

Andrzej Szaniawski

WYMIANA CIEPŁA I POWOLNY OPLYW
USTALONY WOKÓŁ RZĘDU
CIENKICH CYLINDRÓW

1/1980

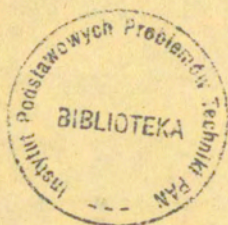
P. 269a



WARSZAWA 1980

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 stycznia 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 1/1980



57172



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark. wyd. 1,3. Ark. druk. 2.

Oddano do drukarni w styczniu 1980 r.

Nr zamówienia 68/0/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Andrzej Szaniawski

Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT

WYMIANA CIEPŁA I POWOLNY OPLYW
USTALONY WOKÓŁ RZĘDU CIENKICH CYLINDRÓW

1. Wprowadzenie

Problem oddziaływania z otoczeniem rzędu jednakowych cienkich prętów cylindrycznych, lub utworzonych z takich prętów siatek występuje w wielu zagadnieniach praktycznych /np. w elektrotechnice, gdzie dla zbadania wpływu siatki na rozkład pola elektrycznego wykorzystywane jest rozwiązanie równania Laplace'a z biegunami rozłożonymi periodycznie na prostej [1] /. W mechanice płynów oddziaływaniu siatek na przepływ poświęconych jest wiele prac /patrz. [2] do [8] /, głównie w zakresie dużych liczb Reynoldsa, ze zwróceniem uwagi na efekty tłumienia fluktuacji turbulentnych. W niniejszej pracy zajmować się będziemy jedynie laminarnymi powolnymi opływami lepką cieczą nieściśliwą nieskończonego rzędu regularnie, ale rzadko rozmieszczonych, jednakowych równoległych i równoodległych cylindrów, w zakresie małych liczb Reynoldsa i Pecleta, gdy dopuszczalnymi są linearyzacja równań przepływu i stosowanie reguł superpozycji.

Poszukując rozwiązań przybliżonych opisujących strukturę pola przepływu i wymiany ciepła w najbliższym otoczeniu prętów zwrócimy również uwagę na własności asymptotyczne w dużej odległości od prętów. Głównym celem pracy będzie bowiem określenie warunków, jakie winny spełniać parametry przepływu po obu stronach rzędu prętów, poza cienką warstwą ich najbliższego sąsiedztwa. Warunki te będą nas interesować przede wszystkim ze względu na możliwość ich wykorzystywania przy analizie oddziaływania płynu z układami powierzchniowo rozmieszczonych cienkich prętów.

Gdy odległości między prętami są znacznie mniejsze od długości charakteryzujących niejednorodności przepływu poza warstwą otaczającą pręty, wówczas istnienie tej cienkiej warstwy ze złożoną strukturą przepływu można pominąć, traktując powierzchnię utworzoną z osi prętów jako powierzchnię nieciągłości, po obu stronach której parametry przepływu winny spełniać warunki zgodności, znalezione jako warunki asymptotyczne na zewnątrz rozważanej warstwy.

Ze względu na stosowalność zasady superpozycji, będziemy oddzielnie rozpatrywać rozwiązania opisujące wymianę ciepła i opływy o asymptotycznych kierunkach równoległych i prostopadłych do osi cylindrów.

Dla przepływu skierowanego prostopadle do płaszczyzny rozmieszczenia osi cylindrów rząd cylindrów stanowi rodzaj membrany porowatej. Wyznaczeniem laminarnego opływu takiego rzędu i powstających przy tym sił zajmowali się K. Tamada i H. Fujikawa [9] oraz T. Miyagi [10], a w niniejszej pracy ograniczymy się jedynie do zacytowania ich wyników.

Wymiana ciepła i przepływ równoległy do osi cylindrów opisane są znanymi rozwiązaniami równania Laplace'a [1], [11], które wykorzystamy jedynie dla określenia poszukiwanych przez nas warunków asymptotycznych, daleko od rzędu cylindrów. Natomiast przepływowi skierowanemu prostopadle do osi cylindrów, ale równoległe do powierzchni ich rozmieszczenia, poświęcimy główną uwagę. Ponieważ rozpatrywane przez nas zadania są zadaniami płaskimi, zależnymi od dwóch współrzędnych na płaszczyźnie, a podstawowymi wykorzystywanymi rozwiązaniami będą dla nas periodyczne rozwiązania równań Laplace'a i biharmonicznego, więc takim rozwiązaniom tych równań poświęcimy na początku nieco uwagi.

2. Periodyczne rozwiązania równań Laplace'a i biharmonicznych na płaszczyźnie.

Ze względu na to, że interesować nas będą rozwiązania periodyczne tylko w jednym kierunku, więc poza Kartezjańskim układem współrzędnych ξ, η , korzystając będziemy z pomocniczego układu krzywoliniowego ρ, θ , określonego wieloznacznym odwzorowaniem

$$\rho^2 = \sin^2 \xi + \eta^2, \quad \rho \geq 0,$$

$$/2.1/ \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \xi}{\xi \eta}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Odwzorowanie to jest wieloznaczne, gdyż jednemu obszarowi

$0 \leq \rho < \infty, -\pi \leq \theta \leq \pi$ współrzędnych ρ, θ podporządkowuje nieskończenie wiele obszarów $(n-1/2)\pi \leq \xi \leq (n+1/2)\pi, -\infty < \eta < +\infty, n=0, \pm 1, \dots$ o szerokości π , wypełniających całą płaszczyznę ξ, η . Linie współrzędne $\rho = \text{const}$,

$\theta = \text{const}$ w jednym paśmie płaszczyzny ξ, η pokazane są na rys.1. Są one symetryczne względem osi $\eta = 0$ i $\xi = n\pi/2, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ a obraz ich rozmieszczenia powtarza się periodycznie z okresem π w kierunku osi ξ . Na osi ξ odwzorowanie /2.1/ staje się osobliwe w periodycznie rozmieszczonych punktach węzłowych $\xi = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$ oraz siodłowych $\xi = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \dots$

W sąsiedztwie punktów węzłowych $|\rho \ll 1|$, współrzędne ρ, θ niewiele różnią się od współrzędnych biegunowych $\rho^2 \approx (\xi - n\pi)^2 + \eta^2, \operatorname{tg} \theta \approx (\xi - n\pi)/\eta, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ a w dużej odległości od osi ξ układ ρ, θ zbliża się do układu prostokątnego $\rho \approx \eta, \operatorname{tg} \theta \approx \operatorname{tg} \xi$ ($\rho, \eta \gg 1$).

Laplasjan można w obu układach współrzędnych przedstawić w postaci

$$/2.2/ \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

z której wynika równanie Laplace'a we współrzędnych krzywoliniowych ρ, θ , o postaci identycznej jak we współrzędnych biegunowych

$$/2.3/ \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\rho^2 \partial \theta^2} = 0.$$

Interesować nas będą tylko szczególne rozwiązania ϕ równania Laplace'a, periodyczne z okresem π ze względu na współrzędną ξ i nie wzrastające zbyt szybko /eksponencjalnie/ wraz z η . Dwa rozwiązania ciągłe o takich właściwościach możemy napisać od razu

$$/2.4/ \quad \phi = \text{const.}, \quad \phi = \eta.$$

Na podstawie równania Laplace'a /2.3/ dla współrzędnych biegunowych, możemy od razu podać znane dla tego układu rozwiązania z regularnie na osi ξ rozłożonymi nieciągłościami

$$\phi_0 = \ln \rho,$$

$$/2.5/ \quad \phi_{s,2n} = \rho^{-2n} \sin 2n\theta, \quad \phi_{c,2n} = \rho^{2n} \cos 2n\theta, \quad n=1,2,\dots$$

