleigh`a jest jednocześnie poszukiwaniem wskaźnika zbieżności wykładniczej (2).
Jeśli macierz układu (1) jest rzeczywista lecz niesymetryczna, to można ją przekształcić do macierzy normalnej o tych samych wartościach własnych co A. Macierz normalna B ma tę własność, że wartości własne jej części symetrycznej są równe częściom rzeczywistym wartości własnych macierzy B . Poszukiwanie największej części rzeczywistej wartości własnych dowolnej macierzy rzeczywistej można więc sprowadzić do problemu maksymalizacji ilorazu Rayleigh`a. Jeśli macierz A jest zespolona i ma wartości własne $\lambda_i(A)$ $(i = 1,\dots,n)$, to istnieje macierz rzeczywista o dwa razy większym wymiarze i wartościach własnych $\lambda_i(A)$ oraz $\overline{\lambda}_i(A)$ $(i = 1,\dots,n)$. Tak więc również w tym przypadku zagadnienie można sprowadzić do optymalizacji ilorazu Rayleigh`a. W przedstawionym poniżej dowodzie algorytmu rozwiązania zakłada się, że macierz A układu (1) ma prostą strukturę. Eksperymenty numeryczne wskazują jednak, że zaproponowaną metodę poszukiwania wskaźnika (2) można również stosować dla macierzy nie mających prostej struktury. W pracy pokazano to jedynie na przykładzie dla $n = 2$.

2.1. Układ z macierzą rzeczywistą o prostej strukturze

Załóżmy, że macierz $A \in M_n(R)$ układu (1) ma prostą strukturę. W [9] stwierdzono, że każdą macierz o prostej strukturze za pomocą przekształcenia przez podobieństwo można sprowadzić do macierzy normalnej. Wykażemy, że macierzą przekształcenia może być macierz trójkątna, rzeczywista, o dodatnich elementach na przekątnej głównej.

Twierdzenie 2.1.

Dla każdej macierzy $A \in M_n(R)$ posiadającej prostą strukturę istnieje macierz $\tilde{N} \in M_n^{\Delta}(R)$ postaci

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} n_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ n_{n1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

przekształcająca macierz A za pomocą przekształcenia przez podobieństwo

$$B = \tilde{N} A \tilde{N}^{-1} \tag{4}$$

do macierzy normalnej $B \in M_n^N(R)$.

Dowód

Macierz $A \in M_n(R)$ o prostej strukturze ma n liniowo niezależnych wektorów własnych. Zgodnie z twierdzeniem 6.8 taką macierz można przedstawić w postaci

$$A = P \Lambda P^{-1} \tag{5}$$

gdzie $P \in M_n^{\varnothing}(C)$ - macierz, której kolumnami są wektory własne macierzy A, $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots \lambda_n\} \in M_n(C)$

Ponieważ A jest macierzą rzeczywistą, więc zarówno jej wartości własne, jak i wektory własne są albo rzeczywiste, albo parami sprzężone /por. tw. 6.9/. Zgodnie z twierdzeniem 6.14 macierz PP^* jest w tym przypadku macierzą rzeczywistą.

Oczywiście jest ona hermitowska i dodatnio określona.
Z twierdzenia 6.11 wynika, że istnieje macierz $T_1 \in M_n^{\Delta}(R)$ taka, że

$$PP^* = T_1 T_1^T. \qquad (6)$$

Z twierdzenia 6.12 wiadomo, że każdą macierz $P \in M_n(C)$ można rozłożyć na iloczyn macierzy trójkątnej dolnej i unitarnej

$$P = T_2 U \qquad (7)$$

gdzie $T_2 \in M_n^{\Delta}(C)$, $U \in M_n^{u}(C)$. Z (6) i (7) otrzymujemy

$$PP^* = T_2\, UU^*\, T_2^* = T_2\, T_2^* = T_1\, T_1^T. \qquad (8)$$

Na podstawie (8) i twierdzenia 6.13 elementy macierzy T_1 i T_2 mogą różnić się jedynie znakami. Jeżeli więc $T_1 \in M_n^{\Delta}(R)$, to $T_2 \in M_n^{\Delta}(R)$. Otrzymujemy stąd, że macierz $P \in M_n(C)$ diagonalizująca macierz $A \in M_n(R)$ można rozłożyć na iloczyn macierzy

$$P = T\, U \qquad (9)$$

gdzie $T \in M_n^{\Delta}(R)$, $U \in M_n^{u}(C)$. Wykażemy, że macierz T można dobrać w ten sposób, aby elementy na jej głównej przekątnej t_{ii} $(i=1...n)$ były dodatnie. Załóżmy, że pewien element $t_{kk} < 0$. Zgodnie z twierdzeniem 6.15 zmiana znaków wszystkich elementów w k-tej kolumnie macierzy T /w tym elementu t_{kk} / i w k-tym wierszu macierzy U nie zmienia wartości elementów iloczynu. Macierz U pozostaje przy tym macierzą unitarną, gdyż na podstawie 6.15 po zmianie znaków w k-tym wierszu macierzy U zachowana zostaje własność $U^* U = E$. Tym samym sposobem można zmienić wszystkie znaki elementów przekątnej głównej macierzy T tak, aby

$$\bigwedge_{i=1\ldots n} t_{ii} > 0 . \tag{10}$$

Zależność (9) wykorzystamy w równości (5) :

$$A = T\,U \Lambda U^{*} T^{-1} \tag{11}$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$B = U \Lambda U^{*} \tag{12}$$

Macierz B na podstawie twierdzenia 6.10 jest macierzą normalną. Z równości (11) wynika, że macierze A i B są podobne

$$B = T^{-1} A\, T \tag{13}$$

przy czym, ponieważ A i T są macierzami rzeczywistymi, więc i macierz B jest macierzą rzeczywistą. Dla każdej macierzy $A \in M_n(R)$ o prostej strukturze istnieje więc macierz $T \in M_n^{\Delta}(R)$ $\left(\bigwedge_{i=1\ldots n} t_{ii} > 0\right)$ przekształcająca macierz A przez podobieństwo do macierzy normalnej $B \in M_n^{N}(R)$.

