

Ewa Turka

**STACJONARNY RUCH SZCZELINY
W POLU SIŁ SKUPIONYCH**

21 / 1981

WARSZAWA 1981

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 10 marca 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 21/1981



57092



Na p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark. wyd. 1,5. Ark.druk.2,25

Oddano do drukarni w maju 1981 r.

Nr zamówienia 345/0/81

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Sniadeckich 8

Ewa Tureka

Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych

7.75 - Pęknięcie

STACJONARNY RUCH SZCZELINY
W POLU SIŁ SKUPIONYCH

Wstęp

W pracy rozpatrujemy zagadnienie szczeliny poruszającej się w nieograniczonym ośrodku sprężystym wychodząc z założeń liniowej teorii sprężystości. Zagadnienie to jest uogólnieniem problemu rozważanego w pracy [1].

Ze względu na rozróżnianie trzech typów odkształcenia powierzchni szczeliny praca została podzielona na cztery części. W pierwszej części sformułujemy problem, zaś w części drugiej zajmiemy się typem normalnego rozwarcia szczeliny, w trzeciej typem ścinania poprzecznego. Części te dotyczą oczywiście płaskiego stanu odkształcenia. Natomiast czwarta część mówiąc o antypłaskim stanie odkształcenia dotyczy typu ścinania poprzecznego szczeliny.

Celem pracy jest wyznaczenie współczynników intensywności naprężeń oraz nieciągłości składowych wektora przemieszczenia na powierzchni szczeliny w przypadku gdy obciążeniem wymuszającym jest układ dwóch sił skupionych.

W wyniku badań współczynników intensywności naprężeń otrzymane zostały dosyć ciekawe wyniki. Wykazane zostało, że współczynniki te w niektórych przypadkach przyjmują wartości zerowe lub ekstremalne. Wynika to z powstania szczególnego stanu naprężenia na powierzchniach szczeliny, co prowadzi do zmiany zwrotu odpowiednich składowych wektora przemieszczenia na tych powierzchniach.

1. Sformułowanie zagadnienia

Objektem naszych badań będzie nieskończony, izotropowy, ośrodek sprężysty osłabiony szczeliną pasmową rozciągającą się nieskończenie w kierunku osi x_3 , o wierzchołkach x_L i x_R leżących na osi x_1 . Zakładamy, że:

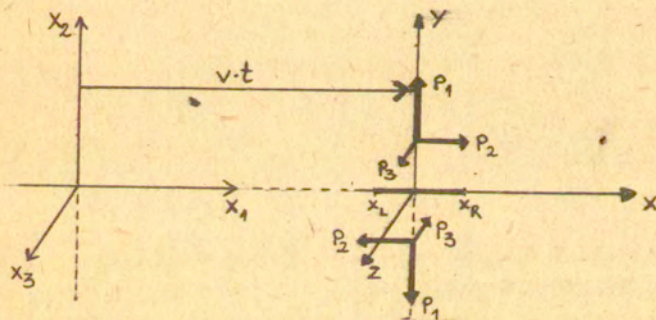
a/ mamy do czynienia z płaskim lub antypłaskim stanem odkształcenia;

b/ ośrodek poddany jest działaniu sił skupionych przyłożonych w punktach $/ 0, \pm y_0, x_3 /$, $x_3 \in R$;

c/ powierzchnia szczeliny jest wolna od naprężeń;

d/ układ szczelina-obciążenia wymuszające porusza się z prędkością $v = \text{const}$ w dodatnim kierunku osi x_1 ;

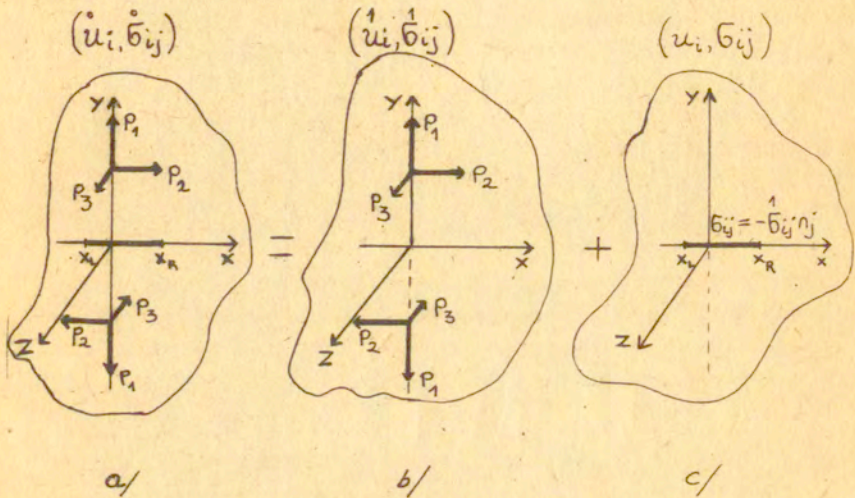
e/ prędkość v poruszania się szczeliny jest mniejsza od prędkości rozchodzenia się sprężystej fali powierzchniowej Rayleigh'a v_R .



Rys. 1

Dla wygody wprowadzamy do dalszych rozważań ruchomy układ współrzędnych prostokątnych $/ x, y, z /$ Rys. 1/ zdefiniowany zależnościami:

$$/1.1/ \quad x = x_1 - vt; \quad y = x_2; \quad z = x_3$$



Rys. 2

Wykorzystując zasadę superpozycji rozwiązanie zagadnienia rozkładu przemieszczeń i naprężeń $\{ \dot{u}_i, \dot{\sigma}_{ij} \}$ w ośrodku osłabionym szczeliną przedstawimy w postaci sumy rozwiązania $\{ \dot{u}_i, \dot{\sigma}_{ij} \}$ dla ośrodka ciągłego bez szczeliny w danym polu sił wymuszających i rozwiązania $\{ u_i, \sigma_{ij} \}$ dla ośrodka ze szczeliną odpowiednio obciążoną na swej powierzchni /Rys. 2/.

2. Szczelina w polu dwóch sił skupionych normalnych do jej powierzchni. Typ I.

Zajmiemy się przypadkiem działania tylko normalnej składowej P_1 sił wymuszających /Rys.1/. Rozkład odkształceń i naprężeń w ośrodku ciągłym /Rys.2b/ wyraża się wtedy na podstawie [2] jako:

$$u_1(x, y) = \frac{P_1}{2\pi\mu(1-\beta_2^2)} \left[\arctg \frac{(\beta_1 - \beta_2)x(y - y_0)}{x^2 + \beta_1\beta_2(y - y_0)^2} - \arctg \frac{(\beta_1 - \beta_2)x(y + y_0)}{x^2 + \beta_1\beta_2(y + y_0)^2} \right]$$

$$u_2(x, y) = \frac{P_1}{2\pi\mu\beta_2(1-\beta_2^2)} \left[\ln \frac{\bar{r}_2}{r_2} - \beta_1\beta_2 \ln \frac{\bar{r}_1}{r_1} \right]$$

$$\hat{G}_{11}(x, y) = -\frac{P_1}{2\pi(1-\beta_2^2)} \left[\beta_1^2(1+2\beta_1-\beta_2^2) \left(\frac{y-y_0}{r_1^2} - \frac{y+y_0}{\bar{r}_1^2} \right) - 2\beta_2 \left(\frac{y-y_0}{r_2^2} - \frac{y+y_0}{\bar{r}_2^2} \right) \right],$$

$$\hat{G}_{22}(x, y) = \frac{P_1}{2\pi(1-\beta_2^2)} \left[\beta_1(1+\beta_2^2) \left(\frac{y-y_0}{r_1^2} - \frac{y+y_0}{\bar{r}_1^2} \right) - 2\beta_2 \left(\frac{y-y_0}{r_2^2} - \frac{y+y_0}{\bar{r}_2^2} \right) \right],$$

$$\hat{G}_{12}(x, y) = \frac{P_1}{2\pi\beta_2(1-\beta_2^2)} \left[2\beta_1\beta_2 \left(\frac{x}{r_1^2} - \frac{x}{\bar{r}_1^2} \right) - (1+\beta_2^2) \left(\frac{x}{r_2^2} - \frac{x}{\bar{r}_2^2} \right) \right],$$

gdzie: $\beta_i^2 = 1 - v^2/c_i^2$, ($i = 1, 2$),

c_1 - prędkość propagacji sprężystej fali podłużnej,

c_2 - prędkość propagacji sprężystej fali poprzecznej,

$c_1 = c_2 \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}$, μ - stała Lamego, ν - współczynnik Poissona

$r_1^2 = x^2 + \beta_1^2 (y - y_0)^2$; $\bar{r}_1^2 = x^2 + \beta_1^2 (y + y_0)^2$

Wartości graniczne przemieszczeń $\hat{u}_i(x, 0)$ i naprężeń $\hat{\sigma}_{ij}(x, 0)$ dla $x \in (x_L, x_R)$ opisane są związkami;

$$\hat{u}_1^\pm(x, 0) = -\frac{P_1}{\pi\mu(1-\beta_2^2)} \arctg \frac{\beta_1\beta_2 y_0}{x^2 + \beta_1\beta_2 y_0^2},$$

$$\hat{u}_2^\pm(x, 0) = 0,$$

/2.1/

$$\hat{\sigma}_{11}^\pm(x, 0) = \frac{P_1}{\pi(1-\beta_2^2)} \left[\beta_1(1+2\beta_1-\beta_2^2) \frac{y_0}{x^2 + \beta_1 y_0^2} - 2\beta_2 \frac{y_0}{x^2 + \beta_2 y_0^2} \right],$$

$$\hat{\sigma}_{22}^\pm(x, 0) = \frac{P_1}{\pi(1-\beta_2^2)} \left[2\beta_2 \frac{y_0}{x^2 + \beta_2 y_0^2} - \beta_1(1+\beta_2^2) \frac{y_0}{x^2 + \beta_1 y_0^2} \right],$$

$$\sigma_{42}^{\pm}(x, 0) = 0,$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenie $f^{\pm}(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0^{\pm}} f(x, y)$.