Rozwiązania z wykładnikami nieparzystymi, jako periodyczne z okresem różnym od π wyłączyliśmy tu z rozważań. Ponieważ pochodne cząstkowe $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$ i $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}$ rozwiązań ϕ równania $\Delta \phi = 0$ są również rozwiązaniami spełniającymi narzucone warunki, więc dla interesujących nas rozwiązań z nieciągłościami rozłożonymi na osi ξ periodycznie z okresem π możemy wprowadzić wzory

$$/2.6/ \quad \begin{aligned} \phi_{s,n+1} &= -\frac{\partial \phi_{s,n}}{n \partial \eta} = -\frac{\partial \phi_{c,n}}{n \partial \xi} = \phi_{s,n} \phi_{c1} + \phi_{c,n} \phi_{s1}, \\ \phi_{c,n+1} &= \frac{\partial \phi_{s,n}}{n \partial \xi} = -\frac{\partial \phi_{c,n}}{n \partial \eta} = \phi_{c,n} \phi_{c1} - \phi_{s,n} \phi_{s1}, \end{aligned}$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$\Phi_{s1} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} = \frac{\sin 2\xi}{2\rho^2}, \quad \Phi_{c1} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} = \frac{\sin 2\eta}{2\rho^2}.$$

Łatwo sprawdzić, że w sąsiedztwie punktów osobliwych $\eta = 0$, $\xi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ dla znalezionych rozwiązań $\Phi_0, \Phi_{s1}, \Phi_{c1}, \dots$ otrzymujemy wzory graniczne analogiczne jak dla rozwiązań równania Laplace'a we współrzędnych biegunowych.

$$/2.7/ \quad \Phi_0 \rightarrow \ln \rho, \quad \Phi_{s,n} \rightarrow \frac{\sin n\theta}{\rho^n}, \quad \Phi_{c,n} \rightarrow \frac{\cos n\theta}{\rho^n},$$

$$\text{dla } \rho \rightarrow 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

a daleko od osi ξ otrzymujemy wzory asymptotyczne

$$/2.8/ \quad \Phi_0 \rightarrow |\eta| - \ln 2, \quad \Phi_{c1} \rightarrow \pm 1, \quad \Phi_{s1} \rightarrow 0$$

$$\Phi_{s,n}, \Phi_{c,n} \rightarrow 0 \quad \eta \rightarrow \pm\infty, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Również dla równania biharmonicznego

$$/2.9/ \quad \Delta \Delta \Psi = 0$$

interesować nas będą tylko szczególne rozwiązania Ψ periodyczne z okresem π ze względu na współrzędną ξ i niewzrastające zbyt szybko /eksponencjalnie/ wraz z η . Poza rozwiązaniami ciągłymi

$$/2.10/ \quad \Psi = \text{const.}, \quad \Psi = \eta, \quad \Psi = \eta^2, \quad \Psi = \eta^3,$$

do grupy tej będą oczywiście należeć wszystkie uprzednio wymienione rozwiązania /2.5/ i /2.6/ równania Laplace'a $\Delta \Phi = 0$, a ponadto iloczyny $\eta \Phi$ utworzone z tych rozwiązań

$$/2.11/ \quad \Delta(\eta\phi) = 2 \frac{\partial\phi}{\partial\eta}, \quad \Delta\Delta(\eta\phi) = 0.$$

Ponieważ równania Laplace'a /2.3/ i biharmoniczne /2.9/ są liniowe, więc każde wyrażenie liniowe utworzone z ich rozwiązań jest również ich rozwiązaniem. W dalszej części będziemy z tej możliwości superpozycji rozwiązań korzystać, tak dobierając odpowiednie wyrażenia liniowe, aby możliwie dobrze spełnić warunki brzegowe.

3. Równania przepływu i wymiany ciepła.

Obierzmy Kartezjański układ współrzędnych x, y, z , jak na rys.2, o osi z pokrywającej się z osią jednego z cylindrów. Odpowiednie współrzędne prędkości będą oznaczone przez u, v, w , a temperatura i ciśnienie przez T i p . Równania ustalonego, powolnego przepływu i wymiany ciepła dla cieczy nieściśliwej, przy pominięciu członów proporcjonalnych do liczby Reynoldsa i Pecleta, przybierają postać równań Stokes'a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\mu \partial x},$$

/3.1/

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\mu \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\mu \partial z},$$

gdzie μ jest współczynnikiem lepkości, oraz równania Laplace'a

$$/3.2/ \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

W zastosowaniu do rzędu cylindrów zajmiemy się dwoma przypadkami szczególnymi: opływem wzdłużnym przy $u=v=0$, $\partial p / \partial z = 0$ lub dwuwymiarową wymianą ciepła przy $\partial T / \partial z = 0$ opisanych dwuwymiarowym równaniem Laplace'a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 ,$$

$$13.3/ \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 ,$$

oraz opływem płaskim w kierunku prostopadłym do osi cylindrów przy $w=0$, $\partial u / \partial z = \partial v / \partial z = 0$, opisanym przez równania

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ,$$

$$13.4/ \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\mu \partial x} ,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\mu \partial y} .$$

W obu przypadkach będziemy żądać, aby na powierzchni cylindrów o promieniu a , odległych od siebie o l /rys.2/, prędkość i temperatura przybierały zadane wartości

$$13.5/ \quad u=v=w=0, \quad T-T_0=0 \quad \text{dla } x^2+y^2=a^2,$$

gdzie T_0 jest temperaturą cylindrów.

Daleko od cylindrów, dla rozwiązań w , $T-T_0$ równania Laplace'a /3.3/ będziemy żądali spełnienia warunków asymptotycznych

$$13.6/ \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial y} \rightarrow \text{const.} \quad \text{dla } y \rightarrow \pm \infty ,$$

a dla rozwiązań u, v, p równań /3.4/ warunków

$$/3.7/ \quad v \rightarrow 0, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \text{const.}, \quad p \rightarrow \text{const.}$$

dla $y \rightarrow \pm \infty$.

Warunki te odpowiadają powstawaniu stałego naprężenia stycznego, lub stałego strumienia ciepła skierowanego do cylindrów.

Przy rozwiązywaniu postawionych problemów będziemy poszukiwać rozwiązań przybliżonych $w, T - T_0$ lub u, v, p , spełniających dokładnie jedynie równania /3.3/ lub /3.4/ i asymptotyczne warunki /3.6/ lub /3.7/. Natomiast warunki brzegowe /3.5/ na powierzchni cylindrów zostaną spełnione w przybliżeniu, z dokładnością do wyrazów najniższego rzędu ze względu na mały parametr a/l , dla rzadko rozmieszczonych cienkich cylindrów.

Wprowadzając bezwymiarowe współrzędne

$$/3.8/ \quad \xi = \pi \frac{x}{l}, \quad \eta = \pi \frac{y}{l},$$

mały parametr

$$/3.9/ \quad \alpha = \pi \frac{a}{l}$$

i bezwymiarowe zmienne

$$W = \frac{w}{l \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial w}{\partial y}} = \frac{T - T_0}{l \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial T}{\partial y}}$$

$$/3.10/ \quad U = \frac{u}{l \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial y}}, \quad V = \frac{v}{l \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial v}{\partial y}},$$

$$P = \frac{p - \lim_{y \rightarrow \infty} p}{\pi \mu \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial y}}$$

możemy interesujące nas problemy powolnego opływu rzędu cylindrów z wymianą ciepła sprowadzić do rozwiązania następujących zadań matematycznych.

Opływ wzdłużny rzędu cylindrów oraz wymiana ciepła opisane są rozwiązaniem $W(\xi, \eta)$ spełniającym równanie Laplace'a $\Delta W = 0$ i warunki brzegowe:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\partial W}{\partial \eta} = 1,$$

/3.11/

$$W|_{(\xi - n\pi)^2 + \eta^2 = \alpha} = o(\alpha), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\alpha \rightarrow 0.$$

Dla wyznaczenia opływu w kierunku równoległym do płaszczyzny wyznaczonej przez osie cylindrów, ale prostopadłym do tych osi, należy rozwiązać równania /3.4/. Po wprowadzeniu bezwymiarowych wielkości /3.8/ i /3.10/, oraz określonej wzorami

$$/3.12/ \quad U = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi},$$

funkcji prądu Ψ , równania /3.4/ sprowadzimy do równań biharmonicznych i Laplace'a

$$/3.13/ \quad \Delta \Delta \Psi = 0, \quad \Delta p = 0,$$

przy czym między Ψ i p powinny być spełnione również relacje

$$/3.14/ \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial \xi}.$$

Funkcja prądu Ψ i ciśnienie P winny spełniać warunki brzegowe

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = 1,$$

$$/3.15/ \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, P \right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_{(\xi - n\pi)^2 + \eta^2 = \alpha^2} = o(\alpha)$$

$$\alpha \rightarrow 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Na rozwiązanie tak postawionego zadania zwrócimy w niniejszej pracy główną uwagę.