Macierze $T, T^{-1} \in M_n^{\Delta}(R)$ $\left(\bigwedge_{i=1\ldots n} t_{ii} > 0\right)$ spełniające równość (13) określone są z dokładnością stałego czynnika. Można więc jeden z elementów na głównej przekątnej /na przykład $T^{-1}[n,n]$/ przyjąć równy jedności, to jest

$$\tilde{N} = \frac{1}{T^{-1}[n,n]}\, T^{-1} \tag{14}$$

Tym samym wykazaliśmy, że istnieje macierz $\tilde{N}$ postaci (3) przekształcająca macierz A przez podobieństwo do macierzy normalnej $B \in M_n^{N}(R)$.

Niech macierz $A \in M_n(R)$ mająca prostą strukturę będzie macierzą układu (1). Wprowadźmy oznaczenie

$$R = N A N^{-1}\left(N A N^{-1}\right)^{T} - \left(N A N^{-1}\right)^{T} N A N^{-1} \tag{15}$$

gdzie $N \in M_n^{\Delta\emptyset}(R)$ - pewna macierz postaci (3). Rozpatrzmy funkcję

$$f(N) \equiv \underset{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots n-1 \\ i \geqslant j}}{f(n_{ij})} = \|R(N)\| = \mathrm{Sp}\,[R^2(N)]. \tag{16}$$

Funkcja $f(N)$ ma $m = \frac{n^2+n-2}{2}$ zmiennych - elementów n_{ij} $(i \geqslant j,\ i=1\ldots n,\ j=1,\ldots,n-1)$ macierzy N. Z własności normy macierzy wynika, że dla każdej macierzy N

$$f(N) \geqslant 0$$

przy czym $f(N) = 0$, jeśli macierz $B = N\,A\,N^{-1}$ jest normalna. Zachodzi bowiem wtedy równość

$$N\,A\,N^{-1}\left(N\,A\,N^{-1}\right)^T = \left(N\,A\,N^{-1}\right)^T N\,A\,N^{-1}. \tag{17}$$

Oznacza to, że poszukiwanie macierzy $\tilde{N} \in M_n^{\Delta}(R)$ postaci (3) przekształcającej przez podobieństwo daną macierz $A \in M_n(R)$ do macierzy normalnej $B \in M_n^N(R)$ równoważne jest poszukiwaniu punktu w przestrzeni m zmiennych n_{ij} $(i \geqslant j,\ i=1\ldots n,$ $j=1\ldots,n-1)$, w którym funkcja (16) osiąga kres dolny równy zero. Twierdzenie 2.1 wykazało istnienie zerowego kresu dolnego funkcji (16).

Wprowadźmy funkcję

$$g(N, x) = \frac{\langle -NAx,\ Nx\rangle}{\langle Nx,\ Nx\rangle} \tag{18}$$

gdzie $N \in M_n^{\Delta\emptyset}(R)$, $x \in M_{n1}(R)$. Minimum funkcji (18) w przestrzeni $x \in M_{n1}(R)$ jest równe

$$g(N, \tilde{x}) = \min_{x \in M_{n1}(R)} g(N, x) = -\max_{x \in M_{n1}(R)} \frac{\langle NAx, Nx \rangle}{\langle Nx, Nx \rangle}$$

$$= -\max_{y \in M_{n1}(R)} \frac{\langle NAN^{-1}y, y \rangle}{\langle y, y \rangle} = -\max_{i=1\ldots n} \lambda_i \left[\frac{1}{2} \left(NAN^{-1} + (NAN^{-1})^T \right) \right] \tag{19}$$

co wynika z twierdzenia 6.16. Jeśli macierz $B = NAN^{-1}$ jest normalna, to znaczy $N = \tilde{N}$ ($\tilde{N}$ - punkt, w którym funkcja (16) osiąga kres dolny/, to wskaźnik zbieżności wykładniczej (2)

$$\begin{aligned} \sigma &= -\max_{i=1\ldots n} \operatorname{Re} \lambda_i(A) = -\max_{i=1\ldots n} \operatorname{Re} \lambda_i(\tilde{N}A\tilde{N}^{-1}) = \\ &= -\max \lambda_i \left[\frac{1}{2} \left(\tilde{N}A\tilde{N}^{-1} + (\tilde{N}A\tilde{N}^{-1})^T \right) \right] = \\ &= \min_{x \in M_{n1}(R)} g(\tilde{N}, x) = g(\tilde{N}, \tilde{x}) . \end{aligned} \tag{20}$$

Jeśli macierz $B = NAN^{-1}$ nie jest normalna $(f(N) > 0)$, to na mocy (19) i twierdzenia 6.6 zachodzi oszacowanie

$$\sigma > g(N, \tilde{x}) \tag{21}$$

Tak więc poszukiwanie wskaźnika (2) należy przeprowadzić stosując dwukrotną minimalizację funkcji wielu zmiennych:

a/ Dana macierz $A \in M_n(R)$. Wyznaczyć macierz $\tilde{N}$, dla której funkcja (16) przyjmuje kres dolny równy zero

$$\tilde{N} : \tilde{f} = \inf_{N \in M_n^{\Delta\emptyset}(R)} f(N) = \min_{N \in M_n^{\Delta\emptyset}(R)} f(N) = 0 , \tag{22}$$

przy czym macierzy $\tilde{N}$ poszukujemy w postaci (3).

b/ Dla znanych macierzy A i $\tilde{N}$ wyznaczyć wskaźnik zbieżności wykładniczej (2) jako minimum funkcji (18)

$$\sigma = \min_{x \in M_{n1}(R)} g(\tilde{N}, x) = g(\tilde{N}, \tilde{x}). \tag{23}$$

Problem minimalizacyjny (22) jest $m = \frac{n^2 + n - 2}{2}$ - wymiarowy, problem minimalizacyjny (23) jest $n - 1$ - wymiarowy.