Zatem w zagadnieniu ośrodka ze szczeliną /rys.2c/ warunki brzegowe uzupełnione dodatkowymi żądaniami aby składowe tensora naprężenia zniknęły w nieskończoności, przemieszczenie u_2 zniknęło w wierzchołkach szczeliny i było dodatnie na górnej powierzchni szczeliny a ujemne na dolnej, są następującej postaci:

$$\sigma_{22}^{\pm}(x, 0) = -f_1(x) \quad \text{dla } x_L < x < x_R,$$

$$\sigma_{42}^{\pm}(x, 0) = 0 \quad \text{dla } x_L < x < x_R,$$

$$u_2^+(x, 0) \geq 0, \quad u_2^-(x, 0) \leq 0 \quad \text{dla } x_L < x < x_R,$$

$$\sigma_{ij}(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{dla } x^2 + y^2 \rightarrow \infty,$$

$$u_2^{\pm}(x_L, 0) = u_2^{\pm}(x_R, 0) = 0,$$

gdzie:

$$f_1(x) = \frac{\beta_1}{\pi(1-\beta_2^2)} \left[2\beta_2 \frac{y_0}{x^2 + \beta_2^2 y_0^2} - \beta_1(1+\beta_2) \frac{y_0}{x^2 + \beta_1^2 y_0^2} \right].$$

Jest to przypadek normalnego rozwarcia powierzchni szczeliny - typ I; funkcja $f_1(x)$ spełnia warunek Höldera w przedziale (x_L, x_R) więc możemy skorzystać z wyników pracy [3].

W ogólnym przypadku dla typu I rozwarcia szczeliny rozkład przemieszczeń i naprężeń w ośrodku ze szczeliną na powierzchni której zadane są wymuszenia przybiera postać:

/2.3 /

$$u_1(x, y) = \frac{\beta_1}{\pi \mu R(\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1+\beta_2^2) \varphi_1 - 2\beta_2^2 \varphi_2 \right],$$

$$u_2(x,y) = \frac{\beta_1}{\pi \mu R(v)} \left[(1 + \beta_2^2) \Psi_1 - 2 \Psi_2 \right],$$

/2.3/
$$\sigma_{11}(x,y) = \frac{1}{\pi \beta_1 R(v)} \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \beta_2^2 \Psi_2 - (1 + \beta_2^2) (1 + 2 \beta_1^2 - \beta_2^2) \Psi_1 \right],$$

$$\sigma_{12}(x,y) = \frac{2 \beta_1 (1 + \beta_2^2)}{\pi R(v)} \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_1 - \Psi_2),$$

$$\sigma_{22}(x,y) = \frac{1}{\pi \beta_1 R(v)} \frac{\partial}{\partial y} \left[(1 + \beta_2^2)^2 \Psi_1 - 4 \beta_1^2 \Psi_2 \right],$$

gdzie funkcje Ψ_i i Ψ_i dane są zależnościami:

/2.4/
$$\Psi_i(x,y) = \frac{1}{\beta_i} \int_{x_L}^{x_R} g(\xi) \ln \frac{c}{r_i} d\xi,$$

$$\psi_i(x,y) = \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} = -\gamma \beta_i \int_{x_L}^{x_R} \frac{g(\xi)}{r_i^2} d\xi,$$

oraz

$$g(x) = \int_{x_L}^x \frac{F_1(\xi)}{\sqrt{(\xi - x_L)(x_R - \xi)}} d\xi,$$

$$F_1(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{x_L}^{x_R} \frac{\sqrt{(x - x_L)(x_R - x)}}{x - \xi} f_1(x) dx,$$

$$R(v) = 4 \beta_1 \beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2, \quad c - \text{dowolna stała o wymiarze długości.}$$

Dla prędkości rozchodzenia się fali Rayleigh'a v_R wyrażenie $R(v_R)$ znika, wynika stąd istotność założenia, że $v < v_R$.

Wartości graniczne składowych przemieszczeń i naprężeń na powierzchni szczeliny względnie na jej przedłużeniu przyjmą na mocy zależności /2.3/ i warunków brzegowych naszego zagadnienia następującą postać:

$$u_1^+(x,0) = \frac{(1 + \beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2)\beta_1}{\pi \mu R(v)(1 - \beta_2^2)} \begin{cases} p(x) + (1 + \beta_2^2)H_1(x) - 2H_2(x) - h_0 & \text{dla } x > x_0, \\ p(x) - h_0 & \text{dla } x_L < x < x_R, \\ p(x) - (1 + \beta_2^2)H_1(x) + 2H_2(x) - h_0 & \text{dla } x < x_L, \end{cases}$$

$$u_2^\pm(x, 0) = \pm \frac{\rho_1 \rho_2}{2\pi \mu R(v)} \begin{cases} 2G_2(x) - (1 + \beta_2^2)G_1(x) & \text{dla } x_L < x < x_R \\ 0 & \text{dla } (x < x_L) \vee (x > x_R) \end{cases}$$

/2.5/

$$G_{11}^\pm(x, 0) = \frac{(1 + \beta_2^2)(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) - 4\beta_1\beta_2}{R(v)} G_{22}^\pm(x, 0),$$

$$G_{22}^\pm(x, 0) = \begin{cases} f_1(x) + \frac{\chi_1(x)}{\sqrt{(x-x_L)(x-x_R)}} & \text{dla } x > x_R, \\ f_1(x) & \text{dla } x_L < x < x_R, \\ f_1(x) - \frac{\chi_1(x)}{\sqrt{(x_L-x)(x_R-x)}} & \text{dla } x < x_L, \end{cases}$$

gdzie:

$$\rho(x) = (1 + \beta_2^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{\beta_1 y_0} - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{\beta_2 y_0},$$

$$H_i(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2(\xi - x_L)(\xi - x_R)[\sqrt{\delta_i} - (x_R x_L + \beta_i^2 y_0^2)]}}{(\xi - x_L)\sqrt{x_R^2 + \beta_i^2 y_0^2} - (\xi - x_R)\sqrt{x_L^2 + \beta_i^2 y_0^2}},$$

$$G_i(x) = 2 \ln \left[\frac{(x_R - x)\sqrt{x_L^2 + \beta_i^2 y_0^2} + \sqrt{2(x_R - x)(x - x_L)[\sqrt{\delta_i} - x_R x_L + \beta_i^2 y_0^2]}}{(x_R - x)\sqrt{x^2 + \beta_i^2 y_0^2}} + \frac{(x - x_L)\sqrt{x_R^2 + \beta_i^2 y_0^2}}{(x_R - x)\sqrt{x^2 + \beta_i^2 y_0^2}} \right],$$

$$\delta_i = (x_L^2 + \beta_i^2 y_0^2)(x_R^2 + \beta_i^2 y_0^2)$$

/2.6/

$$\chi_1(x) = \frac{y_0 \rho_1}{\pi(1 + \beta_2^2)} \left[\beta_1(1 + \beta_2^2)L_1(x) - 2\beta_2 L_2(x) \right],$$

$$L_i(x) = \frac{\sqrt{\delta_i + \beta_i^2 y_0^2 - x_L x_R}}{\sqrt{2} \beta_i y_0 (x^2 + \beta_i^2 y_0^2)} \left(\frac{[\sqrt{\delta_i} - \beta_i^2 y_0^2 + x_L x_R]}{x_L + x_R} - x \right),$$

$$h_i = \operatorname{arctg} \frac{2(\sqrt{\delta_i} - x_L x_R - \beta_i^2 y_0^2)}{\sqrt{x_R^2 + \beta_i^2 y_0^2} - \sqrt{x_L^2 + \beta_i^2 y_0^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} H_i(x),$$

$$h_\infty = (1 + \beta_2^2)h_1 - 2h_2,$$

przy czym:

$$G_i(x_L) = G_i(x_R) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} H_i(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} H_i(x) = 0.$$

Sumując otrzymane stany przemieszczeń i naprężeń opisane związkami /2.1/ i /2.5/ uzyskamy poszukiwany rozkład przemieszczenia $\overset{\circ}{u}_2$ i naprężenia $\overset{\circ}{\sigma}_{22}$ na powierzchni szczeliny w zagadnieniu wyjściowym:

$$\overset{\circ}{u}_2^{\pm}(x,0) = \mp \frac{P_1 \beta_1}{2\pi \mu R(v)} \begin{cases} 2G_2(x) - (1+\beta_2^2)G_1(x) & \text{dla } x_L < x < x_R, \\ 0 & \text{dla } (x < x_L) \vee (x > x_R), \end{cases}$$

/2.7/

$$\overset{\circ}{\sigma}_{22}^{\pm}(x,0) = - \begin{cases} \frac{\chi_1(x)}{\sqrt{(x-x_L)(x-x_R)}} & \text{dla } x > x_R, \\ 0 & \text{dla } x_L < x < x_R, \\ -\frac{\chi_1(x)}{\sqrt{(x_L-x)(x_R-x)}} & \text{dla } x < x_L, \end{cases}$$

gdzie $\chi_1(x)$ i $G_1(x)$ dane są związkami /2.6/.