4. Wymiana ciepła i wzdłużny opływ rzędu cylindrów.

Zarówno wymiana ciepła przy małych liczbach Pecleta, jak i opływ wzdłużny przy małych liczbach Reynoldsa rządzone są równaniem Laplace'a $\Delta W = 0$. Rozwiązań $W(\xi, \eta)$ tego równania poszukujemy na zewnątrz rzędu cylindrów $(\xi - n\pi)^2 + \eta^2 > \alpha^2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ w postaci okresowych funkcji od ξ spełniających warunki brzegowe /3.11/. Rozwiązania takich zadań są znane [1], [11] i może ich być wiele. Zajmiemy się ich dwoma przypadkami szczególnymi:

$$/4.1/ \quad W_0 = \Phi_0(\varrho) - \Phi_0(\alpha) = \\ = \ln \frac{\varrho}{\alpha} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin^2 \xi + \operatorname{sh}^2 \eta}{\alpha^2},$$

oraz

$$/4.2/ \quad W_1 = \eta - \alpha^2 \Phi_{1c1} = \eta - \alpha^2 \frac{\operatorname{sh} 2\eta}{\operatorname{ch} 2\eta - \cos 2\xi}.$$

Różnią się one asymptotycznym zachowaniem, gdzie

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \partial W_0 / \partial \eta = -1, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \partial W_0 / \partial \eta = +1.$$

4.1

Rozwiązanie W_0 opisuje symetryczną wymianę ciepła przy jednakowym strumieniu ciepła w obie strony od rzędu cienkich cylindrów, lub symetryczny opływ wzdłużny przy jednakowym naprężeniu stycznym przyłożonym z obu stron cylindrów. Realizację takiej wymiany ciepła można sobie wyobrazić jako grzanie /np. elektryczne/ rzędu prętów cylindrycznych zanurzonych w prawie nieruchomej cieczy i ich równomierne chłodzenie drogą przewodnictwa cieplnego. Chłodzenie to mogłoby być wywołane symetrycznym umieszczeniem izotermicznych ścianek daleko po obu stronach rzędu prętów. Podobnie opływ wzdłużny możnaby sobie wyobrazić jako wywołany ruchem dwóch płaszczyzn symetrycznie umieszczonych po obu stronach rzędu nieruchomych prętów o osiach równoległych do prędkości płaszczyzn. Kontury $\rho = \alpha$, na których spełniony jest warunek $W_0 = 0$ są dla $\alpha \rightarrow 0$ w przybliżeniu okręgami, co pokazują linie $\rho = \text{const.}$ na rys. 1. Natomiast na okręgach $(\xi - n\pi)^2 + \eta^2 = \alpha^2$ warunek brzegowy $W_0 = 0$ jest spełniony jedynie w przybliżeniu, z żądaną w /3.11/ dokładnością.

$$W_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{\rho^2}{\alpha^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{(\xi - n\pi)^2 + \eta^2}{\alpha^2} \left[1 + \frac{\eta^2 - (\xi - n\pi)^2}{3} + \dots \right] = \alpha^2 \frac{\cos 2\theta}{6} + \dots = O(\alpha^2).$$

Główną uwagę zwrócimy jednak na warunki asymptotyczne daleko od rzędu cylindrów. Na podstawie /2.8/ widzimy, że asymptoty

$$\overline{W_0}(\eta) = |\eta| - \ln 2\alpha, \quad /4.3/ \quad \overline{W_0}(\xi, \eta) \rightarrow \overline{W_0}(\eta) \quad \text{dla} \quad \eta \rightarrow \pm \infty,$$

przecinają się, dając na płaszczyźnie osi cylindrów efekt poślizgu $\overline{W_0}(0)$. Pokazuje to rys. 3 na którym wykreślone są rozkłady funkcji $W_0 - \overline{W_0}(0)$ w przekrojach przez cylindry $\eta = 0, \xi = n\pi$

i między cylindrami $\xi = (n + 1/2)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.
 Jak widać, poza cienką warstwą o grubości rzędu odległości między osiami cylindrów powstają jednorodne warunki stałego strumienia ciepła lub naprężenia scinającego, z liniowym rozkładem temperatury lub prędkości /przepływ Couette'a/. Pomijając strukturę tej warstwy i traktując rząd cylindrów jako powierzchnię nieciągłości, otrzymujemy warunki zgodności na tej powierzchni

$$/4.4/ \quad \bar{W}_0(0) = -\ln 2\alpha,$$

lub w zmiennych wymiarowych

$$/4.5/ \quad \bar{w} = \frac{2}{\lambda_z} l \bar{w}', \quad \bar{T} - T_0 = \frac{2}{\lambda_z} l \bar{T}' ,$$

gdzie przez \bar{w}' i \bar{T}' oznaczone zostały pochodne prędkości w i temperatury T względem współrzędnej normalnej y , poza cienkim obszarem otaczającej rząd cylindrów warstwy o grubości l , a λ_z jest bezwymiarowym współczynnikiem oporu dla rzędu cylindrów w rozpatrywanym opływie, lub bezwymiarowym współczynnikiem wymiany ciepła między rzędem cylindrów a otaczającą cieczą. Związki /4.5/ mogą być wykorzystywane przy badaniu efektów oddziaływania rzadko rozmieszczonych na powierzchni cienkich prętów z otaczającym płynem. Należy zwrócić uwagę, że wielkości poślizgów \bar{w} i $\bar{T} - T_0$, rosną nieograniczenie wraz z maleniem stosunku a/l do zera.

4.2

Rozwiązanie W_2 opisuje zaburzenie jednorodnego strumienia ciepła wywołane umieszczeniem rzędu cienkich cylindrów prostopadle do kierunku przepływu ciepła, przy czym całkowita wymiana ciepła między cylindrami a otaczającym płynem jest równa zero. Podobnie opisuje ono zaburzenie jednorodnego przepływu Couette'a, wywołane umieszczeniem równoległe do przepływu rzędu cienkich

cyldrów w płaszczyźnie zerowej prędkości.

Przykładowy rozkład pola prędkości pokazany jest na rys.4. Obecność cylindrów, poza lokalnym zaburzeniem w warstwie o grubości porównywalnej z rozstawem osi, wpływa na nieznaczne przesunięcie asymptot:

$$W_1 \rightarrow \bar{W}_1(\eta) = \eta + \begin{cases} -\alpha^2, & \eta > 0 \\ +\alpha^2, & \eta < 0 \end{cases} \text{ dla } \eta \rightarrow \pm \infty$$

Ponieważ przesunięcie to, równe $\bar{W}_1(+0) - \bar{W}_1(-0) = -2\alpha^2$, dla cienkich prętów szybko znika wraz z α zdużającym do zera, więc jego efekt w porównaniu z rosnącym nieograniczenie poślizgiem $\bar{W}_0(0) = -\ln 2\alpha$ można pominać. Dlatego przypadkiem, gdy $\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \partial W / \partial \eta = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \partial W / \partial \eta$ nie będziemy się w dalszym ciągu bliżej zajmować.

5. Opływ w kierunku równoległym do płaszczyzny rozmieszczenia osi cylindrów ale prostopadłym do tych osi.

Zajmiemy się obecnie głównym problemem niniejszej pracy: wyznaczeniem symetrycznego opływu wóół rzędu cienkich cylindrów, rozmieszczonych w płaszczyźnie równoległej do asymptotycznego kierunku prędkości. Osie cylindrów są przy tym usytuowane prostopadle do kierunku przepływu.

Problem ten został w p.3 sprowadzony do rozwiązania równań biharmonicznego i Laplace'a /3.13/ z okresowymi o okresie π warunkami brzegowymi /3.15/ dla niewiadomych $\Psi(\xi, \eta)$ i $P(\xi, \eta)$, przy czym między Ψ i P powinny być spełnione relacje /3.14/.