2.2. Układ z macierzą zespoloną o prostej strukturze

Niech macierz $A \in M_n(C)$ układu (1) będzie dowolną macierzą zespoloną o prostej strukturze:

$$A = C + i D, \tag{24}$$

gdzie $C, D \in M_n(R)$. W [4] str.177 i [5] pokazano, że badanie wartości własnych zespolonej macierzy (24) równoważne jest poszukiwaniu wartości własnych pewnej macierzy rzeczywistej. Niech λ oznacza dowolną wartość własną macierzy A, a x - odpowiadający jej wektor własny:

$$A x = \lambda x \tag{25}$$

Mnożąc równanie (25) obustronnie przez $- i$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} (C + i D) x &= \lambda x \\ (-iC + D) x &= -i\lambda x \end{aligned} \tag{26}$$

równoważny równaniu

$$\tilde{A} y = \lambda y , \tag{27}$$

gdzie

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} C & -D \\ D & C \end{bmatrix} \in M_{2n}(R) \tag{28}$$

oraz

$$y = \begin{bmatrix} x \\ -ix \end{bmatrix} \tag{29}$$

Oznacza to, że λ jest wartością własną macierzy $\tilde{A} \in M_{2n}(R)$ z odpowiadającym jej wektorem własnym y. Jeśli spełnione jest równanie (27), to zachodzi też równość

$$\tilde{A}\,\bar{y} = \bar{\lambda}\,\bar{y}\,. \qquad (30)$$

Tak więc, jeśli macierzy $A \in M_n(C)$ odpowiada zbiór wartości własnych $\lambda(A) = \{\lambda_1 \ldots \lambda_n\}$, to macierzy $\tilde{A} \in M_{2n}(R)$ odpowiada $\lambda(\tilde{A}) = \{\lambda_1 \ldots \lambda_n, \bar{\lambda}_1 \ldots \bar{\lambda}_n\}$. Zamiast poszukiwać największej części rzeczywistej wartości własnych A, można szukać największej części rzeczywistej wartości własnych macierzy $\tilde{A}$. Stąd wskaźnik zbieżności wykładniczej (2)

$$\sigma = -\max_{i=1\ldots n} \operatorname{Re} \lambda_i(A) = -\max_{i=1\ldots 2n} \operatorname{Re} \lambda_i(\tilde{A}) \qquad (31)$$

Wykażemy, że jeśli macierz $A \in M_n(C)$ ma prostą strukturę, to również macierz $\tilde{A} \in M_{2n}(C)$ ma prostą strukturę. Niech $X(A) = \{x_1 \ldots x_n\}$ oznacza zbiór liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy A odpowiadających wartościom własnym $\lambda(A) = \{\lambda_1 \ldots \lambda_n\}$. Na podstawie (27) i (30) wartościom własnym $\lambda(\tilde{A}) = \{\lambda_1 \ldots \lambda_n, \bar{\lambda}_1 \ldots \bar{\lambda}_n\}$ macierzy $\tilde{A}$ odpowiada zbiór $Y(\tilde{A}) = \{y_1 \ldots y_n, \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_n\}$ wektorów własnych macierzy $\tilde{A}$. Należy udowodnić, że wektory zbioru $Y(\tilde{A})$ są liniowo niezależne. Załóżmy, że istnieje choć jedna z niezerowych stałych $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in C$ takich, że dla pewnych i, j:

$$y_i = \gamma_1 y_j$$

$$y_i = \gamma_2 \bar{y}_j$$

$$\bar{y}_i = \gamma_3 \bar{y}_j$$

Zachodzi wtedy przynajmniej jedna z równości

$$x_i = \gamma_1 x_j$$
$$2\gamma_2 \bar{x}_j = 0$$
$$\bar{x}_i = \gamma_3 \bar{x}_j ,$$

co jest sprzeczne z założeniem liniowej niezależności wektorów $X(A)$. Tak więc problem poszukiwania wskaźnika zbieżności wykładniczej (2) układu z macierzą zespoloną A sprowadza się do zastosowania algorytmu (22), (23) dla macierzy $\tilde{A}$, przy czym wymiarowość problemów minimalizacyjnych wzrasta dwukrotnie.

2.3. Uwagi na temat układu z macierzą nie mającą prostej struktury

Załóżmy, że macierz $A \in M_n(F)$ (F - zbiór R lub C) nie ma prostej struktury, to znaczy jest podobna do macierzy Jordana, której conajmniej jedna klatka nie jest pojedyncza. Z twierdzenia 6.10 wynika, że nie istnieje podobna do niej macierz normalna $B = NAN^{-1}$, a tym samym nieosobliwa macierz $\tilde{N}$ postaci (3). Rozważania analityczne dla $n = 2$ i eksperymenty numeryczne dla $n \geq 2$ pokazują, że jeśli macierz nie jest diagonalizowalna dążenie do zera ciągu wartości funkcji $f(N_k)$ $(k \to \infty)$ pociąga za sobą dążenie ciągu macierzy nieosobliwych $N_k \in M_n^{\Delta\emptyset}(R)$ do macierzy osobliwej $\tilde{N} \in M_n^{\Delta 0}(R)$, a ciągu wartości funkcji $g(N_k, \tilde{x})$ do wskaźnika zbieżności wykładniczej

$$\sigma = \lim_{\substack{k\to\infty \\ N_k \to \tilde{N}}} g(N_k, \tilde{x}) = \lim_{\substack{k\to\infty \\ N_k \to \tilde{N}}} \min_x \frac{\langle -N_k Ax, N_k x\rangle}{\langle N_k x, N_k x\rangle} , \quad (32)$$

gdzie $\tilde{N}$: $\lim_{k\to\infty} f(N_k) = 0$. Algorytm (22), (23) obejmuje więc również przypadek układu z macierzą nie mającą prostej struktury.