Wyznamy teraz współczynniki intensywności naprężeń K_I^L , K_I^R , które zgodnie z definicją

$$K_I^L = \lim_{x \rightarrow x_L^-} \overset{\circ}{\sigma}_{22}(x,0) \sqrt{2\pi(x_L-x)},$$

$$K_I^R = \lim_{x \rightarrow x_R^+} \overset{\circ}{\sigma}_{22}(x,0) \sqrt{2\pi(x-x_R)},$$

i związkami /2.8/ przyjmą postać:

$$/2.8/ \left. \begin{matrix} K_I^L \\ K_I^R \end{matrix} \right\} = \frac{P_1}{\sqrt{\pi(x_R-x_L)}(1-\beta_2^2)} \begin{cases} \frac{2\Delta_2}{\sqrt{x_L^2 + \beta_2^2 \gamma_0^2}} - \frac{(1+\beta_2^2)\Delta_1}{\sqrt{x_L^2 + \beta_1^2 \gamma_0^2}}, \\ \frac{2\Delta_2}{\sqrt{x_R^2 + \beta_2^2 \gamma_0^2}} - \frac{(1+\beta_2^2)\Delta_1}{\sqrt{x_R^2 + \beta_1^2 \gamma_0^2}} \end{cases}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} /2.9/ \quad \Delta_i &= \sqrt{\sigma_i^2 - (X_L X_R + \beta_i^2 \gamma_0^2)}, \\ \delta_i &= (X_R^2 + \beta_i^2 \gamma_0^2) (X_L^2 + \beta_i^2 \gamma_0^2). \end{aligned}$$

Wprowadzając nowe zmienne bezwymiarowe:

$$\begin{aligned} /2.10/ \quad \eta &= \frac{X_L}{X_R} \quad \eta \neq 1, \\ \xi &= \frac{\gamma_0}{|X_R|} \quad \xi > 0, \end{aligned}$$

wyrażenia na współczynniki intensywności K_I^L , K_I^R będą miały bardziej czytelną formę:

$$\begin{pmatrix} K_I^L \\ K_I^R \end{pmatrix} = \frac{p_1}{\sqrt{X_R} \eta (1-\eta) (1-\beta_2^2)} \begin{cases} \frac{2 \Delta_2'}{\sqrt{\eta^2 + \beta_2^2 \xi^2}} - \frac{(1+\beta_2^2) \Delta_1'}{\sqrt{\eta^2 + \beta_1^2 \xi^2}}, \\ \frac{2 \Delta_2'}{\sqrt{1 + \beta_2^2 \xi^2}} - \frac{(1+\beta_2^2) \Delta_1'}{\sqrt{1 + \beta_1^2 \xi^2}}, \end{cases}$$

gdzie:

$$/2.11/ \quad \Delta_i' = \sqrt{(1 + \beta_i^2 \xi^2)(\eta^2 + \beta_i^2 \xi^2) - (\eta + \beta_i^2 \xi^2)^2}.$$

Ze względu na istotną rolę jaką odgrywają współczynniki intensywności naprężeń w zagadnieniach pęknięcia materiałów zbadamy dokładniej niektóre ich własności.

1/ Dla prędkości $\underline{v} = 0$ tzn. w przypadku statycznym otrzymamy:

$$\begin{pmatrix} K_I^L \\ K_I^R \end{pmatrix} = \frac{p_1 \sqrt{(1+\xi^2)(\eta^2 + \xi^2) - \xi^2 - \eta}}{\sqrt{X_R} (1-\eta) 4(1-\nu)} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}} \left[3 - 4\nu + \frac{\xi^2 - \eta}{\sqrt{(1+\xi^2)(\eta^2 + \xi^2)}} - \frac{2\xi^2}{\eta^2 + \xi^2} \right], \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \left[3 - 4\nu + \frac{\xi^2 - \eta}{\sqrt{(1+\xi^2)(\eta^2 + \xi^2)}} - \frac{2\xi^2}{1 + \xi^2} \right]. \end{cases}$$

Wynik ten jest zgodny z rezultatem uzyskanym w pracy [4].

2/ Dla sił p_1 działających bezpośrednio na powierzchni szczeliny $\xi=0, \varrho < 0, v \in (0, v_R)$:

$$\left. \begin{matrix} K_I^L \\ K_I^R \end{matrix} \right\} = \frac{p_1}{\sqrt{\pi x_R} \sqrt{1+\varrho}} \begin{cases} \sqrt{\frac{-2}{\varrho}} \\ \sqrt{-2\varrho} \end{cases}, \quad \text{dla } x_R > 0$$

Współczynniki K_I^L, K_I^R są niezależne od prędkości v .

3/ W przypadku szczeliny usytuowanej symetrycznie względem punktów zaczepienia sił wymuszających $p_1/\varrho = -1, \xi \geq 0, v \in (0, v_R)$ zachodzi $K_I^L = K_I^R$ gdzie:

$$K_I = \frac{p_1}{\sqrt{x_R} \sqrt{1+\beta_2^2}} \left[\frac{2}{\sqrt{1+\beta_2^2 \xi^2}} - \frac{1+\beta_2^2}{\sqrt{1+\beta_2^2 \xi^2}} \right].$$

Otrzymany wynik jest zgodny z rezultatem podanym w pracy [5]

Możemy łatwo wyliczyć wartość ξ_{\max} , dla której współczynnik K_I przyjmuje wartość maksymalną ze względu na znormalizowaną odległość ξ zaczepienia sił p_1 od powierzchni szczeliny

$$\xi_{\max}(v) = \sqrt{\frac{[(1+\beta_2^2)\beta_1^2]^{2/3} - [2\beta_2^2]^{2/3}}{\beta_1^2(2\beta_2^2)^{2/3} - \beta_2^2[(1+\beta_2^2)\beta_1^2]^{2/3}}}$$

Przy przyjętych przez nas założeniach $\xi_{\max}(v)$ istnieje dla każdej prędkości $v < v_R$. Interesujące jest, że $\xi_{\max}(v)$ jest rosnącą funkcją prędkości v i przyjmuje wartości od $\xi_{\max}(0) = \sqrt{\frac{2\varrho}{3-2\varrho}}$ do $\xi(v_R) = \xi_R$. Wartość $\xi_{\max}(0)$ jest równa wartości uzyskanej w pracy [4].

Przy $\xi \rightarrow \infty$ współczynnik K_I dąży do zera i dla dużych ξ jest dodatni ze względu na to, że wyrażenie $2\beta_1 - \beta_2(1+\beta_2^2)$ jest dodatnie dla każdego $v < v_R$.

Natomiast dla $\xi = 0$ współczynnik K_I jest równy $\rho_1/\sqrt{x_R J}$, co jest zgodne ze znanymi wynikami [6].

4/ Dla szczeliny półnieskończonej $l/2 \rightarrow \pm\infty$, w prawym wierzchołku otrzymujemy następujące wyrażenia na wartości współczynników K_I^R :

$$K_I^R = \frac{\rho_1}{\sqrt{x_R J} (1-\beta_2^2)} \left[2 \sqrt{\frac{1+\beta_2^2 \xi^2 + 1}{1+\beta_2^2 \xi^2}} - (1+\beta_2^2) \sqrt{\frac{1+\beta_1^2 \xi^2 + 1}{1+\beta_1^2 \xi^2}} \right]$$

dla $x_R > 0$,

$$K_I^R = \frac{\rho_1}{\sqrt{l} x_0 \sqrt{\beta_1 \beta_2} (1-\beta_2^2)} \left[2\sqrt{\beta_1} - (1+\beta_2^2)\sqrt{\beta_2} \right]$$

dla $x_R = 0$,

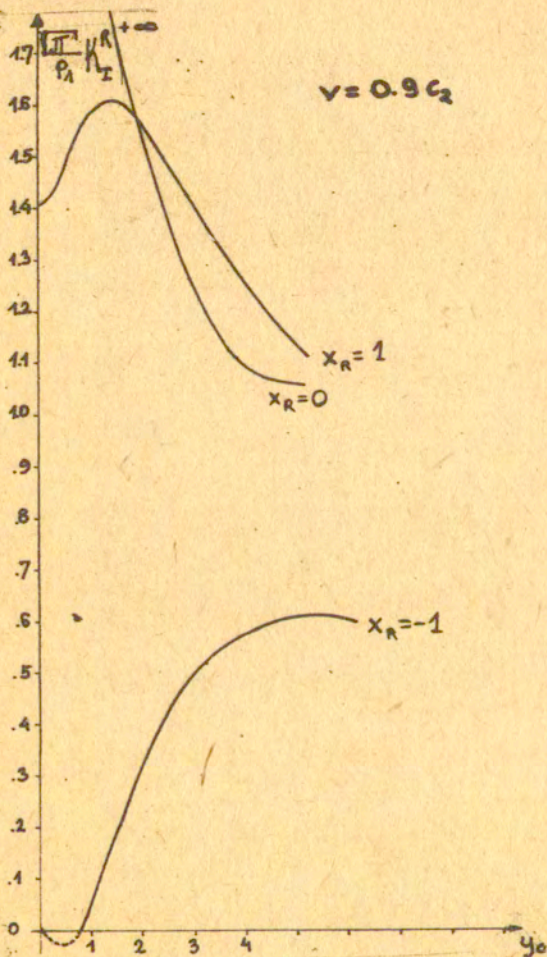
$$K_I^R = \frac{\rho_1}{\sqrt{|x_R| J} (1-\beta_2^2)} \left[2 \sqrt{\frac{1+\beta_2^2 \xi^2 - 1}{1+\beta_2^2 \xi^2}} - (1+\beta_2^2) \sqrt{\frac{1+\beta_1^2 \xi^2 - 1}{1+\beta_1^2 \xi^2}} \right]$$

dla $x_R < 0$.

Przechodząc w pierwszej z tych zależności do granicy z $\xi \rightarrow 0$ otrzymamy znany wynik a mianowicie:

$$K_I^R = \rho_1 \sqrt{\frac{2}{J x_R}}$$

Przebieg zmienności współczynnika intensywności naprężenia K_I^R dla $x_R = 1, 0, -1$; $l/2 \rightarrow \pm\infty$ jako funkcji parametru ξ , przedstawiony jest na Rys. 3.