Rozwiązania Ψ równania biharmonicznego $\Delta\Delta\Psi = 0$ będziemy poszukiwać w postaci sumy rozwiązań Φ równania Laplace'a $\Delta\Phi = 0$ i iloczynu $\eta\Phi$. Podstawienie $\Psi_L = \Phi$ do /3.14/ z uwzględnieniem warunku /3.15/ daje odpowiednio rozwiązanie $P_L = 0$.

Analogiczne postępowanie zastosowano do

$$/5.1/ \quad \Psi_B = \eta \Phi \quad \text{daje} \quad P_B = -2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} .$$

Na podstawie wzorów /3.12/ i /5.1/ możemy więc z rozwiązania $\Psi(\xi, \eta)$, o założonej postaci $\Psi = \eta \Phi_1 + \Phi_2$, otrzymać poszukiwane parametry przepływu U, V, P .

Ograniczając się jedynie do przybliżonego spełnienia warunków brzegowych /3.15/ na powierzchni cylindrów, znalezione zostało dla $\Psi(\xi, \eta)$ następujące rozwiązanie

$$/5.2/ \quad \Psi = \frac{\eta}{2} [\Phi_0(\rho) - \Phi_0(\alpha)] + \frac{1}{4} (-\eta + \alpha^2 \Phi_{ci}) = \\ = \frac{1}{4} \left[\eta \left(\ln \frac{\rho^2}{\alpha^2} - 1 \right) + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \frac{\text{sh} 2\eta}{2} \right],$$

z którego otrzymujemy rozkłady pola prędkości i ciśnienia

$$U = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{\rho^2}{\alpha^2} - 1 + \frac{\eta \text{sh} 2\eta}{\rho^2} + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \frac{1 - \cos 2\xi \text{ch} 2\eta}{2\rho^2} \right),$$

$$/5.3/ \quad V = \frac{\sin 2\xi}{4\rho^2} \left(-\eta + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \frac{\text{sh} 2\eta}{2} \right),$$

$$P = - \frac{\sin 2\xi}{2\rho^2} .$$

Rozwiązanie to opisuje przepływ symetryczny względem osi ξ , o asymptotach składowej U ustawionych podobnie jak dla rozwiązania W_0 /4.1/.

Można sprawdzić, że rozwiązanie /5.2/ dokładnie spełnia warunki asymptotyczne

$$U \rightarrow \bar{U}(\eta) = |\eta| - \frac{1}{2} \ln 2\alpha - \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \rightarrow \pm 1,$$

$$/5.4/ \quad P, V, \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \rightarrow 0 \quad \eta \rightarrow \pm \infty,$$

natomiast na powierzchni cylindrów warunki brzegowe /3.15/ spełnione są jedynie w przybliżeniu

$$\psi \rightarrow \frac{\eta^3}{6} + \dots = O(\alpha^3),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \rightarrow \frac{\eta^2}{3} + \dots = O(\alpha^2),$$

/5.5/

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \rightarrow -\frac{(\xi - n\pi)\eta}{6} + \dots = O(\alpha^2),$$

$$(\xi - n\pi)^2 + \eta^2 = \alpha^2, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Zgodnie z postawionymi wymaganiami /3.15/, na powierzchni cylindrów składowe prędkości U , V zbiegają do zera wraz z kwadratem malejącego do zera stosunku a/l . Stosowane przybliżenie będzie więc tym dokładniejsze, im cieńsze będą cylindry lub im rzadziej będą one rozstawione. Jednakże należy zwrócić uwagę, że dla skończonego $\alpha \neq 0$ w otrzymanym rozwiązaniu /5.2/ $\psi(\xi, \eta)$ nie ma linii prądu $\psi = \text{const.}$, na której jednocześnie obie składowe prędkości byłyby dokładnie równe zero $U=V=0$. W wyniku powstaje jakościowo inny obraz uzyskanego przepływu, pokazany na rys.5 dla specjalnie dobranego, przesadnie dużego $\alpha = \pi/4$ /czyli $2a/l = 0.5$ /.

Obszar przepływu opisanego przez rozwiązanie /5.2/ można podzielić na trzy części rozdzielone liniami prądu

$$\psi = \pm \psi^*,$$

/5.6/

$$\psi^* = \frac{\alpha \eta^*}{4 \operatorname{sh} \eta^*} \left[\frac{\alpha}{\operatorname{sh} \eta^*} + \left(\frac{\alpha}{\eta^*} - 2 \frac{\eta^*}{\alpha} \right) \operatorname{ch} \eta^* \right],$$

przechodzącymi przez punkty przecięcia prostych $\xi = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ z liniami $U=0$ w punktach $\eta = \eta^*$, przy czym η^* spełnia równanie przestępne

$$15.7/ \ln \frac{\operatorname{sh}^2 \eta^*}{\alpha^2} - 1 + \frac{2\eta^*}{\operatorname{th} \eta^*} - \frac{\alpha^2}{\operatorname{sh}^2 \eta^*} = 0,$$

otrzymane z podstawienia $\xi = n\pi$; $\eta = \eta^*$ do $U=0$.
 Poza obszarami: zewnętrznym dla $|\psi| > |\psi^*|$ i $|\rho| > |\eta^*|$,
 oraz wewnętrznymi dla $|\psi| > |\psi^*|$ i $|\rho| < |\eta^*|$ otrzymamy
 jeszcze obszar pośredni, w którym linie prądu $\psi = \text{const.}$
 dla $|\psi| < |\psi^*|$ wychodzą ze środków cylindrów, przecinają
 ich powierzchnie i schodzą się w następnych środkach.

Jest to więc jak gdyby przepływ przez cylindry przepuszczalne
 o bardzo niewielkim wydatku, rozmieszczonym w dosyć złożony sposób
 na ich powierzchni. Powierzchnia tych cylindrów /jak również
 walców $\rho = \alpha$ / mieści się między powierzchniami zerowania
 się składowych prędkości $U=0$ oraz $V=0$.

Rozmieszczenie rozgraniczających linii prądu $\psi = \psi^*$, linii
 zerowych składowych prędkości $U=0$, $V=0$ oraz linii
 konturu cylindra $(\xi - n\pi)^2 + \eta^2 = \alpha^2$ i walca $\rho = \alpha$ zostały
 również naniesione na rys.5. Jednocześnie wskazany został na
 osi ξ izolowany punkt dla $\rho = \alpha$, w którym prędkość jest
 równa zero.

W miarę wzrastania rozstawu cylindrów ($\alpha \rightarrow 0$) linie $\psi = \psi^*$
 $U=0$, $V=0$, i $\rho = \alpha$ zbliżają się do siebie prawie
 wszędzie całego obwodu okręgu o promieniu α , a wywołana za-
 złożonym przybliżeniem sztuczna przepuszczalność cylindrów zni-
 ka. Temu granicznemu przypadkowi opływu bardzo cienkich cylin-
 drów $\alpha \rightarrow 0$ poświęcimy obecnie nieco uwagi.