3. Numeryczna realizacja algorytmu

Aby wyznaczyć wskaźnik zbieżności wykładniczej (2) przedstawioną powyżej metodą, ułożono program numeryczny na maszynę cyfrową ODRA 1204. Do rozwiązania problemów minimalizacyjnych (22) i (23) wykorzystano metodę minimalizacji funkcji zmiennej metodyki Davidona - Fletchera - Powella /por. [3] i [5] /. W metodzie tej jeden krok w kierunku minimum minimalizowanej funkcji $\varphi(x)$ $\left(x \in M_{n1}(R)\right)$ dokonywany jest według zależności

$$x_{i+1} = x_i - t_i H_i r_i \tag{33}$$

gdzie x_i , x_{i+1} - kolejne punkty w przestrzeni minimalizacji,

t_i - długość kroku w danym kierunku,

r_i - gradient funkcji x w punkcie x ,

H_i - i-te przybliżenie odwrotności hesjanu funkcji $\varphi(x)$, przy czym

$$H_{i+1} = H_i - \frac{H_i y_i y_i^T H_i}{\langle y_i , H_i y_i \rangle} + \frac{p_i p_i^T}{\langle y_i , p_i \rangle} \tag{34}$$

H_0 - dowolna macierz dodatnio określona,

$p_i = x_{i+1} - x_i$

$y_i = r_{i+1} - r_i$

W omawianym programie numerycznym gradienty funkcji (16) i (18) wyznaczane są analitycznie według wzorów:

$$\frac{\partial f}{\partial n_{ij}} = 2\, Sp\left(\frac{\partial R}{\partial n_{ij}}\, R\right), \quad \left(i \geqslant j,\ i=1\ldots n,\ j=1\ldots,n-1\right) \tag{35}$$

gdzie

$$\frac{\partial R}{\partial n_{ij}} = W^{ij} B^T - B^T W^{ij} + \left(W^{ij} B^T - B^T W^{ij}\right)^T,$$

$$B = NAN^{-1},$$

$$W^{ij} = K^{ij} N^{-1},$$

$$K^{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{j1}} & & j & & \phantom{a_{jn}} \end{array} \\ i & \left[\begin{array}{ccccc} & & -b_{1i} & & \\ 0 & & \vdots & & 0 \\ a_{j1} & \cdots & (a_{ji} - b_{ji}) & \cdots & a_{jn} \\ 0 & & \vdots & & 0 \\ & & -b_{ni} & & \end{array}\right] \end{array}$$

oraz

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{a}\, B\, x,$$

gdzie $a = \langle x, Sx \rangle$,

$B = SA + A^T S + 2\, S\, g(x)$,

$S = N^T N.$

Długość kroku t_1 dla funkcji (16) wyznaczana jest metodą złotego podziału odcinka w kierunku poszukiwanego minimum, dla funkcji (18) - analitycznie z warunku:

$$t_i : \max_t \left| g(x_i - t d_i) - g(x_i) \right|$$

gdzie $d_i = H_i\, r_i$.

4. Przykłady obliczeń

Za pomocą omówionego wyżej programu numerycznego wykonano szereg przykładów testowych obliczania wskaźnika zbieżności wykładniczej (2) układu (1). Część z nich przedstawiono poniżej. Podano ilość iteracji, po których uzyskano żądaną dokładność oraz końcowe wartości funkcji $f(\tilde{N})$ i poszukiwanej macierzy $\tilde{N}$. Numerycznie otrzymany wskaźnik zbieżności wykładniczej (2) porównano z wyznaczonymi analitycznie wartościami własnymi badanych macierzy uzyskując żądaną dokładność.

Przykład 1

Macierz układu (1) ma różne wartości własne:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad n = 2,\ m = 2,\quad N_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\quad \varepsilon = 10^{-10}$$

Po 7 iteracjach otrzymano

$$f(\tilde{N}) = 3.070_{10}-21$$

$$\sigma = 5.000\ 000\ 000_{10}-01,\quad \tilde{N} = \begin{bmatrix} 8.660\ 254\ 038_{10}-01 & 0 \\ 5.000\ 000\ 000_{10}-01 & 1 \end{bmatrix}$$

Dla porównania wartości własne macierzy A wyznaczone analitycznie są następujące:

$$\lambda_1(A) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_2(A) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Przykład 2

Macierz układu (1) ma różne wartości własne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 103 \\ 3 & -7 & -4 \\ -5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \qquad n = 3,\ m = 5,\ N_0 = E,\ \varepsilon = 10^{-10}$$

Po 16 iteracjach otrzymano

$$f(\tilde{N}) = 2.947_{10}-24$$

$$\zeta = -3.060\ 767\ 330_{10}00\ ,$$

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} 1.587\ 708\ 580_{10}-01 & 0 & 0 \\ -5.451\ 283\ 385_{10}-02 & 6.931\ 664\ 761_{10}-01 & 0 \\ -5.612\ 829\ 235_{10}-02 & 6.310\ 192\ 832_{10}-01 & 1 \end{bmatrix}$$

Wartości własne macierzy A otrzymane drogą analityczną z dokładnością $\varepsilon = 10^{-7}$ są następujące:

$$\lambda_1 = -2.121\ 5347$$

$$\lambda_2 = 3.060\ 7673 + i21.251\ 323$$

$$\lambda_3 = 3.060\ 7673 - i21.251\ 323.$$

Przykład 3

Macierz układu (1) jest zespolona

$$A' = \begin{bmatrix} 2 + i & 1 - i \\ 5 + 2i & 3i \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad n = 4,\ m = 9,\ N_0 = E,\ \varepsilon = 10^{-10}$$