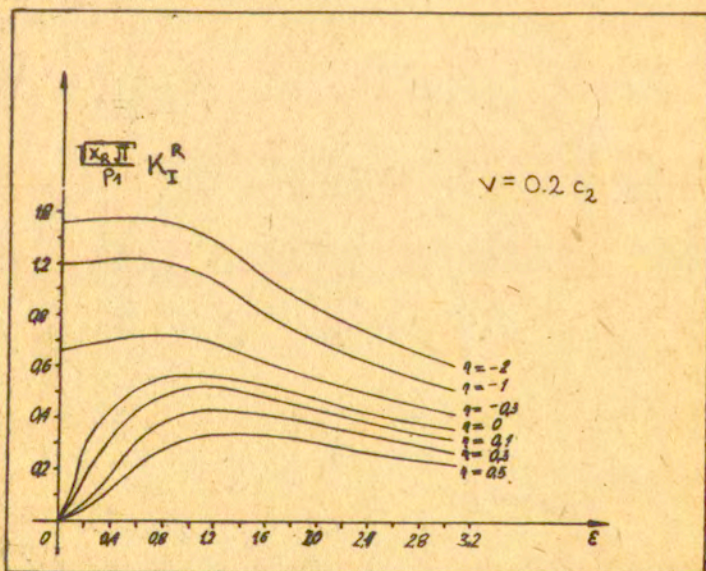
Rys. 3

Numeryczna analiza przebiegu zmienności współczynników K_I^R w zależności od parametru y_0 dla $x_R < 0$ wykazuje, że dla pewnych małych wartości y_0 i prędkości v odpowiednio bliskich v_R współczynnik K_I^R jest ujemny. Ze znanej zależności:

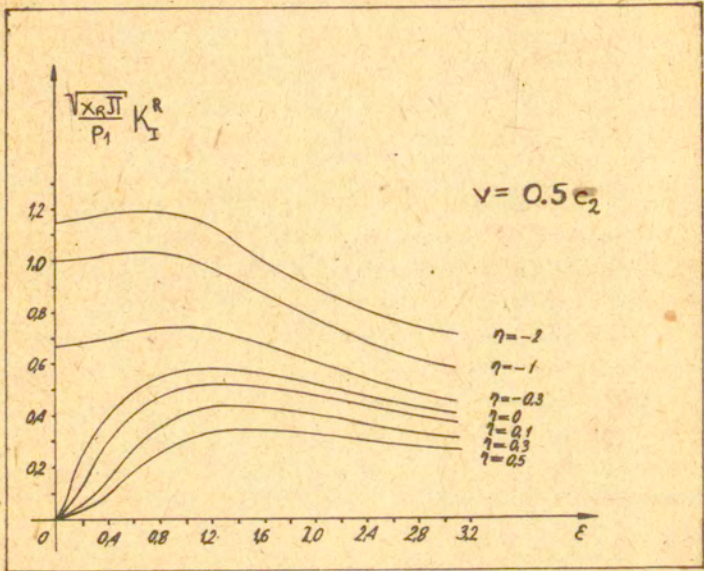
$$u_2^\pm(x, 0) = \pm \frac{2\beta_1(1-\beta_2^2)}{\mu R(\nu)} \left(K_I^R \sqrt{\frac{x_R - x}{2J}} + O[(x_R - x)^{3/2}] \right)$$

wynika, że w przypadku gdy współczynnik intensywności naprężenia jest ujemny powierzchnie szczeliny w otoczeniu jej wierzchołka przenikałyby się, co z przyjętych warunków brzegowych jak i z fizycznego punktu widzenia jest niemożliwe. Zatem dla pewnych wartości parametru ε istnieją prędkości przy których szczelina nie może się propagować zgodnie z przyjętymi przez nas wcześniej założeniami.

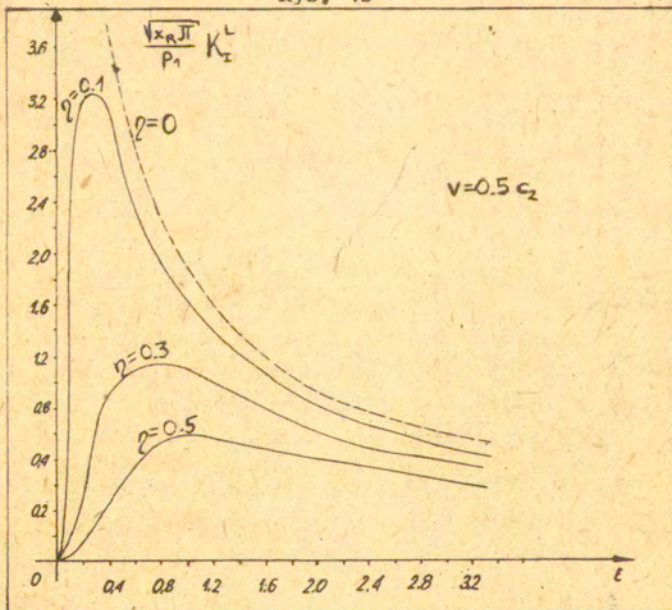
Na Rys. 4a,b i 5a,b przedstawiono przebieg zmienności współczynników K_I^R i K_I^L w zależności od ε , dla różnych wartości parametrów ν i η .



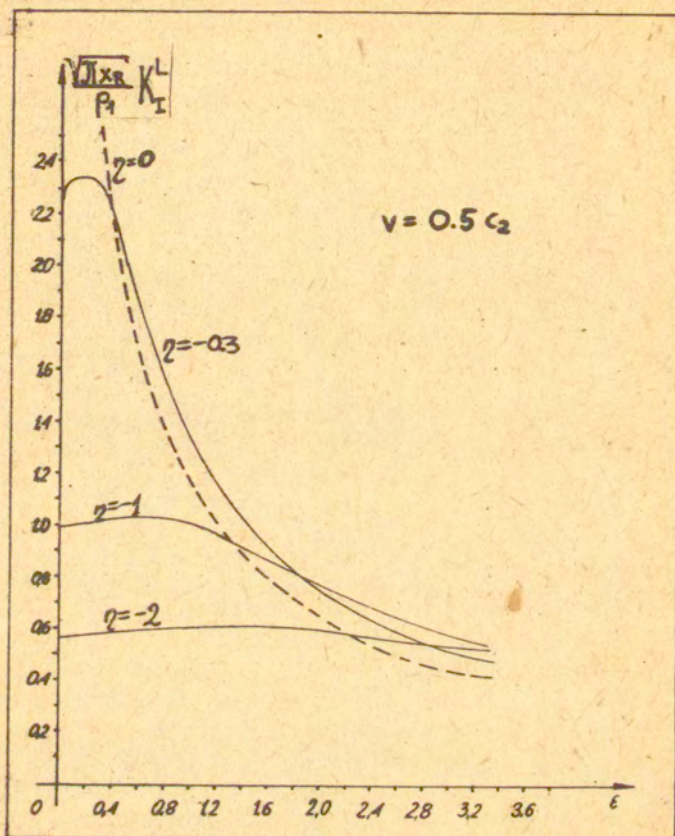
Rys. 4a



Rys. 4b



Rys. 5a



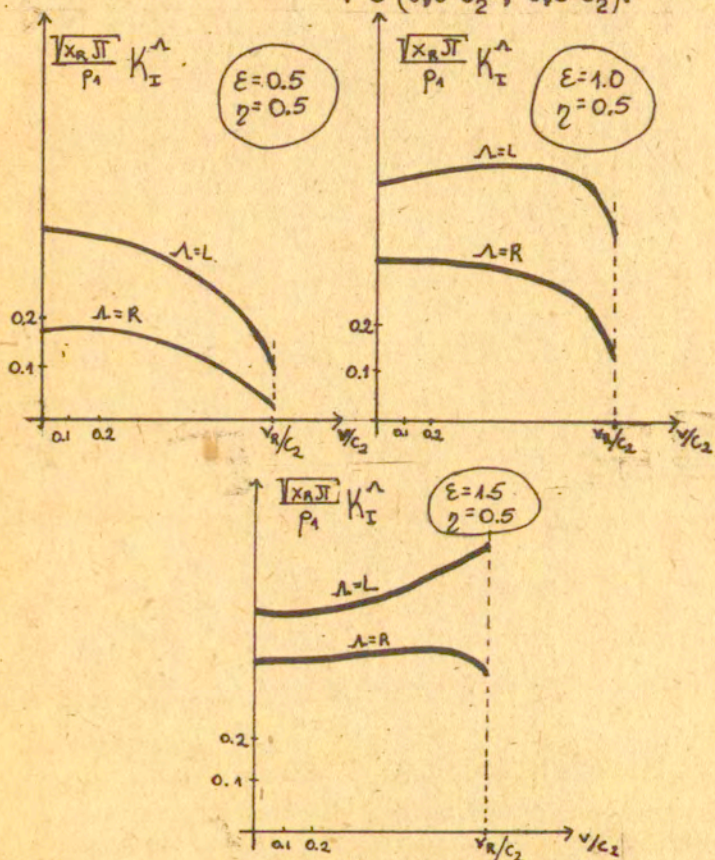
Rys. 5b

Badanie zależności współczynnika intensywności naprężeń od prędkości v wykazuje, że dla różnych wartości parametru ξ i długości szczeliny współczynnik K_I^R czy K_I^L może być malejącą czy rosnącą funkcją prędkości v . Może również posiadać ekstremum w przedziale $(0, v_R)$. I tak numeryczna analiza /Rys.6/ wykazuje, że w przypadku gdy $\eta = 0,3$ oraz

$\xi = 0,5$ i $\eta = 0,5$ - K_I^L i K_I^R maleją ze względu na v

$\xi = 1,0$ i $\eta = 0,5$ - K_I^L osiąga maksimum w przedziale $v \in (0,6 c_2, 0,8 c_2)$, a K_I^R maleje.

$\varepsilon = 1,5$ i $\eta = 0,5$ - $\frac{K_I^L}{K_I^R}$ rośnie ze względu na v , a osiąga maksimum w przedziale $v \in (0,6 c_2, 0,8 c_2)$.



Rys. 6

3. Szczelina w polu dwóch sił stycznych do jej powierzchni.
Typ II.

Rozważmy teraz przypadek dwóch sił skupionych o tej samej intensywności p_2 i przeciwnych zwrotach, zaczepionych w punktach $/ 0, \pm y_0, x_3 /$ i $x_3 \in \mathbb{R}$ działających w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny szczeliny /Rys.1/.