Rozkładając dla $\rho \ll 1$ współrzędne ξ, η /2.1/ w
 szeregi potęgowe

$$\xi = \rho \sin \theta - \rho^3 \frac{1+2\cos 2\theta}{6} \sin \theta + \dots,$$

$$15.8/ \eta = \rho \cos \theta + \rho^3 \frac{1-2\cos 2\theta}{6} \cos \theta + \dots$$

i podstawiając je do /5.2/ i /5.3/ otrzymujemy dla najbliższego otoczenia cylindrów rozwinięcia

$$\frac{\Psi}{\alpha} = \left\{ \frac{\rho \cdot \cos \theta}{\alpha} \left[\ln \frac{\rho^2}{\alpha^2} - \left(1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) \right] \right\} + \\ + \alpha^2 \left\{ \frac{\rho^3}{\alpha^3} \cos \theta \left[\frac{1-2\cos 2\theta}{3} \ln \frac{\rho}{\alpha} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) + \frac{2\cos^2 \theta}{3} \right] \right\} + \dots$$

$$/5.9/ \quad U = \frac{1}{4} \left[\ln \frac{\rho^2}{\alpha^2} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta \right] + \alpha^2 \left[\frac{\rho^2}{\alpha^2} \frac{2 - \cos 2\theta}{6} \cos^2 \theta \right] + \dots$$

$$V = - \frac{\sin 2\theta}{4} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) + \alpha^2 \left(\frac{\rho^2}{\alpha^2} \frac{\sin 2\theta \cos^2 \theta}{6} \right) + \dots$$

$$\alpha \leq \rho \ll 1,$$

w których, przy ρ/α rzędu jedności, jedynie pierwsze wyrazy nie znikają wraz z $\alpha \rightarrow 0$. Pozostawiając tylko te nie znikające wyrazy otrzymujemy w najbliższym otoczeniu bardzo rzadko rozstawionych cylindrów graniczny obraz przepływu pokazany na rys. 6. Jak widać, w tym granicznym przypadku warunki brzegowe $U=V=0$ są spełnione na powierzchni cylindrów $\rho = \alpha$, wyznaczonych jednocześnie linią prądu $\Psi = 0$. Pokazane na rys.5 zniekształcenie tego granicznego obrazu jest efektem drugiego rzędu ze względu na mały parametr α / w rozwinięciach 5.9 występują jedynie parzyste potęgi α / i w interesujących nas przypadkach $\alpha \ll 1$ nie odgrywa istotnej roli.

Przykładowe przebiegi linii prądu dla skończonych, ale niezbyt dużych wartości α / $\alpha = 0,1\pi$ i $\alpha = 0,04\pi$ / pokazane są na rys.7. W miarę malenia α linia prądu $\Psi = \Psi^*$ coraz bardziej zbliża się do konturu $\rho = \alpha$, a opływ w otoczeniu cylindrów zbliża się do omówionego wyżej opływu granicznego dla $\alpha \rightarrow 0$.

Również i poza najbliższym otoczeniem cylindrów, z przekształconych wzorów /5.3/:

$$U - \bar{U}(0) = \frac{1}{4} \left[\ln(4\rho^2) + \frac{\eta \operatorname{sh} 2\eta}{\rho^2} \right] - \alpha^2 \frac{\cos 2\theta}{\rho^2},$$

$$/5.10/ \quad V = -\frac{\eta \sin 2\xi}{4\rho^2} + \alpha^2 \frac{\sin 2\theta}{4\rho^2},$$

$$\bar{U}(0) = -\frac{1}{2} \ln 2\alpha - \frac{1}{4},$$

po odrzuceniu wyrazów znikających wraz z $\alpha \rightarrow 0$, otrzymujemy graniczne rozkłady prędkości pokazane w płaszczyźnie

ξ, η na rys. 8, razem z rozkładem ciśnień /5.3/, który jest od α niezależny. Na rys. 9 pokazane są dla $\alpha \rightarrow 0$ rozkłady różnicy $U - \bar{U}(0)$ w przekrojach przechodzących przez cylindry: $\eta = 0$, $\xi = n\pi$ i między cylindrami $\xi = (n + 1/2)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Te graniczne rozwiązania /5.9/, /5.10/, bez członów znikających wraz z $\alpha \rightarrow 0$, mogą służyć jako dosyć dobre przybliżenia przepływu w najbliższej i nieco dalszej odległości od cylindrów, przy $\alpha \ll 1$, a błąd ich rośnie proporcjonalnie do α^2 .

Podobnie jak przy opływie wzdłużnym, rozkład prędkości $U(\xi, \eta)$ w miarę wzrostu odległości od rzędu prętów zdąża asymptotycznie do rozkładu liniowego

$$U(\xi, \eta) \rightarrow \bar{U}(\eta) \quad \eta \rightarrow \pm \infty,$$

/5.11/

$$\bar{U}(\eta) = |\eta| - \frac{1}{2} (\ln 2\alpha + \frac{1}{2})$$

/przepływ Conette'a/. Jak widać na rys. 9, odchylenia od tego rozkładu asymptotycznego są zauważalne jedynie w cienkiej warstwie otaczającej cylindry o grubości porównywalnej z odległością między cylindrami. Nie wnikając w strukturę przepływu w tej warstwie a zwracając główną uwagę na asymptotyczne własności poza nią, otrzymujemy z $\bar{U}(0) = -(\ln 2\alpha + 1/2)/2$ warunki zgodności po obu stronach rzędu cylindrów, które w zmien-

nych wymiarowych /por./4.5// zapiszemy w postaci

$$15.12/ \quad \bar{u} = \frac{2}{\lambda_x} \cdot l \bar{u}' \quad , \quad \frac{1}{\lambda_x} = \frac{1}{4\pi} \left(\ln \frac{l}{2a} - \ln \pi - \frac{1}{2} \right),$$

gdzie \bar{u} może być uważane za średnią prędkość cieczy w płaszczyźnie osi cylindrów, a \bar{u}' jest asymptotyczną wartością pochodnej u względem y poza warstwą.

6. Warunki zgodności po obu stronach rzędu cylindrów.

Na podstawie rozwiązań opisujących strukturę powolnego przepływu z wymianą ciepła w cienkiej warstwie otaczającej rząd rzadko rozmieszczonych cylindrów, możemy znaleźć asymptotyczne zależności wiążące parametry po obu stronach płaszczyzny rozmieszczenia osi cylindrów. Przy pominięciu grubości tej cienkiej warstwy potraktujemy płaszczyznę rozmieszczenia osi cylindrów jako powierzchnię nieciągłości, z obu stron której parametry przepływu winny spełniać warunki zgodności, wynikające z wymienionych wyżej zależności asymptotycznych. Różnymi po obu stronach /czyli nieciągłymi/ będą przede wszystkim ciśnienie, naprężenie styczne i strumienie ciepła, natomiast prędkość i temperatura będą mogły mieć tylko nieciągłe pochodne. Odrzucając małe wielkości rzędu α^2 - niewielkie, znikające z $\alpha \rightarrow 0$, nieciągłości prędkości i temperatury /por.p.4.2/ będziemy pomijać.

Opór cylindrów w przepływie skierowanym prostopadle do płaszczyzny rozmieszczenia ich osi jest zrównoważony powstającą po obu stronach różnicą ciśnień. W przepływie skierowanym stycznie opór jest zrównoważony naprężeniami tnącymi. Wykorzystując wyniki podane w pracach [9] i [10], oraz wyniki niniejszej pracy, możemy zestawić następujące wzory:

$$F_y = l(p_- - p_+) = \mu \lambda_y \bar{v}$$

$$16.1/ \quad F_x = l(\tau_{x+} - \tau_{x-}) = \mu \lambda_x \bar{u}, \quad \tau_{x\pm} = \mu \bar{u}'_{\pm},$$

$$F_z = l(\tau_{z+} - \tau_{z-}) = \mu \lambda_z \bar{w}, \quad \tau_{z\pm} = \mu \bar{w}'_{\pm}.$$

Wzory te możemy uzupełnić wzorami dla wymiany ciepła

$$16.2/ \quad Q = l(q_- - q_+) = \alpha \lambda_z (\bar{T} - T_0), \quad q_{\pm} = -\alpha \bar{T}'_{\pm}$$

Przez F_x , F_y , F_z i Q oznaczyliśmy tu składowe siły i ilość ciepła, będące efektem oddziaływania cieczy na jednostkę długości cylindra, a przez τ_x , τ_y i q składowe naprężenia tnących i normalną składową strumienia ciepła w cieczy poza cienką warstwę otaczającą cylindry. Wskaźnikami + i - oznaczone zostały wartości parametrów po dodatniej i ujemnej stronie osi y . Współczynniki oporu λ_x , λ_y , λ_z i wymiany ciepła λ_z można zapisać następująco

$$16.3/ \quad \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \left(\ln \frac{l}{2\pi a} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