Po 23 iteracjach otrzymano

$$f(\tilde{N}) = 1.237_{10}-21\ ,$$

$$\epsilon = -3.793\ 056\ 146_{10}00,$$

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} 1.393\ 587\ 456\ \ 00 & 0 & 0 & 0 \\ -3.265\ 241\ 897\ -01 & 8.928\ 793\ 321\ -01 & 0 & 0 \\ -1.646\ 723\ 528\ -01 & 4.502\ 960\ 119\ -01 & 1.560\ 779\ 163\ \ 00 & 0 \\ -7.028\ 126\ 325\ -01 & 1.472\ 977\ 059\ -12 & -3.656\ 980\ 042\ -01 & 1 \end{bmatrix}$$

Wartości własne macierzy A otrzymane analitycznie z dokładnością $\epsilon = 10^{-8}$ są następujące:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{\frac{\sqrt{74}+7}{2}} + i\left(2 - \sqrt{\frac{\sqrt{74}-7}{2}}\right) \cong 3.793\ 0561 - 1.104\ 9231\ i$$

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{\frac{\sqrt{74}+7}{2}} + i\left(2 + \sqrt{\frac{\sqrt{74}-7}{2}}\right) \cong -1.793\ 0561 + 2.895\ 0768\ i$$

Przykład 4

Macierz A układu (1) nie ma prostej struktury:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad n = 2, \quad M = 2, \quad N_0 = E, \quad \epsilon = 10^{-7}$$

Po 10 iteracjach otrzymano

$$f(\tilde{N}) = 2.688_{10}-21\ ,$$

$$\epsilon = 1.000\ 004\ 088\ , \qquad \tilde{N} = \begin{bmatrix} 1.089\ 282\ 680\ \ -05 & 0 \\ 9,999\ 959\ 065\ \ -01 & 1 \end{bmatrix}$$

Porównamy je z wynikami otrzymanymi na drodze analitycznej.

Załóżmy, że poszukujemy macierzy $\tilde{N}$ w postaci

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

Funkcje f(N) i g(N,x) mają w tym przypadku postaci

$$f(N) = f(a,b) \doteq 2\left[a + \frac{(b-1)^2}{a}\right]^4$$

$$g(N,x) = \frac{bx_1^2 + (2-b)x_2^2 + x_1x_2(1 + 2b - a^2 - b^2)}{(ax_1)^2 + (bx_1 + x_2)^2}$$

Funkcja $f(N)$ nie posiada minimum, ma natomiast kres dolny równy zero. Mianowicie, jeśli założymy, że $a = \varepsilon$, $b = 1 + \varepsilon$, to

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(N) = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon = 0$$

Oznacza to, że jeśli $f(N) \to 0$, to macierz N dąży do macierzy granicznej

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu $\tilde{N}$ do funkcji $g(N,x)$ otrzymujemy

$$g(\tilde{N}, x) = 1,$$

skąd

$$\sigma = \min_x g(\tilde{N}, x) = 1,$$

co jest zgodne z wartościami własnymi macierzy A,

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = -1$$

wyznaczonymi jako pierwiastki równania charakterystycznego.

5. Podsumowanie

W pracy przedstawiono nowy algorytm poszukiwania wskaźnika zbieżności wykładniczej równoważny poszukiwaniu największej części rzeczywistej wartości własnych dowolnej macierzy. Polega on na przekształceniu danej macierzy przez podobieństwo do macierzy normalnej. Wartości własne części symetrycznej tej macierzy normalnej są równe częściom rzeczywistym wartości własnych danej macierzy. Pozwala to na poszukiwanie największej wartości własnej macierzy symetrycznej metodą ekstremalizacji ilorazu Rayleigh'a zamiast największej części rzeczywistej wartości własnych dowolnej macierzy. Otrzymaną macierz normalną można także wykorzystać do poszukiwania pozostałych części rzeczywistych danej macierzy, a po pewnych modyfikacjach również do znajdowania części urojonych i modułów wartości własnych. Ponieważ wskaźnik zbieżności wykładniczej dobrze charakteryzuje stateczność zlinearyzowanego układu różniczkowego liniowego, przedstawiony powyżej algorytm może być wykorzystany w wielu zagadnieniach technicznych.

6. Dodatek

Twierdzenie 6.1 /por. [1] str. 99/

Układ różniczkowy liniowy, jednorodny

$$\dot{x} = A x , \tag{6.1}$$

gdzie $A \in M_n(F)$ /F - zbiór liczb rzeczywistych lub zespolonych/ jest macierzą stałą, jest asymptotycznie stateczny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy A, to jest pierwiastki równania charakterystycznego

$$\det (A - \lambda E) = 0 \tag{6.2}$$

mają części rzeczywiste ujemne

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0 \qquad (i = 1\ldots n) \qquad (6.3)$$

Twierdzenie 6.2 /por. [1] str. 294/

Układ (6.1) ze stałą macierzą A jest stateczny wykładniczo wtedy i tylko wtedy, gdy jest stateczny asymptotycznie.

Twierdzenie 6.3 /por. [8] str. 243/

Każdą macierz $A \in M_n(C)$ można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$A = A_1 + i\,A_2 \qquad (6.4)$$

gdzie macierze:

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*) \in M_n^H(C) \qquad (6.5)$$

$$A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*) \in M_n^H(C) \qquad (6.6)$$

nazywane są składowymi hermitowskimi macierzy A.

Twierdzenie 6.4 /por. [8] str. 247/

Wartości własne macierzy $A \in M_n^H(C)$ są rzeczywiste.