Rozkład przemieszczeń i naprężeń w ośrodku ciągłym poddanym działaniu tych sił /Rys.2b/ dany jest wyrażeniami:

$$\begin{aligned}
 u_1(x,y) &= \frac{P_2}{4\pi\beta_1^2(1-\beta_2^2)} \left[\ln \frac{x^2 + \beta_1^2(y+y_0)^2}{x^2 + \beta_1^2(y-y_0)^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \beta_1\beta_2 \ln \frac{x^2 + \beta_2^2(y+y_0)^2}{x^2 + \beta_2^2(y-y_0)^2} \right], \\
 u_2(x,y) &= \frac{P_2}{2\pi\mu(1-\beta_2^2)} \left[\operatorname{arctg} \frac{(\beta_1-\beta_2)x(y-y_0)}{x^2 + (y-y_0)^2\beta_1\beta_2} - \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{arctg} \frac{(\beta_1-\beta_2)(y+y_0)x}{x^2 + (y+y_0)^2\beta_1\beta_2} \right], \\
 \sigma_{11}(x,y) &= -\frac{P_2x}{2\pi\beta_1(1-\beta_2^2)} \left[(1+2\beta_1\beta_2) \left(\frac{1}{x^2 + \beta_1^2(y-y_0)^2} - \frac{1}{x^2 + \beta_1^2(y+y_0)^2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 2\beta_1\beta_2 \left(\frac{1}{x^2 + \beta_2^2(y-y_0)^2} - \frac{1}{x^2 + \beta_2^2(y+y_0)^2} \right) \right], \\
 \sigma_{22}(x,y) &= \frac{P_2x}{2\pi\beta_1(1-\beta_2^2)} \left[(1+\beta_2^2) \left(\frac{1}{x^2 + \beta_1^2(y-y_0)^2} - \frac{1}{x^2 + \beta_1^2(y+y_0)^2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 2\beta_1\beta_2 \left(\frac{1}{x^2 + \beta_2^2(y-y_0)^2} - \frac{1}{x^2 + \beta_2^2(y+y_0)^2} \right) \right],
 \end{aligned}$$

/3.1/

$$\begin{aligned}
 \sigma_{12}(x,y) &= -\frac{P_2}{2\pi(1-\beta_2^2)} \left[2\beta_1 \left(\frac{y-y_0}{x^2 + \beta_1^2(y-y_0)^2} - \frac{y+y_0}{x^2 + \beta_1^2(y+y_0)^2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \beta_2(1+\beta_2^2) \left(\frac{y-y_0}{x^2 + \beta_2^2(y-y_0)^2} - \frac{y+y_0}{x^2 + \beta_2^2(y+y_0)^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że na powierzchni szczeliny i jej przedłużeniu wartości graniczne przemieszczeń i naprężeń opisane są zależnościami:

/3.2/
$$u_1^{\pm}(x,0) = 0,$$

$$u_2^{\pm}(x,0) = -\frac{P_2}{\pi\mu(1-\beta_2^2)} \operatorname{arctg} \frac{(\beta_1-\beta_2)x y_0}{x^2 + \beta_1\beta_2 y_0^2},$$

$$\hat{\sigma}_{11}^{\pm}(x, 0) = 0,$$

$$\hat{\sigma}_{12}^{\pm}(x, 0) = -\frac{\beta_2 \gamma_0}{\pi(1-\beta_2^2)} \left[\frac{2\beta_1}{x^2 + \beta_1^2 \gamma_0^2} - \frac{\beta_2(1+\beta_2^2)}{x^2 + \beta_2^2 \gamma_0^2} \right],$$

$$/3.2/ \quad \hat{\sigma}_{22}^{\pm}(x, 0) = 0.$$

Zatem warunkami brzegowymi w danym zagadnieniu ośrodka osłabionego szczeliną /Rys.2e/ są:

$$/3.3/ \quad \hat{\sigma}_{22}^{\pm}(x, 0) = 0 \quad \text{dla} \quad x_L < x < x_R,$$

$$\hat{\sigma}_{12}^{\pm}(x, 0) = -f_2(x) \quad \text{dla} \quad x_L < x < x_R,$$

gdzie:

$$f_2(x) = \frac{\beta_2 \gamma_0}{\pi(1-\beta_2^2)} \left[\frac{2\beta_1}{x^2 + \beta_1^2 \gamma_0^2} - \frac{\beta_2(1+\beta_2^2)}{x^2 + \beta_2^2 \gamma_0^2} \right].$$

Jest to typ poprzecznego ścinania szczeliny. Narzucając dodatkowe warunki $\hat{\sigma}_{22}$ / naprężenia znikają w nieskończoności, b/ $u_1^{\pm}(x_L, 0) = u_1^{\pm}(x_R, 0) = 0$ oraz wiedząc, że funkcja $f_2(x)$ spełnia warunek Höldera możemy skorzystać z wyników pracy [3], w której znajdujemy, że rozkład przemieszczeń i naprężeń dla tego typu zagadnienia dany jest wzorami:

$$/3.4/ \quad u_1(x, y) = -\frac{\beta_2}{\pi \mu R(\nu)} \left[2\psi_1(x, y) - (1+\beta_2^2)\psi_2(x, y) \right],$$

$$u_2(x, y) = \frac{\beta_2}{\pi \mu R(\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left[2\beta_1^2 \psi_1(x, y) - (1+\beta_2^2)\psi_2(x, y) \right],$$

$$\hat{\sigma}_{11}(x, y) = -\frac{2\beta_2}{\pi R(\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1+2\beta_1^2-\beta_2^2)\psi_1(x, y) - (1+\beta_2^2)\psi_2(x, y) \right],$$

$$\sigma_{12}(x,y) = -\frac{1}{\pi \beta_2 R(v)} \frac{\partial}{\partial y} \left[4\beta_2^2 \Psi_1(x,y) - (1+\beta_2^2) \Psi_2(x,y) \right],$$

/3.4/

$$\sigma_{22}(x,y) = \frac{2\beta_2(1+\beta_2^2)}{\pi R(v)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Psi_1(x,y) - \Psi_2(x,y) \right],$$

w których funkcje Ψ_1 i Ψ_2 określone są zależnościami /2.4/ oraz

$$S(x) = \int_{x_L}^x \frac{F_2(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi-x_L)(x_R-\xi)}}; \quad F_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x_L}^{x_R} \frac{\sqrt{(\xi-x_L)(x_R-\xi)}}{\xi-x} f_2(\xi) d\xi.$$

Podstawiając wyrażenia /3.3/ do związków /3.4/, oraz przechodząc do granicy z $y \rightarrow \pm 0$ otrzymujemy:

$$u_1^\pm(x,0) = \pm \frac{\beta_2 \rho_2}{2\pi \mu R(v)} \begin{cases} 2G_1(x) - (1+\beta_2^2)G_2(x) & \text{dla } x_L \leq x \leq x_R \\ 0 & \text{dla } (x < x_L) \vee (x > x_R) \end{cases}$$

$$\sigma_{12}^\pm(x,0) = - \begin{cases} \frac{\chi_2(x)}{\sqrt{(x-x_R)(x-x_L)}} + f_2(x) & \text{dla } x > x_R, \\ f_2(x) & \text{dla } x_L < x < x_R, \\ -\frac{\chi_2(x)}{\sqrt{(x_R-x)(x_L-x)}} + f_2(x) & \text{dla } x < x_L, \end{cases}$$

gdzie:

$$\chi_2(x) = \frac{\beta_2 \gamma_0}{\pi(1-\beta_2^2)} \left[2\beta_1 L_1(x) - \beta_2(1+\beta_2^2) L_2(x) \right],$$

natomiast $G_1(x)$ oraz $L_1(x)$ są już przedstawione w związkach /2.6/. Zatem poszukiwane przemieszczenie u_1^\pm i naprężenie

σ_{12}^\pm w zagadnieniu wyjściowym opisane są wyrażeniami:

$$\dot{u}_1^{\pm}(x, 0) = \pm \frac{\rho \rho_2}{2\pi \mu R(v)} \begin{cases} 2G_1(x) - (1 + \beta_2^2)G_2(x) & \text{dla } x_L \leq x \leq x_R \\ 0 & \text{dla } (x < x_L) \vee \\ & (x > x_R) \end{cases}$$

$$\dot{\sigma}_{12}^{\circ}(x, 0) = - \begin{cases} \frac{\chi_2(x)}{\sqrt{(x-x_R)(x-x_L)}} & \text{dla } x > x_R, \\ 0 & \text{dla } x_L < x < x_R, \\ -\frac{\chi_2(x)}{\sqrt{(x_R-x)(x_L-x)}} & \text{dla } x < x_L. \end{cases}$$

Na podstawie definicji:

$$K_{II}^L = \lim_{x \rightarrow x_L^-} \dot{\sigma}_{12}^{\circ}(x, 0) \sqrt{2\pi(x_L - x)}$$

$$K_{II}^R = \lim_{x \rightarrow x_R^+} \dot{\sigma}_{12}^{\circ}(x, 0) \sqrt{2\pi(x - x_R)}$$

współczynniki intensywności naprężeń K_{II}^L , K_{II}^R są równe:

$$\begin{pmatrix} K_{II}^L \\ K_{II}^R \end{pmatrix} = \frac{\rho_2}{\sqrt{\pi(x_R - x_L)}(1 - \beta_2^2)} \begin{pmatrix} \frac{2\Delta_1}{\sqrt{x_L^2 + \beta_1^2 y_0^2}} - \frac{(1 + \beta_2^2)\Delta_2}{\sqrt{x_L^2 + \beta_2^2 y_0^2}} \\ \frac{2\Delta_1}{\sqrt{x_R^2 + \beta_1^2 y_0^2}} - \frac{(1 + \beta_2^2)\Delta_2}{\sqrt{x_R^2 + \beta_2^2 y_0^2}} \end{pmatrix}$$

gdzie Δ_1 zdefiniowane są związkami /2.9/.