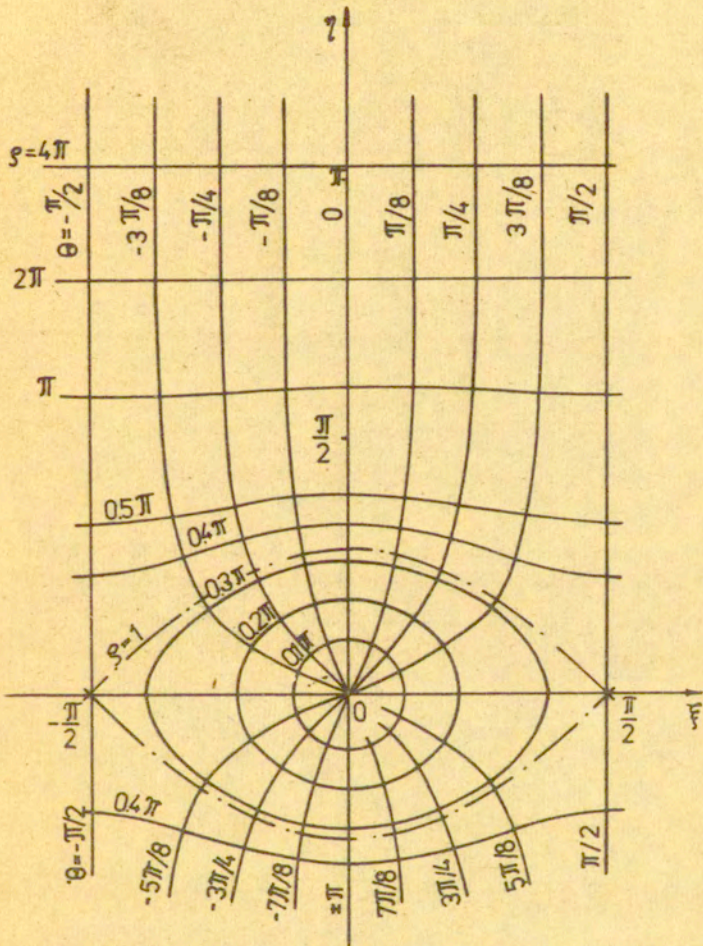
Wzory /6.1/ są oczywiście wzorami przybliżonymi, wyprowadzonymi dla ustalonych powolnych przepływów wokół bardzo rzadko rozmieszczonych cylindrów, a ponadto wyprowadzonymi dla przepływów symetrycznych względem płaszczyzny rozmieszczenia osi cylindrów. Na przykładzie $W_2(\xi, \eta)$ w p.4.2 pokazano

jednak, że efekt antysymetrii $\bar{w}_+' = \bar{w}_-'$ daje przesunięcie asymptot /nieciągłości/ pomijalnie małe w stosunku do poślizgu \bar{w} wywołanego opływem symetrycznym z warunkiem $\bar{w}_+' = -\bar{w}_-'$. Pomijając małe poprawki znikające wraz z $\alpha \rightarrow 0$, można więc stosowalność wzorów /6.1/ i /6.2/ rozszerzyć na asymptotyczne przypadki, przy dowolnych asymptotycznych wartościach pochodnych $\bar{u}_+' , \bar{w}_+' , \bar{T}_+'$ po obu stronach płaszczyzny $y=0$.

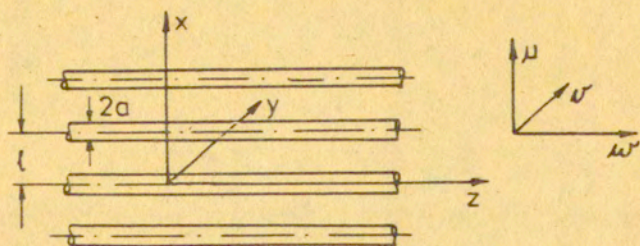
Abstrahując od struktury przepływu w cienkiej warstwie otaczającej pręty, znalezione przez nas warunki zgodności /6.1/, /6.2/ wiążą ze sobą wywołane oddziaływaniem siły lub strumienia ciepła z prędkością lub temperaturą i ich pochodnymi przy powierzchni wyznaczonej przez osie prętów. Warunki te mogą być wykorzystywane jako warunki zgodności przy przybliżonym rozpatrywaniu oddziaływania płynu z powierzchniowo rozmieszczonymi cylindrycznymi cienkimi prętami / $\alpha \ll 1$ /, jeśli ponadto odległość między prętami l jest dużo mniejsza i od krzywizny R powierzchni rozmieszczenia prętów / $l/R \ll 1$ / i od makroskopowego wymiaru przepływu L oraz jeśli odniesione do l liczby Reynoldsa i Pecleta są dostatecznie małe / $Re, Pe \ll 1$ /.

Literatura

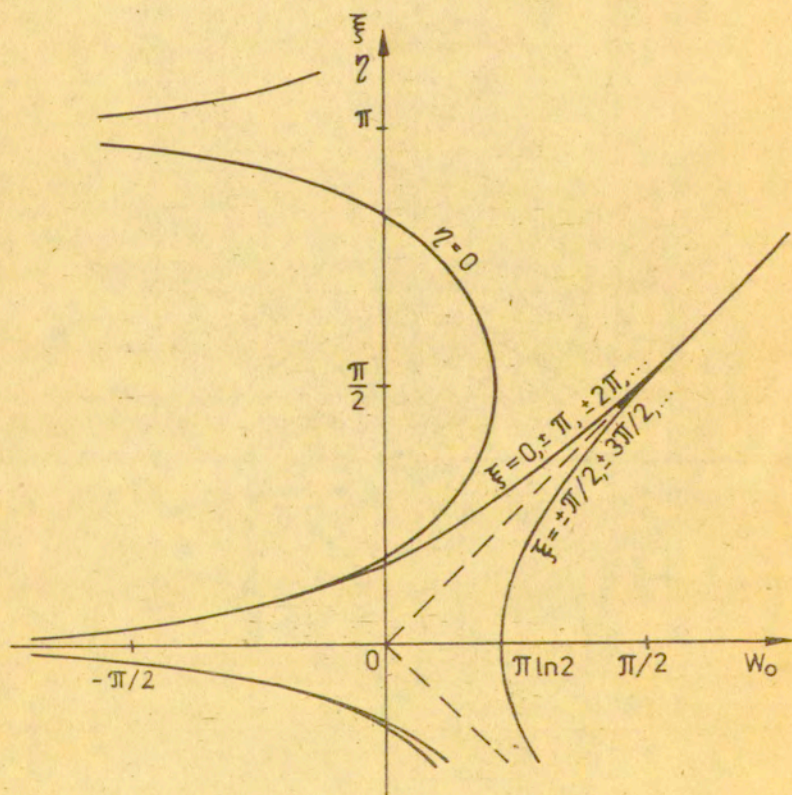
- [1] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, Zastosowania funkcji eliptycznych w fizyce i technice, Warszawa 1963.
- [2] L. PRANDTL, The attainment of a steady air stream in wind tunnels, translated as N.A.C.A. Tech. Mem. 726 /1933/.
- [3] A. R. COLLAR, The effect of a gauze on the velocity distribution in a uniform duct, Brit. Aero. Res. Coun., Rep. and Mem. 1867 /1939/.
- [4] G. I. TAYLOR, G. K. BATCHELOR, The effect of wire gauze on small disturbances, Quart. J. Mech. Appl. Math. 2 /1949/.
- [5] J. W. ELDER, Steady flow through non-uniform gauzes of arbitrary shape, J. Fluid Mech., vol. 5, p. 3 /1959/.
- [6] J. K. KOC, D. F. JAMES, Fluid flow around and through a screen, J. Fluid Mech., vol. 60, p. 3 /1973/.
- [7] В. И. ЗАМЕХОВ, Сопротивление сеток, Промышленная аэродинамика, Сборник статей, Б.Н.Т., НКАП 1944.
- [8] И. Л. ПОВЛ, Методы расчёта сопротивлений плоских решёток, Труды Л.П.И. №5 /1953/.
- [9] K. TAMADA, H. FUJIKAWA, The steady two-dimensional flow of viscous fluid at low Reynolds numbers passing through an infinite row of equal parallel circular cylinders, Quart. J. Mech. Appl. Math. 10 /1957/.
- [10] T. MIYAGI, Viscous flow at low Reynolds numbers past an infinite row of equal circular cylinders, J. Phys. Soc. Jap., vol. 13, no. 5 /1958/.
- [11] G. JAFFE, Über zweidimensionale Flüssigkeitsströmung zwischen parallelen ebenen Wänden, Ann. Phys. Leipzig 61 /1926/.