Twierdzenie 6.5 /por. [9] str. 436/

Jeśli macierz $B \in M_n(C)$ jest macierzą normalną, to znaczy

$$B\,B^* = B^*\,B \qquad (6.7)$$

to części rzeczywiste wartości własnych macierzy B są równe wartościom własnym jej pierwszej składowej hermitowskiej

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j(B) = \lambda_j\left[\tfrac{1}{2}(B + B^*)\right], \quad (j = 1 \ldots n), \tag{6.8}$$

Części urojone wartości własnych macierzy B są równe wartościom własnym drugiej składowej hermitowskiej

$$\mathrm{Im}\,\lambda_j(B) = \lambda_j\left[\tfrac{1}{2i}(B - B^*)\right], \quad (j = 1 \ldots n), \tag{6.9}$$

moduły wartości własnych macierzy B są równe pierwiastkom wartości własnych macierzy $B^* B$

$$|\lambda_j(B)| = \sqrt{\lambda_j(B^* B)} \tag{6.10}$$

przy czym macierze $\frac{1}{2}(B + B^*)$, $\frac{1}{2i}(B - B^*)$, $B^* B$ mają te same wektory własne co macierz B .

Dowód

Wykażemy, że każdy wektor własny macierzy $B \in M_n^N(C)$ jest także wektorem własnym macierzy B^*. Niech x będzie wektorem własnym macierzy B odpowiadającym wartości własnej

$$B x = \lambda x . \tag{6.11}$$

Mnożąc równość (6.11) lewostronnie przez macierz B^* otrzymamy

$$B^* B x = \lambda B^* x , \tag{6.12}$$

a po wykorzystaniu (6.7)

$$B B^* x = \lambda B^* x . \tag{6.13}$$

Oznacza to, że wektor $y = B^*x$ i wektor x są wektorami własnymi macierzy B odpowiadającymi tej samej wartości własnej λ. Wektory własne odpowiadające tej samej wartości własnej są liniowo zależne. Istnieje więc stała proporcjonalności γ taka, że

$$B^* x = \gamma x \qquad (6.14)$$

Stała γ jest oczywiście wartością własną macierzy B^* odpowiadającą wektorowi własnemu x, który jest jednocześnie wektorem własnym macierzy B i B^*. Wykazaliśmy, że macierze B i B^* mają wspólne wektory własne. Wykażemy, że jeśli niezerowy wektor x jest wektorem własnym macierzy normalnej B odpowiadającym wartości własnej λ i x jest również wektorem własnym macierzy B, to odpowiada on wartości własnej $\bar{\lambda}$. Z (6.11) i (6.14) oraz z definicji macierzy sprzężonej mamy

$$\begin{aligned}\lambda \langle x, x\rangle &= \langle \lambda x, x\rangle = \langle Bx, x\rangle = \\ &= \langle x, B^*x\rangle = \langle x, \gamma x\rangle = \bar{\gamma} \langle x, x\rangle\end{aligned} \qquad (6.15)$$

a stąd $\gamma = \bar{\lambda}$. Mamy więc

$$B x = \lambda x \qquad (6.16)$$

$$B^* x = \bar{\lambda} x \qquad (6.17)$$

Dodając i odejmując stronami oraz mnożąc (6.16) przez macierz B^* otrzymujemy:

$$(B + B^*)x = (\lambda + \bar{\lambda})x = 2 \operatorname{Re} \lambda \cdot x , \qquad (6.18)$$

$$(B - B^*)x = (\lambda - \bar{\lambda})x = 2i \operatorname{Im} \lambda \cdot x , \qquad (6.19)$$

$$B^{*}Bx = B^{*}\lambda x = \lambda B^{*}x = \lambda\bar{\lambda}x = |\lambda|^{2}x\,, \qquad (6.20)$$

co dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Twierdzenie 6.6 /por. [9] str. 441/

Dla dowolnej macierzy $A \in M_n(C)$ zachodzą oszacowania

$$\min_{j} \lambda_j\left[\tfrac{1}{2}(A + A^{*})\right] \leqslant \underset{j=1\ldots n}{\mathrm{Re}}\, \lambda_j(A) \leqslant \max_{j} \lambda_j\left[\tfrac{1}{2}(A + A^{*})\right], \qquad (6.21)$$

$$\min_{j} \lambda_j\left[\tfrac{1}{2i}(A - A^{*})\right] \leqslant \underset{j=1\ldots n}{\mathrm{Im}}\, \lambda_j(A) \leqslant \max_{j} \lambda_j\left[\tfrac{1}{2i}(A - A^{*})\right]. \qquad (6.22)$$

Twierdzenie 6.7

Macierze podobne, to jest spełniające związek

$$B = P A P^{-1} \qquad (6.23)$$

gdzie $P \in M_n^{\emptyset}(C)$, $A, B \in M_n(C)$, mają jednakowe wartości własne

$$\lambda_j(A) = \lambda_j(B). \qquad (6.24)$$

Twierdzenie 6.8 /por. 8 str. 188÷190/

Każdą macierz $A \in M_n(C)$ za pomocą przekształcenia przez podobieństwo

$$J = P A P^{-1}, \quad (\det P \neq 0) \qquad (6.25)$$

można sprowadzić do postaci quasidiagonalnej Jordana

$$J = \mathrm{diag}\left\{J_1(\lambda_1), \ldots, J_m(\lambda_m)\right\}, \quad (m \leqslant n) \qquad (6.26)$$

gdzie macierze

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \qquad (i = 1\ldots m) \qquad (6.27)$$

są klatkami Jordana, przy czym każdej wartości własnej λ_i może odpowiadać jedna lub kilka klatek Jordana. Liczba klatek Jordana odpowiadających wartości własnej λ_i jest równa maksymalnej liczbie liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy A odpowiadających wartości własnej λ_i.

Dowolną macierz o prostej strukturze, to jest posiadającą n liniowo niezależnych wektorów własnych, można sprowadzić za pomocą przekształcenia przez podobieństwo do postaci diagonalnej

$$\Lambda = \mathrm{diag}\left\{\lambda_1 \ldots \lambda_n\right\} = P\,A\,P^{-1} \qquad (6.28)$$

przy czym wartości własne λ_i mogą być krotne.