Wprowadzając zmienne bezwymiarowe ε, ρ otrzymujemy:

$$\begin{cases} K_{II}^L \\ K_{II}^R \end{cases} = \frac{\rho_2}{\sqrt{\pi} x_R (1-\eta) (1-\beta_2^2)} \begin{cases} \frac{2\Delta_1'}{\sqrt{\eta^2 + \beta_1^2 \varepsilon^2}} - \frac{(1+\beta_2^2)\Delta_2'}{\sqrt{\eta^2 + \beta_2^2 \varepsilon^2}} \\ \frac{2\Delta_1'}{\sqrt{1 + \beta_1^2 \varepsilon^2}} - \frac{(1+\beta_2^2)\Delta_2'}{\sqrt{1 + \beta_2^2 \varepsilon^2}} \end{cases}$$

gdzie Δ_1' dane są wyrażeniami /2.11/.

W rozważanym zagadnieniu współczynniki intensywności naprężenia wykazują pewne interesujące własności, które przeanalizujemy zakładając, że szczelina usytuowana jest symetrycznie względem punktów zaczepienia sił wymuszających ρ_2 tzn. przyjmiemy, że $\varepsilon \gg 0$ i $\eta = -1$. W przypadku tym

$$K_{II}^L = K_{II}^R = K_{II}, \text{ gdzie:}$$

$$K_{II} = \frac{\rho_2}{\sqrt{\pi} x_R \Gamma (1-\beta_2^2)} \left[\frac{2}{\sqrt{1 + \beta_1^2 \varepsilon^2}} - \frac{1 + \beta_2^2}{\sqrt{1 + \beta_2^2 \varepsilon^2}} \right].$$

Badając otrzymaną zależność - przy ustalonej prędkości v poruszania się szczeliny - okazuje się, że gdy $v \in \langle 0, v_m \rangle$, gdzie:

$$v_m(v, c_2) = c_2 \sqrt{\frac{3-5v - \sqrt{(1-v)(5-9v)}}{1-2v}} \quad \text{i} \quad 0 < v_m(v, c_2) < c_2 \sqrt{3-\sqrt{5}}$$

współczynnik intensywności naprężenia K_{II} jest wielkością dodatnią.

Warto zauważyć, że prędkość $v_m(0, c_2) = v_R(0, c_2) = c_2 \sqrt{3-\sqrt{5}}$.

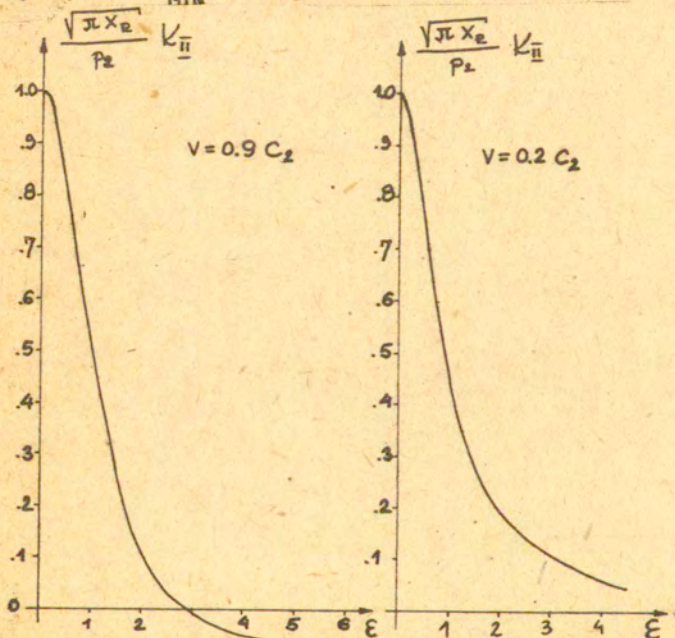
Ze wzrostem ε wartość współczynnika K_{II} dąży do zera i ze względu na to, że $2\beta_2 = \beta_1(1 + \beta_2^2)$ jest dodatnie wartość ta jest dodatnia.

Założmy, że $v \in (v_m, v_R)$, wtedy dla $\xi_0^2 = \frac{4 - (1 + \beta_2^2)}{\beta_2^2(1 + \beta_2^2) - 4\beta_1^2}$ współczynnik K_{II} znika. Przy $\xi^2 > \xi_0^2$ wartość współczynnika

K_{II} jest ujemna i osiąga minimum dla

$$\xi_{\text{MIN}}^2(v) = \frac{[2\beta_1^2]^{2/3} - [\beta_2^2(1 + \beta_2^2)]^{2/3}}{\beta_1^2[\beta_2^2(1 + \beta_2^2)]^{2/3} - \beta_2^2[2\beta_1^2]^{2/3}}$$

i przy $\xi^2 > \xi_{\text{MIN}}^2$ wzrasta do zera.



Rys. 7

Rysunek 7 przedstawia przebieg zmienności współczynnika K_{II} w zależności od ξ , dla dwóch różnych ustalonych prędkości $v = 0,2 c_2 < v_m$ i $v = 0,9 c_2 > v_m$ w przypadku gdy $\nu = 0,3$.

Zmiana znaku współczynnika intensywności jest spowodowana powstaniem takiego stanu naprężenia, który powoduje zmianę zwrotu składowej $u_1(x, 0)$ wektora przemieszczenia na powierzchni szczeliny.

Podobnie jak dla I typu odkształcenia szczeliny współczynnik intensywności naprężeń K_{II}^R w zależności od prędkości v dla odpowiednich układów sił może być funkcją malejącą lub rosnącą czy nawet nie musi być funkcją monotoniczną na przedziale $\langle 0, v_R \rangle$.

W przypadku skończonej szczeliny dla $\xi \rightarrow +\infty$ współczynniki intensywności K_{II}^L , K_{II}^R dążą do zera i są ujemne dla dużych wartości ξ ze względu na to, że wyrażenie $2\beta_2^2 - \beta_1(1 + \beta_2^2)$ jest ujemne. Oznacza to, że istnieją takie wartości ξ i v dla których współczynniki K_{II}^L lub K_{II}^R znikają.

Rozważmy teraz przypadek szczeliny półnieskończonej. Wtedy współczynnik w prawym wierzchołku szczeliny K_{II}^R jest równy:

$$K_{II}^R = \frac{P_2}{\sqrt{|x_R|} (1 - \beta_2^2)} \left[\sqrt{\frac{1 + \beta_1^2 \xi^2 + 1}{1 + \beta_1^2 \xi^2}} - (1 + \beta_2^2) \sqrt{\frac{1 + \beta_2^2 \xi^2 + 1}{1 + \beta_2^2 \xi^2}} \right] \quad \text{dla } x_R > 0,$$

$$K_{II}^R = \frac{P_2}{\sqrt{|x_R| \beta_1 \beta_2} (1 - \beta_2^2)} \left[2\sqrt{\beta_2} - (1 + \beta_2^2) \sqrt{\beta_1} \right] \quad \text{dla } x_R = 0,$$

$$K_{II}^R = \frac{P_2}{\sqrt{|x_R|} (1 - \beta_2^2)} \left[2\sqrt{\frac{1 + \beta_1^2 \xi^2 - 1}{1 + \beta_1^2 \xi^2}} - (1 + \beta_2^2) \sqrt{\frac{1 + \beta_2^2 \xi^2 - 1}{1 + \beta_2^2 \xi^2}} \right] \quad \text{dla } x_R < 0.$$

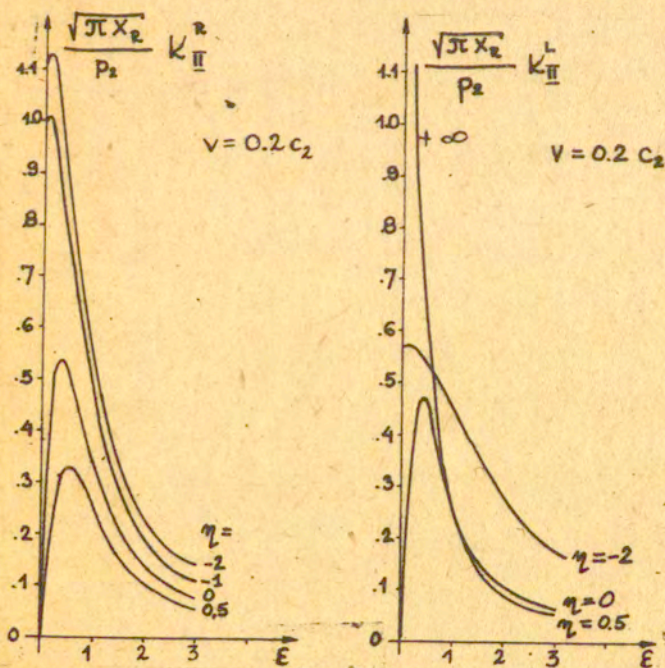
Przy pierwszym rodzaju obciążenia tzn. gdy $x_R > 0$ współczynnik K_{II}^R jest dodatni dla $\xi \gg 0$ i $v \in \langle 0, v_m \rangle$. Dla $v \in (0, v_R)$ współczynnik K_{II}^R dąży do zera przy $\xi \rightarrow +\infty$. Ze względu na to, że wyrażenie $2\sqrt{\beta_2} - \sqrt{\beta_1}(1 + \beta_2^2)$ jest dodatnie dla $v \in (0, v_R)$, współczynnik K_{II}^R jest również dodatni dla dużych wartości parametru ξ .

Może to oznaczać, że dla ustalonego $v \in (v_m, v_R)$ współczynnik ten ^{nie} znika lub osiąga parzystą liczbę /dwa, cztery lub sześć/ zer. Numeryczne rozważania to potwierdzają: dla $\nu = 0,3$ i $v \in (0, v_R)$ oraz $\varepsilon \geq 0$ współczynnik K_{II}^R jest dodatni natomiast dla $\nu = 0,47$ i $v = 0,94 \in_2$ ^{II} v_R i $\varepsilon = 0$ współczynnik K_{II}^R jest dodatni, zaś przy $\varepsilon = 7$ osiąga wartości ujemne a dla $\varepsilon = 10$ jest dodatni.