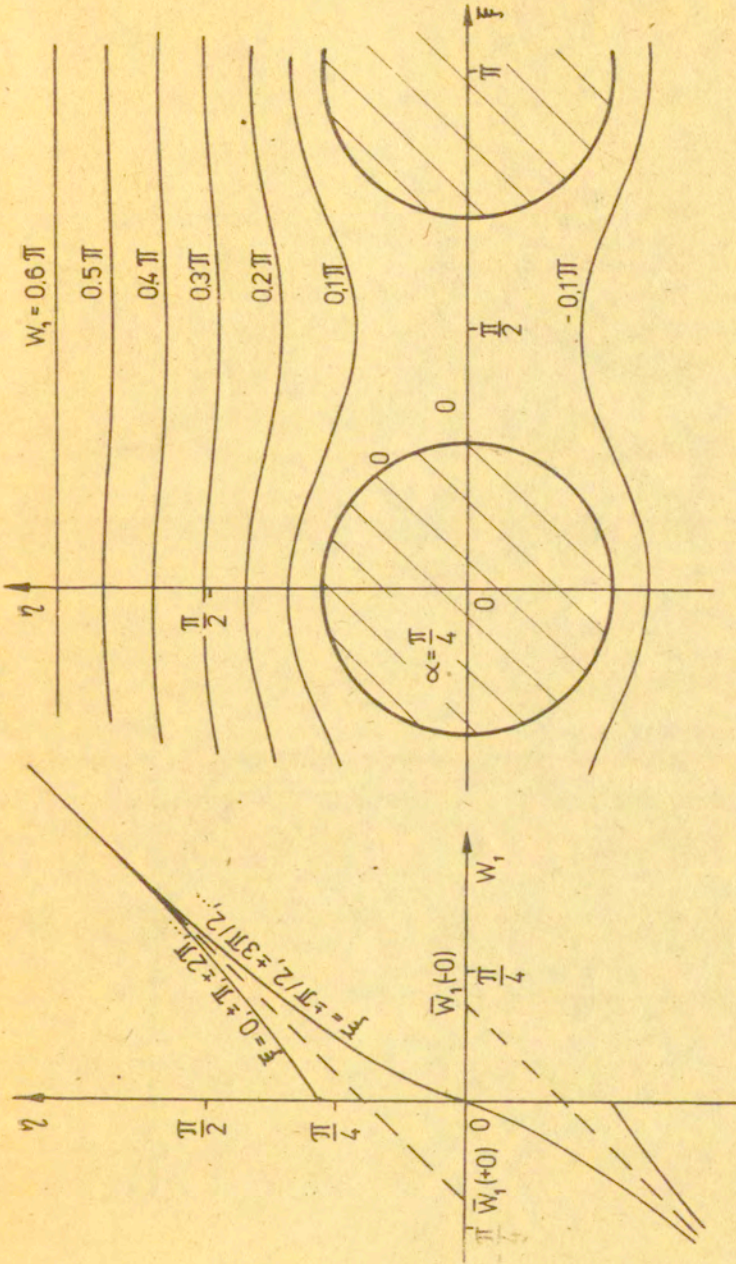
Rys.1



Rys.2

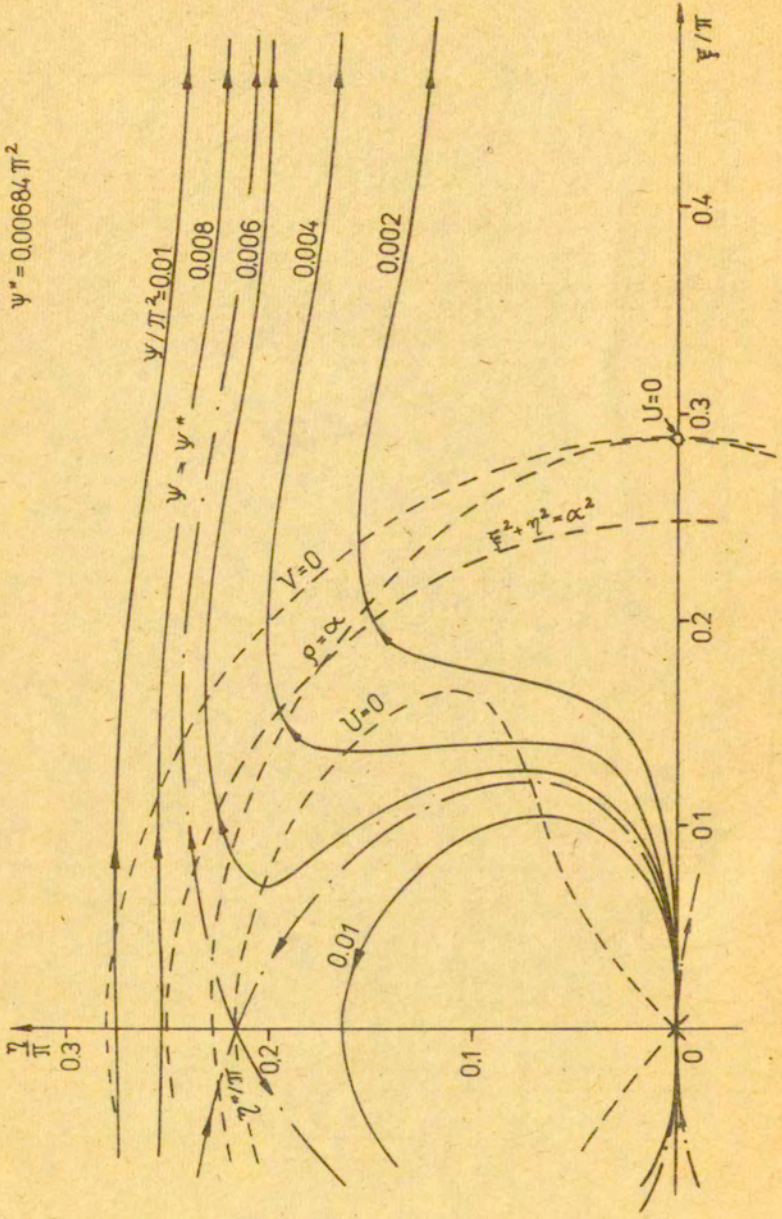


Rys.3

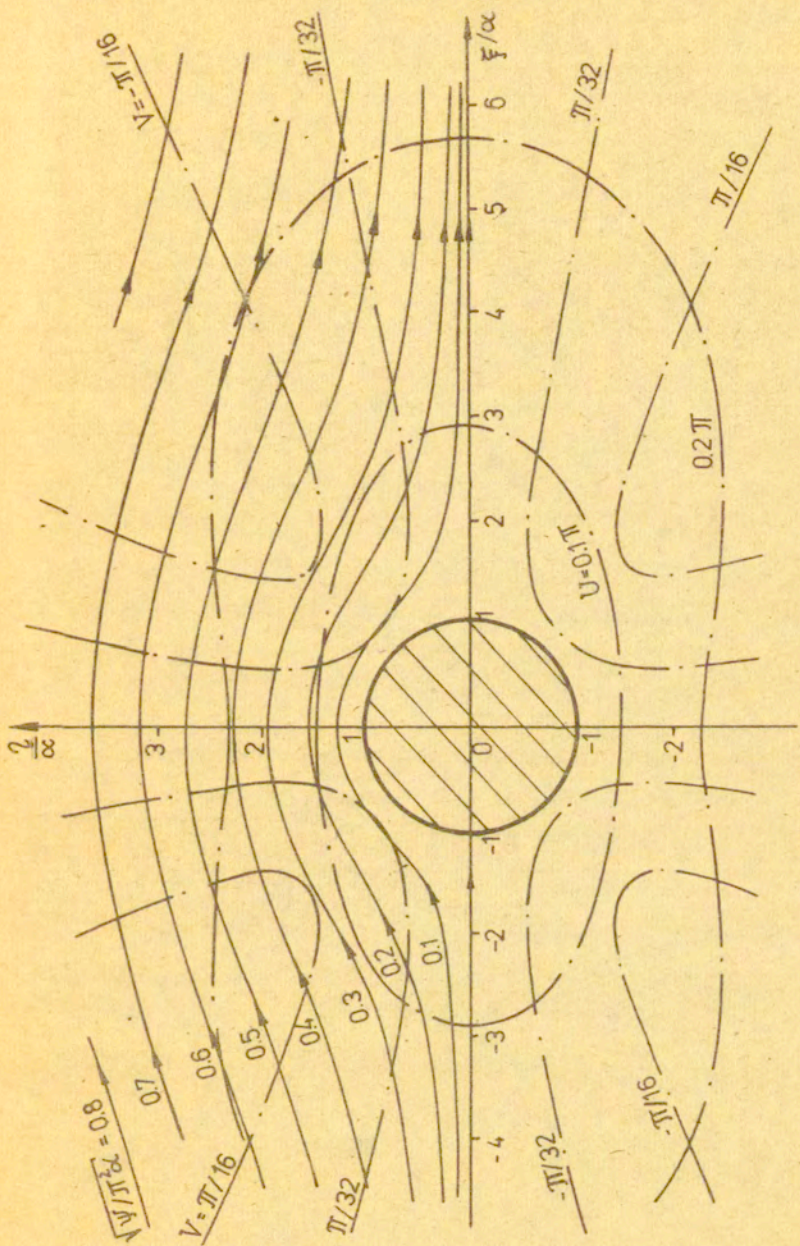


Rys.4

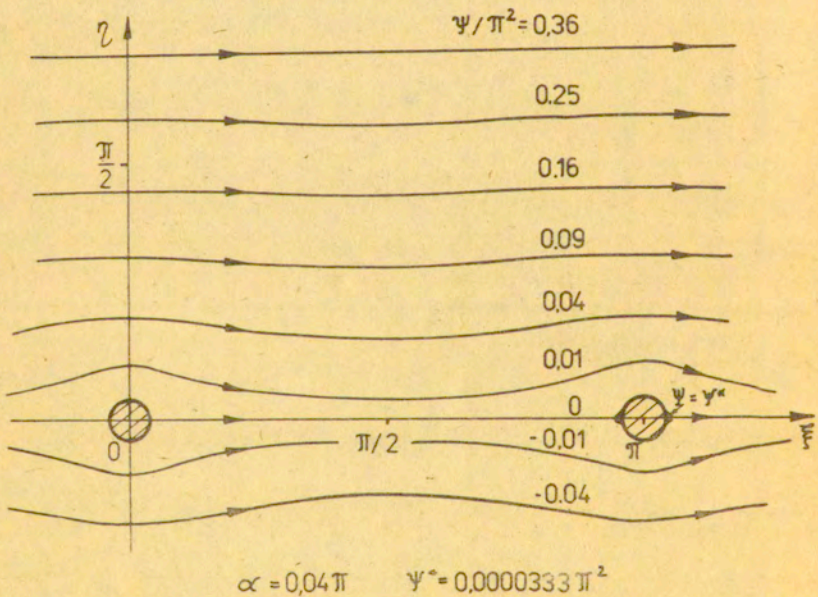