Twierdzenie 6.9 /por. 1 str.538/

Jeśli $A \in M_n(R)$, to bazę, w której macierz ta ma postać Jordana /kolumny macierzy P w przekształceniu (6.25)/ można wybrać tak, aby składowe bazy cyklicznej odpowiadające rzeczywistym wartościom własnym były rzeczywiste, a odpowiadające wartościom własnym zespolonym sprzężonym - zespolone sprzężone.

Twierdzenie 6.10 /por.[8] str.248/

Macierz $B \in M_n(C)$ jest macierzą normalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona unitarnie podobna do macierzy diagonalnej

$$B = U \Lambda U^{-1} \qquad (6.29)$$

gdzie $U^* = U^{-1}$.

Oznacza to, że macierz normalna jest zawsze macierzą o prostej strukturze.

Twierdzenie 6.11 /por. [10] str.120, [6] str.51÷53/

Macierz $A \in M_n(C)$ jest dodatnio określona, to jest

$$\bigwedge_{\substack{x \in M_{n1}(R) \\ x \neq 0}} \langle x, Ax \rangle > 0 \qquad (6.30)$$

i hermitowska $(A^* = A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A = N^* N \qquad (6.31)$$

gdzie N - nieosobliwa macierz trójkątna górna.
Jeśli $A \in M_n^{H+}(R)$, to $N \in M_n^{\nabla\emptyset}(R)$.

Macierz $A \in M_n^{H+}(C)$ można rozłożyć także na iloczyn $A = N_1^* N_1$, gdzie $N_1 \in M_n^{\Delta\emptyset}(C)$ /wynika to bezpośrednio z zastosowania (6.31) do macierzy A^{-1} i po oznaczeniu $N_1 = (N^{-1})^*$/. Jeśli $A \in M_n^{H+}(R)$, to $N_1 \in M_n^{\Delta\emptyset}(R)$.

Twierdzenie 6.12 /por. [8] str.239/

Każdą macierz $A \in M_n(C)$ można rozłożyć na iloczyn macierzy

$$A = U'T \quad \text{lub} \quad A = T_1 U_1 \qquad (6.32)$$

gdzie $U, U_1 \in M_n^u(C)$, $T \in M_n^{\nabla}(C)$, $T_1 \in M_n^{\Delta}(C)$.
Jeżeli $A \in M_n(R)$, to $U, U_1 \in M_n^u(R)$, $T \in M_n^{\nabla}(R)$, $T_1 \in M_n^{\Delta}(R)$.

Twierdzenie 6.13

Jeżeli macierze S, $T \in M_n^{\nabla}(R)$ $(\det S \neq 0)$ spełniają związek

$$T^T T = S^T S , \tag{6.33}$$

to ich elementy różnią się jedynie znakami

$$t_{ij} = \pm s_{ij} \tag{6.34}$$

Dowód

Dowód przeprowadzimy korzystając z zasady indukcji matematycznej względem wymiaru n macierzy $S, T \in M_n^{\nabla}(R)$

Dla $n = 1$ dowód jest oczywisty.

Dla $n = 2$ równanie (6.33), gdzie $T, S \in M_2^{\nabla}(R)$ ma postać

$$\begin{bmatrix} t_{11} & 0 \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy stąd układ trzech równań algebraicznych

$$t_{11}^2 = s_{11}^2$$
$$t_{12}\, t_{11} = s_{12}\, s_{11}$$
$$t_{12}^2 + t_{22}^2 = s_{12}^2 + s_{22}^2 ,$$

którego rozwiązanie ma postać /z założenia $s_{ii} \neq 0$, dla $i = 1,\ldots,n$/:

$$t_{11} = \pm s_{11}$$
$$t_{12} = \pm s_{12}$$
$$t_{22} = \pm s_{22}$$

Załóżmy, że dla $n = k - 1$ ze spełnienia równania (6.33)

/T, S $\in M_{k-1}^{\nabla}(R)$ / otrzymujemy $t_{ij} = \pm s_{ij}$. Wykażemy, że wynika stąd analogiczna własność, jeśli $n = k$ /T,S $\in M_k^{\nabla}(R)$/. Załóżmy, że spełnione jest równanie (6.33) dla T,S $\in M_k^{\nabla}(R)$.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} & \tilde{T}^T & & 0 \\ \hdashline t_{1k} & \dots & t_{k-1,k} & t_{kk} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} \tilde{T}^T & \begin{matrix} t_{1k} \\ \vdots \\ t_{k-1,k} \end{matrix} \\ \hdashline 0 & t_{kk} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} & \tilde{S}^T & & 0 \\ \hdashline s_{1k} & \dots & s_{k-1,k} & s_{kk} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} \tilde{S} & \begin{matrix} s_{1k} \\ \vdots \\ s_{k-1,k} \end{matrix} \\ \hdashline 0 & s_{kk} \end{array}\right] \tag{6.35}$$

gdzie $\tilde{T}, \tilde{S} \in M_{k-1}^{\nabla}(R)$. Równanie (6.35) można rozłożyć na równanie macierzowe

$$\tilde{T}^T \tilde{T} = \tilde{S}^T \tilde{S} \tag{6.36}$$

oraz na układ k równań skalarnych

$$\sum_{i=1}^{j} t_{ij} \cdot t_{ik} = \sum_{i=1}^{j} s_{ij} s_{ik} \qquad (j = 1 \dots k) \tag{6.37}$$