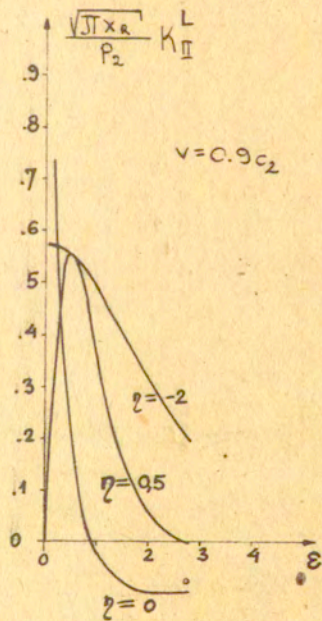
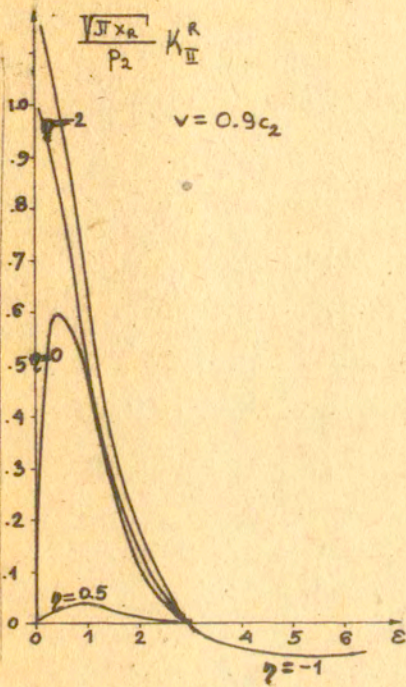
Dla $\varepsilon \geq 0$ w przypadkach gdy $x_R = 0$ i $v \in (0, v_R)$ oraz gdy $x_R < 0$ i $v \in (0, v_m)$ współczynnik intensywności naprężenia K_{II}^R jest dodatni.

W przypadku statycznym tzn. gdy $v = 0$ otrzymujemy:

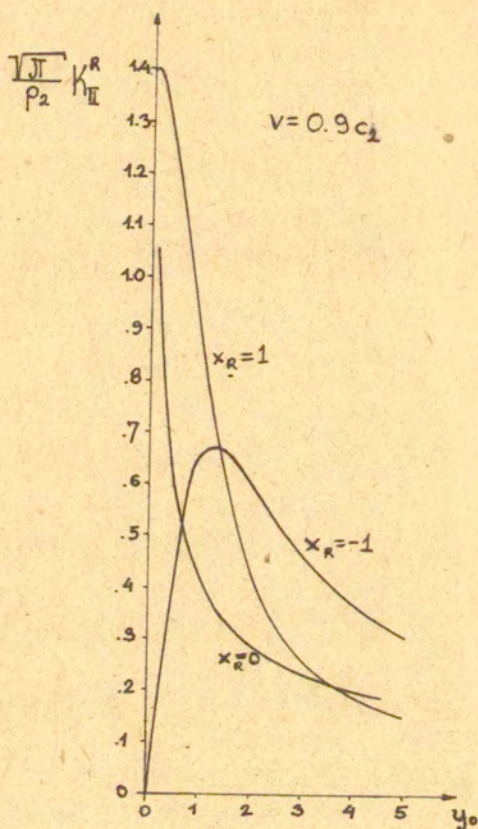
$$\left. \begin{aligned} K_{II}^L \\ K_{II}^R \end{aligned} \right\} = \frac{p_2 \sqrt{(1+\varepsilon^2)(\rho^2+\varepsilon^2)} - \varepsilon^2 - \rho}{\sqrt{x_R \pi} (1-\rho)^4 (1-\nu)} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\rho^2+\varepsilon^2}} \left[5-4\nu + \frac{2-\varepsilon^2}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)(\rho^2+\varepsilon^2)}} - \frac{2\varepsilon^2}{\rho^2+\varepsilon^2} \right] \\ & \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \left[5-4\nu + \frac{2-\varepsilon^2}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)(\rho^2+\varepsilon^2)}} - \frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \right] \end{aligned} \right.$$



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Na rysunkach 8 i 9 przedstawione są wykresy współczynników intensywności K_{II}^R , K_{II}^L dla odpowiednio ustalonych prędkości i różnych położań powierzchni szczeliny względem punktów zaczepienia sił wymuszających. Rys. 10 opisuje zależność K_{II}^R od parametru y_0 dla szczeliny półnieskończonej i ustalonej prędkości $v = 0,9 c_2$. Współczynnik Poissona przyjęto $\nu = 0,3$.

4. Antypłaski stan odkształcenia. Typ III.

Rozpatrzmy teraz, zakładając antypłaski stan odkształcenia, przykład działania dwóch sił skupionych skierowanych wzdłuż osi z , o przeciwnych zwrotach, jednakowych intensywnościach p_3 przyłożonych odpowiednio w punktach $/0, \pm y_0, x_3 / x_3 \in \mathbb{R}$ ruchomego układu współrzędnych $/x, y, z/$, /Rys.1/.

Nieznikające tożsamościowo składowe wektora przemieszczenia i tensora naprężenia poddana działaniu tych sił /Rys.2b/ opisane są zależnościami:

$$u_3(x, 0) = \frac{p_3}{4\pi\mu\beta_2} \ln \frac{x^2 + \beta_2^2(y+y_0)^2}{x^2 + \beta_2^2(y-y_0)^2},$$

$$\sigma_{13}(x, 0) = -\frac{p_3 x}{2\pi\beta_2^2} \left[\frac{1}{x^2 + \beta_2^2(y-y_0)^2} - \frac{1}{x^2 + \beta_2^2(y+y_0)^2} \right],$$

$$\sigma_{23}(x, 0) = -\frac{\beta_2 p_3}{2\pi} \left[\frac{y-y_0}{x^2 + \beta_2^2(y-y_0)^2} - \frac{y+y_0}{x^2 + \beta_2^2(y+y_0)^2} \right].$$

Przechodząc do granicy z $y \rightarrow \pm 0$ otrzymamy:

$$u_3^\pm(x, 0) = 0,$$

$$\sigma_{13}^\pm(x, 0) = 0,$$

$$\sigma_{23}^\pm(x, 0) = \frac{\beta_2 p_3 y_0}{\pi} \frac{1}{x^2 + \beta_2^2 y_0^2}.$$

/5.1/

Zatem warunki brzegowe w zagadnieniu ośrodka ciągłego osłabionego szczeliną /Rys.1a/ są następujące:

$$\sigma_{23}(x, 0) = -f_3(x) \quad \text{dla } x_L < x < x_R,$$

gdzie:

$$f_3(x) = \frac{\beta_2 p_3 y_0}{\pi} \frac{1}{x^2 + \beta_2^2 y_0^2}.$$

Zakładamy również, że naprężenia znikają w nieskończoności oraz $u_3(x_L, 0) = u_3(x_R, 0) = 0$. Spełnione są warunki III-go typu odkształcenia szczeliny, skorzystamy zatem z wyników pracy [3], gdzie dla tego typu zagadnienia rozkład przemieszczenia u_3 i naprężenia σ_{13} i σ_{23} opisany jest zależnościami:

$$\begin{aligned} u_3(x, y) &= -\frac{1}{\pi \mu \beta_2} \Psi_2(x, y), \\ /5.2/ \quad \sigma_{13}(x, y) &= -\frac{1}{\pi \beta_2} \frac{\partial}{\partial x} \Psi_2(x, y), \\ \sigma_{23}(x, y) &= -\frac{1}{\pi \beta_2} \frac{\partial}{\partial y} \Psi_2(x, y), \end{aligned}$$

przy czym funkcja Ψ_2 dana jest związkami /2.4/ zaś

$$S(x) = \int_{x_L}^x \frac{F_3(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi-x_L)(x_R-\xi)}}; \quad F_3(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x_L}^{x_R} \frac{\sqrt{(\xi-x_L)(x_R-\xi)}}{\xi-x} f_3(\xi) d\xi.$$

Przechodząc do granicy z $y \rightarrow \pm 0$ we wzorze /5.2/ uzyskujemy wyrażenia na przemieszczenie u_3^\pm i naprężenia $\sigma_{13}^\pm, \sigma_{23}^\pm$ na powierzchni szczeliny:

$$\begin{aligned} /5.3/ \quad u_3^\pm(x, 0) &= \pm \frac{1}{\mu \beta_2} \begin{cases} S(x) & \text{dla } x_L < x < x_R, \\ 0 & \text{dla } (x < x_L) \vee (x > x_R), \end{cases} \\ \sigma_{13}^\pm(x, 0) &= \pm \frac{1}{\beta_2} \begin{cases} \frac{F_3(x)}{\sqrt{(x-x_L)(x-x_R)}} & \text{dla } x_L < x < x_R, \\ 0 & \text{dla } (x < x_L) \vee (x > x_R), \end{cases} \\ \sigma_{23}^\pm(x, 0) &= - \begin{cases} \frac{F_3(x)}{\sqrt{(x-x_L)(x-x_R)}} & \text{dla } x > x_R, \\ f_3(x) & \text{dla } x_L < x < x_R, \\ \frac{F_3(x)}{\sqrt{(x_L-x)(x_R-x)}} & \text{dla } x < x_L. \end{cases} \end{aligned}$$

Wyznaczając następnie szukane funkcje $F_3(x)$ i $g(x)$ i dodając zależności /5.1/ i /5.3/ wartości graniczne przemieszczenia u_3^\pm i naprężenia σ_{23}^\pm na powierzchni szczeliny dane będą związkami:

$$u_3^\pm(x,0) = \pm \frac{P_3}{2J\mu} \begin{cases} G_2(x) & \text{dla } x_L < x < x_R, \\ 0 & \text{dla } (x < x_L) \vee (x > x_R), \end{cases}$$

$$\sigma_{23}^\pm(x,0) = -\frac{\beta_2 \gamma_0 P_3}{J} \begin{cases} \frac{L_2(x)}{\sqrt{(x-x_L)(x-x_R)}} & \text{dla } x > x_R, \\ 0 & \text{dla } x_L < x < x_R, \\ \frac{L_2(x)}{\sqrt{(x_L-x)(x_R-x)}} & \text{dla } x < x_L, \end{cases}$$

gdzie funkcje $G_2(x)$ i $L_2(x)$ określone są zależnościami /2.6/

Zatem współczynniki intensywności naprężeń K_{III}^L i K_{III}^R

według definicji:

$$K_{III}^L = \lim_{x \rightarrow x_L^-} \sigma_{23}^\pm(x,0) \sqrt{2J(x_L-x)},$$

$$K_{III}^R = \lim_{x \rightarrow x_R^+} \sigma_{23}^\pm(x,0) \sqrt{2J(x-x_R)},$$

opisane są wyrażeniami:

$$\left. \begin{matrix} K_{III}^L \\ K_{III}^R \end{matrix} \right\} = \beta_2 P_3 \frac{\Delta_2}{\sqrt{J(x_R-x_L)}} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x_L^2 + \beta_2^2 \gamma_0^2}}, \\ \frac{1}{\sqrt{x_R^2 + \beta_2^2 \gamma_0^2}}, \end{cases}$$

gdzie Δ_2 dane jest przez związek /2.9/.