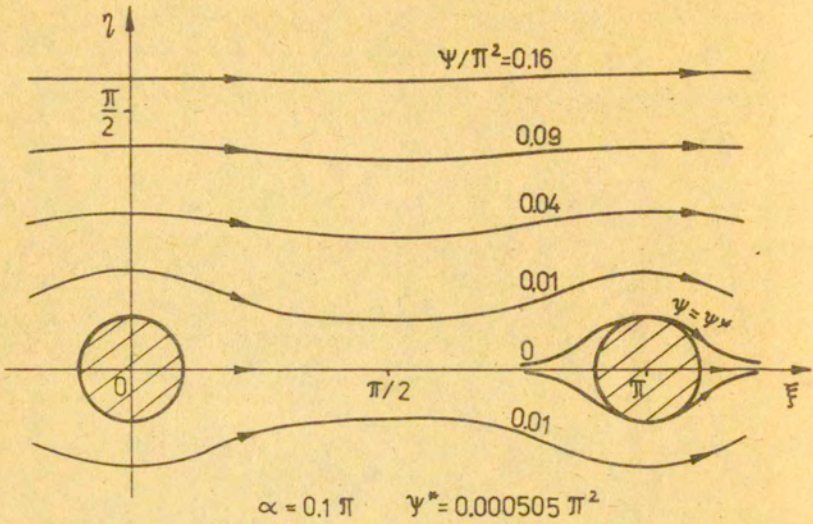
$\alpha = \pi/4$
 $\psi^* = 0.00684 \pi^2$



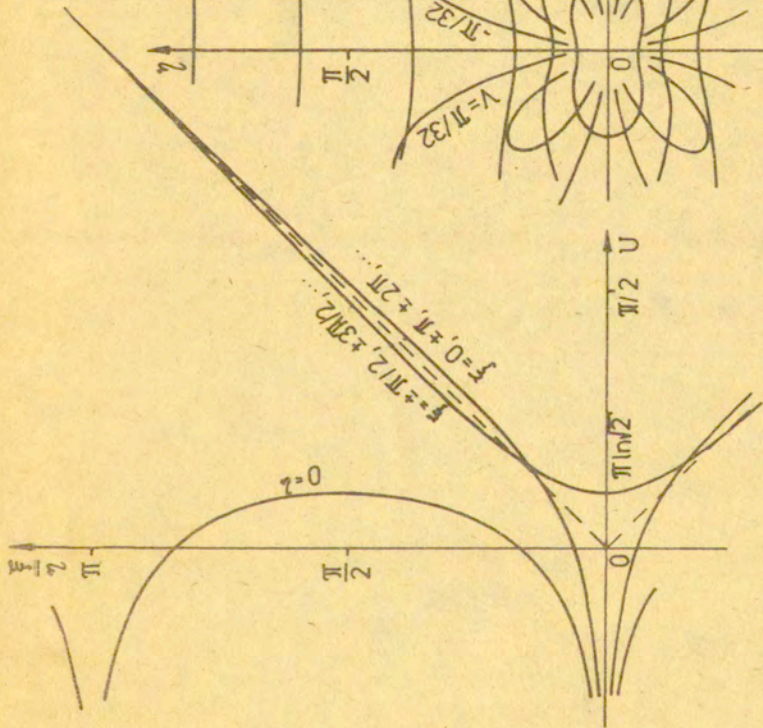
Rys.5



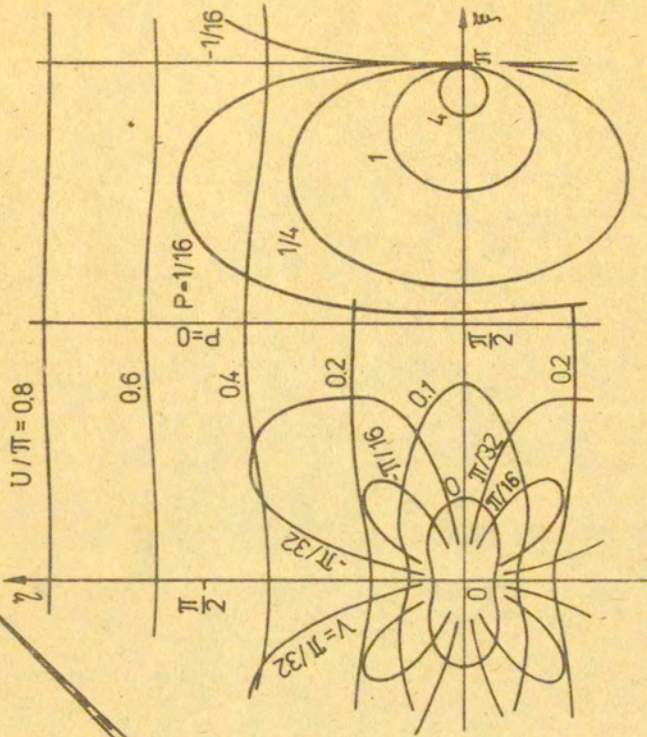
Rys. 6



Rys.7



Rys. 9



Rys. 8