Z (6.36) oraz z założenia indukcyjnego dla $n = k - 1$ otrzymujemy $t_{ij} = \pm s_{ij}$ dla $i,j < k$. Zależności te wykorzystujemy w układzie równań (6.37)

$$(\pm s_{11})\, t_{1k} = s_{11} s_{1k}$$

$$(\pm s_{12})\, t_{1k} + (\pm s_{22})\, t_{2k} = s_{12} s_{2k} + s_{22} s_{2k}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(\pm s_{1(k-1)})t_{1k} + \dots + (\pm s_{(k-1)(k-1)})\, t_{(k-1)k} = s_{1(k-1)} s_{1k} + \dots + s_{(k-1)(k-1)} s_{(k-1)k}$$

$$t_{1k}^2 + t_{2k}^2 + \dots + t_{kk}^2 = s_{11}^2 + s_{2k}^2 + \dots + s_{kk}^2 .$$

Układ ten rozwiązujemy wyznaczając kolejno t_{ik} $(i=1,\dots,k)$

poczynając od pierwszego równania. Otrzymujemy $t_{ik} = \pm s_{ik}$ $(i = 1,\ldots,k)$. Twierdzenie zostało więc udowodnione.

Twierdzenie 6.14

Jeśli kolumny macierzy $A \in M_n(C)$ są rzeczywiste lub parami sprzężone, to macierz $A\,A^*$ jest rzeczywista.

Dowód

Oznaczmy przez $a_i \in M_{n1}(C)$ oraz $b_i \in M_{n1}(R)$ odpowiednio parami sprzężone i rzeczywiste kolumny macierzy $A \in M_n(C)$. Macierz $A\,A^*$ można przedstawić w postaci:

$$A\,A^* = a_1 a_1^* + \ldots + a_{2s} a_{2s}^* + b_1 b_1^T + \ldots + b_r b_r^T \qquad (6.38)$$

gdzie $2s$ - liczba kolumn parami sprzężonych, r - liczba kolumn rzeczywistych $(2s + r = n)$ macierzy A. Weźmy jedną z sum iloczynów wektorów parami sprzężonych $(a_j = \bar{a}_i)$ i obliczmy jej sprzężenie /w sensie liczb zespolonych/:

$$\overline{a_i a_i^* + a_j a_j^*} = \overline{a_i \bar{a}_i^T + \bar{a}_i a_i^T} = \bar{a}_i a_i^T + a_i \bar{a}_i^T \qquad (6.39)$$

Wszystkie elementy macierzy (6.39) są więc rzeczywiste. Przeprowadzając podobne rozumowanie dla pozostałych kolumn parami sprzężonych otrzymujemy, że macierz AA^* jest rzeczywista.

Twierdzenie 6.15

Jeżeli macierz $Q \in M_n(C)$ równa jest iloczynowi macierzy

$$Q = R\,S \qquad (6.40)$$

gdzie $R, S \in M_n(C)$, a symbole $\tilde{R}^k$ i $\tilde{S}_k$ $(k = 1 \ldots n)$ oznaczają macierze o elementach:

$$\tilde{r}_{ij} = \begin{cases} r_{ij} & \text{dla } j \neq k \\ -r_{ij} & \text{dla } j = k \end{cases}, \qquad \tilde{s}_{ij} = \begin{cases} s_{ij} & \text{dla } i \neq k \\ -s_{ij} & \text{dla } i = k \end{cases},$$

to

$$\bigwedge_{k=1\ldots n} Q = \tilde{R}^k \tilde{S}_k \tag{6.41}$$

Dowód

Z (6.40) $q_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} r_{i\alpha} s_{\alpha j}$. Niech, $\tilde{R}^k \tilde{S}_k = \tilde{Q}^k$ $(k = 1,\ldots,n)$. Wtedy

$$\bigwedge_{k=1\ldots n} \tilde{q}^k_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \tilde{r}_{i\alpha} s_{\alpha j} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{k-1} r_{i\alpha} s_{\alpha j} + (-r_{ik})(-s_{kj}) + \sum_{\alpha=k+1}^{n} r_{i\alpha} s_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{n} r_{i\alpha} s_{\alpha j} = q_{ij}$$

Stąd

$$\bigwedge_{k=1\ldots n} Q = \tilde{R}^k \tilde{S}_k .$$

Twierdzenie 6.16 /por. [7] str.134÷140/

Największa /najmniejsza/ wartość własna części symetrycznej macierzy $B \in M_n(R)$ jest równa maksimum /minimum/ ilorazu Rayleigh'a:

$$\max_{i=1\ldots n} \lambda_i \left[\frac{1}{2}(B + B^T)\right] = \max_{x \in M_{n1}(R)} \frac{\langle Bx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \tag{6.42}$$

$$\min_{i=1\ldots n} \lambda_i \left[\frac{1}{2}(B + B^T)\right] = \min_{x \in M_{n1}(R)} \frac{\langle Bx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \tag{6.43}$$

Literatura

[1] DEMIDOWICZ B.P. "Matematyczna teoria stabilności" Warszawa 1972 WNT.

[2] GELFAND I.M. "Wykłady z algebry liniowej" Warszawa 1977 PWN.

[3] HIMMELBLAU D.M. "Applied Nonlinear Programming" 1972 Mc Graw - Hill.

[4] HOUSEHOLDER A.S. "The Theory of Matrices in Numerical Analysis. New York 1964 Blaisdell Publishing Company.

[5] RALSTON A. "Wstęp do analizy numerycznej" Warszawa 1975 PWN.

[6] АОКИ М. "Введение в методы оптимизации" Москва 1977 Наука

[7] БЕЛЛМАН Р. "Введение в теорию матриц" Москва 1976 Наука

[8] ГАНТМАХЕР Ф. Р. "Теория матриц" Москва 1967 Наука

[9] КОРН Г. КОРН Т. "Справочник по математике для научных работников и инженеров" Москва 1977 Наука

[10] МАРКУС М., МИНК Х. "Обзор по теории матриц и матричных неравенств" Москва 1972 Наука.

[11] УИЛКИНСОН Дж. Х. "Алгебраическая проблема собственных значений" Москва 1970 Наука.