Wyrażone we współrzędnych bezwymiarowych η i ξ współczynniki intensywności K_{III}^L , K_{III}^R opisane są zależnościami:

$$\left. \begin{matrix} K_{III}^L \\ K_{III}^R \end{matrix} \right\} = \beta_2 P_3 \frac{\Delta_2^I}{\sqrt{x_R \Pi(1-\varrho)}} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + \beta_2^2 \xi^2}} , \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_2^2 \xi^2}} , \end{matrix} \right.$$

gdzie Δ_2^I określone jest wzorem /2.11/ .

Badając współczynnik K_{III}^R względem ξ otrzymujemy, że dla

$\varrho \in (-\infty, -\frac{1}{3})$ funkcja $K_{III}^R(\xi)$ jest malejąca, natomiast

dla $\varrho \in (-\frac{1}{3}, 1)$ posiada maksimum dla $\xi_{\max}^2 = \frac{1+2\varrho-3\varrho^2}{\beta_2^2(3-2\varrho-\varrho^2)}$.

Funkcja $K_{III}^L(\xi)$ jest malejąca względem ξ gdy $\varrho \in (-3, 0)$, a

w przypadku gdy $\varrho \in (0, 1)$ lub $\varrho \in (-\infty, -3)$ istnieje maksi-

мум dla $\xi_{\max}^2 = \frac{\varrho^2(\varrho^2+2\varrho-3)}{\beta_2^2(3\varrho^2-2\varrho-1)}$.

Powyższe własności

zachodzą dla każdej ustalonej prędkości $v \in (0, v_R)$.

W przypadku statycznym $v = 0$ współczynniki intensywności

K_{III}^R , K_{III}^L wyrażają się zależnościami:

$$\left. \begin{matrix} K_{III}^L \\ K_{III}^R \end{matrix} \right\} = P_3 \sqrt{\frac{\sqrt{(1+\xi^2)(\varrho^2+\xi^2)} - \xi^2 - \varrho}{x_R \Pi(1-\varrho)}} \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + \xi^2}} , \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} . \end{matrix} \right.$$

Dla szczeliny usytuowanej symetrycznie względem punktów

zaczepienia sił wymuszających $\beta_3 / \varrho = -1$ uzyskujemy wyniki:

$$K_{III}^L = K_{III}^R = \frac{\beta_2 P_3}{\sqrt{x_R \Pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_2^2 \xi^2}} ,$$

a dla szczeliny półnieskończonej :

$$K_{III}^A = \frac{\beta_2 P_0}{\sqrt{|x_R| J'}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \beta_2^2 \xi^2} + 1}{1 + \beta_2^2 \xi^2}}$$

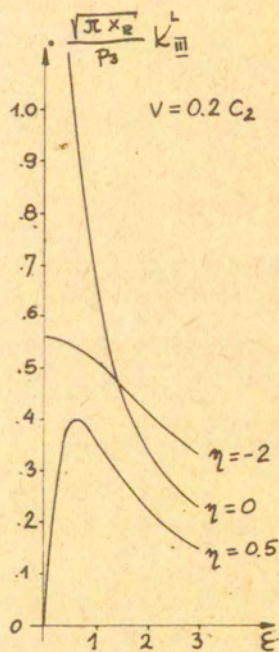
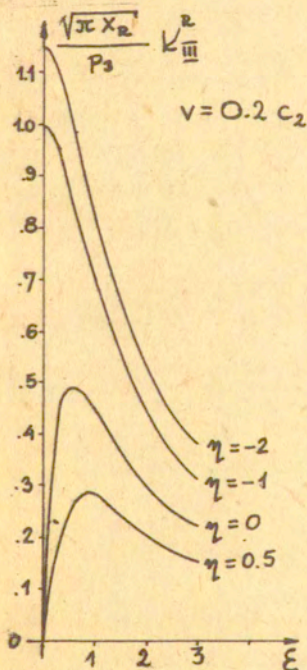
dla $x_R > 0$,

$$K_{III}^R = \frac{\beta_2 P_0}{\sqrt{\gamma_0 J'}} \frac{1}{\sqrt{\beta_2}}$$

dla $x_R = 0$,

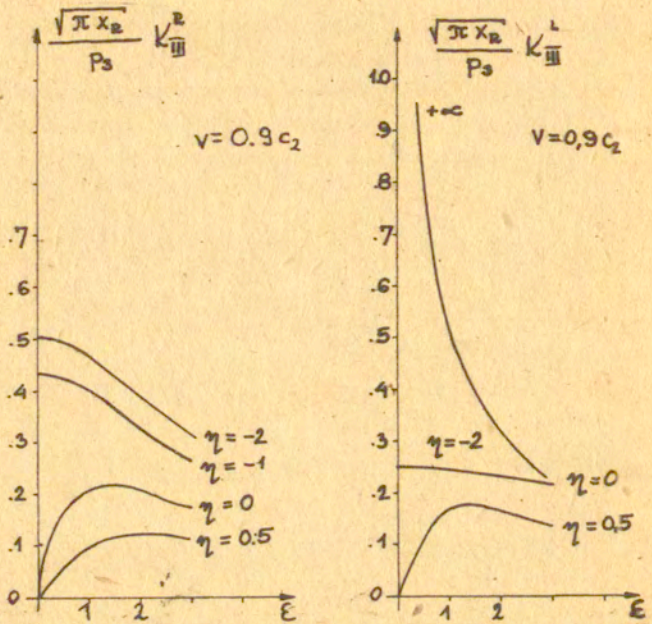
$$K_{III}^R = \frac{\beta_2 P_0}{\sqrt{|x_R| J'}} \sqrt{\frac{1 + \beta_2^2 \xi^2 - 1}{1 + \beta_2^2 \xi^2}}$$

dla $x_R < 0$.

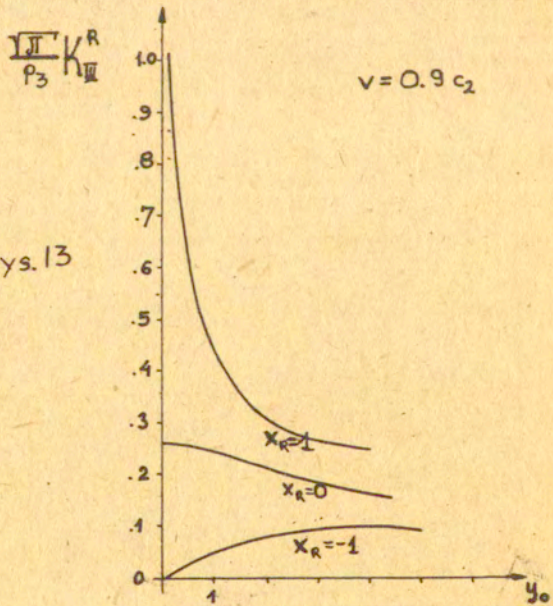


Rys. 11

Rys.12



Rys.13



Na rysunkach 11 i 12 przedstawiono zależność współczynników intensywności K_{III}^R , K_{III}^L od zmiennej ε odpowiednio dla prędkości $v = 0,2 c_2$ i $v = 0,9 c_2$ dla różnych wartości parametru η . Rysunek 13 opisuje przebieg zmienności współczynnika K_{III}^R dla szczeliny półnieskończonej przy ustalonej prędkości $v = 0,9 c_2$.

W pracy opisane zostały właściwości współczynników intensywności naprężeń dla szczeliny obciążonej symetrycznie przyłożonymi siłami skupionymi. W przypadku typu normalnego rozwarcia półnieskończonej szczeliny dla odpowiednich wartości prędkości v , parametru ε i własności sprężystych materiału, współczynniki intensywności K_I^R przyjmują wartości ujemne. Oznacza to zachodzenie powierzchni szczeliny na siebie i dlatego konieczne jest przyjęcie dodatkowych warunków brzegowych $u_2^+(x_R, 0) \geq 0$, $u_2^-(x_R, 0) \leq 0$. Dla typu ścinania poprzecznego szczeliny zmiana znaku współczynnika intensywności naprężeń wskazuje na zmianę zwrotu składowej wektora przemieszczenia $u_I^+(x, 0)$ na powierzchni szczeliny.

LITERATURA

- [1] YOFFE E.M., The moving Griffith crack; *Phil., Mag.*, 42, 1951.
- [2] G.Eason, J.Fulton, J.N. Sneddon, The generation of waves in an infinite elastic solid by variable body forces, *Phil. Trans. A*, 248, 955 / 1956/.
- [3] M. Matczyński, Stacjonarne zagadnienia szczelin w ośrodkach sprężystych. Zastosowanie metody Wienera-Hopfa, *Prace IPPT*, 1979 .
- [4] M. Matczyński, Niesymetryczne rozciąganie tarczy osłabionej szczeliną, *Rozprawy inżynierskie* 20, 2, 1972 .
- [5] M. Matczyński, The quasi - static problem of crack in an elastic medium , *A MS*, 5, 23, 1970 .
- [6] G.C.Sih, H. Liebowitz, *Mathematical theories of brittle fracture* , *Fracture II*, 1968 .